

# 少人数クラス内容報告

アドバイザー：Jacques Garrigue 教授

学籍番号：322101289

氏名：中村 薫

2022 年 12 月 26 日

## 目次

1	はじめに	1
2	型から型を作る	2
3	型の同型	2
4	Univalence axiom	3
5	関数の外延性	4
6	可縮, ファイバー	5
7	レトラクト	7
8	Univalence implies function extensionality	9

## 1 はじめに

本稿では, [1] を教科書にして修士 2 年次に少人数クラスで学習した Homotopy Type Theory (HoTT) についてまとめる. HoTT とは,

$a$  が型  $A$  の要素である  $\leftrightarrow a$  が空間  $A$  の点である

$a = b$  である  $\leftrightarrow$  点  $a$  と点  $b$  の間にパスが存在する

というように, 型理論に対してホモトピー的解釈を与えたものである. 4 章で HoTT の大きな特徴の一つである, univalence axiom について説明する. 大雑把に言えば, univalence axiom は「型  $A$  と型  $B$  が同型ならば,  $A$  と  $B$  は等しい」という公理である. この意味を正確にとらえるため, 型同士の等しさや同型を定義していく. また, いくつかの定義や補題を準備した後, univalence axiom から関数の外延性がしただうことを 8 章で確認する.

## 2 型から型を作る

$A$  と  $B$  の 2 つの型が与えられたとき, そこから関数型  $A \rightarrow B$  が構成できる. このとき,

$$\begin{aligned} f : A \rightarrow B, a : A &\Longrightarrow f(a) : B \\ a : A, b(x) : B &\Longrightarrow \lambda a. b : A \rightarrow B \end{aligned}$$

である. より一般に, 型  $A$  と  $A$  上の型族  $B \rightarrow \mathcal{U}$  が与えられれば ( $\mathcal{U}$  はユニバース), 依存関数型  $\prod_{a:A} B(a)$  が構成でき,

$$\begin{aligned} f : \prod_{a:A} B(a), a : A &\Longrightarrow f(a) : B(a) \\ a : A, b(x) : B(x) &\Longrightarrow \lambda a. b : \prod_{a:A} B(a) \end{aligned}$$

である. さらに, 既存の型から新たな型を作るやり方として, 構成規則, 導入規則, 除去規則, 計算規則の 4 つを与える帰納的な方法がある. 例えば, 依存和型  $\sum_{x:A} B(x)$  は,

- 構成規則 :  $A : \mathcal{U}, B : A \rightarrow \mathcal{U} \Longrightarrow \sum_{x:A} B(x)$
- 導入規則 :  $a : A, b : B(a) \Longrightarrow (a, b) : \sum_{x:A} B(x)$
- 除去規則 :  $\text{ind}_{\sum_{x:A} B(x)} : \prod_{C: (\sum_{x:A} B(x)) \rightarrow \mathcal{U}} \left( \prod_{a:A} \prod_{b:B(a)} C((a, b)) \right) \rightarrow \prod_{w: \sum_{x:A} B(x)} C(w)$
- 計算規則 :  $\text{ind}_{\sum_{x:A} B(x)}(C, g, (a, b)) \equiv g(a)(b)$

で定義できる. 除去規則は, 「任意の  $w : \sum_{x:A} B(x)$  について  $C(w)$  を示したければ, 任意の  $a : A, b : B(a)$  について  $C((a, b))$  を示せばよい」と読むことができる. ここで, Curry-Howard 同型に基づいて考えると, 「ある要素  $a$  とある要素  $b$  が等しい」という命題は, なにかしらの型と対応するはずである. よってその型 identity type を,

- 構成規則 :  $A : \mathcal{U} \Longrightarrow \_ =_A \_ : \mathcal{U}$
- 導入規則 :  $\text{refl}_a : \prod_{a:A} (a =_A a)$
- 除去規則 :  $\text{ind}_{=_A} : \prod_{(C: \prod_{(x,y:A)} (x =_A y) \rightarrow \mathcal{U})} \left( \prod_{(x:A)} C(x, x, \text{refl}_x) \right) \rightarrow \prod_{(x,y:A)} \prod_{(p: x =_A y)} C(x, y, p)$
- 計算規則 :  $\text{ind}_{=_A}(C, c, x, x, \text{refl}_x) \equiv c(x)$

と定義する. 除去規則は, 依存和型のときと同様に考えると, 「任意の  $x, y : A, x = y$  について  $C(x, y, p)$  を示したければ, 任意の  $x : A$  について  $C(x, x, \text{refl}_x)$  を示せばよい」となる.

