



# FRA532 : Mobile Robot

## Lecture 2

### Kinematics of Mobile Robot

Kitti Thamrongaphichartkul

Institute of Field Robotics  
King Mongkut's University of Technology Thonburi  
Bangkok, Thailand

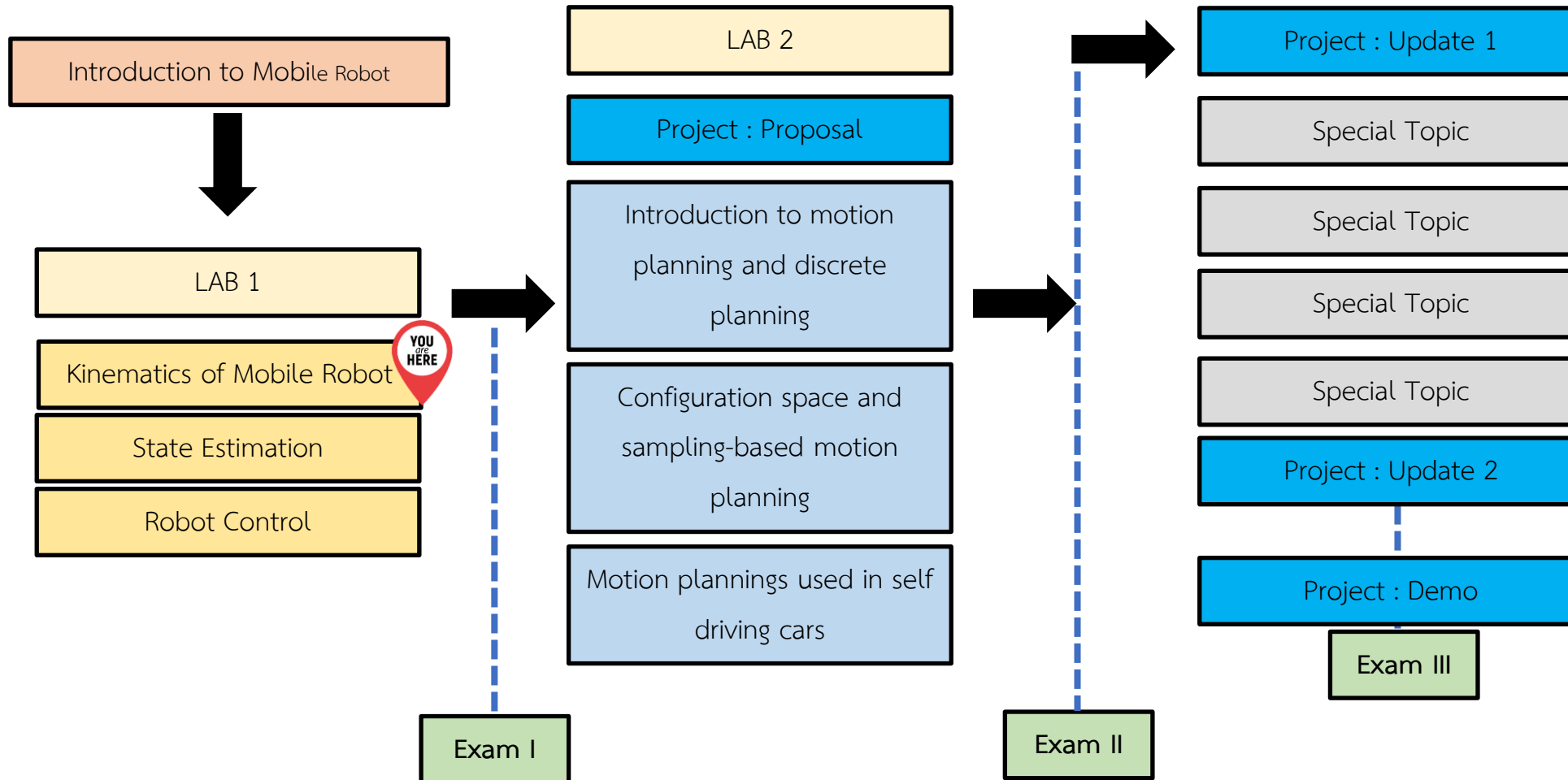


# แผนการสอน

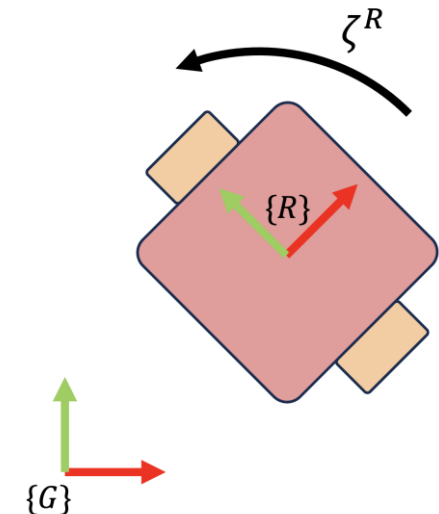
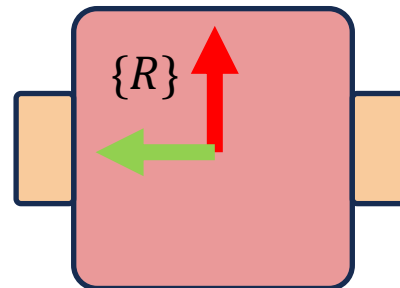
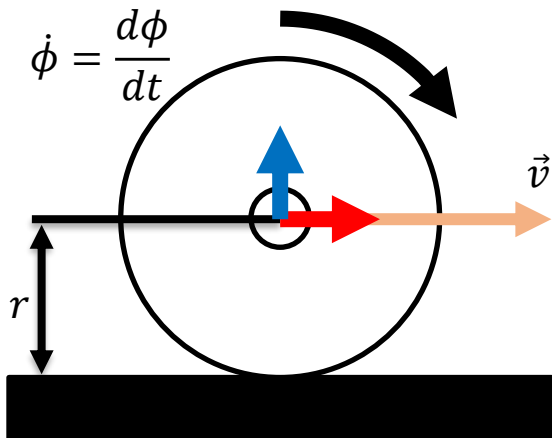
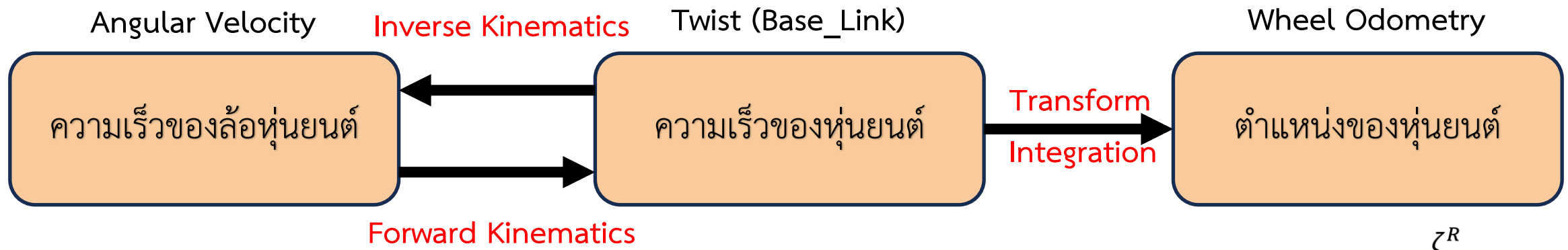
Week	Date	Lecture	Topic	Module	LAB / HW		Instructor	หมายเหตุ
					Assign	Due		
1	16-Jan-2025	1	Introduction to Mobile Robot (Motivation)				Aj.Nook	
2	23-Jan-2025	2	Kinematics of Mobile Robot		LAB 1		Aj.Nook	
3	30-Jan-2025	3	Mobile Robot Control				Aj.Nook	
4	6-Feb-2025	4	30 ปี ฟิโน				Aj.Nook	
5	13-Feb-2025	5	State Estimator				Aj.Nook	
6	20-Feb-2025		EXAM 1					
7	27-Feb-2025	6	MAP (Slam, Localization)		LAB 2	LAB 1	Aj.Nook	
8	4-March-2025	7	EXAM 1 / Hackathon Exam (24 Hour)				Aj.Nook	Project : Proposal
9	13-March-2025	8	Introduction to motion planning and discrete planning				Aj.Tee	
10	20-March-2025	9	Configuration space and sampling-based motion planning			LAB 2	Aj.Tee	
11	27-March-2025	10	Motion plannings used in self driving cars				Aj.Tee	
12	3-April-2025		EXAM 2					
13	10-April-2025	11	Project : Update 1				Aj.Nook	
14	18-April 2025	12	Special Topic I				Aj.Nook / Dummy	
15	24-April 2025	13	EXAM 2 / CBS + Nav2				Aj.Nook / Dummy	
16	1 May 2025	14	Special Topic III				Aj.Nook / Dummy	
17	8 May 2025	15	Project : Update 2				Aj.Nook	
18	15 May 2025	-	-					
19	22 May 2025	-	-					
20	29 May 2025	16	Project : Demo				Aj.Nook	

