Filtragem no Domínio da Frequência
Parte I

BCC36F - Processamento de Imagens

Profª. Drª. Aretha Barbosa Alencar
arethaalencar@utfpr.edu.br

Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Departamento Acadêmico de Computação (DACOM)

Campo Mourão - PR

Sumário

Sumário

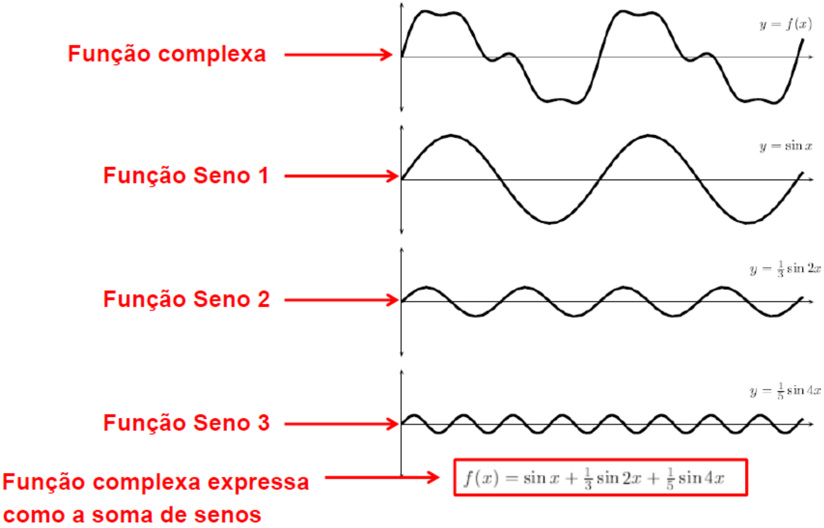
Introdução

- A compreensão da área exige conhecer a **transformada de Fourier** e o **domínio da frequência**.
- Começamos com um breve delineamento das origens da transformada de Fourier e o seu impacto na matemática, ciência e engenharia.
- Seguimos com o passo-a-passo para derivar as transformadas uni- e bi-dimensionais discretas de Fourier.

História de Fourier

- O matemático francês Jean Baptiste Joseph Fourier nasceu em 1768.
- Fourier é lembrado pela teoria desenvolvida em 1807 e publicada em 1822 no seu livro, *La Théorie Analitique de la Chaleur* (A Teoria Analítica do Calor).
- **A contribuição de Fourier:** qualquer função periódica pode ser expressa como soma de senos e/ou cossenos de diferentes frequências, cada uma multiplicada por um coeficiente diferente. Essa formulação é chamada de **Série de Fourier**.

História de Fourier



História de Fourier

- Mesmo funções não periódicas, mas cuja área sob a curva é finita, podem ser expressas como integral de senos e /ou cossenos multiplicados por uma função peso. A formulação neste caso é a **Transformada de Fourier**.
- O advento dos computadores digitais e a formulação do algoritmo de **Transformada Rápida de Fourier (FFT)** no início dos anos 1960 revolucionaram o campo de processamento de imagens e sinais.
- Ambas as representações compartilham uma importante característica de que podem ser reconstruídas completamente usando um **processo inverso**.

Números Complexos

- Um **número complexo** é definido como:

$$C = R + jI$$

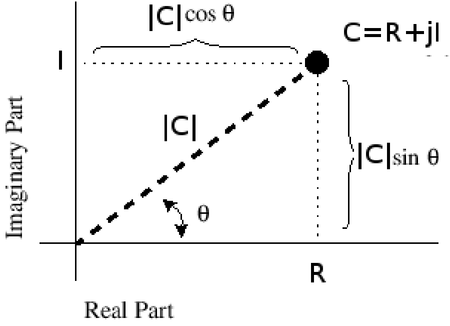
onde R e I são números reais, e j é um número imaginário definido por $j = \sqrt{-1}$.

- O **conjugado** de um número complexo C, denotado por C^*, é definido como:

$$C^* = R - jI$$

Números Complexos

- Número complexos podem ser vistos geometricamente como pontos num plano, chamado **plano complexo**, cujo eixo horizontal representa a parte real e cujo eixo vertical representa a parte imaginária.
  - O número complexo $C = R + jI$ se tornaria o ponto (R, I) no plano complexo.