## 3 型の同型

ここで, 型と型の間と同型を定義したい. まず, 関数の間ホモトピーを定義する.

**Definition 3.1** ([1] Definition 2.4.1)  $A : \mathcal{U}, P : A \rightarrow \mathcal{U}$  とする.  $f, g : \prod_{x:A} P(x)$  に対して,

$$(f \sim g) := \prod_{x:A} (f(x) = g(x))$$

と定める.

次に, 「逆写像」を定義する.

**Definition 3.2** ([1] Definition 2.4.6)  $A, B : \mathcal{U}$ ,  $f : A \rightarrow B$  とする. このとき,  $f$  の quasi-inverse  $\text{qinv}(f)$  を,

$$\text{qinv}(f) := \sum_{g:B \rightarrow A} ((f \circ g \sim \text{id}_B) \times (g \circ f \sim \text{id}_A))$$

例えば,  $\text{id}_A$  の quasi-inverse は  $\text{id}_A$  自身である. さらに, この  $\text{qinv}$  を用いて,  $\text{isequiv}$  を,

- $\text{qinv}(f) \rightarrow \text{isequiv}(f)$
- $\text{isequiv}(f) \rightarrow \text{qinv}(f)$
- $e_1, e_2 : \text{isequiv}(f)$  ならば  $e_1 = e_2$

をみたすものとして定義したい. ここでは,

$$\text{isequiv}(f) := \left( \sum_{g:B \rightarrow A} (f \circ g \sim \text{id}_B) \right) \times \left( \sum_{h:B \rightarrow A} (h \circ f \sim \text{id}_A) \right) \quad ([1] \text{ p73 (2.4.10)})$$

と定めることにする.  $\text{isequiv}$  を使って型同士の同型を定義する.

**Definition 3.3** ([1] p73 (2.4.11))  $A, B : \mathcal{U}$  について,

$$A \simeq B := \sum_{f:A \rightarrow B} \text{isequiv}(f)$$

と定める.

型の同型については, 例えば以下のような例がある.

**Example 3.4** ([1] Lemma 2.4.12)  $A, B, C : \mathcal{U}$  について,

- $A \simeq A$
- $A \simeq B \rightarrow B \simeq A$
- $A \simeq B \rightarrow B \simeq C \rightarrow A \simeq C$

が成り立つ.

**Example 3.5** ([1] Exercise 2.10)  $\sum$  型は「結合的」である. つまり任意の型  $A$ , 型族  $B : A \rightarrow \mathcal{U}$ , 型族上の型族  $C : (\sum_{x:A} B(x)) \rightarrow \mathcal{U}$  に対して,

$$\left( \sum_{x:A} \sum_{y:B(x)} C((x, y)) \right) \simeq \left( \sum_{p:\sum_{x:A} B(x)} C(p) \right)$$

が成り立つ.

## 4 Univalence axiom

これまでに定義した  $=$  と  $\simeq$  を用いて, univalence axiom の主張を正しく述べる. まず,

$$\text{idtoeqv} : \prod_{A, B : \mathcal{U}} (A =_{\mathcal{U}} B) \rightarrow (A \simeq B) \quad ([1] \text{ p89 (2.10.2)})$$

を定める. この関数が存在することは, path induction よりわかる ([1] Lemma 2.10.1). この  $\text{idtoeqv}$  に対して,

**Axiom 4.1** ([1] Axiom 2.10.3)

$$\text{ua} : \prod_{A, B : \mathcal{U}} \text{isequiv}(\text{idtoeqv}(A, B))$$

が univalence axiom である. とくに, この公理を仮定すれば,

$$(A =_{\mathcal{U}} B) \simeq (A \simeq B)$$

が成り立つ. 2章のときのように,  $\text{ua}$  や  $\text{idtoeqv}$  を  $A =_{\mathcal{U}} B$  という型を構成する規則だと考えれば,