# เนื้อหา

Link : <https://github.com/kittinook/MobileRobotics2025/tree/main>

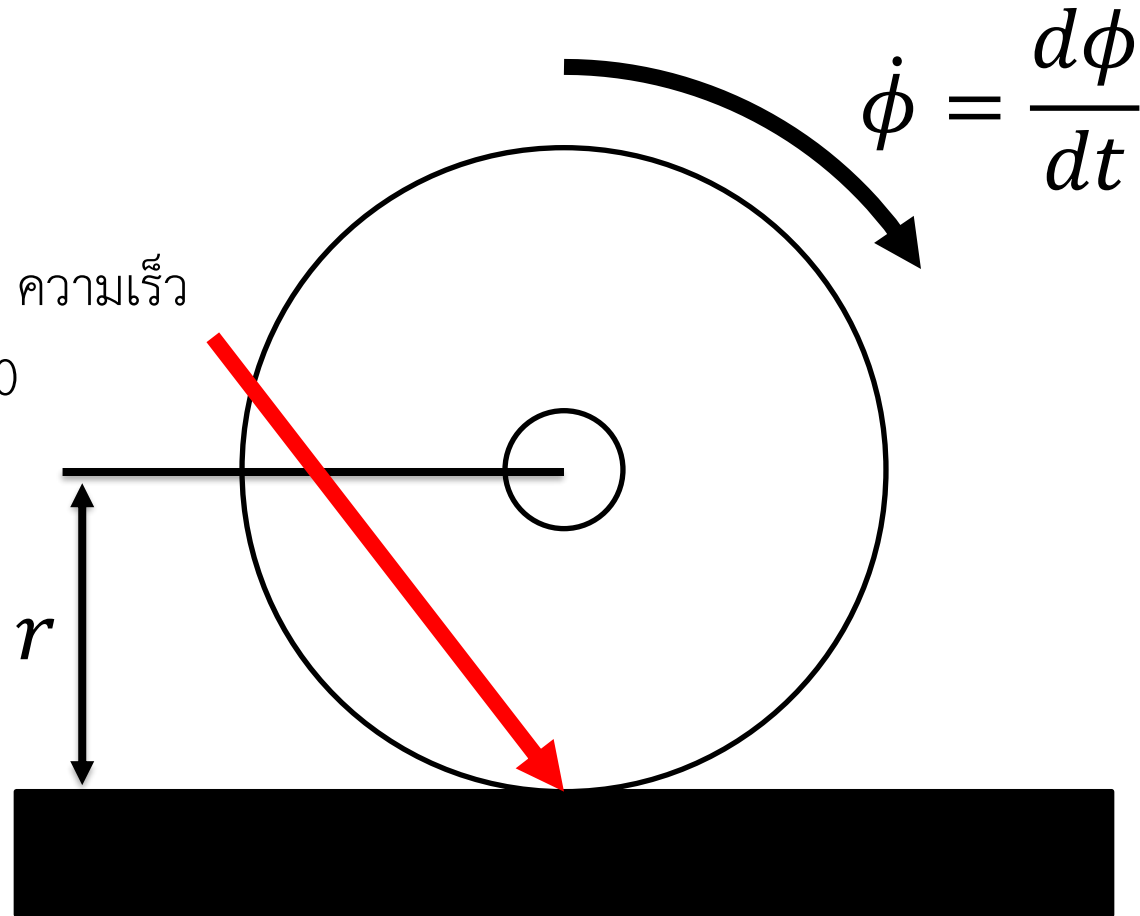


# เป้าหมายของการหาสมการ Kinematics

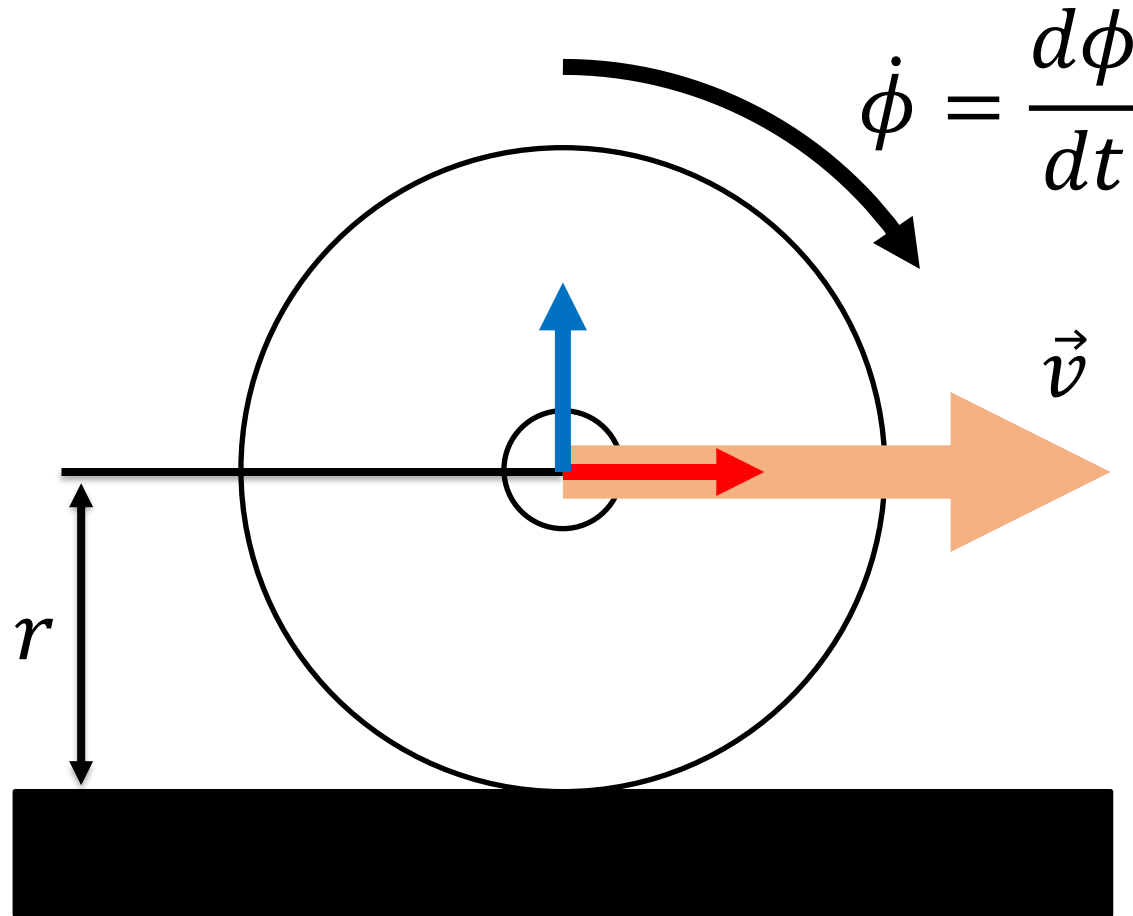


# ล้อเคลื่อนที่ได้อย่างไร

สมมติฐาน : ถ้าล้อไม่ไถล (Slip) ความเร็ว  
เชิงเส้นของจุดสัมผัสจะเท่ากับ 0



# ล้อเคลื่อนที่ได้อย่างไร

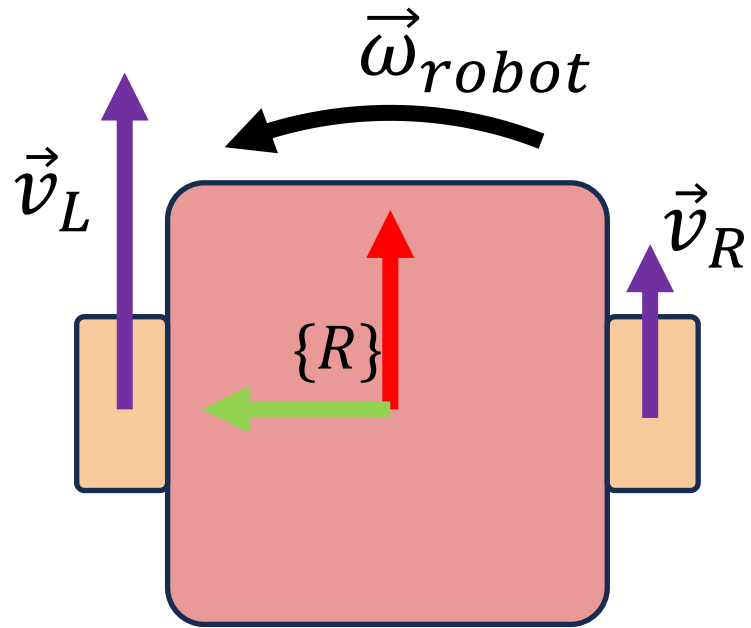


