「Lamé 方程式の解表示と Allen-Cahn 方程式への応用」

東京大学教養学部統合自然科学科
2023 年度卒業研究報告書

数理自然科学コース, 学生証番号 08-223006, 中島優稀
指導教員：宮本安人

2024 年 3 月

Lamé 方程式の解表示と Allen-Cahn 方程式への応用

東京大学 教養学部 統合自然科学科 数理自然科学コース

中島優稀 (学生証番号:08-223006)

概要

Lamé 方程式は正の整数 ℓ を含む二階の微分方程式である．その解は任意の ℓ に対して既知だが, 本研究では $\ell = 2, 3$ の解表示を洗練させるための計算を行った．$\ell = 2$ の場合は, $\ell = 1$ の場合の解表示に準じた形で表せた．$\ell = 3$ の場合は部分分数分解の可能性やスペクトルなどの重要な性質を見出した．

Allen-Cahn 方程式は反応拡散方程式の 1 つである．本研究では Allen-Cahn 方程式のディリクレ問題を考え, その n モード解に対する線形化固有値問題の固有値と $\ell = 2$ の場合の Lamé 方程式に周期境界条件を課した固有値問題の固有値を対応づけた．

目次

1　概要と主定理

1.1　Lamé 方程式

Lamé 方程式とは, 次のような二階の常微分方程式である.

$$\psi''(x) + \{A + B\wp(x)\}\psi(x) = 0 \tag{1}$$

ただし, A, B は定数, $\wp(x)$ はワイエルシュトラスの $\wp$ 関数である. Lamé 方程式は, 1837 年の Gabriel Lamé の論文 [1] において, Laplace 方程式を楕円座標で変数分離することで導入された. また, Laplace 方程式を円錐座標で変数分離しても Lamé 方程式が現れることが知られている [2]. さて, 本論文では, (1) 式の特別な場合である次の微分方程式を考える.

$$\psi''(x) + \{A - \ell(\ell+1)k^2\mathrm{sn}^2 x\}\psi(x) = 0 \tag{2}$$

ただし, ℓ は正の整数, k は $0 \leq k < 1$ を満たす実数とする. 任意の ℓ に対して, (2) 式の解は次の形で書けることが知られている [3].

$$\psi(x) = \Theta(x)\exp\left(\pm i\int_0^x \frac{\sqrt{-Q}}{\Theta(\theta)}d\theta\right)$$

本論文では, $\ell = 2, 3$ の場合について詳しく論じる.

1.2　$\ell = 1$ の場合

$\ell = 1$ の場合では, $A = \gamma + 1 + k^2$ とした次の Lamé 方程式を考える.

$$\psi''(x) + (\gamma + 1 + k^2 - 2k^2\mathrm{sn}^2 x)\psi(x) = 0 \tag{3}$$

(3) 式の解は次のようになることが知られている [3].

$$\psi(x) = \sqrt{\gamma + k^2\mathrm{sn}^2 x}\exp\left(\pm i\int_0^x \frac{\sqrt{\gamma(\gamma+1)(\gamma+k^2)}}{\gamma + k^2\mathrm{sn}^2\theta}d\theta\right) \tag{4}$$

ここで, ω, h を次のように定義する.

$$\omega = \sqrt{\gamma(\gamma+1)(\gamma+k^2)}$$
$$h = h(x) = \int_0^x \frac{d\theta}{\gamma + k^2\mathrm{sn}^2\theta}$$

さらに, $\psi_\pm(x)$ を次のように定義する.

$$\psi_+(x) = \sqrt{\gamma + k^2\mathrm{sn}^2 x}\,e^{i\omega h}$$
$$\psi_-(x) = \sqrt{\gamma + k^2\mathrm{sn}^2 x}\,e^{-i\omega h}$$

これらは Lamé 方程式の独立な解となるので, $\zeta_\pm \in \mathbb{C}$ として, 一般解は次のようになる.

$$\psi(x) = \zeta_+\psi_+(x) + \zeta_-\psi_-(x)$$

1.3　$\ell = 2$ の場合

$\ell = 2$ の場合では, $A = \lambda + 1 + k^2$ とした次の Lamé 方程式を考える.

$$\psi''(x) + (\lambda + 1 + k^2 - 6k^2\mathrm{sn}^2 x)\psi(x) = 0 \tag{5}$$

(5) 式の解は次のようになることが知られている [3].

$$\begin{aligned}\psi(x) = &\sqrt{9k^4\mathrm{sn}^4 x - (9k^2 + 9 - 3\lambda)k^2\mathrm{sn}^2 x + 9k^2 - 3(1 + k^2)\lambda + \lambda^2} \\ &\exp\left(\pm i \int_0^x \frac{\sqrt{\lambda(\lambda - 3)(\lambda - 3k^2)\{\lambda^2 - 2(1 + k^2)\lambda - 3(1 - k^2)^2\}}}{9k^4\mathrm{sn}^4\theta - (9k^2 + 9 - 3\lambda)k^2\mathrm{sn}^2\theta + 9k^2 - 3(1 + k^2)\lambda + \lambda^2} d\theta\right)\end{aligned} \tag{6}$$

本論文の目的の 1 つは, $\ell = 2$ の場合の Lamé 方程式の解における被積分関数 $\dfrac{\sqrt{-Q}}{\Theta(x)}$ を部分分数分解し, 解表示をより洗練させることである. その結果, 被積分関数 $\dfrac{\sqrt{-Q}}{\Theta(x)}$ は次のように部分分数分解できることが分かった.

$$\frac{\sqrt{-Q}}{\Theta(x)} = \frac{\sqrt{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + k^2)}}{\alpha + k^2\mathrm{sn}^2 x} - \frac{\sqrt{\beta(\beta + 1)(\beta + k^2)}}{\beta + k^2\mathrm{sn}^2 x}$$

ただし, α, β は $\Theta(x)$ を $3k^2\mathrm{sn}^2 x$ の 2 次式とみなしたときの根の定数倍である. しかも, その 2 次式の判別式は分子の $-Q$ の因数である $\lambda^2 - 2(1 + k^2)\lambda - 3(1 - k^2)^2$ の定数倍となっている. この部分分数分解の結果から, $\ell = 2$ の場合の Lamé 方程式の解 (6) は次のように書き直せる.

$$\psi(x) = \sqrt{(\alpha + k^2\mathrm{sn}^2 x)(\beta + k^2\mathrm{sn}^2 x)}\exp\left\{\pm i \int_0^x \left(\frac{\sqrt{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + k^2)}}{\alpha + k^2\mathrm{sn}^2\theta} - \frac{\sqrt{\beta(\beta + 1)(\beta + k^2)}}{\beta + k^2\mathrm{sn}^2\theta} d\theta\right)\right\} \tag{7}$$

ただし, この解表示 (7) と元の解表示 (6) は定数倍を無視している. $\ell = 2$ の場合の Lamé 方程式の解表示 (7) と $\ell = 1$ の場合の Lamé 方程式の解表示 (4) を比較すると非常に類似した形となっていることが分かる. したがって, $\ell = 2$ の場合の Lamé 方程式の解における被積分関数 $\dfrac{\sqrt{-Q}}{\Theta(x)}$ の部分分数分解は意義があったと言えよう.