- 導入規則 :  $A : \mathcal{U}, B : \mathcal{U} \implies \text{ua} : (A \simeq B) \rightarrow (A =_{\mathcal{U}} B)$
- 除去規則 :  $\text{idtoeqv} \equiv \text{transport}^{X \mapsto X} : (A =_{\mathcal{U}} B) \rightarrow (A \simeq B)$
- (propositional) 計算規則 :  $\text{idtoeqv}(\text{ua}(f), x) = f(x)$
- (propositional) 一意性 : 任意の  $p : A = B$  について,  $p = \text{ua}(\text{idtoeqv}(p))$

となる ( $\text{transport}$  の定義は [1] p72 Lemma 2.3.1). univalence axiom をみたすようなユニバース  $\mathcal{U}$  を univalent であるという.

## 5 関数の外延性

関数  $f, g$  について,

$$f = g \leftrightarrow \text{任意の } f, g \text{ の定義域の要素 } x \text{ に対して, } f(x) = g(x)$$

という関数の外延性の公理について述べる. 正確には, まず path induction から, 依存関数  $f, g : \prod_{x:A} B(x)$  に対して

$$\text{happly} : (f = g) \rightarrow (f \sim g) \left( \prod_{x:A} (f(x) = g(x)) \right) \quad ([1] \text{ p86 (2.9.2)})$$

という関数を定義できる. このとき,

**Axiom 5.1** ([1] Axiom 2.9.3) 任意の  $A, B, f, g$  について,  $\text{happly}$  は equivalence である

を関数の外延性と呼ぶ. この公理から  $\text{happly}$  の quasi-inverse

$$\text{funext} : \left( \prod_{x:A} (f(x) = g(x)) \right) \rightarrow (f = g)$$

の存在が従う. この関数のことを関数の外延性と呼ぶこともある. univalence axiom のときと同じように考えると,

- 導入規則 :  $\text{funext}$
- 除去規則 :  $\text{happly}$
- (propositional) 計算規則 :  $\text{happly}(\text{funext}(h), x) = h(x) \quad (h : \prod_{x:A} (f(x) = g(x)))$
- (propositional) 一意性 :  $p = \text{funext}(x \mapsto \text{happly}(p, x)) \quad (p : f = g)$

となる.

## 6 可縮, ファイバー

この章と次の章では, univalence axiom から関数の外延性が従うことを示すために必要な定義や補題の準備をする. まずは, 型が可縮であるということを定義する.

**Definition 6.1** ([1] Definition 3.11.1)  $A$  を型とする. 中心と呼ばれる  $a : A$  が存在して, 任意の  $x : A$  に対して  $a = x$  をみたすとき,  $A$  は可縮 (contractible) であるという. このことを表す型  $\text{isContr}(A)$  を,

$$\text{isContr}(A) := \sum_{a:A} \prod_{x:A} (a = x)$$

と定める.

次に, ホモトピー論ではホモトピーファイバーに対応する概念を定める.

**Definition 6.2** ([1] Definition 4.2.4) 関数  $f : A \rightarrow B$  の点  $y : B$  の上でのファイバーを

$$\text{fib}_f(y) := \sum_{x:A} (f(x) = y)$$

と定める.

このファイバーを用いて, 関数の可縮性を定義する.

**Definition 6.3** ([1] Definition 4.4.1) 関数  $f : A \rightarrow B$  が可縮であるとは, 任意の  $y : B$  に対して  $\text{fib}_f y$  が可縮であることである. このことを表す型  $\text{isContr}(f)$  を,

$$\text{isContr}(f) := \prod_{y:B} \text{isContr}(\text{fib}_f(y))$$

と定める.

このように定義した  $\text{isContr}(f)$  について,

$$\text{isContr}(f) \simeq \text{isequiv}(f)$$

が成り立つ ([1] p138 4.5 節参照). よって, ある関数が equivalence であることを示すには, 可縮であることを示せば十分である. 可縮性に関するものでよく使う補題として, 以下のようなものがある.

