



INVERTED PENDULUM ON CART SIMULATION

<นครินทร์ เจตนาธรรมจิต, 65340500033>

<พีรดา สุขถาวร, 65340500073>

บทคัดย่อ

Inverted pendulum on cart เป็นหนึ่งในระบบที่เป็น Non-linear system ที่มีความสำคัญในการศึกษา Control theory เพราะเป็นระบบที่มีความซับซ้อนในการควบคุมเพราะต้องทำการควบคุม Unstable system โดยโปรเจกต์นี้จะเป็นการสร้างแบบ Simulation ขึ้นมาเพื่อทำการจำลอง Dynamics ของ Inverted pendulum on cart ที่มีการควบคุมผ่านระบบควบคุมที่ได้มีการออกแบบไว้ให้สามารถ Swing-up และ Stabilizing inverted pendulum ได้ จากนั้นทำการแสดงผลเป็นการแบบ Real-time เพื่อให้สามารถสังเกตพฤติกรรมของระบบและดูผลลัพธ์ที่ได้จากระบบควบคุมได้

คำสำคัญ: Inverted pendulum on cart, Energy-Based control, Visualization

1. บทนำ (Introduction)

1.1 จุดประสงค์โครงการ

- 1) เพื่อศึกษา Dynamics ของ Inverted pendulum on cart บนปริภูมิ 2 มิติ
- 2) เพื่อพัฒนาระบบควบคุมที่สามารถควบคุม Inverted pendulum on cart ให้สามารถตั้งขึ้นบนและไม่หล่นลงมาด้านล่าง
- 3) เพื่อจำลอง Dynamics ของ Inverted pendulum on cart ผ่าน Simulation

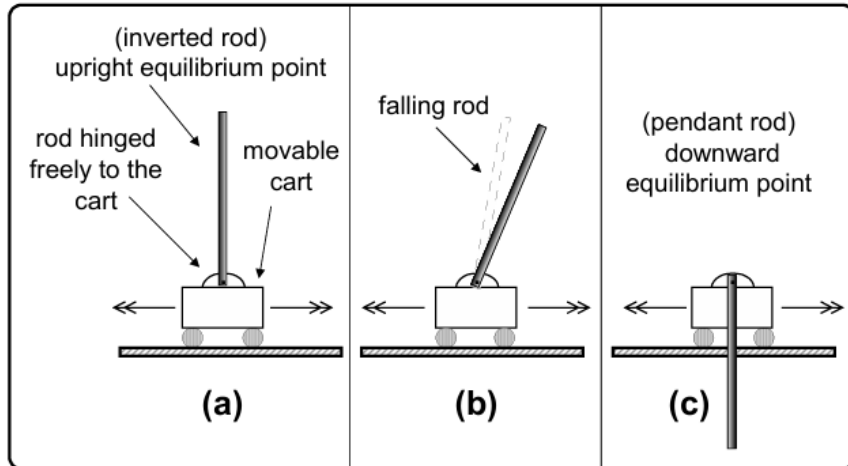
1.2 ขอบเขต

- 1) Simulation สำหรับแสดง Dynamics ของ Inverted pendulum on cart
 - a. จำลอง Dynamics ผ่าน Dynamics model ของ Inverted pendulum on cart
 - b. จำลอง Dynamics ของ Inverted pendulum on cart ได้เพียง 2 มิติเท่านั้น (X-Axis และ Y-Axis)
 - c. ไม่สามารถใส่ Disturbance เข้าไปในระบบได้
 - d. การแสดงผลจะแสดงเพียงผลลัพธ์ของ Dynamics ที่มีการควบคุมระบบผ่านควบคุมที่ได้ออกแบบไว้
- 2) ระบบควบคุมสำหรับการควบคุม Inverted pendulum on cart ให้สามารถตั้งขึ้นบนและไม่หล่นลงมาด้านล่าง
 - a. ระบบควบคุมจะถูกออกแบบและพัฒนาลงบน Simulation ไม่สามารถปรับแต่งระหว่างการจำลองได้

2. ทบทวนวรรณกรรม และ ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง (Literature Review)