定理 1.1

$\Theta(x)$ を $3k^2\mathrm{sn}^2 x$ の 2 次式とみなしたときの根を $\lambda_\pm$ とする.

$$\lambda_\pm = \frac{3k^2 + 3 - \lambda \pm \sqrt{-3d}}{2}, \quad d = \lambda^2 - 2(1 + k^2)\lambda - 3(1 - k^2)^2$$

$\alpha = -\dfrac{\lambda_-}{3}$, $\beta = -\dfrac{\lambda_+}{3}$ とすると, $\dfrac{\sqrt{-Q}}{\Theta(x)}$ は次のように部分分数分解できる.

$$\frac{\sqrt{-Q}}{\Theta(x)} = \frac{\sqrt{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + k^2)}}{\alpha + k^2\mathrm{sn}^2 x} - \frac{\sqrt{\beta(\beta + 1)(\beta + k^2)}}{\beta + k^2\mathrm{sn}^2 x}$$

1.4　$\ell = 3$ の場合

$\ell = 3$ の場合では, ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数を用いた次の Lamé 方程式を考える.

$$\psi''(x) + \{\lambda - 12\wp(x+\omega_3)\}\psi(x) = 0$$

ただし, $\omega_3 = iK'(k) = K(\sqrt{1-k^2})$ であり, 次が成り立つ.

$$\wp(x+\omega_3) = k^2\mathrm{sn}^2 x - \frac{1+k^2}{3} = k^2\mathrm{sn}^2 x + e_3$$

$\ell = 3$ の場合も $\ell = 2$ の場合と同様に, $\dfrac{\sqrt{-Q}}{\Theta(x)}$ を部分分数分解したい. ここで, $\Theta(x)$, $-Q$ は次のとおり.

$$\begin{aligned}\Theta(x) &= 225\wp^3 + 45\lambda\wp^2 + 6\left(\lambda^2 - \frac{75}{8}g_2\right)\wp + \lambda^3 - 15g_2\lambda - \frac{225}{4}g_3\\ -Q &= \lambda(\lambda^2 + 6e_1\lambda + 45e_1^2 - 15g_2)(\lambda^2 + 6e_2\lambda + 45e_2^2 - 15g_2)(\lambda^2 + 6e_3\lambda + 45e_3^2 - 15g_2)\end{aligned}$$

ただし, $e_1 = \dfrac{2-k^2}{3}$, $e_2 = \dfrac{2k^2-1}{3}$, $e_3 = -\dfrac{1+k^2}{3}$ として, g_2, g_3, $\wp$ は次のとおり.

$$\begin{aligned}g_2 &= -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1)\\ g_3 &= 4e_1e_2e_3\\ \wp &= -\frac{1+k^2}{3} + k^2\mathrm{sn}^2 x = e_3 + k^2\mathrm{sn}^2 x\end{aligned}$$

$\Theta(x)$ における $\wp^2$ の項を消去するために, 次のような変数変換を考える.

$$\wp = p - \frac{\lambda}{15}$$

この変数変換を施すと, $\Theta(x)$ は次のように書き直せる.

$$\Xi = 225p^3 + \left(3\lambda^2 - \frac{225}{4}g_2\right)p + \frac{11}{15}\lambda^3 - \frac{45}{4}g_2\lambda - \frac{225}{4}g_3 \tag{8}$$

この多項式の判別式 D は次のようになる.

$$\begin{aligned}D &= -4\cdot 225\left(3\lambda^2 - \frac{225}{4}g_2\right)^3 - 27\cdot 225^2\left(\frac{11}{15}\lambda^3 - \frac{45}{4}g_2\lambda - \frac{225}{4}g_3\right)^2\\ &= -15^5\left(\lambda^6 - \frac{63}{2}g_2\lambda^4 - \frac{297}{2}g_3\lambda^3 + \frac{4185}{16}g_2^2\lambda^2 + \frac{18225}{8}g_2g_3\lambda - \frac{3375}{16}g_2^3 + \frac{91125}{16}g_3^2\right)\end{aligned}$$

これが分子の $-Q$ の因数である $\displaystyle\prod_{j=1}^{3}(\lambda^2 + 6e_j\lambda + 45e_j^2 - 15g_2)$ の定数倍に一致するという性質を確認した.

命題 1.2

次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}&(\lambda^2 + 6e_1\lambda + 45e_1^2 - 15g_2)(\lambda^2 + 6e_2\lambda + 45e_2^2 - 15g_2)(\lambda^2 + 6e_3\lambda + 45e_3^2 - 15g_2)\\ &= \lambda^6 - \frac{63}{2}g_2\lambda^4 - \frac{297}{2}g_3\lambda^3 + \frac{4185}{16}g_2^2\lambda^2 + \frac{18225}{8}g_2g_3\lambda - \frac{3375}{16}g_2^3 + \frac{91125}{16}g_3^2\end{aligned}$$

次に, $-Q$ の根の大小を調べたい. $\lambda_{j\pm}$ $(j = 1, 2, 3)$ を次の方程式の解とする.

$$\lambda^2 + 6e_j\lambda + 45e_j^2 - 15g_2 = 0$$

すなわち, $\lambda_{j\pm}$ は次のようになる.

$$\lambda_{j\pm} = -3e_j \pm \sqrt{-36e_j^2 + 15g_2}$$

$-Q$ の 7 つの根の大小関係は次のようになることを確認した.

$$\lambda_{1-} < \lambda_{2-} < \lambda_{3-} < 0 < \lambda_{1+} < \lambda_{2+} < \lambda_{3+}$$

命題 1.3

$0 < k < 1$ とする. また, $\lambda_{j\pm}$ $(j = 1, 2, 3)$ を次のように定義する.

$$\lambda_{j\pm} = -3e_j \pm \sqrt{-36e_j^2 + 15g_2}$$

ここで, e_1, e_2, e_3, g_2 は次のとおり.

$$\begin{aligned} &e_1 = \frac{2-k^2}{3}, \quad e_2 = \frac{2k^2-1}{3}, \quad e_3 = -\frac{1+k^2}{3} \\ &g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) \end{aligned}$$

このとき, $\lambda_{j\pm}$ の大小関係は次のようになる.

$$\lambda_{1-} < \lambda_{2-} < \lambda_{3-} < 0 < \lambda_{1+} < \lambda_{2+} < \lambda_{3+}$$

ゆえに, $\ell = 3$ の場合の Lamé 方程式に境界条件を課して固有値を考える場合, 固有値は $-Q \geq 0$ となる次の範囲に分布する. また, $Q = 0$ のときは固有値 λ に対応する固有関数が Lamé 関数である特殊なスペクトルになる.

$$[\lambda_{1-}, \lambda_{2-}] \cup [\lambda_{3-}, 0] \cup [\lambda_{1+}, \lambda_{2+}] \cup [\lambda_{3+}, \infty)$$

また, $D > 0$ となるのは λ が次を満たすときである.

$$\lambda \in (-\infty, \lambda_{1-}) \cup (\lambda_{2-}, \lambda_{3-}) \cup (\lambda_{1+}\lambda_{2+}) \cup (\lambda_{3+}, \infty)$$

ここで, (8) が次のように因数分解できるとしよう.

$$\Theta(x) = 225(p+\alpha)(p+\beta)(p+\gamma)$$

さて, $D > 0$ の範囲では, $\dfrac{\sqrt{-Q}}{\Theta(x)}$ は実数範囲で次のように部分分数分解できるとする.

$$\frac{\sqrt{-Q}}{\Theta(x)} = \frac{C_0(\alpha)}{p+\alpha} + \frac{C_1(\beta)}{p+\beta} + \frac{C_2(\gamma)}{p+\gamma}$$

このとき, C_0, C_1, C_2 は次のように書ける.

$$C_0(\alpha) = \frac{-\sqrt{-Q}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)}, \quad C_1(\beta) = \frac{-\sqrt{-Q}}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}, \quad C_2(\gamma) = \frac{-\sqrt{-Q}}{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$$

$-Q(\lambda) = -15^{-5}\lambda D$ および $D = 225(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$ より, C_0, C_1, C_2 をそれぞれ α, β, γ の 3 文字で表すことができる. 目標は $C_0(\alpha)$ を α だけで, $C_1(\beta)$ を β だけで, $C_2(\gamma)$ を γ だけで表すことであるが, 3 次式 (8) の根を具体的に求めることができなかったため達成できなかった. しかし, 部分分数分解の可能性やスペクトルについて明らかにできた点は意義があったと言えよう.