**Lemma 6.4** ([1] Lemma 3.11.8) 任意の  $A, a : A$  について,  $\sum_{x:A} (a = x)$  は可縮である

**Lemma 6.5** ([1] Lemma 3.11.9)  $P : A \rightarrow \mathcal{U}$  を型族とする. このとき, 以下の2つが成り立つ.

1. 各  $P(x)$  が可縮である,  $\sum_{x:A} P(x) \simeq A$
2.  $A$  が  $a$  を中心として可縮であるとき,  $\sum_{x:A} P(x) \simeq P(a)$

この2つの補題と univalence axiom から示せることとして,

**Lemma 6.6** ([1] Lemma 4.8.1) 任意の型族  $B : A \rightarrow \mathcal{U}$  について,  $\text{pr}_1 : \sum_{x:A} B(x) \rightarrow A$  の  $a : A$  上でのファイバーは  $B(a)$  と同型である, つまり,

$$\text{fib}_{\text{pr}_1}(a) \simeq B(a)$$

が成り立つ.

*Proof.*

$$\begin{aligned}
\text{fib}_{\text{pr}_1}(a) &\equiv \sum_{u: \sum_{x:A} B(x)} \text{pr}_1(u)a \\
&\simeq \sum_{x:A} \sum_{b:B(x)} (x = a) \quad (\text{by Example 3.5}) \\
&\simeq \sum_{x:A} \sum_{b:B(x)} \sum_{p:x=a} 1 \\
&\simeq \sum_{x:A} \sum_{p:x=a} \sum_{b:B(x)} 1 \\
&\simeq \sum_{x:A} \sum_{p:x=a} B(x) \\
&\simeq B(a) \quad (\text{by Example 3.5, Lemma 6.4, Lemma 6.5})
\end{aligned}$$

□

がある. この補題は, 写像はファイブレーションと同型であるというホモトピー論での基本的な結果に対応している. 最後に, ファイバーごとの equivalence は全空間 (total space) の equivalence という言葉で特徴付けられることを示す.

**Definition 6.7** ([1] Definition 4.7.5) 型族  $P, Q : A \rightarrow \mathcal{U}$  と依存関数  $f : \prod_{x:A} P(x) \rightarrow Q(x)$  (このような関数を fiberwise map または fiberwise transformation と呼ぶ) が与えられたとき,

$$\text{total}(f) := \lambda w. (\text{pr}_1 w, f(\text{pr}_1 w, \text{pr}_2 w)) : \sum_{x:A} P(x) \rightarrow \sum_{x:A} Q(x)$$

と定める.

**Theorem 6.8** ([1] Theorem 4.7.6)  $f$  が  $A$  上の型族  $P$  と  $Q$  の間の fiberwise transformation (つまり  $f : \prod_{x:A} P(x) \rightarrow Q(x)$ ) であり,  $x : A$  と  $v : Q(x)$  が与えられたとする. このとき,

$$\text{fib}_{\text{total}(f)}((x, v)) \simeq \text{fib}_{f(x)}(v)$$

である.

*Proof.*

$$\begin{aligned}
\text{fib}_{\text{total}(f)}((x, v)) &\equiv \sum_{w: \sum_{x:A} P(x)} (\text{pr}_1 w, f(\text{pr}_1 w, \text{pr}_2 w)) = (x, v) \\
&\simeq \sum_{a:A} \sum_{u:P(a)} (a, f(a, u)) = (x, v) \quad (\text{by Example 3.5}) \\
&\simeq \sum_{a:A} \sum_{u:P(a)} \sum_{p:a=x} p_*(f(a, u)) = v \quad (\text{by [1] Theorem 2.7.2}) \\
&\simeq \sum_{a:A} \sum_{p:a=x} \sum_{u:P(a)} p_*(f(a, u)) = v \\
&\simeq \sum_{g: \sum_{a:A} a=x} \left( \sum_{u:P(\text{pr}_1(g))} (\text{pr}_2(g))_*(f(\text{pr}_1(g), u)) = v \right) \quad (\text{by Example 3.5}) \\
&\simeq \sum_{u:P(x)} (\text{refl}_x)_*(f(x, u)) = v \quad (\text{by Lemma 6.4 and Lemma 6.5 (ii) as center} \equiv (x, \text{refl}_x)) \\
&\simeq \sum_{u:P(x)} f(x, u) = v
\end{aligned}$$

□

fiberwise transformation  $f : \prod_{x:A} P(x) \rightarrow Q(x)$  が fiberwise equivalence であるということを, 任意の  $x : A$  について  $f(x) : P(x) \rightarrow Q(x)$  が equivalence であることと定めると, 以下が成り立つ.

