UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA

ALGA – MATRIZ INVERSA

1. Cálculo da matriz inversa, usando determinantes

Matriz Adjunta

Dada uma matriz A. Com os cofactores $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ dos elementos a_{ij} da matriz A podemos formar uma nova matriz A, denominada matriz dos cofactores de A, $\overline{A} = (\Delta_{ij})$.

$$\overline{A} = (\Delta_{ij}) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \cdots & \Delta_{2n} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} & \cdots & \Delta_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \Delta_{n3} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemplo: Determinar a matriz dos cofactores da Matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

Resolução: $\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 2$; $\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 8$; $\Delta_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -11$

$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -1$; $\Delta_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5$; $\Delta_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 7$

$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1$ $\quad \Delta_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2$ $\quad \Delta_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3$

Então, $\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -11 \\ -1 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Definição: Dada uma matriz quadrada A, chamamos de matriz adjunta de A à transposta da matriz dos cofactores de A, isto é $adjA = \overline{A}'$.

No Exemplo anterior $adjA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \\ -11 & 7 & -3 \end{pmatrix}$

Teorema: $A \cdot \overline{A}' = (\det A) \cdot I$

Vamos verificar este teorema a partir do exemplo anterior.

$A \cdot \overline{A}' = (\det A) \cdot I$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \\ -11 & 7 & -3 \end{pmatrix} = \det A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definição: Dada uma matriz quadrada A de ordem n, chamamos de inversa de A a uma matriz B tal que A · B = B · A = I, onde I é a matriz identidade. Denomidamos A^{-1} para inversa de A.

Suponhamos agora que $A_{n\times n}$ tenha inversa, isto é, existe A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = I$. Usando o determinante temos, $\det(A \cdot A^{-1}) = \det I \Leftrightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = 1$.
Da última relação concluímos que se A tem inversa então.

1. $\det A \neq 0$
2. $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

Ou seja $\det A \neq 0$, é condição necessária para que A tenha inversa.
Veremos de seguida que esta condição é também suficiente:
Sabemos que $A \cdot \overline{A}' = (\det A) \cdot I$. Considerando $\det A \neq 0$ podemos afirmar que $A \cdot \dfrac{1}{\det A}\overline{A}' = I$, então.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(adjA)$$

Teorema: uma matriz quadrada A admite uma inversa se, e somente se $\det A \neq 0$.

Exemplo: Determine a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Resolução: $\Delta_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -19$; $\Delta_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 19$; $\Delta_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -19$

$\Delta_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -5$; $\Delta_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10$; $\Delta_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -11$

$\Delta_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4$ $\Delta_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -8$ $\Delta_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 5$

Então, A matriz dos cofactores é $\overline{A} = \begin{pmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$ e a Adjunta é

$$adjA = \overline{A}' = \begin{pmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{pmatrix}$$

Sabendo que o $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -19$, logo $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(adjA) = \dfrac{1}{-19}\begin{pmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{19} & -\frac{4}{19} \\ -1 & -\frac{10}{19} & \frac{8}{19} \\ 1 & \frac{11}{19} & -\frac{5}{19} \end{pmatrix}$$

Propriedades das matrizes inversas
Sejam A e B matrizes inversíveis então:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A^{-1})^{t} = (A^{t})^{-1}$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
4. $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

2. Cálculo da matriz inversa pelo Algorítmo de Gauss-Jordan

Algorítmo. Cálculo da inversa de uma matriz: Seja dada $A_{n\times n}$, Para calcular a inversa de A (se existir) leva-se a cabo com a matriz $\left[A|I_n\right]_{n\times 2n}$ a parte descendente do método de eliminação de Gauss-Jordan aplicando a ***A***. Se houver menos de ***n*** pivots, ***A*** não é invertível.
Se houver ***n*** pivots, logo a matriz é invertível.

Como achar a matriz inversa?

Para achar a matriz inversa, anulamos todos os elementos por cima e por baixo da diagonal da matriz á esquerda usando as operações elementares. Finalmente divide-se cada linha pelo respectivo pivot. No fim deste processo, a matriz obtida é $\left[I_n|A^{-1}\right]$.
Logo a matriz da direita A^{-1} é a matriz inversa de A.

