修士論文の要旨

2023 年 2 月 8 日

主結果

本論文の主結果は, q-類似の初等的な結果を Coq によって形式化するものである. 形式化とは, 証明のために用意された人工言語に数学的な主張とその証明を翻訳し, 証明が論理学の推論規則に沿って正しく書かれていることをコンピュータを用いて機械的に検証することである. また Coq はこの形式化を行うためのソフトウェアの一つであり, このようなソフトウェアを総称して定理証明支援系と呼ぶ.

具体的な形式化の対象は Victor Kac, Pokman Cheung の *Quantum Calculus* の 4 章 (4.1) 式の q-Taylor 展開, 及びその系として得られる Gauss's binomial formula である. 本論文での q-類似に関する定義や定理, 証明は *Quantum Calculus* によるものだが, その形式化を行ったという点において独自性がある.

q-類似

q-類似は, 初めは Euler の分割に登場し, その後 Gauss や Heine らによって超幾何関数の研究の中で進展していった. q-類似を系統的に発展させたのは Jackson であり, また q-積分の概念も彼によって導入された.

q-類似とは, 実数パラメータ q, 実数上の関数 f に対して

$$D_q f(x) := \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}$$

で定義される q-微分を出発点とし, この q-微分に対してうまく振る舞い, かつ q を極限で 1 に近づけると通常の定義に一致するように数学の諸概念を一般化するものである. 例えば, 自然数 n について x^n を定義に沿って q-微分すると,

$$D_q x^n = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{q^n - 1}{q-1} x^{n-1}$$

となる. 通常の微分では, $(x^n)' = nx^{n-1}$ となることと比較して, n の q-類似 $[n]$ を

$$[n] = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

と定める. また, $(x-a)^n$ の q-類似は,

$$(x-a)_q^n := \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ (x-a)(x-qa)\cdots(x-q^{n-1}a) & (n \geq 1) \end{cases}$$

と定義することで, q-微分と自然数の q-類似に対してうまく振る舞う, つまり

$$D_q (x-a)_q^n = [n](x-a)_q^{n-1}$$

が成り立つ. 更に, 階乗と二項係数の q-類似をそれぞれ

$$[n]! := \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ [n] \times [n-1] \cdots [1] & (n \geq 1) \end{cases}, \quad \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} := \frac{[n]!}{[j]![n-j]!}$$

で定めれば, q-Taylor 展開, Gauss's binomial formula は以下のように書ける.

q-Taylor 展開

$f(x)$ を N 次の実係数多項式とする. 任意の $c \in \mathbb{R}$ について

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} (Dq^j f)(c) \frac{(x-c)_q^j}{[j]!}$$

が成り立つ.

Gauss's binomial formula

$x, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ について

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{\frac{j(j-1)}{2}} a^j x^{n-j}$$

が成り立つ.

この 2 つを形式化することが本論文の主目的である.

Coq

Coq とは, 前述のとおり定理証明支援系の 1 つであり, 人間がチェックすることが難しい複雑な証明でも正しさが保証され, また証明付きプログラミングにも応用される.

Coq は型付き λ 計算という理論に基づいている. λ 計算とは, 大まかにいえば計算の実行をモデル化したもので, Church によって考案された. その後, もともとは Russell のパラドクスを回避するために Russell 自身によって導入された型理論と結びついて型付き λ 計算 (こちらも Church によって考案された) として発展し, Martin-Löf によって直観主義型理論が開発され, 構成主義的な数学の基礎付けがなされた. 更により表現力の高い λ 計算の研究が続けられ, Coquand と Huet の開発した CoC(Calculus of Constructions) と呼ばれる 2 階述語論理よりも表現力の高い型付き λ 計算を用いて Coq が開発された. この CoC を用いていることから, Coq には補題とその証明を同じ言語で記述できるという特徴がある. また, 現在の Coq には Paulin-Mohring によって帰納的型を導入した λ 計算である CIC (Calculus of Inductive Constructions) が用いられている.

λ 計算については修士 1 年次に少人数クラスで学習した内容であるため, Coq との関係にも触れつつ本論文でも説明を加える. 更に, 型と形式化に関する数学の理論として, Homotopy Type Theory がある. これについては修士 2 年次に少人数クラスで学んだため, q-類似の形式化とは章を分け, 少人数クラスのまとめとして概要を述べる. 今回の証明に関しては, Coq の標準ライブラリに加えて, 数学の証明のために整備されたライブラリ群である mathcomp も用いている. Coq が用いられた有名な例として, 四色定理や Feit-Thompson の定理 (奇数位数定理) などがあり, それらも mathcomp に基づいている.

構成

構成は以下の通りである. まず 1.1 節で q-類似の概要について説明し, 1.2 節で修士 1 年次に少人数クラスで学習した H.P.Barendregt の *Lambda Calculi with Types* に沿って, 型付き λ 計算について述べる. 1.3 節は Coq の概要についてで, 特に 1.3.1 節で Coq や mathcomp の使い方を具体例を交えて説明する. これらの準備のもと, 1.4 節から本題の形式化に入る. *Quantum Calculus* での定義, 定理を述べた後, その形式化を与え, 必要であれば形式化をするにあたっての注意点を述べることを繰り返すという流れである. 証明の方針等は基本的に *Quantum Calculus* の通りであるが, 1.4.3 節では一部その内容から離れ, 多項式として q-微分や q-二項式を定義しなおして形式化を行っている. これらの新たな定義が多項式に対してのもとの定義を適用したものと一致していることの証明も行っている. また, 2 章で修士 2 年次に少人数クラスで学習した内容についてまとめている.