**Theorem 6.9** ([1] Theorem 4.7.7)  $f$  を  $A$  上の型族  $P$  と  $Q$  の間の fiberwise transformation とする. このとき,  $f$  が fiberwise equivalence であることと  $\text{total}(f)$  が equivalence であることは同値である

*Proof.*

$$\begin{aligned}
f \text{ が fiberwise equivalence} &\equiv \prod_{x:A} \text{isequiv}(f(x)) \\
&\leftrightarrow \prod_{x:A} \text{isContr}(f(x)) \\
&\equiv \prod_{x:A} \prod_{v:Q(x)} \text{isContr}(\text{fib}_{f(x)}(v)) \\
&\simeq \prod_{x:A} \prod_{v:Q(x)} \text{isContr}(\text{fib}_{\text{total}(f)}((x, v))) \quad (\text{by Theorem 6.8}) \\
&\leftrightarrow \prod_{w: \sum_{x:A} Q(x)} \text{isContr}(\text{fib}_{\text{total}(f)}(w)) \\
&\equiv \text{isContr}(\text{total}(f)) \\
&\leftrightarrow \text{isequiv}(\text{total}(f))
\end{aligned}$$

□

## 7 レトラクト

この章では, 型のレトラクトと関数のレトラクトをそれぞれ定義し, 後の章で使う補題を紹介する. まず, 型のレトラクトと定義は以下のとおりである.

**Definition 7.1** ([1] p125) 型  $A, B$  について, 2 つの関数レトラクション  $r : A \rightarrow B$  とセクション  $s : B \rightarrow A$  が存在し, 更にホモトピー

$$\epsilon : \prod_{y:B} (r(s(y)) = y)$$

が存在するとき,  $B$  は  $A$  のレトラクトであるという.

このレトラクトに対して, 次の補題が成り立つ.

**Lemma 7.2** ([1] Lemma 3.11.7)  $B$  が  $A$  のレトラクトであり, かつ  $A$  が可縮であるとき,  $B$  も可縮である.

次に, 関数のレトラクトを定義する.

**Definition 7.3** ([1] Definition 4.7.2) 関数  $g : A \rightarrow B$  が関数  $f : X \rightarrow Y$  のレトラクトであるとは, 4 つのホモトピー

$$\begin{aligned} R &: r \circ s \sim \text{id}_A \\ R' &: r' \circ s' \sim \text{id}_B \\ L &: f \circ s \sim s' \circ g \\ K &: g \circ r \sim r' \circ f \end{aligned}$$

が存在するような  $r : X \rightarrow A, s : A \rightarrow X, r' : Y \rightarrow B, s' : B \rightarrow Y$  が存在し, 更に任意の  $a : A$  に対して, パス

$$H(a) : K(s(a)) \cdot r'(L(a)) = g(R(a)) \cdot R'(g(a))^{-1}$$

が存在することをいう.

この定義において, ホモトピー  $R, R'$  はそれぞれ  $A$  が  $X$  のレトラクト,  $B$  が  $Y$  のレトラクトであるという条件である. また, 型についてのレトラクションは, 上の定義において  $B \equiv Y \equiv \mathbf{1}$  としたときの特別な場合である. 関数のレトラクトについて, まず次のことが成り立つ.

**Lemma 7.4** ([1] Lemma 4.7.3) 関数  $g : A \rightarrow B$  が関数  $f : X \rightarrow Y$  のレトラクトであるならば,  $\text{fib}_g(b)$  は  $\text{fib}_f(s'(b))$  のレトラクトである. ただし,  $s'$  は Definition 7.3 のものとする.