1.5 Allen-Cahn 方程式

Allen-Cahn 方程式とは, 次のような二階の常微分方程式である.

$$\varepsilon^2 u'' + u - u^3 = 0$$

ただし, ε は十分小さい正のパラメータとする. 本論文では, 次のディリクレ問題を考える [4].

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u'' + u - u^3 = 0 \quad (0 < x < 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

この n モード解 u および ε^2 は次のように書ける. ただし, $K = K(k)$ は第一種完全楕円積分である.

$$u(x) = \sqrt{\frac{2k^2}{1+k^2}}\mathrm{sn}(2nKx), \quad \varepsilon^2 = \frac{1}{4n^2(1+k^2)K^2} \tag{10}$$

方程式 (9) を線形化した後, (10) を代入して, 変数変換 $2nKx = y$ を施すと, 次のようになる.

$$\begin{cases} -\phi''(y) + (-2 - 2k^2 + 6k^2\mathrm{sn}^2 y)\phi(y) = (1+k^2)(\mu - 1)\phi(y) \\ \phi(0) = \phi(2nK) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

この Allen-Cahn 方程式の線形化方程式 (11) は, $\ell = 2$ の場合の Lamé 方程式と同じ形をしていることが分かる [5]. そこで, $\ell = 2$ の場合の Lamé 方程式に周期境界条件を課した次の固有値問題を考える.

$$\begin{cases} -\psi''(y) + (-2 - 2k^2 + 6k^2\mathrm{sn}^2 y)\psi(y) = \lambda\psi(y) \\ \psi(y + 2nK) = \psi(y) \end{cases}$$

本論文の目的の 1 つは, ディリクレ境界条件を課した Allen-Cahn 方程式の n モード解 u に対する線形化固有値問題の固有値 $\mu_j^{(n)}$ と $\ell = 2$ の場合の Lamé 方程式の固有値問題の固有値 $\lambda_j^{(n)}$ を対応づけることである.

定理 1.4

次のディリクレ問題について考える.

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u'' + u - u^3 = 0 \quad (0 < x < 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

この n モード解 u に対する次の線形化固有値問題の固有値を小さい順に $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \mu_3^{(n)}, \ldots$ とする.

$$\begin{cases} -\phi''(y) + (-2 - 2k^2 + 6k^2\mathrm{sn}^2 y)\phi(y) = (1+k^2)(\mu - 1)\phi(y) \\ \phi(0) = \phi(2nK) = 0 \end{cases}$$

また, 次の固有値問題の固有値を小さい順に $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \lambda_3^{(n)}, \ldots$ とする.

$$\begin{cases} -\psi''(y) + (-2 - 2k^2 + 6k^2\mathrm{sn}^2 y)\psi(y) = \lambda\psi(y) \\ \psi(y + 2nK) = \psi(y) \end{cases}$$

このとき, これらの固有値の間には次の関係が成り立つ.

$$\begin{cases} \mu_j^{(n)} = \dfrac{\lambda_{2j}^{(2n)}}{1+k^2} + 1 \quad (j \neq 2n) \\ \mu_{2n}^{(n)} = \dfrac{\lambda_{4n-1}^{(2n)}}{1+k^2} + 1 \quad (j = 2n) \end{cases}$$

2　定理 1.1 の証明

定理 1.1

$\Theta(x)$ を $3k^2\mathrm{sn}^2x$ の 2 次式とみなしたときの根を $\lambda_\pm$ とする．

$$\lambda_\pm = \frac{3k^2+3-\lambda\pm\sqrt{-3d}}{2}, \quad d = \lambda^2-2(1+k^2)\lambda-3(1-k^2)^2$$

$\alpha = -\dfrac{\lambda_-}{3}$, $\beta = -\dfrac{\lambda_+}{3}$ とすると，$\dfrac{\sqrt{-Q}}{\Theta(x)}$ は次のように部分分数分解できる．

$$\frac{\sqrt{-Q}}{\Theta(x)} = \frac{\sqrt{\alpha(\alpha+1)(\alpha+k^2)}}{\alpha+k^2\mathrm{sn}^2x} - \frac{\sqrt{\beta(\beta+1)(\beta+k^2)}}{\beta+k^2\mathrm{sn}^2x}$$

Proof. $\Theta(x)$ を $3k^2\mathrm{sn}^2x$ に関する 2 次式とみる．

$$\Theta(X) = X^2-(3k^2+3-\lambda)X+9k^2-3(1+k^2)\lambda+\lambda^2$$

その判別式 D は次のようになる．

$$\begin{aligned} D &= (3k^2+3-\lambda)^2-4\{9k^2-3(1+k^2)\lambda+\lambda^2\} \\ &= -3\{\lambda^2-2(1+k^2)\lambda-3(1-k^2)^2\} \end{aligned}$$

これは $-Q$ の因数の定数倍になっていることが分かる．そこで, d を次のように定義する．

$$d = \lambda^2-2(1+k^2)\lambda-3(1-k^2)^2$$

このとき, $\Theta(X)$ の根 $\lambda_\pm$ は次のようになる．

$$\lambda_\pm = \frac{3k^2+3-\lambda\pm\sqrt{-3d}}{2}$$

ゆえに, $\dfrac{\sqrt{-Q}}{\Theta(x)}$ は次のように書ける．

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{-Q}}{\Theta(x)} &= \frac{\sqrt{\lambda(\lambda-3)(\lambda-3k^2)d}}{(3k^2\mathrm{sn}^2x-\lambda_-)(3k^2\mathrm{sn}^2x-\lambda_+)} \\ &= \sqrt{\lambda(\lambda-3)(\lambda-3k^2)d}\cdot\frac{1}{\sqrt{-3d}}\left(\frac{1}{3k^2\mathrm{sn}^2x-\lambda_-}-\frac{1}{3k^2\mathrm{sn}^2x-\lambda_+}\right) \\ &= \sqrt{\frac{-\lambda(\lambda-3)(\lambda-3k^2)}{3}}\left(\frac{1}{-\lambda_-+3k^2\mathrm{sn}^2x}-\frac{1}{-\lambda_++3k^2\mathrm{sn}^2x}\right) \\ &= \sqrt{\frac{-\lambda(\lambda-3)(\lambda-3k^2)}{27}}\left(\frac{1}{\alpha+k^2\mathrm{sn}^2x}-\frac{1}{\beta+k^2\mathrm{sn}^2x}\right) \end{aligned}$$

ここで, α, β は次のとおり．

$$\alpha = -\frac{\lambda_-}{3}, \quad \beta = -\frac{\lambda_+}{3}$$

最後に, $\sqrt{\dfrac{-\lambda(\lambda-3)(\lambda-3k^2)}{27}}$ を α で書き換えることを考える. α の定義から次が成り立つ.

$$\alpha = \frac{-3k^2-3+\lambda+\sqrt{-3d}}{6}$$

両辺を 6 倍して式を整理すると, 次が成り立つ.

$$\sqrt{-3d} = -\lambda + 3(k^2+1) + 6\alpha$$

両辺を 2 乗し, $d = \lambda^2 - 2(1+k^2)\lambda - 3(1-k^2)^2$ を代入して整理すると, 次のようになる.

$$\lambda^2 - 3(1+k^2+\alpha)\lambda + 9(\alpha+1)(\alpha+k^2) = 0 \tag{12}$$

これを次のように式変形する.