$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

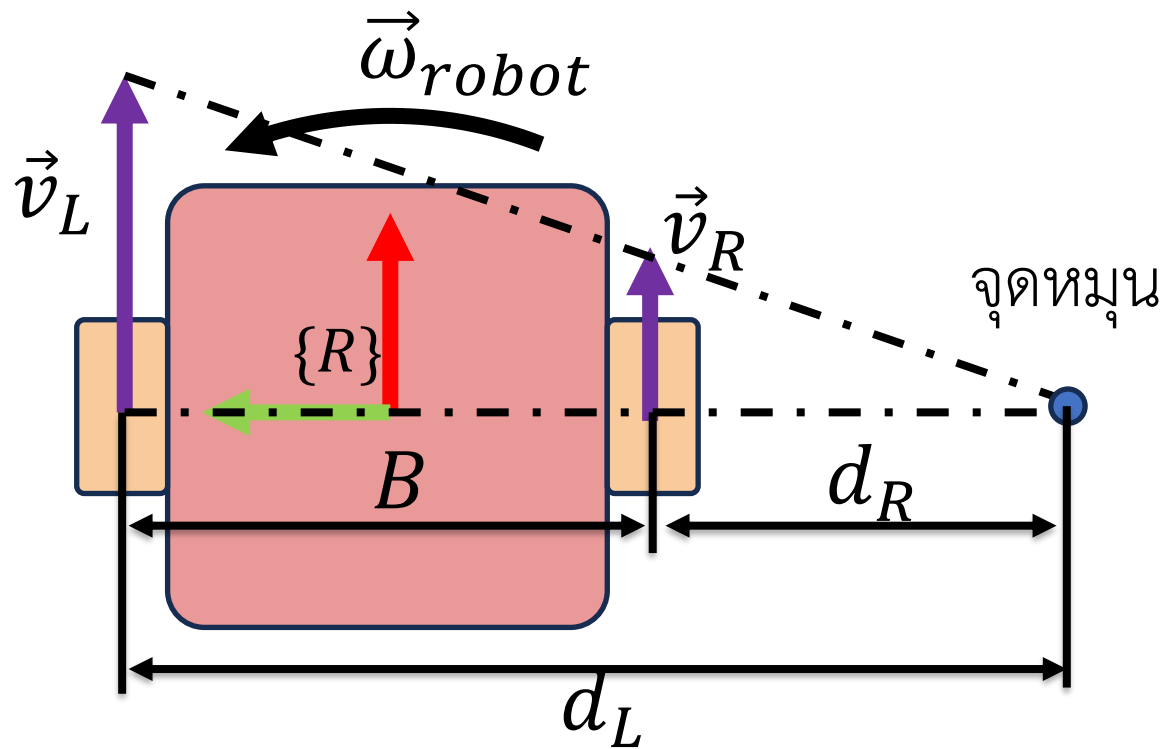
ความเร็วเชิงเส้นที่จุดกึ่งกลางของล้อ

# หุ่นยนต์เคลื่อนที่ได้อย่างไร



$$v_i = \omega_{robot} * (...)$$

# หุ่นยนต์เคลื่อนที่ได้ได้อย่างไร



$$v_i = \omega_{robot} * d_i$$

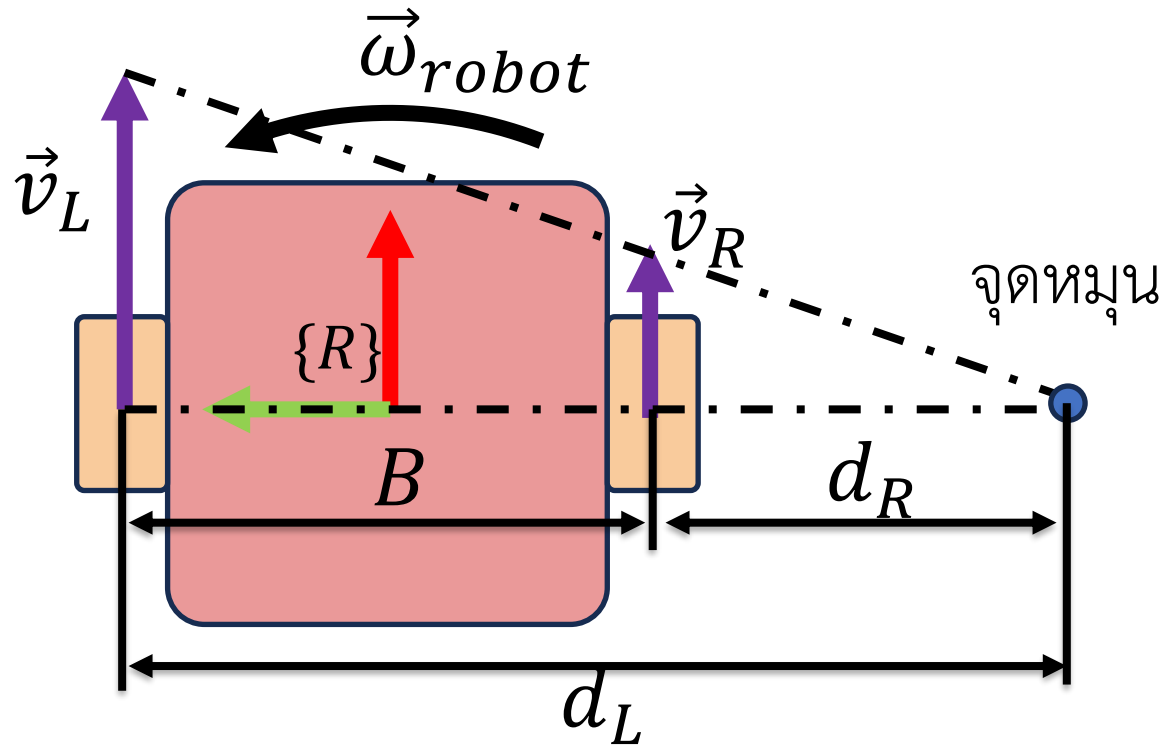
$$v_i = r \dot{\phi}_i$$

$$r \dot{\phi}_i = \omega_{robot} * d_i$$