*Proof.* 証明の概略を述べる. Definition 7.3 のとおりに記号を定める. 任意の  $b : B$  に対して,

$$\begin{aligned} \varphi_b &: \text{fib}_g(b) \rightarrow \text{fib}_f(s'(b)), & \varphi(a, p) &\equiv (s(a), L(a) \cdot s'(p)) \\ \psi_b &: \text{fib}_f(s'(b)) \rightarrow \text{fib}_g(b), & \psi(x, q) &\equiv (r(x), K(x) \cdot r'(q) \cdot R'(b)) \end{aligned}$$

と定義したとき, ( $\Sigma$  の induction から) 任意の  $(a, p) : \text{fib}_g(b)$  に対して  $\psi_b \varphi(a, p) = (a, p)$  が成り立つ, つまり

$$\prod_{b:B} \prod_{a:A} \prod_{p:g(a)=b} \psi_b \varphi(a, p) = (a, p)$$

を示せば良い. 詳細は [1] p140 参照のこと. □

この補題から, equivalence とレトラクトに関する補題が従う.

**Theorem 7.5** ([1] Theorem 4.7.4)  $g$  が equivalence な  $f$  のレトラクトであれば,  $g$  も equivalence である.

*Proof.* Lemma 7.4 より,  $g$  の任意のファイバーは  $f$  のファイバーのレトラクトであり,  $\text{isequiv}(f) \leftrightarrow \text{isContr}(f)$  と Lemma 7.2 から  $\text{isequiv}(g)$  が分かる. □



## 8 Univalence implies function extensionality

最後に, univalence axiom から関数の外延性が導けることを示す. 証明は, まず univalence axiom から弱い関数の外延性が導けることを示し, 次に弱い関数の外延性から通常関数の外延性が従うことを示すという2段階で行われる.  $\mathcal{U}$  をユニバースとし, どこで univalent を仮定しているかを明記することにする.

**Definition 8.1** ([1] Lemma 4.9.1) 弱い関数の外延性の原理を, 任意の  $A$  上の型族  $B : A \rightarrow \mathcal{U}$  に対して

$$\left( \prod_{x:A} \text{isContr}(P(x)) \right) \rightarrow \text{isContr} \left( \prod_{x:A} P(x) \right)$$

が成り立つことと定義する.

次の補題は関数の外延性を仮定すればすぐに証明できるが, 関数の外延性を仮定しなくても univalence axiom から証明できるのがポイントである.

**Lemma 8.2** ([1] Lemma 4.9.2)  $\mathcal{U}$  が univalent であると仮定する. 任意の  $A, B, X : \mathcal{U}$  と任意の  $e : A \equiv B$  に対して,

$$(X \rightarrow A) \simeq (X \rightarrow B)$$

の同型射は,  $(e \text{ の同型射 }) \circ -$  で与えられる.

*Proof.* ある  $p : A = B$  について  $e = \text{idtoeqv}(p)$  と仮定してよい. よって, path induction より  $B \equiv A$ ,  $p \equiv \text{refl}_A$  とすれば,  $e = \text{idtoeqv}(\text{refl}_A) = \text{id}_A$  となる. このとき,  $(e \circ -)$  は  $(\text{id}_A \circ -)$  となり, これは  $X \rightarrow A$  上の  $\text{id}$  であるので, equivalence である.  $\square$

**Corollary 8.3** ([1] Corollary 4.9.3)  $P : A \rightarrow \mathcal{U}$  を可縮な型の族, つまり  $\prod_{x:A} \text{isContr}(P(x))$  とする. このとき, 射影  $\text{pr}_1 : (\sum_{x:A} P(x)) \rightarrow A$  は equivalence である. 更に,  $\mathcal{U}$  が univalent であれば,

$$(\text{pr}_1 \circ -) : \left( A \rightarrow \sum_{x:A} P(x) \right) \simeq (A \rightarrow A)$$

である.