$$-(\lambda-3)(\lambda-3k^2) = 9\alpha^2 - 3\alpha\lambda + 9(1+k^2)\alpha$$

両辺に λ をかけて整理すると, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
-\lambda(\lambda-3)(\lambda-3k^2) &= \lambda\{9\alpha^2 - 3\alpha\lambda + 9(1+k^2)\alpha\} \\
&= -3\alpha\{\lambda^2 - 3(1+\alpha+k^2)\lambda\} \\
&= -3\alpha\{-9(\alpha+1)(\alpha+k^2)\} \quad (\because (12)) \\
&= 27\alpha(\alpha+1)(\alpha+k^2)
\end{aligned}$$

両辺を 27 で割って正の平方根をとると, 次のようになる.

$$\sqrt{\frac{-\lambda(\lambda-3)(\lambda-3k^2)}{27}} = \sqrt{\alpha(\alpha+1)(\alpha+k^2)} \tag{13}$$

したがって, $\sqrt{\dfrac{-\lambda(\lambda-3)(\lambda-3k^2)}{27}}$ を α で書き換えることができた. 同様に, β で書き直すと次のとおり.

$$\sqrt{\frac{-\lambda(\lambda-3)(\lambda-3k^2)}{27}} = \sqrt{\beta(\beta+1)(\beta+k^2)} \tag{14}$$

(13) と (14) を用いると, $\dfrac{\sqrt{-Q}}{\Theta(x)}$ は次のように式変形できる.

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{-Q}}{\Theta(x)} &= \sqrt{\frac{-\lambda(\lambda-3)(\lambda-3k^2)}{27}} \cdot \frac{1}{\alpha+k^2\mathrm{sn}^2 x} - \sqrt{\frac{-\lambda(\lambda-3)(\lambda-3k^2)}{27}} \cdot \frac{1}{\beta+k^2\mathrm{sn}^2 x} \\
&= \frac{\sqrt{\alpha(\alpha+1)(\alpha+k^2)}}{\alpha+k^2\mathrm{sn}^2 x} - \frac{\sqrt{\beta(\beta+1)(\beta+k^2)}}{\beta+k^2\mathrm{sn}^2 x}
\end{aligned}$$

よって, $\ell = 2$ の場合の $\dfrac{\sqrt{-Q}}{\Theta(x)}$ を部分分数分解することで, $\ell = 1$ の場合の $\dfrac{\sqrt{-Q}}{\Theta(x)}$ に準じた形で書けた. □

3　命題 1.2 の証明

命題 1.2

次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}&(\lambda^2+6e_1\lambda+45e_1^2-15g_2)(\lambda^2+6e_2\lambda+45e_2^2-15g_2)(\lambda^2+6e_3\lambda+45e_3^2-15g_2)\\&=\lambda^6-\frac{63}{2}g_2\lambda^4-\frac{297}{2}g_3\lambda^3+\frac{4185}{16}g_2^2\lambda^2+\frac{18225}{8}g_2g_3\lambda-\frac{3375}{16}g_2^3+\frac{91125}{16}g_3^2\end{aligned}$$

Proof. 各次数ごとに係数を比較する. $e_1+e_2+e_3=0$, $e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1=-\dfrac{g_2}{4}$, $e_1e_2e_3=\dfrac{g_3}{4}$ に注意する.

1. λ^6 の係数については明らか.
2. λ^5 の係数を計算する.
$$6e_1+6e_2+6e_3=6(e_1+e_2+e_3)=6\cdot 0=0$$
3. λ^4 の係数を計算する前に, $e_1^2+e_2^2+e_3^2$ を計算しておこう.
$$e_1^2+e_2^2+e_3^2=(e_1+e_2+e_3)^2-2(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)=0-2\left(-\frac{g_2}{4}\right)=\frac{g_2}{2}$$
さて, λ^4 の係数に戻って計算しよう.
$$\begin{aligned}&45e_1^2-15g_2+45e_2^2-15g_2+45e_3^2-15g_2+36e_1e_2+36e_2e_3+36e_3e_1\\&=45(e_1^2+e_2^2+e_3^2-g_2)+36(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)\\&=45\{(e_1+e_2+e_3)^2-2(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)-g_2\}+36(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)\\&=45\left\{0^2-2\left(-\frac{g_2}{4}\right)-g_2\right\}+36\left(-\frac{g_2}{4}\right)\\&=-\frac{63}{2}g_2\end{aligned}$$
4. λ^3 の係数を計算する前に, $e_1e_2^2+e_1^2e_2+e_2e_3^2+e_2^2e_3+e_1e_3^2+e_1^2e_3$ を計算しておこう.
$$\begin{aligned}e_1e_2^2+e_1^2e_2+e_2e_3^2+e_2^2e_3+e_1e_3^2+e_1^2e_3&=(e_1+e_2+e_3)(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)-3e_1e_2e_3\\&=0-3\left(\frac{g_3}{4}\right)\\&=-\frac{3}{4}g_3\end{aligned}$$
さて, λ^3 の係数に戻って計算しよう.
$$\begin{aligned}&216e_1e_2e_3+6e_1(45e_2^2-15g_2)+6e_1(45e_3^2-15g_2)+6e_2(45e_1^2-15g_2)\\&\quad+6e_2(45e_3^2-15g_2)+6e_3(45e_1^2-15g_2)+6e_3(45e_2^2-15g_2)\\&=216e_1e_2e_3+270(e_1e_2^2+e_1^2e_2+e_2e_3^2+e_2^2e_3+e_3e_1^2+e_3^2e_1)-180(e_1+e_2+e_3)g_2\\&=216\cdot\frac{g_3}{4}+270\left(-\frac{3}{4}g_3\right)-0\\&=-\frac{297}{2}g_3\end{aligned}$$

5. λ^2 の係数を計算する前に, $e_1^2e_2^2+e_2^2e_3^2+e_3^2e_1^2$ を計算しておこう.

$$\begin{aligned} e_1^2e_2^2+e_2^2e_3^2+e_3^2e_1^2 &= (e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)^2-2e_1e_2^2e_3-2e_1e_2e_3^2-2e_1^2e_2e_3 \\ &= (e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)^2-2e_1e_2e_3(e_1+e_2+e_3) \\ &= \left(-\frac{g_2}{4}\right)^2-0 \\ &= \frac{g_2^2}{16} \end{aligned}$$

さて, λ^2 の係数に戻って計算しよう.

$$\begin{aligned} &(45e_1^2-15g_2)(45e_2^2-15g_2)+(45e_2^2-15g_2)(45e_3^2-15g_2)+(45e_3^2-15g_2)(45e_1^2-15g_2) \\ &\quad +36e_1e_2(45e_3^2-15g_2)+36e_2e_3(45e_1^2-15g_2)+36e_3e_1(45e_2^2-15g_2) \\ &= 225\{(3e_1^2-g_2)(3e_2^2-g_2)+(3e_2^2-g_2)(3e_3^2-g_2)+(3e_3^2-g_2)(3e_1^2-g_2)\} \\ &\quad +540\{e_1e_2(3e_3^2-g_2)+e_2e_3(3e_1^2-g_2)+e_3e_1(3e_2^2-g_2)\} \\ &= 675\{3(e_1^2e_2^2+e_2^2e_3^2+e_3^2e_1^2)-2g_2(e_1^2+e_2^2+e_3^2)+g_2^2\} \\ &\quad +540\{3e_1e_2e_3(e_1+e_2+e_3)-g_2(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)\} \\ &= 675\left(3\cdot\frac{g_2^2}{16}-2g_2\cdot\frac{g_2}{2}+g_2^2\right)+540\left\{0-g_2\left(-\frac{g_2}{4}\right)\right\} \\ &= \frac{4185}{16}g_2^2 \end{aligned}$$

6. λ の係数を計算する.