# หุ่นยนต์เคลื่อนที่ได้อย่างไร

การหาความเร็วเชิงมุมของหุ่นยนต์



$$v_i = \omega_{robot} * d_i$$

$$v_i = r \dot{\phi}_i$$

$$r \dot{\phi}_i = \omega_{robot} * d_i$$

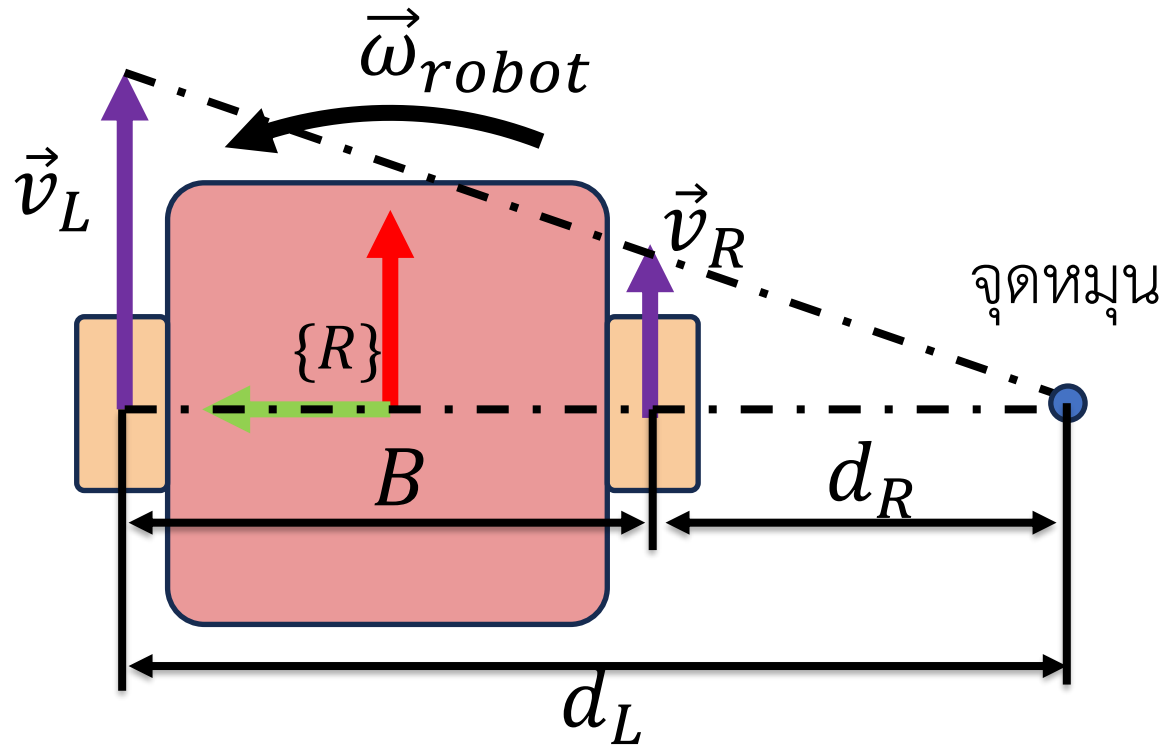
จากรูป

$$r \dot{\phi}_L = -\omega_{robot} * d_R$$

$$r \dot{\phi}_R = -\omega_{robot} * (d_R + B)$$

# หุ่นยนต์เคลื่อนที่ได้อย่างไร

การหาความเร็วเชิงมุมของหุ่นยนต์



$$r\dot{\phi}_L = -\omega_{robot} * d_R$$