- Dessa forma, temos que $R = |C|\cos\theta$ e $I = |C|\sin\theta$.

Números Complexos

- Também é útil representar um número complexo $C = R + jI$ em **coordenadas polares**:

$$C = R + jI$$
$$C = |C|\cos\theta + j|C|\sin\theta$$
$$C = |C|(\cos\theta + j\sin\theta)$$

onde:

- $|C| = \sqrt{R^2 + I^2}$ é o comprimento do vetor saindo da origem e indo até o ponto (R, I) no plano complexo;
- e θ é o ângulo entre o vetor e o eixo real definido por:

$$\tan\theta = \textit{cateto oposto}/\textit{cateto adjacente}$$
$$\tan\theta = (I/R)$$
$$\theta = \arctan(I/R)$$

Números Complexos

- A **fórmula de Euler** é definida por:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

  onde $e = 2,71828\ldots$.

- A fórmula de Euler nos dá outra poderosa representação de números complexos:

$$C = |C|e^{j\theta}$$

- Por exemplo, o número complexo $1 + j2$ é igual a $\sqrt{5}e^{j\theta}$, onde $\theta = \arctan(2/1) = 63,4^\circ$ ou $1,1$ radianos.

Sumário

Sumário

Transformada de Fourier 1D

- A **transformada de Fourier** de uma função contínua $f(t)$, é definida pela equação:

$$F(\mu) = \Im\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} dt \qquad (1)$$

  onde μ é também uma variável contínua.

- Dada $F(\mu)$, podemos obter $f(t)$ usando a **transformada inversa de Fourier**:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{j2\pi\mu t} d\mu \qquad (2)$$

- Usando a fórmula de Euler podemos expressar a transformada de Fourier também como:

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\cos(2\pi\mu t) - j\sin(2\pi\mu t)\right] dt$$

Transformada de Fourier 1D

- Uma função contínua simples do tipo *box plot* uni-dimensional.

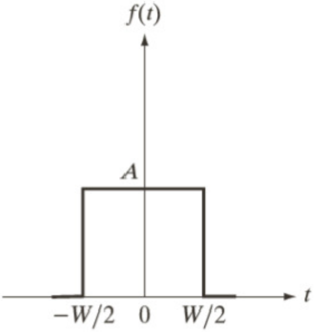


Figura: (a) Uma função contínua simples.

Transformada de Fourier 1D

- Transformada de Fourier da função do slide anterior[1]:

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi\mu t}dt = \int_{-W/2}^{W/2} Ae^{-j2\pi\mu t}dt$$
$$= AW\frac{\sin(\pi\mu W)}{(\pi\mu W)}$$

  onde a identidade trigonométrica foi usada $\sin\theta = (e^{j\theta} - e^{-j\theta})/2j$
- O resultado do último passo contém a função *sinc*:

$$sinc(m) = \frac{\sin(\pi m)}{(\pi m)}$$

[1] ver Apêndice para cálculo da integral (slides 36 e 37)

Transformada de Fourier 1D

- A função $sinc(m) = \frac{\sin(\pi m)}{(\pi m)}$ onde $sinc(0) = 1$ e $sinc(m) = 0$ para todos outros valores inteiros de m.
- Em geral, a transformada de Fourier contém termos complexos, e é costume trabalhar com a magnitude da transformação (um valor real), que é chamada de **espectro de Fourier** ou espectro de frequência:

$$|F(\mu)| = AW \left| \frac{\sin(\pi\mu W)}{(\pi\mu W)} \right|$$

Transformada de Fourier 1D

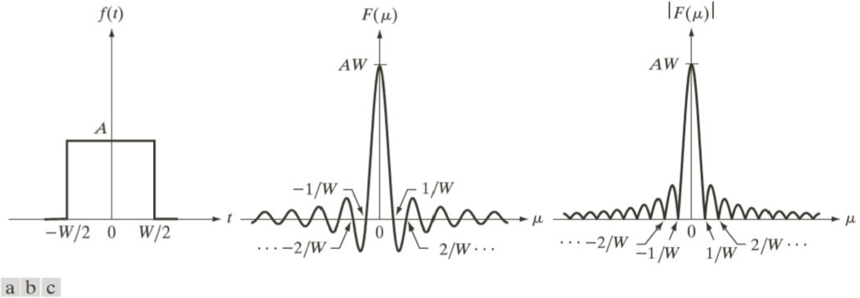


Figura: (a) Uma função contínua simples; (b)) A transformada de Fourier da função; (c) O espectro de Fourier. Todas as funções se estendem ao infinito em ambos os sentidos.