$$\begin{aligned} &6e_1(45e_2^2-15g_2)(45e_3^2-15g_2)+6e_2(45e_1^2-15g_2)(45e_3^2-15g_2)+6e_3(45e_1^2-15g_2)(45e_2^2-15g_2) \\ \\ &= 1350\{e_1(3e_2^2-g_2)(3e_3^2-g_2)+e_2(3e_1^2-g_2)(3e_3^2-g_2)+e_3(3e_1^2-g_2)(3e_2^2-g_2)\} \\ &= 1350\{9e_1e_2e_3(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)-3g_2(e_1e_2^2+e_1^2e_2+e_2e_3^2+e_2^2e_3+e_1e_3^2+e_1^2e_3)+g_2^2(e_1+e_2+e_3)\} \\ \\ &= 1350\left\{9\cdot\left(\frac{g_3}{4}\right)\left(-\frac{g_2}{4}\right)-3g_2\left(-\frac{3}{4}g_3\right)\right\} \\ &= \frac{18225}{4}g_2g_3 \end{aligned}$$

7. 定数項を計算する.

$$\begin{aligned} &(45e_1^2-15g_2)(45e_2^2-15g_2)(45e_3^2-15g_2) \\ &= 3375(3e_1^2-g_2)(3e_2^2-g_2)(3e_3^2-g_2) \\ &= 3375\{27e_1^2e_2^2e_3^2-9g_2(e_1^2e_2^2+e_2^2e_3^3+e_3^2e_1^2)+3g_2^2(e_1^2+e_2^2+e_3^2)-g_2^3\} \\ &= 3375\left\{27\left(\frac{g_3}{4}\right)^2-9g_2\cdot\frac{g_2^2}{16}+3g_2^2\cdot\frac{g_2}{2}-g_2^3\right\} \\ &= -\frac{3375}{16}g_2^3+\frac{91125}{16}g_3^2 \end{aligned}$$

以上より, 等式が成り立つことが示された. □

4　命題 1.3 の証明

命題 1.3

$0 < k < 1$ とする．また, $\lambda_{j\pm}$ $(j = 1, 2, 3)$ を次のように定義する．

$$\lambda_{j\pm} = -3e_j \pm \sqrt{-36e_j^2 + 15g_2}$$

ここで, e_1, e_2, e_3, g_2 は次のとおり．

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{2-k^2}{3}, \quad e_2 = \frac{2k^2-1}{3}, \quad e_3 = -\frac{1+k^2}{3} \\ g_2 &= -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) \end{aligned}$$

このとき, $\lambda_{j\pm}$ の大小関係は次のようになる．

$$\lambda_{1-} < \lambda_{2-} < \lambda_{3-} < 0 < \lambda_{1+} < \lambda_{2+} < \lambda_{3+}$$

Proof. 初めに, g_2 を計算しておく．

$$\begin{aligned} g_2 &= -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) \\ &= -4\left\{\left(\frac{2-k^2}{3}\right)\left(\frac{2k^2-1}{3}\right) + \left(\frac{2k^2-1}{3}\right)\left(-\frac{1+k^2}{3}\right) + \left(-\frac{1+k^2}{3}\right)\left(\frac{2-k^2}{3}\right)\right\} \\ &= \frac{4}{3}(k^4 - k^2 + 1) \end{aligned}$$

まず, $\lambda_{1\pm}$ について計算する．

$$\begin{aligned} \lambda_{1\pm} &= -3e_1 \pm \sqrt{-36e_1^2 + 15g_2} \\ &= -3\left(\frac{2-k^2}{3}\right) \pm \sqrt{-36\left(\frac{2-k^2}{3}\right)^2 + 15 \cdot \frac{4}{3}(k^4 - k^2 + 1)} \\ &= k^2 - 2 \pm 2\sqrt{4k^4 - k^2 + 1} \end{aligned}$$

次に, $\lambda_{2\pm}$ について計算する．

$$\begin{aligned} \lambda_{1\pm} &= -3e_2 \pm \sqrt{-36e_2^2 + 15g_2} \\ &= -3\left(\frac{2k^2-1}{3}\right) \pm \sqrt{-36\left(\frac{2k^2-1}{3}\right)^2 + 15 \cdot \frac{4}{3}(k^4 - k^2 + 1)} \\ &= -2k^2 + 1 \pm 2\sqrt{k^4 - k^2 + 4} \end{aligned}$$

最後に, $\lambda_{3\pm}$ について計算する．

$$\begin{aligned} \lambda_{1\pm} &= -3e_3 \pm \sqrt{-36e_3^2 + 15g_2} \\ &= -3\left(-\frac{1+k^2}{3}\right) \pm \sqrt{-36\left(-\frac{1+k^2}{3}\right)^2 + 15 \cdot \frac{4}{3}(k^4 - k^2 + 1)} \\ &= k^2 + 1 \pm 2\sqrt{4k^4 - 7k^2 + 4} \end{aligned}$$

(1) λ_{2-} と λ_{1-} の大小関係を求めよう.

$$-2k^2+1-2\sqrt{k^4-k^2+4} \lesseqgtr k^2-2-2\sqrt{4k^4-k^2+1}$$

次のように式を整理する.

$$-3(k^2-1)+2\sqrt{4k^4-k^2+1} \lesseqgtr 2\sqrt{k^4-k^2+4}$$

$0<k<1$ に注意すると, 左辺も右辺も正なので, 両辺を 2 乗して整理すると, 次のようになる.

$$(k^2-1)(7k^2+1) \lesseqgtr 4(k^2-1)\sqrt{4k^4-k^2+1}$$

$0<k<1$ より, $k^2-1<0$ なので, 次が成り立つ.

$$7k^2+1 \gtreqless 4\sqrt{4k^4-k^2+1}$$

左辺も右辺も正なので, 両辺を 2 乗して整理すると, 次のようになる.

$$-15(k^2-1)^2 \gtreqless 0$$

ゆえに, $\lambda_{2-} > \lambda_{1-}$ である.

(2) λ_{3-} と λ_{2-} の大小関係を求めよう.

$$k^2+1-\sqrt{4k^4-7k^2+4} \lesseqgtr -2k^2+1-2\sqrt{k^4-k^2+4}$$

次のように式を整理する.

$$3k^2+2\sqrt{k^4-k^2+4} \lesseqgtr 2\sqrt{4k^4-7k^2+4}$$

左辺も右辺も正なので, 両辺を 2 乗して整理すると, 次のようになる.

$$12k^2\sqrt{k^4-k^2+4} \lesseqgtr 3k^4-24k^2$$

$0<k<1$ より, $k^2>0$ なので, 次が成り立つ.

$$8+4\sqrt{k^4-k^2+4} \lesseqgtr k^2$$

左辺も右辺も正なので, 両辺を 2 乗して整理すると, 次のようになる.

$$64\sqrt{k^4-k^2+4} \lesseqgtr -15k^4+16k^2 = k^2(16-15k^2)$$

$0<k<1$ より, $k^2>0$ かつ $16-15k^2>0$ なので, 両辺を 2 乗して整理すると, 次のようになる.

$$480k^6+3840k^2+16384 \lesseqgtr 225k^8$$

左辺の下限値は 16384 であり, 右辺の上限値は 225 である. ゆえに, $\lambda_{3-} > \lambda_{2-}$ である.

(3) 0 と λ_{3-} の大小関係を求めよう.

$$0 \lesseqgtr k^2+1-2\sqrt{4k^4-7k^2+4}$$

次のように式を整理する.

$$2\sqrt{4k^4-7k^2+4} \lesseqgtr k^2+1$$

左辺も右辺も正なので, 両辺を 2 乗して整理すると, 次のようになる.

$$0 \lesseqgtr -15(k^2-1)^2$$

ゆえに, $0 > \lambda_{3-}$ である.