*Proof.* 前半について, Lemma 6.6 から,  $x : A$  について,  $\text{fib}_{\text{pr}_1}(x) \equiv P(x)$  である.  $P$  が可縮な型の族なので,  $\text{isContr}(\text{pr}_1)$  が成り立つ. 後半については, Lemma 8.2 よりわかる.  $\square$

上記の  $\alpha \equiv (\text{pr}_1 \circ -)$  のホモトピーファイバーは可縮であるため, 特に  $\text{id}_A$  上でも可縮, つまり  $\text{isContr}(\text{fib}_\alpha(\text{id}_A))$  である. よって,  $\prod_{x:A} P(x)$  が  $\text{fib}_\alpha(\text{id}_A)$  のレトラクトであることを示せば, 弱い関数の外延性が univalence axiom から従うことになる.

**Theorem 8.4** ([1] Theorem 4.9.4)  $\mathcal{U}$  が univalent であるとし,  $P : A \rightarrow \mathcal{U}$  を可縮な型の族とする.  $\alpha : (A \rightarrow \sum_{x:A} P(x)) \equiv (A \rightarrow A)$  とすると,  $\prod_{x:A} P(x)$  は  $\text{fib}_\alpha(\text{id}_A)$  のレトラクトである. つまり,  $\prod_{x:A} P(x)$  は可縮となるので, univalence axiom から弱い関数の外延性の原理が従う.

*Proof.* 関数  $\varphi : (\prod_{x:A} P(x)) \rightarrow \text{fib}_\alpha(\text{id}_A)$ ,  $\psi : \text{fib}_\alpha(\text{id}_A) \rightarrow \prod_{x:A} P(x)$  をそれぞれ,

$$\begin{aligned} \varphi(f) &\equiv (\lambda x. (x, f(x)), \text{refl}_{\text{id}_A}) \\ \psi(g, p) &\equiv \lambda x. \text{happly}(p, x)_*(\text{pr}_2(g(x))) \end{aligned}$$

と定める. このとき,

$$\begin{aligned}\psi(\varphi(f)) &\equiv \lambda x. \text{happly}(\text{refl}_{id_A}, y)_*(\text{pr}_2(x, f(x))) \\ &\equiv \lambda x. \text{refl}_*(f(x)) \\ &\equiv \lambda x. f(x) \\ &= f\end{aligned}$$

より成り立つ. □

**Theorem 8.5** ([1] Theorem 4.9.5) 弱い関数の外延性から通常関数の外延性が従う.

*Proof.* 示したいことは

$$\prod_{A:\mathcal{U}} \prod_{P:A \rightarrow P} \prod_{f,g:\prod_{x:A} P(x)} \text{isequiv}(\text{happly}(f, g))$$

である. このとき,

$$\prod_{g:\prod_{x:A} P(x)} \text{isequiv}(\text{happly}(f, g))$$

は,  $\lambda g. \text{happly}(f, g)$  が fiberwise equivalence であるということなので, Theorem 6.9 から,

$$\text{total}(\lambda g. \text{happly}(f, g)) : \sum_{g:\prod_{x:A} P(x)} (f = g) \rightarrow \sum_{g:\prod_{x:A} P(x)} (f \sim g)$$

が equivalence であればよい. ここで, Lemma 6.4 より送り元の型は可縮なので, 送り先の型

$$\sum_{g:\prod_{x:A} P(x)} \prod_{x:A} (f(x) = g(x))$$

が可縮であれば十分である. [1] Theorem 2.15.7 の証明のうち, 関数の外延性を仮定しなければ,

$$\sum_{g:\prod_{x:A} P(x)} \prod_{x:A} (f(x) = g(x))$$

は

$$\prod_{x:A} \sum_{u:P(x)} f(x) = u$$

のレトラクトであることが示せる (逆向きの合成が  $\text{id}$  とホモトピックであることにのみ関数の外延性を使っている). さらに,  $\sum_{u:P(x)} f(x) = u$  は Lemma 6.4 から可縮であるため, 弱い関数の外延性から  $\prod_{x:A} \sum_{u:P(x)} f(x) = u$  も可縮になる. したがって,

$$\sum_{g:\prod_{x:A} P(x)} \prod_{x:A} (f(x) = g(x))$$

も可縮である. □

**Remark 8.6** Theorem 8.5 の証明には univalent axiom は用いていない.

## 参考文献

[1] The Univalent Foundations Program, *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*