

# 少人数クラス

中村 薫

2022 年 9 月 30 日

## 目次

1	Coq による $q$ -類似の形式化	1
1.1	Coq	1
1.2	$q$ -類似	2
2	HoTT	2
3	coqgen プロジェクト	2

## 1 Coq による $q$ -類似の形式化

### 1.1 Coq

Coq とは、定理証明支援系の 1 つであり、数学的な証明が正しいかどうか判定するプログラムである。人間がチェックすることが難しい複雑な証明でも正しさが保証され、また証明付きプログラミングにも応用される。例えば、命題  $P, Q$  について、 $P \implies Q$  かつ  $P$  であれば、 $Q$  が成り立つということは、Coq では

```
From mathcomp Require Import ssreflect.
```

```
Theorem modus_ponens (P Q : Prop) : (P → Q) ∧ P → Q.
```

```
Proof.
```

```
  move=> [] pq p.
```

```
  by apply pq.
```

```
Qed.
```

と表現できる。

Coq による証明は、Curry-Howard 同型と呼ばれる、

命題  $\leftrightarrow$  型

証明  $\leftrightarrow$  型に要素が存在する

という対応関係に基づいている。この同型をもとに上記の証明をもう一度考えてみると、前提である  $P \implies Q$  と  $P$  から、 $Q$  の元を構成すればよいということである。まず、この対応を用いると、「 $P \implies Q$ 」は「 $P \rightarrow Q$ 」という型にあたる。ここで、 $P \rightarrow Q$  という型は、入力する値の型が  $P$ 、出力する値の型が  $Q$  であるような関数の型である。前提である  $P \implies Q$  と  $P$  から、 $Q$  の元を構成すればよいということである。まず、前提が真であるということは、 $P \implies Q$  と  $P$  に要素が存在するということなので、その要素にそれぞれ  $pq, p$  と名前をつける。これがプログラム中の `move=> [] pq p` のことである。

## 1.2 $q$ -類似

$q$ -類似とは,  $q \rightarrow 1$  とすると通常の数学に一致するような拡張のことである. 例えば, 自然数  $n$  の  $q$ -類似  $[n]$  は

$$[n] = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$$

であり,  $(x-a)^n$  の  $q$ -類似  $(x-a)_q^n$  は

$$(x-a)_q^n := \begin{cases} 1 & (n=0) \\ (x-a)(x-qa) \cdots (x-q^{n-1}a) & (n \geq 1) \end{cases}$$

である. 本章では,  $D_q(x-a)_q^n = [n](x-a)_q^{n-1}$  (ここで,  $D_q$  は微分の  $q$ -類似) の形式化を目標とする.

## 2 HoTT

## 3 coqgen プロジェクト

### 参考文献

- [1] The Univalent Foundations Program, *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*