(4) λ_{1+} と 0 の大小関係を求めよう.

$$k^2-2+2\sqrt{4k^4-k^2+1} \lesseqqgtr 0$$

次のように式を整理する.

$$2\sqrt{4k^4-k^2+1} \lesseqqgtr -k^2+2$$

$0<k<1$ より, 左辺も右辺も正なので, 両辺を 2 乗して整理すると, 次のようになる.

$$15k^4 \lesseqqgtr 0$$

ゆえに, $\lambda_{1+}>0$ である.

(5) λ_{2+} と λ_{1+} の大小関係を求めよう.

$$-2k^2+1+2\sqrt{k^4-k^2+4} \lesseqqgtr k^2-2+2\sqrt{4k^4-k^2+1}$$

次のように式を整理する.

$$-3(k^2-1)+2\sqrt{k^4-k^2+4} \lesseqqgtr 2\sqrt{4k^4-k^2+1}$$

$0<k<1$ に注意すると, 左辺も右辺も正なので, 両辺を 2 乗して整理すると, 次のようになる.

$$-(k^2-1)(k^2+7) \lesseqqgtr (k^2-1)\sqrt{k^4-k^2+4}$$

$0<k<1$ より, $k^2-1<0$ なので, 次が成り立つ.

$$-(k^2+7) \gtreqqless \sqrt{k^4-k^2+4}$$

ゆえに, $\lambda_{2+}>\lambda_{1+}$ である.

(6) λ_{3+} と λ_{2+} の大小関係を求めよう.

$$k^2+1+2\sqrt{4k^4-7k^2+4} \lesseqqgtr -2k^2+1+2\sqrt{k^4-k^2+4}$$

次のように式を整理する.

$$3k^2+2\sqrt{4k^4-7k^2+4} \lesseqqgtr 2\sqrt{k^4-k^2+4}$$

左辺も右辺も正なので, 両辺を 2 乗して整理すると, 次のようになる.

$$4\sqrt{4k^4-7k^2+4} \lesseqqgtr -7k^2+8$$

$0<k<1$ に注意すると, 左辺も右辺も正なので, 両辺を 2 乗して整理すると, 次のようになる.

$$15k^4 \lesseqqgtr 0$$

ゆえに, $\lambda_{3+}>\lambda_{2+}$ である.

以上より, $\lambda_{j\pm}$ の大小関係は次のようになることが示された.

$$\lambda_{1-}<\lambda_{2-}<\lambda_{3-}<0<\lambda_{1+}<\lambda_{2+}<\lambda_{3+}$$

$\square$

5　定理 1.4 の証明

定理 1.4

次のディリクレ問題について考える.

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u'' + u - u^3 = 0 \quad (0 < x < 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

この n モード解 u に対する次の線形化固有値問題の固有値を小さい順に $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \mu_3^{(n)}, \ldots$ とする.

$$\begin{cases} -\phi''(y) + (-2 - 2k^2 + 6k^2 \mathrm{sn}^2 y)\phi(y) = (1 + k^2)(\mu - 1)\phi(y) \\ \phi(0) = \phi(2nK) = 0 \end{cases}$$

また, 次の固有値問題の固有値を小さい順に $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \lambda_3^{(n)}, \ldots$ とする.

$$\begin{cases} -\psi''(y) + (-2 - 2k^2 + 6k^2 \mathrm{sn}^2 y)\psi(y) = \lambda\psi(y) \\ \psi(y + 2nK) = \psi(y) \end{cases}$$

このとき, これらの固有値の間には次の関係が成り立つ.

$$\begin{cases} \mu_j^{(n)} = \dfrac{\lambda_{2j}^{(2n)}}{1 + k^2} + 1 \quad (j \neq 2n) \\ \mu_{2n}^{(n)} = \dfrac{\lambda_{4n-1}^{(2n)}}{1 + k^2} + 1 \quad (j = 2n) \end{cases}$$

Proof. まず, 初めのディリクレ問題について考える.

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u'' + u - u^3 = 0 \quad (0 < x < 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

この n モード解 u および ε^2 が (10) となることを直接計算によって示す.

$$\begin{aligned} u(x) &= \sqrt{\frac{2k^2}{1 + k^2}} \mathrm{sn}(2nKx) \\ u'(x) &= 2nK \sqrt{\frac{2k^2}{1 + k^2}} \mathrm{cn}(2nKx) \cdot \mathrm{dn}(2nKx) \\ u''(x) &= 2nK \sqrt{\frac{2k^2}{1 + k^2}} \{-2nK \mathrm{sn}(2nKx) \cdot \mathrm{dn}^2(2nKx) - 2nk^2 K(k) \mathrm{sn}(2nKx) \cdot \mathrm{cn}^2(2nKx)\} \\ &= -4n^2 K^2 \sqrt{\frac{2k^2}{1 + k^2}} \mathrm{sn}(2nKx) \{\mathrm{dn}^2(2nKx) + k^2 \mathrm{cn}^2(2nKx)\} \\ &= -4n^2 K^2 \sqrt{\frac{2k^2}{1 + k^2}} \mathrm{sn}(2nKx) \{1 + k^2 - 2k^2 \mathrm{sn}^2(2nKx)\} \\ &= -4n^2 K^2 \sqrt{2k^2(1 + k^2)} \mathrm{sn}(2nKx) + 8n^2 k^2 K^2 \sqrt{\frac{2k^2}{1 + k^2}} \mathrm{sn}^3(2nKx) \end{aligned}$$

これらと $\varepsilon^2 = \dfrac{1}{4n^2(1+k^2)K^2}$ を (9) 式の左辺に代入すると, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 u'' + u - u^3 =& \frac{1}{4n^2(1+k^2)K^2}\left\{-4n^2K^2\sqrt{2k^2(1+k^2)}\operatorname{sn}(2nKx) + 8n^2k^2K^2\sqrt{\frac{2k^2}{1+k^2}}\operatorname{sn}^3(2nKx)\right\} \\
&+ \sqrt{\frac{2k^2}{1+k^2}}\operatorname{sn}(2nKx) - \left\{\sqrt{\frac{2k^2}{1+k^2}}\operatorname{sn}(2nKx)\right\}^3 \\
=& -\sqrt{\frac{2k^2}{1+k^2}}\operatorname{sn}(2nKx) + \frac{2k^2}{1+k^2}\sqrt{\frac{2k^2}{1+k^2}}\operatorname{sn}^3(2nKx) \\
&+ \sqrt{\frac{2k^2}{1+k^2}}\operatorname{sn}(2nKx) - \frac{2k^2}{1+k^2}\sqrt{\frac{2k^2}{1+k^2}}\operatorname{sn}^3(2nKx) \\
=& 0
\end{aligned}$$

さらに, $\operatorname{sn} x$ は $\operatorname{sn} 0 = \operatorname{sn}(2K) = 0$ を満たすので, $u(0) = u(1) = 0$ も満たす. したがって, n モード解 u と ε^2 は初めのディリクレ問題を満たすことが確認できた. さて, 初めのディリクレ問題の n モード解 u に対する線形化固有値問題は次のとおり.

$$\begin{cases} \varepsilon^2\phi''(x) + (1 - 3u^2)\phi(x) = -\mu\phi(x) \quad (0 < x < 1) \\ \phi(0) = \phi(1) = 0 \end{cases}$$

ここで, n モード解 u および ε^2 を代入すると, 次のようになる.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4n^2(1+k^2)K^2}\phi''(x) + \left\{1 - 3\left(\dfrac{2k^2}{1+k^2}\right)\operatorname{sn}^2(2nKx)\right\}\phi(x) = -\mu\phi(x) \\ \phi(0) = \phi(1) = 0 \end{cases}$$

