q-類似の Coq による形式化

中村薫　　名古屋大学

目的

q-類似の初等的な結果を Coq で形式化する．具体的には以下の2つの等式の形式化を行う．

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} (D_q^j f)(c) \frac{(x-c)_q^j}{[j]!}$$

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{j(j-1)/2} a^j x^{n-j}$$

q-類似とは

以下の2つの条件をみたす数学の諸概念の一般化

- $q \to 1$とすると通常の数学に一致する
- 実数パラメータq, 実数上の関数fに対して

$$D_q f(x) := \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}$$

で定義されるq-微分に対してうまく振る舞う

q-微分

以下，qを1でない実数とする．

Definition [?] p1 (1.1), p2 (1.5)

関数$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$に対して，$f(x)$の$q$-差分$d_q f(x)$を，

$$d_q f(x) := f(qx) - f(x)$$

と定める．更に，$f(x)$のq-微分$D_q f(x)$を，

$$D_q f(x) := \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}$$

と定める．

自然数のq-類似

$f(x) = x^n$を定義に沿ってq-微分すると以下の通りである．

$$D_q x^n = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{q^n - 1}{q-1} x^{n-1}$$

通常の微分では，$(x^n)' = nx^{n-1}$となることと比較して，nのq-類似$[n]$を次のように定める([?] p2 (1.9))．

$$[n] = \frac{q^n - 1}{q - 1} (= 1 + q + q^2 + \cdots q^{n-1})$$

$(x-a)^n$のq-類似

Definition [?] p8 Definition (3.4)

$x, a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$に対して，$(x-a)^n$のq-類似$(x-a)_q^n$を，

$$(x-a)_q^n := \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ (x-a)(x-qa)\cdots(x-q^{n-1}a) & \text{if } n \geq 1 \end{cases}$$

と定義する．

Proposition

$n \in \mathbb{Z}_{>0}$に対し，

$$D_q (x-a)_q^n = [n](x-a)_q^{n-1}$$

が成り立つ．

q-Taylor展開

Definition [?] p7 (3.1)

$n \in \mathbb{N}$について，階乗のq-類似を以下のように定める．

$$[n]! := \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ [n] \times [n-1] \times \cdots \times [1] & (n \geq 1) \end{cases}$$

Theorem [?] p12 Theorem 4.1

$f(x)$を，N次の実数係数多項式とする．任意の$c \in \mathbb{R}$に対し，

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} (D_q^j f)(c) \frac{(x-c)_q^j}{[j]!}$$

が成り立つ．

Gauss's binomial formula

Lemma [?] p15 Example (5.5)

$n \in \mathbb{Z}_{>0}$について，

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{j(j-1)/2} a^j x^{n-j}$$

が成り立つ．この式は Gauss's binomial formula と呼ばれる．

Definition [?] p12 (4.5)

$n \geq j$をみたすn, $j \in \mathbb{N}$について，二項係数のq-類似を以下のように定める．

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} := \frac{[n]!}{[j]![n-j]!}$$

q-微分の形式化

```
Variables (R : rcfType) (q : R).
Hypothesis Hq : q - 1 ≠ 0.

Notation "f // g" := (fun x ⇒ f x / g x) (at level 40).

Definition dq (f : R → R) x := f (q * x) - f x.
Definition Dq f := dq f // dq id.
```

$[n]$の形式化

```
Definition qnat n : R := (q ^ n - 1) / (q - 1).

Lemma Dq_pow n x : x ≠ 0 →
  Dq (fun x ⇒ x ^ n) x = qnat n * x ^ (n - 1).
Proof.
  move⇒ Hx.
  rewrite /Dq /dq /qnat.
  rewrite -{4}(mul1r x) -mulrBl expfzMl -add_div;
    last by apply mulf_neq0.
  rewrite [in x ^ n](_ : n = (n -1) +1) //; last by rewrite subrK.
  rewrite expfzDr ?expr1z ?mulrA -?mulNr ?red_frac_r ?add_div //.
  rewrite -{2}[x ^ (n - 1)]mul1r -mulrBl mulrC mulrA.
  by rewrite [in (q - 1)^-1 * (q ^ n - 1)] mulrC.
Qed.
```

$(x-a)_q^n$の形式化

```
Fixpoint qbinom_pos a n x :=
  match n with
  | 0 ⇒ 1
  | n0.+1 ⇒ (qbinom_pos a n0 x) * (x - q ^ n0 * a)
  end.

Theorem Dq_qbinom_pos a n x : x ≠ 0 →
  Dq (qbinom_pos a n.+1) x = qnat n.+1 * qbinom_pos a n x.
```

関数から多項式へ

$x/x = 1$を計算するとき

- 実数 ⋯ $x \neq 0$が必要
- 多項式 ⋯ xは単項式なので自動的に $x \neq 0$(ゼロ多項式)

→多項式で考えれば約分した後でも$x = 0$での値が求められる．

多項式での再定義

- q-差分

```
Definition scale_var (p : {poly R}):=
 \poly_(i < size p) (q ^ i * p`_i).
Definition dqp p := scale_var p - p.
```

`scale_var` ⋯ $p \mapsto$ (pのi次の係数をq^i倍した多項式)

- q-微分

```
Definition Dqp p := dqp p %/ dqp 'X.
Definition Dqp' (p : {poly R}) :=
  \poly_(i < size p) (qnat (i.+1) * p`_i.+1).
```

- $(x-a)_q^n$

```
Fixpoint qbinom_pos_poly a n :=
  match n with
  | 0 ⇒ 1
  | n0.+1 ⇒ (qbinom_pos_poly a n0) * ('X - (q ^ n0 * a)%:P)
  end.
```

q-Taylor展開の形式化

```
Fixpoint qfact n :=
  match n with
  | 0 ⇒ 1
  | n0.+1 ⇒ qfact n0 * qnat n0.+1
  end.

Theorem q_Taylorp n (f : {poly R}) c :
  (∀ n, qfact n ≠ 0) →
  size f = n.+1 →
  f = \sum_(0 ≤ i < n.+1)
    ((Dqp' \^ i) f).[c] *: (qbinom_pos_poly c i / (qfact i)%:P).
```

Gauss's binomial formula の形式化

```
Definition qbicoef n j := qfact n / (qfact j * qfact (n - j)).

Theorem Gauss_binomial a n : (∀ n, qfact n ≠ 0) →
  qbinom_pos_poly (-a) n =
    \sum_(0 ≤ i < n.+1)
      (qbicoef n i * q ^+ (i * (i - 1))./2 * a ^+ i) *: 'X^(n - i).
```

参考文献

[Kac] Victor Kac, Pokman Cheung, *Quantum Calculus*, Springer, 2001.