Observe que:

- as posições de zeros em ambas as figuras são inversamente proporcionais a largura W, da função.
- a altura dos picos decrescem com a distância da origem.
- a função estende ao infinito positivo e negativo de μ.

Sumário

Transformada de Fourier Discreta (DFT) 1D

- A **transformada de Fourier** de uma função **discreta** de uma variável, $f(x)$, $x = 0, 1, 2, \ldots, M-1$, é dada por:

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M} \qquad u = 0, 1, 2, \ldots, M-1 \tag{3}$$

- A transformada de Fourier discreta inversa 1D pode ser obtida por:

$$f(x) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{j2\pi ux/M} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, M-1 \tag{4}$$

- Para computar $F(u)$, comece atribuindo $u = 0$ no termo exponencial e some para todos os valores x. Depois repita para $u = 1, 2, 3$ até $M - 1$.

Sumário

Sumário

Transformada de Fourier 2D

- A transformada de Fourier de uma função $f(t, z)$ de duas variáveis contínuas, t e z, é dada por:

$$F(\mu, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) e^{-j2\pi(\mu t + vz)} dt\, dz \tag{5}$$

- A inversa dessa transformada pode ser obtida por:

$$f(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu, v) e^{j2\pi(\mu t + vz)} d\mu\, dv \tag{6}$$

onde μ e v são as variáveis de frequência.

Transformada de Fourier 2D

- Transformada de Fourier da função do próximo slide:

$$\begin{aligned} F(\mu, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) e^{-j2\pi(\mu t + vz)} dt\, dz \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-Z/2}^{Z/2} A e^{-j2\pi(\mu t + vz)} dt\, dz \\ &= ATZ \left[\frac{\sin(\pi \mu T)}{(\pi \mu T)}\right] \left[\frac{\sin(\pi v Z)}{(\pi v Z)}\right] \end{aligned}$$

- A magnitude (espectro) é dado por:

$$|F(\mu, v)| = ATZ \left|\frac{\sin(\pi \mu T)}{(\pi \mu T)}\right| \left|\frac{\sin(\pi v Z)}{(\pi v Z)}\right|$$

Transformada de Fourier 2D

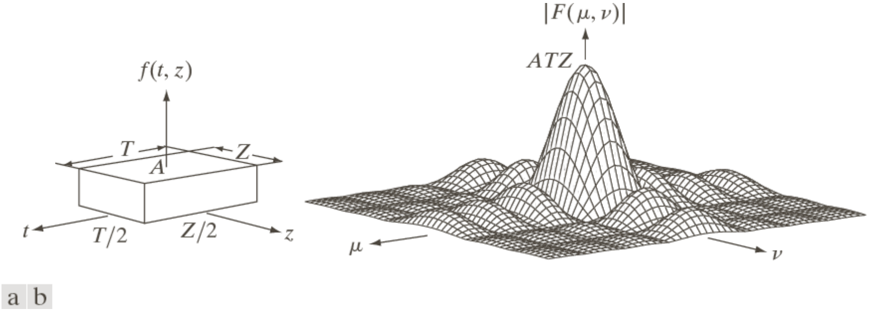


Figura: (a) Uma função contínua de duas variáveis (com valor A, se t e z estão no intervalo $[-T/2, T/2]$ e $[-Z/2, Z/2]$; e zero, caso contrário); (b) Uma seção do espectro de Fourier dessa função.

A localização dos zeros no espectro é inversamente proporcional aos valores de T e Z. O bloco é mais longo no eixo t, assim o espectro é mais “contraído” ao longo do eixo μ.