さらに, 変数変換 $2nKx = y$ を施すと, 次のように書き直せる. ただし, $\phi''(y)$ における微分記号が x での微分から y での微分に変更されていることに注意する.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+k^2}\phi''(y) + \left(1 - \dfrac{6k^2}{1+k^2}\operatorname{sn}^2 y\right)\phi(y) = -\mu\phi(y) \\ \phi(0) = \phi(2nK) = 0 \end{cases}$$

両辺に $1 + k^2$ をかけて式を整理すると, 次のようになる. この線形化固有値問題の固有値を小さい順に $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \mu_3^{(n)}, \ldots$ とする.

$$\begin{cases} -\phi''(y) + (-2 - 2k^2 + 6k^2\operatorname{sn}^2 y)\phi(y) = (1+k^2)(\mu - 1)\phi(y) \\ \phi(0) = \phi(2nK) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

Allen-Cahn 方程式の線形化方程式 (15) は, $\ell = 2$ の場合の Lamé 方程式と同じ形をしていることが分かる. そこで, $\ell = 2$ の場合の Lamé 方程式に周期 $2nK$ の周期境界条件を課した次の固有値問題を考え, その固有値を小さい順に $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \lambda_3^{(n)}, \ldots$ とする.

$$\begin{cases} -\psi''(y) + (-2 - 2k^2 + 6k^2\operatorname{sn}^2 y)\psi(y) = \lambda\psi(y) \\ \psi(y + 2nK) = \psi(y) \end{cases}$$

これら 2 つの固有値問題は境界条件が異なるが, 次のように考えることで同一視できる. 上の線形化固有値問題の解 $\phi(y)$ を次のように拡張する.

$$\tilde{\phi}(y) = \begin{cases} -\phi(-y) & (-2nK \leq y \leq 0) \\ \phi(y) & (0 \leq y \leq 2nK) \end{cases}$$

これは $\mathbb{R}/4nK\mathbb{Z}$ 上の関数とみなすことができる. したがって, 各固有値は次のように対応づけられる.

$$\begin{cases} \mu_j^{(n)} = \dfrac{\lambda_{2j}^{(2n)}}{1+k^2} + 1 \quad (j \neq 2n) \\ \mu_{2n}^{(n)} = \dfrac{\lambda_{4n-1}^{(2n)}}{1+k^2} + 1 \quad (j = 2n) \end{cases}$$

□

なお, $\ell = 2$ の場合の Lamé 方程式に周期境界条件を課した固有値問題は補題 5.1 で明らかにされている.

補題 5.1

次のような周期境界条件の Lamé 方程式の固有値問題を考える. ただし, $n \geq 1$ とする.

$$\begin{cases} -\psi''(y) + (-2 - 2k^2 + 6k^2\mathrm{sn}^2 y)\psi(y) = \lambda\psi(y) \\ \psi(y + 2nK) = \psi(y) \end{cases}$$

(i) 固有値 λ_j ($j \geq 0$) に対応する固有関数を $\psi_j(x)$ とすると, 次の 3 組は固有対である.

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= -2\sqrt{1-k^2+k^4}, & \psi_0(x) &= 1 + k^2 + \sqrt{1-k^2+k^4} - 3k^2\mathrm{sn}^2 x \\ \lambda_{2n-1} &= 2 - k^2, & \psi_{2n-1}(x) &= \mathrm{sn}\, x \cdot \mathrm{cn}\, x \\ \lambda_{2n} &= 2\sqrt{1-k^2+k^4}, & \psi_{2n}(x) &= 1 + k^2 - \sqrt{1-k^2+k^4} - 3k^2\mathrm{sn}^2 x \end{aligned}$$

$\lambda_0, \lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}$ は単純固有値である. さらに, もし n が偶数なら, 次の 2 組も固有対である.

$$\begin{aligned} \lambda_{n-1} &= -1 - k^2, & \psi_{n-1}(x) &= \mathrm{dn}\, x \cdot \mathrm{cn}\, x \\ \lambda_n &= -1 + 2k^2, & \psi_n(x) &= \mathrm{dn}\, x \cdot \mathrm{sn}\, x \end{aligned}$$

λ_{n-1}, λ_n は単純固有値である.

(ii) $j \in \left\{1, 2, \cdots, \left[\dfrac{n-1}{2}\right]\right\}$ に対し, 固有値 λ_{2j-1} の重複度は 2 であり, 次が成り立つ.

$$\lambda_{2j-1} = \lambda_{2j} = -2 + (1-k^2) - \frac{3}{4}\cos^2\left(\frac{j\pi}{n}\right)(1-k^2)^2 + o((1-k^2)^2) \quad \text{as} \quad k \to 1^-$$

(iii) $j \in \left\{\left[\dfrac{n+2}{2}\right], \cdots, \left[\dfrac{2n-2}{2}\right]\right\}$ に対し, 固有値 λ_{2j-1} の重複度は 2 であり, 次が成り立つ.

$$\lambda_{2j-1} = \lambda_{2j} = -2 + (1-k^2) - \frac{3}{4}\cos^2\left(\frac{j\pi}{n}\right)(1-k^2) + o(1-k^2) \quad \text{as} \quad k \to 1^-$$

(iv) $j \in \{n+1, n+2, \cdots\}$ に対し, 固有値 λ_{2j-1} の重複度は 2 であり, 次が成り立つ.

$$\lambda_{2j-1} = \lambda_{2j} = 2 + \frac{(j-n)^2\pi^2}{n^2} \cdot \frac{1}{K(k)^2} + o\left(\frac{1}{K(k)^2}\right) \quad \text{as} \quad k \to 1^-$$

6　付録

6.1　楕円積分

定義 6.1(楕円積分の定義)

$0 \leq k < 1$ とする. $K(x,k)$, $E(x,k)$, $\Pi(\nu; x, k)$ をそれぞれ次のように定義する.

$$K(x,k) = \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$
$$E(x,k) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2s^2}{1-s^2}}ds$$
$$\Pi(\nu; x, k) = \int_0^x \frac{ds}{(1+\nu s^2)\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$

$K(x,k)$, $E(x,k)$, $\Pi(\nu; x, k)$ をそれぞれ第一種楕円積分, 第二種楕円積分, 第三種楕円積分という.

定義 6.2(完全楕円積分の定義)

$0 \leq k < 1$ とする. $K(k)$, $E(k)$, $\Pi(\nu, k)$ をそれぞれ次のように定義する.

$$K(k) = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$
$$E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2s^2}{1-s^2}}ds$$
$$\Pi(\nu, k) = \int_0^1 \frac{ds}{(1+\nu s^2)\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$

$K(k)$, $E(k)$, $\Pi(\nu, k)$ をそれぞれ第一種完全楕円積分, 第二種完全楕円積分, 第三種完全楕円積分という.