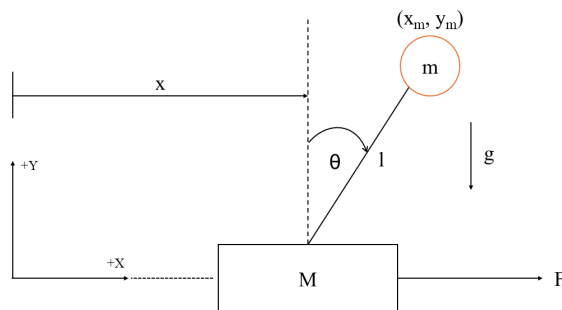
2.1) Inverted pendulum on cart

Inverted pendulum on cart คือระบบที่เป็น Under-actuated mechanical system ที่มีความเป็น Non-linear ทาง Dynamics สูง โดย Inverted pendulum on cart ถือเป็นหนึ่งในหัวข้อที่มีความนิยมใช้เพื่อออกแบบ พัฒนา หรือสร้างระบบควบคุมขึ้นมา ซึ่งระบบนี้จะประกอบไปด้วยลูกตุ้ม(Pendulum) ที่ติดอยู่บนรถเลื่อน(Cart) โดยลูกตุ้มสามารถหมุนได้อย่างอิสระ จุดประสงค์หลักของการออกแบบระบบควบคุมเพื่อมาควบคุมระบบนี้คือการแกว่งลูกตุ้มจากตำแหน่งที่ห้อยลงมา ให้ขึ้นมาตั้งตรงและสามารถรักษาสถิตไว้ได้ ซึ่งใช้การเคลื่อนที่ในแนวนอนของรถเลื่อนเท่านั้นในการแกว่งลูกตุ้มขึ้นมา



รูปที่ 1 จุดสมดุลต่าง ๆ ของระบบ

2.2) Dynamics modeling of Inverted pendulum on cart



รูปที่ 2 FBD INVERTED PENDULUM ON CART

โดยที่

- F = แรงภายนอกที่กระทำกับรถ(N)
- θ = มุมที่ลูกตุ้มหมุนออกไป(rad)
- M = มวลของรถ(kg)
- m = มวลของลูกตุ้ม(kg)
- l = ความยาว link ของลูกตุ้ม (m)
- g = ความเร่งโน้มถ่วงของโลก (m/s^2)
- x = ระยะของรถในแนวแกน x เทียบกับจุด $origin(m)$
- x_m = ระยะของรถในแนวแกน x เทียบกับจุด $origin(m)$
- y_m = ระยะของรถในแนวแกน y เทียบกับจุด $origin(m)$

Kinematic equation of Inverted pendulum on cart

$$\begin{aligned}x_m &= x + l \sin(\theta) \\ \dot{x}_m &= \dot{x} + l \dot{\theta} \cos(\theta) \\ y_m &= l \cos(\theta) \\ \dot{y}_m &= -l \dot{\theta} \sin(\theta)\end{aligned}$$

คำนวณหา Dynamics equation ด้วย Lagrangian

$$\mathcal{L} = T - V$$

โดยที่

$$\begin{aligned}T &= \text{พลังงานจลน์}(J) \\ V &= \text{พลังงานศักย์}(J)\end{aligned}$$

ซึ่งสามารถคำนวณหาพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos(\theta) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \\ V &= mgl \cos(\theta)\end{aligned}$$

ดังนั้น Lagrangian คือ

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos(\theta) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos(\theta)$$

จาก Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

คำนวณ ณ q_i คือ x จะได้ Equation of motion ดังนี้

$$F = (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos(\theta) - ml^2\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \quad (1)$$

คำนวณ ณ q_i คือ θ จะได้ Equation of motion ดังนี้

$$\ddot{\theta} = \frac{g \sin(\theta) - \ddot{x} \cos(\theta)}{l} \quad (2)$$

แทน $\ddot{\theta}$ ในสมการที่ 1 จะได้

$$\ddot{x} = \frac{F + ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - mg \cos(\theta) \sin(\theta)}{M + m \sin^2(\theta)}$$

สรุป Equation of motion ของ Inverted pendulum ได้ดังนี้

$$\ddot{x} = \frac{F + ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - mg \cos(\theta) \sin(\theta)}{M + m \sin^2(\theta)}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g \sin(\theta) - \ddot{x} \cos(\theta)}{l}$$