Sumário

Transformada de Fourier Discreta (DFT) 2D

- A transformada de Fourier de uma função discreta de duas variáveis $f(x, y)$, $x = 0, 1, 2, \ldots, M-1$ e $y = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, é dada por:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)} \tag{7}$$

- A inversa pode ser obtida por:

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)} \tag{8}$$

- Para computar $F(u, v)$, comece atribuindo $u = v = 0$ no termo exponencial e some para todos os valores de x e y. Depois repita para $u = 1, 2, 3, \ldots, M-1$ e $v = 1, 2, \ldots, N-1$

Sumário

Transformada de Fourier – Espectro de Fourier e Ângulo de Fase

- Dados que os componentes da transformada de Fourier são em geral números complexos, esse podem ser expressados em coordenadas polares:

$$F(u,v) = |F(u,v)|e^{j\phi(u,v)}$$

onde a **magnitude ou espectro** de uma transformada de Fourier é dado por:

$$|F(u,v)| = \left[R^2(u,v) + I^2(u,v)\right]^{1/2}$$

e o **ângulo de fase** por:

$$\phi(u,v) = \arctan\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]$$

Transformada de Fourier – Componente DC do Espectro

- O valor da transformada de Fourier na posição $(u, v) = (0, 0)$ é dado por:

$$F(0,0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$$

- $F(0,0)$ é a **componente dc do espectro** ("*direct current*", i.e., corrente de frequência zero).

Transformada de Fourier – Periodicidade

- Como no caso 1D, a transformada de Fourier 2D e sua inversa são **infinitamente periódicas** nas direções de u e v:

$$F(u,v) = F(u + k_1 M, v) = F(u, v + k_2 N) = F(u + k_1 M, v + k_2 N)$$

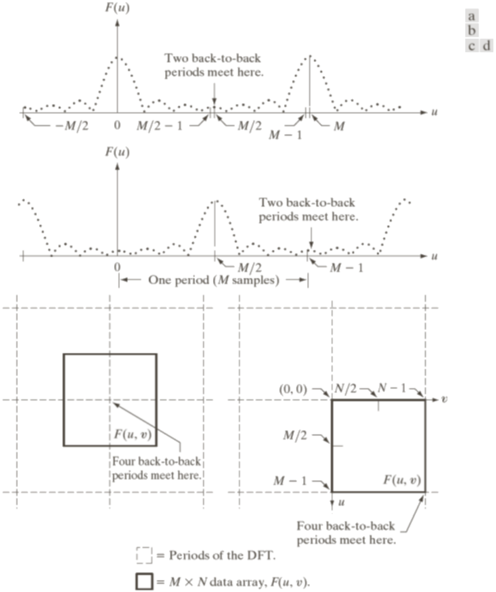
  e

$$f(x,y) = F(x + k_1 M, y) = F(x, y + k_2 N) = F(x + k_1 M, y + k_2 N)$$

  onde k_1 e k_2 são inteiros.

- Como mostrado na imagem do próximo slide, a transformada de Fourier 1D no intervalo 0 a $M-1$ consiste de dois meio períodos encontrando-se no ponto $M/2$.

Transformada de Fourier – Periodicidade



- (a) DFT 1D mostrando infinitos números de períodos;
- (b) DFT 1D obtida multiplicando-se $f(x)$ por $(-1)^x$ antes de calcular $F(u)$;
- (c) DFT 2D infinitos números de períodos.
- (d) DFT 2D obtida multiplicando-se $f(x,y)$ por $(-1)^{x+y}$ antes de calcular $F(u,v)$;

Transformada de Fourier – Periodicidade

- Dessa forma, é uma prática comum **multiplicar a imagem de entrada por** $(-1)^{x+y}$ antes de computar a transformada de Fourier.
- Devido a propriedades de exponenciais, temos que:

$$\Im\left[f(x,y)(-1)^{x+y}\right] = F(u - M/2, v - N/2)$$

- Essa equação afirma que a origem da transformada de Fourier de $f(x,y)(-1)^{x+y}$ (i.e., $F(0,0)$) é localizada em $u = M/2$ e $v = N/2$.
- Ou seja, multiplicar $f(x,y)$ por $(-1)^{x+y}$ desloca a origem de $F(u,v)$ para coordenadas de frequência $(M/2, N/2)$.