補題 6.3

$0 \leq k < 1$ とする. 第一種完全楕円積分 $K(k)$, 第二種完全楕円積分 $E(k)$ に対して, 次が成り立つ.

$$K(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{k \to 1} K(k) = \infty$$
$$E(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{k \to 1} E(k) = 1$$

補題 6.4(完全楕円積分の微分公式)

$0 < k < 1$, $\nu \neq 0, -1, -k^2$ とする．このとき, 次が成り立つ．

(i) $\dfrac{dE}{dk}(k) = \dfrac{E(k) - K(k)}{k}$

(ii) $\dfrac{dK}{dk}(k) = \dfrac{E(k) - (1-k^2)K(k)}{k(1-k^2)}$

(iii) $\dfrac{\partial \Pi}{\partial k}(\nu, k) = \dfrac{k\{E(k) - (1-k^2)\Pi(\nu, k)\}}{(k^2+\nu)(1-k^2)}$

(iv) $\dfrac{\partial \Pi}{\partial \nu}(\nu, k) = -\dfrac{K(k)}{2\nu(1+\nu)} + \dfrac{E(k)}{2(1+\nu)(k^2+\nu)} + \dfrac{(k^2-\nu^2)\Pi(\nu, k)}{2\nu(1+\nu)(k^2+\nu)}$

補題 6.5(K と E の大小関係)

$0 < k < 1$ とする．このとき, 次が成り立つ．

$$(1-k^2)K(k) < E(k) < \left(1 - \frac{1}{2}k^2\right) K(k)$$

補題 6.6(第一種完全楕円積分の漸近展開)

$0 < k < 1$ とする．このとき, 次が成り立つ．

$$\lim_{k \to 1} \left(K(k) - \log \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} - 2\log 2 \right) = 0$$

補題 6.7(第三種完全楕円積分の別表示)

$s = \dfrac{\tau}{\sqrt{1+\nu+\tau^2}}$ とすると, 次が成り立つ．

$$\sqrt{1+\nu}\,\Pi(\nu, k) = \int_0^\infty \frac{1}{1+\tau^2} \sqrt{\frac{1+\nu+\tau^2}{1+\nu+(1-k^2)\tau^2}} d\tau$$

また, $s = \dfrac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}$ とすると, 次が成り立つ．

$$\Pi(\nu, k) = \int_0^\infty \frac{1+\tau^2}{\{1+(1+\nu)\tau^2\}\sqrt{1+\tau^2}\sqrt{1+(1-k^2)\tau^2}} d\tau$$

補題 6.8(第一種完全楕円積分の別表示)

次が成り立つ．

$$K(k) = \int_0^\infty \frac{d\tau}{\sqrt{1+\tau^2}\sqrt{1+(1-k^2)\tau^2}}$$

補題 6.9(第三種完全楕円積分の漸近展開)

$0 < k < 1$, $\nu > -1$ とする．このとき, 次が成り立つ．

(i) $\displaystyle\lim_{\nu\to -1}\sqrt{1+\nu}\,\Pi(\nu,k) = \frac{\pi}{2\sqrt{1-k^2}}$

(ii) $\displaystyle\lim_{\nu\to \infty}\sqrt{1+\nu}\,\Pi(\nu,k) = \frac{\pi}{2}$

6.2 ヤコビの楕円関数

定義 6.10(ヤコビの楕円関数の定義)

$0 \leq k < 1$ とする．$\mathrm{sn}\,x$ を第一種楕円積分 $K(x,k)$ の逆関数として定義する．

$$\mathrm{sn}^{-1}x = K(x,k)$$

$\mathrm{sn}\,x$ は周期 $4K(k)$ の周期関数である．さらに, $\mathrm{cn}\,x$, $\mathrm{dn}\,x$ を $0 < x < K(k)$ の範囲で次のように定義する．

$$\mathrm{cn}\,x = \sqrt{1-\mathrm{sn}^2 x}$$
$$\mathrm{dn}\,x = \sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2 x}$$

補題 6.11(ヤコビの楕円関数の微分公式)

$0 \leq k < 1$ とする．このとき, 次が成り立つ．

(i) $(\mathrm{sn}\,x)' = \mathrm{cn}\,x \cdot \mathrm{dn}\,x$

(ii) $(\mathrm{cn}\,x)' = -\mathrm{sn}\,x \cdot \mathrm{dn}\,x$

(iii) $(\mathrm{dn}\,x)' = -k^2\mathrm{sn}\,x \cdot \mathrm{cn}\,x$

(iv) $(\mathrm{dn}\,x)'' - (2-k^2)\mathrm{dn}\,x + 2\mathrm{dn}^3 x = 0$

6.3 ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数

定義 6.12(ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数の定義)

格子 $\Lambda = \{n\omega_1 + m\omega_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ に対して, ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数を次のように定義する．

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)$$

ただし, $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ であり, $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$ を満たすとする．

補題 6.13(ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数の微分公式)

次が成り立つ．

$$\wp'(z) = -\sum_{\omega\in\Lambda}\frac{2}{(z-\omega)^3}$$

補題 6.14(ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数の偶関数性)

ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数は偶関数である.

$$\wp(-z) = \wp(z)$$

補題 6.15(ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数の微分方程式)

次の等式が成立する.

$$\{\wp'(x)\}^2 = 4\{\wp(z)\}^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

ただし, g_2, g_3 は次のとおり.

$$g_2 = 60 \sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}} \frac{1}{\omega^4}$$
$$g_3 = 140 \sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}} \frac{1}{\omega^6}$$

補題 6.16(ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数とヤコビの楕円関数の関係)

ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数とヤコビの楕円関数の間には, 次の関係がある.

$$\wp(z) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\mathrm{sn}^2 w} = e_2 + (e_1 - e_3)\frac{\mathrm{dn}^2 w}{\mathrm{sn}^2 w} = e_1 + (e_1 - e_3)\frac{\mathrm{cn}^2 w}{\mathrm{sn}^2 w}$$

ただし, $w = z\sqrt{e_1 - e_3}$ である.

6.4 ストゥルム・リュウビル型固有値問題

補題 6.17(ストゥルム・リュウビルの定理)

次のストゥルム・リュウビル型固有値問題を考える [6].

$$\begin{cases} (p(x)\varphi')' + \{q(x) + \lambda r(x)\}\varphi = 0 & (a < x < b) \\ \varphi(a) \equiv 0 & (\mathrm{mod}\ \pi) \\ \varphi(b) \equiv 0 & (\mathrm{mod}\ \pi) \end{cases}$$

この固有値問題の固有値は無限個存在し, すべて実数である. その中に最小の固有値 λ_0 が存在して, すべての固有値を次のように順に並べることができる.

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$$

また, $n \to \infty$ のとき $\lambda_n \to \infty$ を満たす. さらに, 各固有値には定数倍を除いてただ 1 つの固有関数が対応し, λ_n に対応する固有関数を $\varphi_n(x)$ とすると, $\varphi_n(x)$ は区間 (a, b) 内にちょうど n 個の零点を持つ.

7　謝辞

本論文の作成にあたり, 東京大学大学院数理科学研究科教授の宮本安人先生には終始多大なご指導ご鞭撻を賜りました. 宮本先生は数理科学演習 II の指導教員としても大変お世話になり, 1 年間を通して常微分方程式, とりわけ力学系や固有値問題について深い学びを得ることができました. 厚く御礼申し上げます.

東京大学教養学部統合自然科学科物質基礎科学コースの上村慧氏は共同研究者として半年間ともに研究を進めました. 研究が行き詰まったとき, しばしば上村氏から飛び出すアイデアにより窮地を脱することができ, その度に脱帽いたしました. ここに感謝の意を表します.

8　参考文献

[1] Lamé, G.: Sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en èquilibre de tempèrature. Journal de mathèmatiques pures et appliquèes 1re sèrie, tome 2 (1837): pp. 147-183.

[2] George, D.: Ellipsoidal harmonics: theory and applications. Vol. 146. Cambridge University Press, 2012.

[3] Takemura, K.: On eigenvalues of Lame operator(Solvable Lattice Models 2004 : Recent Progress on Solvable Lattice Models). 数理解析研究所講究録, 1480 (2006): pp. 104-116.

[4] Aizawa, S., Miyamoto, Y., Wakasa, T.: Asymptotic formulas of the eigenvalues for the linearization of a one-dimensional sinh-Poisson equation. Journal of Elliptic and Parabolic Equations (2023).

[5] Liang, J., Müller-Kirsten, H. J. W., Tchrakian, D. H.: Solitons, bounces and sphalerons on a circle. Physics Letters B, 282 (1992): pp. 105-110.

[6] 柳田英二・栄伸一郎『常微分方程式論』、東京：朝倉書店、2002 年。