理想測定で、測定後状態はどうなるか？の 2準位系版（と雑に一般化）

S 〜〜〜 D $= |\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ とする。

$|0\rangle, |1\rangle$ 　　　 $|\uparrow\rangle$ 　 $|\downarrow\rangle$

測定後の状態

$$\hat{\rho}(m) = \frac{\mathrm{Tr}_D\left[\left(\hat{I}\otimes\hat{P}_M(m)\right)\hat{\rho}_{SD}\left(\hat{I}\otimes\hat{P}_M(m)\right)\right]}{\mathrm{Tr}_{SD}\left[\hat{\rho}_{SD}\left(\hat{I}\otimes\hat{P}_M(m)\right)\right]}$$

であるから

設定

S系の $|0\rangle_S, |1\rangle_S$ を、D系の $|\uparrow\rangle_D, |\downarrow\rangle_D$ に対応させるユニタリ U_{SD} を考える。（具体的に U_{SD} をどう作るかは、ボイン基底測定の簡略化で済むので略）また以下、$|0\rangle_S = |0\rangle$ 等添字も略す。このとき

$\hat{\rho}_S = |\psi_S\rangle\langle\psi_S|$, $|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|0\rangle + |1\rangle\}$ 　Dで、$|\uparrow\rangle$ が観測されたとして、$\hat{\rho}(m)$ がどうなるかを見たい。

$$\hat{\rho}_{SD} = \frac{1}{2}\left(|0\rangle|\uparrow\rangle + |1\rangle|\downarrow\rangle\right)\left(\langle\uparrow|\langle 0| + \langle\downarrow|\langle 1|\right),\quad \hat{P}_M(m) = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$$ を代入する。

$$\mathrm{Tr}_D\, \hat{\rho}_{SD}\left(I\otimes|\uparrow\rangle\langle\uparrow|\right) = \langle\uparrow|\rho_{SD}\left(I\otimes|\uparrow\rangle\langle\uparrow|\right)|\uparrow\rangle$$

$$\langle\downarrow|\rho_{SD}\left(I\otimes|\uparrow\rangle\cancel{\langle\uparrow|\,)\,|\downarrow\rangle}\right.$$

$$= \langle\uparrow|\rho_{SD}\cdot I\,|\uparrow\rangle = \langle\uparrow|\rho_{SD}|\uparrow\rangle$$

$$\boxed{\langle\uparrow|\hat{\rho}_{SD}|\uparrow\rangle = \frac{1}{2}\langle\uparrow|\left(|0\rangle|\uparrow\rangle + |1\rangle|\downarrow\rangle\right)\left(\langle\uparrow|\langle 0| + \langle\downarrow|\langle 1|\right)|\uparrow\rangle}$$ より

$$= \frac{1}{2}\,|0\rangle\langle 0|$$

$$\mathrm{Tr}_{SD}\, \hat{\rho}_{SD} = \frac{1}{2}$$

よって $\hat{\rho}(m) = \dfrac{0.5\ |0\rangle\langle 0|}{0.5} = |0\rangle\langle 0|$

純粋状態になる。

n準位系でも、D系の $\hat{P}_M(m) = |m\rangle\langle m|$ のおかげで、$\mathrm{Tr}_D\, \rho_{SD}\left(I\otimes\hat{P}_M(m)\right)$ は、理想測定、$|\psi\rangle = \sum|\psi_i\rangle c_i$ と $\{|m_i\rangle\}$ で

$$U_{SD}|\psi\rangle|0\rangle = \sum_i |\psi_i\rangle|m_i\rangle c_i$$ が成立するなら pure state になることがわかる。