Exemplo. Determine a matriz inversa de:

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad b) B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Resolução:

a) Coloquemos a matriz junto com a identidade e apliquemos as operações com linhas, para reduzir a parte esquerda (que corresponde a A) á forma escada linha reduzida (ou matriz identidade) e efectuando simultaneamente cada operação na parte direita.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \textit{Troquemos a primeira linha com a segunda linha,isto é:}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \textit{Multipliquemos a primeira linha por -2, e adicionemos a segunda linha,isto é:}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{array}\right) \textit{Multipliquemos a segunda linha por} -\frac{1}{5} \textit{ isto é:}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right) \textit{Multipliquemos a segunda linha por -4, e adicionemos a primeira linha, isto é:}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right), \text{ logo } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

b) Coloquemos a matriz junto com a identidade e apliquemos as operações com linhas, para reduzir a parte esquerda (que corresponde a B) a forma escada linha reduzida (ou matriz identidade) e efectuando simultaneamente cada operação na parte direita.

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ *Troquemos a primeira linha com a terceira linha, isto é:*

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ *Multipliquemos a primeira linha por 3 e -2, e adicionemos a segunda e terceira linha, respectivamente, isto é:*

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 19 & 19 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -11 & -10 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$ *Multipliquemos a segunda linha por* $\frac{1}{19}$ *isto é:*

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{19} & \frac{3}{19} \\ 0 & -11 & -10 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$ *Multipliquemos a segunda linha por 11 e adicionemos a terceira, isto é:*

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{19} & \frac{3}{19} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{11}{19} & -\frac{5}{19} \end{array}\right)$ *Multipliquemos a terceira linha por -5 e -1, e adicionemos a primeira e segunda linha, respectivamente, isto é:*

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 0 & -5 & -\frac{55}{19} & \frac{44}{19} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{10}{19} & \frac{8}{19} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{11}{19} & -\frac{5}{19} \end{array}\right)$ *Multipliquemos a segunda linha por -6 e adicionemos a primeira linha, isto é:*

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{19} & -\frac{4}{19} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{10}{19} & \frac{8}{19} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{11}{19} & -\frac{5}{19} \end{array}\right)$, Logo $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{19} & -\frac{4}{19} \\ -1 & -\frac{10}{19} & \frac{8}{19} \\ 1 & \frac{11}{19} & -\frac{5}{19} \end{pmatrix}$

FICHA DE EXERCÍCIOS NR-4

1. Dada a matriz $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}8 & 5 & 1\\ 0 & 9 & 3\\ 4 & 6 & 2\end{pmatrix}$. Obtenha a matriz C dos cofactores

2. Dada amatriz $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1\\ 5 & 1 & 3\end{pmatrix}$ Calcule: a) $\boldsymbol{Adj\ A}$; b) $|\boldsymbol{A}|$; c) $\boldsymbol{A}^{-1}$.

3. Dada a matriz A = $\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 0 & 2 & 1\\ 5 & 1 & 3\end{pmatrix}$ Calcule: a) Adj A b)Det A c)A^{-1}

4. Usando o método de Gauss-Jordan, determine a inversa da matriz dada e verifique o resultado.

a) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}\cos\theta & -sen\theta\\ sen\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}4 & -2 & 2\\ -2 & -4 & 4\\ -4 & 2 & 8\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ -15 & 6 & -5\\ 5 & -2 & 2\end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix}5 & -1 & 5\\ 0 & 2 & 0\\ -5 & 3 & -15\end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ j) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 4 & 7 & 5\end{pmatrix}$ k) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

l) $\begin{pmatrix}4 & 1 & 2 & -2\\ 3 & -1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 7 & 1 & 1\end{pmatrix}$ m) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -2\\ 2 & 1 & 2 & -3\\ -1 & 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 3 & -4\end{pmatrix}$ n) $\begin{pmatrix}1 & 3 & -5 & 7\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

5. Verifique se a matriz ***A*** é inversa da matriz ***B.***

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

6. Verifique se são inversas uma da outra as matrizes $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 6 & 1\\ 0 & 1 & 8\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-31 & -2 & 47\\ 16 & 1 & -24\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

Caso não sejam, determine a inversa da matriz ***A***.