少人数クラス内容報告

アドバイザー： Jacques Garrigue 教授
学籍番号： 322101289
氏名： 中村　薫

2022 年 12 月 25 日

目 次

1 HoTT

HoTT とは, Homotopy Type Theory の略であり,

$$a \text{ が型 } A \text{ の要素である} \leftrightarrow a \text{ が空間 } A \text{ の点である}$$
$$a = b \text{ である} \leftrightarrow \text{点 } a \text{ と点 } b \text{ の間にパスが存在する}$$

というように, 型理論に対してホモトピー的解釈を与えたものである. 本章では, HoTT の大きな特徴の一つである, univalence axiom について説明する. 大雑把にいえば, univalence axiom は「型 A と型 B が同型ならば, A と B は等しい」という公理である. この意味を正確にとらえるため, 型同士の等しさや同型を定義していく.

1.1 型から型を作る

A と B の 2 つの型が与えられたとき, そこから関数型 $A \to B$ が構成できる. このとき,

$$f : A \to B,\ a : A \Longrightarrow f(a) : B$$
$$a : A,\ b(x) : B \Longrightarrow \lambda a.b : A \to B$$

である. より一般に, 型 A と A 上の型族 $B \to \mathcal{U}$ が与えられれば ($\mathcal{U}$ はユニバース), 依存関数型 $\prod_{a:A} B(a)$ が構成でき,

$$f : \prod_{a:A} B(a),\ a : A \Longrightarrow f(a) : B(a)$$
$$a : A,\ b(x) : B(x) \Longrightarrow \lambda a.b : \prod_{a:A} B(a)$$

である. さらに, 既存の型から新たな型を作るやり方として, 構成規則, 導入規則, 除去規則, 計算規則の 4 つを与える帰納的な方法がある. 例えば, 依存和型 $\sum_{x:A} B(x)$ は,

- 構成規則：$A : \mathcal{U}, B : A \to \mathcal{U} \Longrightarrow \sum_{x:A} B(x)$
- 導入規則：$a : A, b : B(a) \Longrightarrow (a, b) : \sum_{x:A} B(x)$
- 除去規則：$\mathrm{ind}_{\sum_{x:A} B(x)} : \prod_{C:(\sum_{x:A} B(x))\to\mathcal{U}} \left(\prod_{a:A} \prod_{b:B(a)} C((a,b))\right) \to \prod_{w:\sum_{x:A} B(x)} C(w)$
- 計算規則：$\mathrm{ind}_{\sum_{x:A} B(x)}(C, g, (a, b)) :\equiv g(a)(b)$

で定義できる. 除去規則は, 「任意の $w : \sum_{x:A} B(x)$ について $C(w)$ を示したければ, 任意の $a : A$, $b : B(a)$ について $C((a, b))$ を示せばよい」と読むことができる. ここで, Curry-Howard 同型に基づいて考えると, 「ある要素 a とある要素 b が等しい」という命題は, なにかしらの型と対応するはずである. よってその型 identity type を,

- 構成規則：$A : \mathcal{U} \Longrightarrow {}_{-} =_A {}_{-} : \mathcal{U}$
- 導入規則：$\mathrm{refl}_a : \prod_{a:A}(a =_A a)$
- 除去規則：$\mathrm{ind}_{=_A} : \prod_{(C:\prod_{(x,y:A)}(x=_A y)\to\mathcal{U})} \left(\prod_{(x:A)} C(x, x, \mathrm{refl}_x)\right) \to \prod_{(x,y:A)} \prod_{(p:x=_A y)} C(x, y, p)$
- 計算規則：$\mathrm{ind}_{=_A}(C, c, x, x, \mathrm{refl}_x) :\equiv c(x)$

と定義する. 除去規則は, 依存和型のときと同様に考えると, 「任意の $x, y : A$, $x = y$ について $C(x, y, p)$ を示したければ, 任意の $x : A$ について $C(x, x, \mathrm{refl} x)$ を示せばよい」となる.

1.2 型の同型

ここで, 型と型の間の同型を定義したい. まず, 関数の間のホモトピーを定義する.

Definition 1.2.1 ([1] Definition 2.4.1) $A : \mathcal{U}$, $P : A \to \mathcal{U}$ とする. $f, g : \prod_{x:A} P(x)$ に対して,

$$(f \sim g) :\equiv \prod_{x:A} (f(x) = g(x))$$

と定める.

次に, 「逆写像」を定義する.

Definition 1.2.2 ([1] Definition 2.4.6) $A, B : \mathcal{U}$, $f : A \to B$ とする. このとき, f の quasi-inverse qinv(f) を,

$$\mathrm{qinv}(f) :\equiv \sum_{g:B\to A} ((f \circ g \sim \mathrm{id}_B) \times (g \circ f \sim \mathrm{id}_A))$$

例えば, id_A の quasi-inverse は id_A 自身である. さらに, この qinv を用いて, isequiv を,

- $\mathrm{qinv}(f) \to \mathrm{isequiv}(f)$
- $\mathrm{isequiv}(f) \to \mathrm{qinv}(f)$
- e_1, e_2 :isequiv(f) ならば $e_1 = e_2$

をみたすものとして定義したい. ここでは,

$$\mathrm{isequiv}(f) :\equiv \left(\sum_{g:B\to A} (f \circ g \sim \mathrm{id}_B)\right) \times \left(\sum_{h:B\to A} (h \circ f \sim \mathrm{id}_A)\right) \quad \text{([1] p73 (2.4.10))}$$

と定めることにする. isequiv を使って型同士の同型を定義する.

Definition 1.2.3 ([1] p73 (2.4.11)) $A, B : \mathcal{U}$ について,

$$A \simeq B :\equiv \sum_{f:A\to B} \mathrm{isequiv}(f)$$

と定める.

Example 1.2.4 $A, B, C : \mathcal{U}$ について,

- $A \simeq A$
- $A \simeq B \to B \simeq A$
- $A \simeq B \to B \simeq C \to A \simeq C$

などが成り立つ.

1.3 Univalence axiom

これまでに定義した $=$ と $\simeq$ を用いて, univalence axiom の主張を正しく述べる. まず,

$$\mathrm{idtoeqv} : \prod_{A,B:\mathcal{U}} (A =_{\mathcal{U}} B) \to (A \simeq B)$$

を定める. この関数が存在することは, path induction よりわかる. この idtoeqv に対して,

Axiom 1.3.1 ([1] Axiom 2.10.3)

$$\mathrm{ua} : \prod_{A,B:\mathcal{U}} \mathrm{isequiv}(\mathrm{idtoeqv}(A, B))$$

が univalence axiom である. とくに, この公理を仮定すれば,

$$(A =_{\mathcal{U}} B) \simeq (A \simeq B)$$

となる. さらに, 関数の外延性

$$\mathrm{funext} : \left(\prod_{x:A}(f(x) = g(x))\right) \to (f = g)$$

が従うことも知られている.

参考文献

[1] The Univalent Foundations Program, *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*