2.3) Energy-based control

Energy-based control คือการควบคุม Dynamics ของระบบโดยการปรับระดับพลังงานของระบบ ซึ่งในการควบคุม Inverted pendulum on cart การประยุกต์ใช้ Energy-based control จะเป็นกาควบคุมให้ลูกตุ้มแกว่งขึ้นมาตั้งด้านบนและทำการรักษาสสมดุล โดยการออกแบบ Energy-based control ของ Inverted pendulum on cart มีขั้นตอนดังนี้

- 1) หาสมการ Non-linear ในรูปแบบของแรงเพื่อใช้เป็น control force

$$F = (M + m\sin^2(\theta))\ddot{x} - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + mg\cos(\theta)\sin(\theta)$$

- 2) กำหนด Control law (Energy-based control)

$$u = \ddot{x}$$

แทน u ลงใน $\ddot{\theta}$ จะได้

$$\ddot{\theta} = \frac{g\sin(\theta) - u\cos(\theta)}{l}$$

พลังงานรวมทั้งหมดของ pendulum คือ

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 + \cos(\theta))$$

พลังงานที่ต้องใช้ในการไปถึงจุดสมดุล

$$E_d = mgl(1 + \cos(0)) = 2mgl$$

ให้ Error ของระบบเป็น

$$\tilde{E} = E - E_d$$

$$\dot{\tilde{E}} = \dot{E} = ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} - mgl\dot{\theta}\sin(\theta)$$

แทน $\ddot{\theta}$ ใน $\dot{\tilde{E}}$ จะได้

$$\dot{\tilde{E}} = -mgl\dot{\theta}\cos(\theta)$$

ถ้าออกแบบ controller ด้วยรูปแบบ

$$u = k\dot{\theta}\cos(\theta)\tilde{E}, \quad k > 0$$

จะได้สมการ Error's dynamics เป็น

$$\dot{\tilde{E}} = -kml\dot{\theta}^2\cos^2(\theta)\tilde{E}$$

ในการควบคุมจะแบ่งเป็นทั้งหมด 2 ช่วงได้แก่ $E < E_d$ ให้เพิ่มพลังงานและ $E > E_d$ หักเพิ่มพลังงานจะได้ u ดังนี้

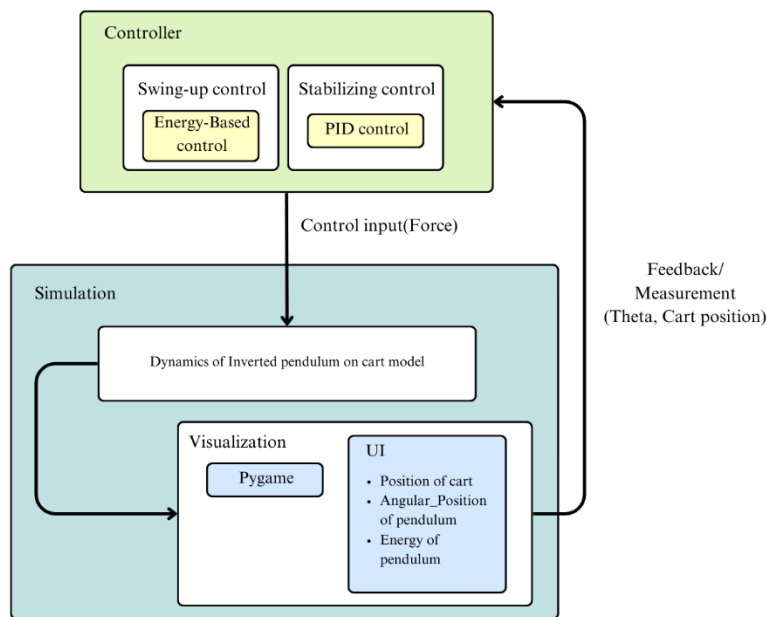
$$u = \text{sat}_{u_{\max}}(k(E - E_d)\text{Sign}(\dot{\theta}\cos(\theta)))$$

ณ ที่นี้ $u = \ddot{x}$ ซึ่งระบบของเรา control ด้วยแรง ดังนั้นจึงต้องคำนวณย้อนกลับไปเพื่อเปลี่ยน control input ให้เป็นแรงเพื่อไปสั่ง cart