Transformada de Fourier – Conjugado simétrico

- Se $f(x,y)$ é real, a transformada de Fourier dessa função é **conjugada simétrica:**

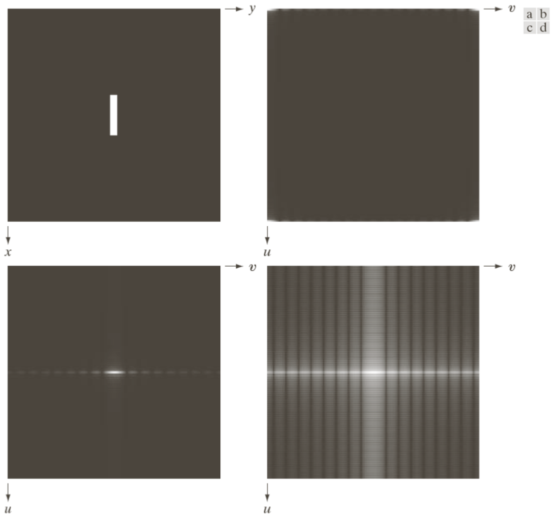
$$F^*(u,v) = F(-u,-v)$$

- Dessa forma, também temos que:

$$|F(u,v)| = |F(-u,-v)|$$

que noz diz que o espectro da transformada de Fourier é **simétrico**.

Transformada de Fourier – Periodicidade



- (a) Imagem original.
- (b) Espectro da DFT de (a)
- (c) Espectro de DFT de (a) obtida multiplicando-se $f(x,y)$ por $(-1)^{x+y}$ antes de calcular $F(u,v)$;
- (d) Espectro de DFT de (a) obtida multiplicando-se $f(x,y)$ por $(-1)^{x+y}$ antes de calcular $F(u,v)$ e aplicação de transformação logarítmica sobre espectro.

Transformada de Fourier – Teorema da Convolução 2D

- A relação mais fundamental entre o domínio do espaço e da frequência é dado pelo **teorema da convolução**.
- A convolução espacial discreta de duas funções $f(x,y)$ e $h(x,y)$ é dada por:

$$f(x,y) \star h(x,y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) h(x-m, y-n)$$

onde $x = 0, 1, 2, \ldots, M-1$ e $y = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.

Transformada de Fourier – Teorema da Convolução 2D

- O teorema da convolução nos diz que a DFT inversa do produto $F(u,v)H(u,v)$ resulta em $f(x,y)\bigstar h(x,y)$, que é a convolução espacial 2D de f e h:

$$f(x,y)\bigstar h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)H(u,v)$$

- Similarmente, a DFT da convolução espacial resulta no produto da transformações no domínio da frequência.
- A seta dupla, $\Leftrightarrow$, é usada para indicar que os lados direito e esquerdo das expressões formam um par de transformações de Fourier.

Sumário

Função Box Plot 1D

- Uma função contínua simples do tipo *box plot* uni-dimensional.

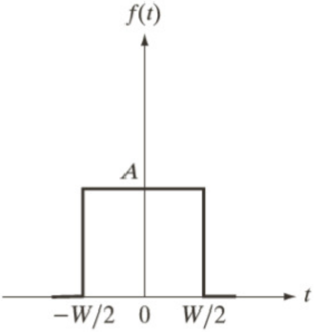


Figura: (a) Uma função contínua simples.

Transformada de Fourier 1D

- Transformada de Fourier da função do slide anterior:

$$
\begin{aligned}
F(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi\mu t}dt = \int_{-W/2}^{W/2} Ae^{-j2\pi\mu t}dt \\
&= \frac{-A}{j2\pi\mu}\left[e^{-j2\pi\mu t}\right]_{-W/2}^{W/2} = \frac{-A}{j2\pi\mu}\left[e^{-j\pi\mu W} - e^{j\pi\mu W}\right] \\
&= \frac{A}{j2\pi\mu}\left[e^{j\pi\mu W} - e^{-j\pi\mu W}\right] \\
&= AW\frac{\sin(\pi\mu W)}{(\pi\mu W)}
\end{aligned}
$$

onde a identidade trigonométrica foi usada $\sin\theta = (e^{j\theta} - e^{-j\theta})/2j$

- O resultado do último passo contém a função $sinc$:

$$
sinc(m) = \frac{\sin(\pi m)}{(\pi m)}
$$

Referências

- Gonzales, R. C. et al. **Digital Image Processing**. Prentice Hall, Terceira Edição, 2008, ISBN 9780131687288.
  - Capítulo 4 — Filtering in the Frequency Domain

Dúvidas

?