$$r\dot{\phi}_R = -\omega_{robot} * (d_R + B)$$

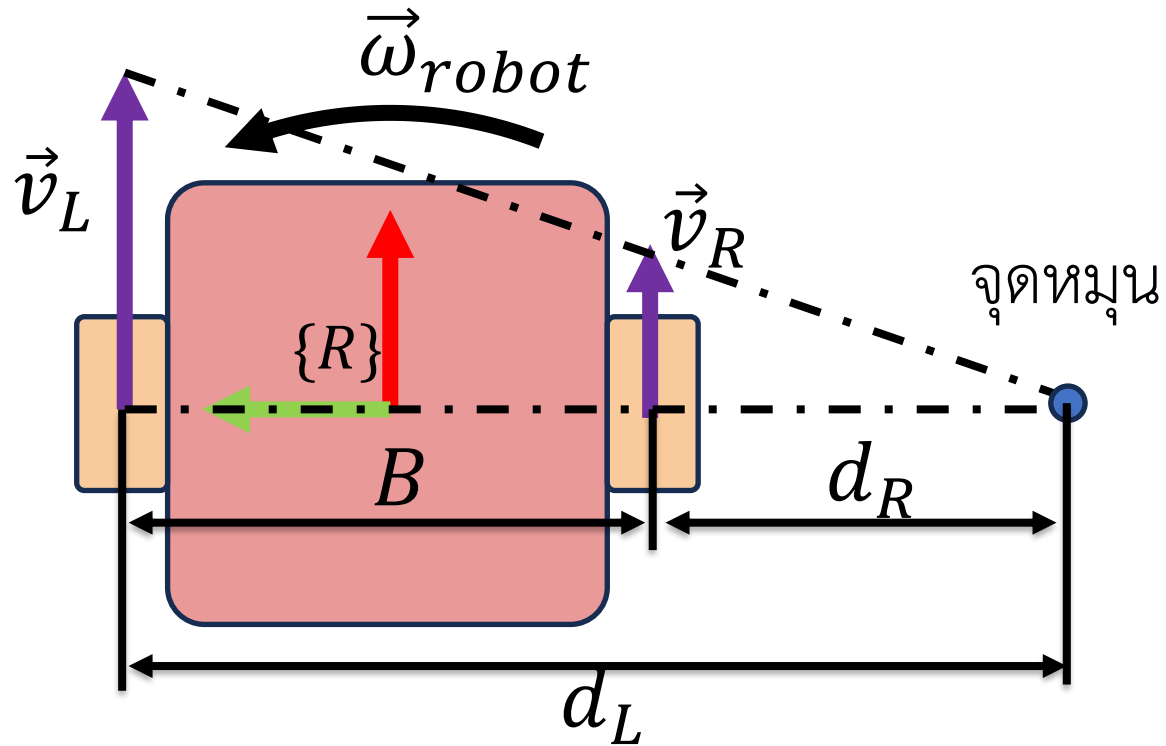
จัดรูปสมการให้เป็น Matrix

$$\omega_{robot} = \frac{-r\dot{\phi}_L + r\dot{\phi}_R}{B}$$

$$\omega_{robot} = \begin{bmatrix} -\frac{r}{B} & \frac{r}{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_L \\ \dot{\phi}_R \end{bmatrix}$$

# หุ่นยนต์เคลื่อนที่ได้อย่างไร

การหาความเร็วเชิงเส้นของหุ่นยนต์