3. เนื้อหาในรายวิชาที่เกี่ยวข้อง

- 1) Dynamics
- 2) การสร้าง Animation บน Python

4. System Diagram / System Overview (Function and Argument)



รูปที่ 3 System diagram

- 1) **Controller** ในส่วนนี้จะเป็นส่วนของระบบควบคุมที่ใช้ในการรับ Feedback จาก Simulation ที่มีการคำนวณ Dynamics ของ Inverted pendulum on cart โดยจะประกอบไปด้วยการ Control ทั้งหมด 2 ส่วนคือส่วนที่เป็น Swing-up control ที่ใช้สำหรับการแกว่งลูกตุ้มให้ขึ้นไปด้านบนโดยจะใช้ Energy-Based Control เป็นการใช้สมการพลังงานเพื่อปรับแรงกระทำกับรถเข็น (cart) เพื่อเพิ่มพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ให้ pendulum และในส่วน Stabilizing control คือการควบคุมให้ลูกตุ้มอยู่นิ่งหลังจากทำการแกว่งขึ้นไปด้านบนโดยใช้ PID control หลังจากผ่านการ Control แล้วจะมี Output ออกมาเป็น Control input ที่ใช้สำหรับส่งเข้าไปใน Simulation เพื่อจำลองระบบ
- 2) **Simulation** ในส่วนนี้จะเป็นส่วนของการจำลองระบบผ่าน Simulation ซึ่งจะประกอบไปด้วย 2 ส่วนคือส่วนที่เป็น Dynamics ของ Inverted pendulum on cart ที่จะรับ Control input จาก Controller เข้ามาเพื่อคำนวณ Dynamics ของระบบจากนั้นจะส่งข้อมูลไปยังส่วนที่สอง นั่นก็คือ Visualization ที่มีไว้สำหรับการแสดงผลข้อมูลที่ได้จากการคำนวณ Dynamics ให้ออกมาเป็น Animation โดยใช้ Pygame ในการสร้างและจะมี UI ที่ไว้ดูค่าพารามิเตอร์ที่จำเป็น (เช่น มุมของ Pendulum, ความเร็วเชิงมุมของ Cart, ตำแหน่งของ Cart) และเพื่อส่ง Feedback กลับไปหาฝั่ง Controller

5. ผลการศึกษาที่คาดหวัง

- 1) Simulation ที่สามารถจำลอง Dynamics ของ Inverted pendulum on cart รวมกับระบบควบคุมให้สามารถควบคุมการตั้งขึ้นของ Inverted pendulum ได้

6. รายละเอียดโครงการ

ลำดับ	การดำเนินงาน	สัปดาห์ที่ 1	สัปดาห์ที่ 2	สัปดาห์ที่ 3	สัปดาห์ที่ 4	สัปดาห์ที่ 5	สัปดาห์ที่ 6
1	ศึกษาหาข้อมูลเกี่ยวกับ Inverted pendulum on cart, รูปแบบการ Control ต่าง ๆ ที่สามารถใช้งานได้						
2	จัดทำ Proposal						
3	สร้างแบบจำลองสำหรับใช้ใน Simulation Inverted pendulum on cart และออกแบบระบบควบคุมสำหรับใช้ควบคุมระบบ						
4	รวม Simulation เข้ากับระบบควบคุมที่ออกแบบ						
5	ปรับปรุง Simulation และส่งงาน						

ตารางที่ 1 Gantt chart (detailed)

7. เอกสารอ้างอิง (References)

- [1] M. Bugeja, Non-Linear Swing-up and Stabilizing control of an Inverted pendulum system
- [2] ROBOT LOCOMOTION, ECE 594D, winter 2010, Cart-pole system: Equations of motion
- [3] D. Sundararajan, Design OF CONTROL SYSTEMS IN STATE SPACE
- [4] XU CHEN, INVERTED PENDULUM MODELING
- [5] KAZUNOBU YOSHIDA, SWING-UP CONTROL OF AN INVERTED PENDULUM BY ENERGY-BASED METHODS
- [6] JITENDRA SINGH, MODEL BASED CONTROL DESIGN FOR SWING-UP & BALANCE THE INVERTED PENDULUM
- [7] RUSS TEDRAKE(MIT), UNDERACTUATED ROBOTICS