$$r\dot{\phi}_L = -\omega_{robot} * d_R$$

$$r\dot{\phi}_R = -\omega_{robot} * (d_R + B)$$

$$\frac{r\dot{\phi}_L + r\dot{\phi}_R}{2} = \omega_{robot} \left( d_R + \frac{B}{2} \right)$$

จัดรูปสมการให้เป็น Matrix

$$v_{robot} = \frac{r\dot{\phi}_L + r\dot{\phi}_R}{2}$$

$$v_{robot} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_L \\ \dot{\phi}_R \end{bmatrix}$$

# หุ่นยนต์เคลื่อนที่ได้อย่างไร

การหาจลนศาสตร์ระหว่างความเร็วล้อและความเร็วของหุ่นยนต์

$$v_{robot} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_L \\ \dot{\phi}_R \end{bmatrix}$$

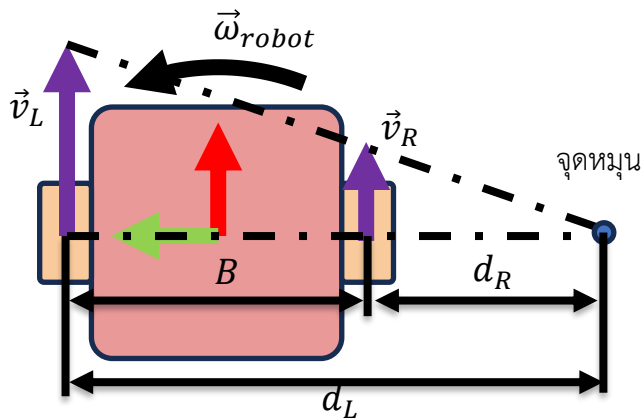
$$\omega_{robot} = \begin{bmatrix} -\frac{r}{B} & \frac{r}{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_L \\ \dot{\phi}_R \end{bmatrix}$$

จัดรูปสมการใหม่



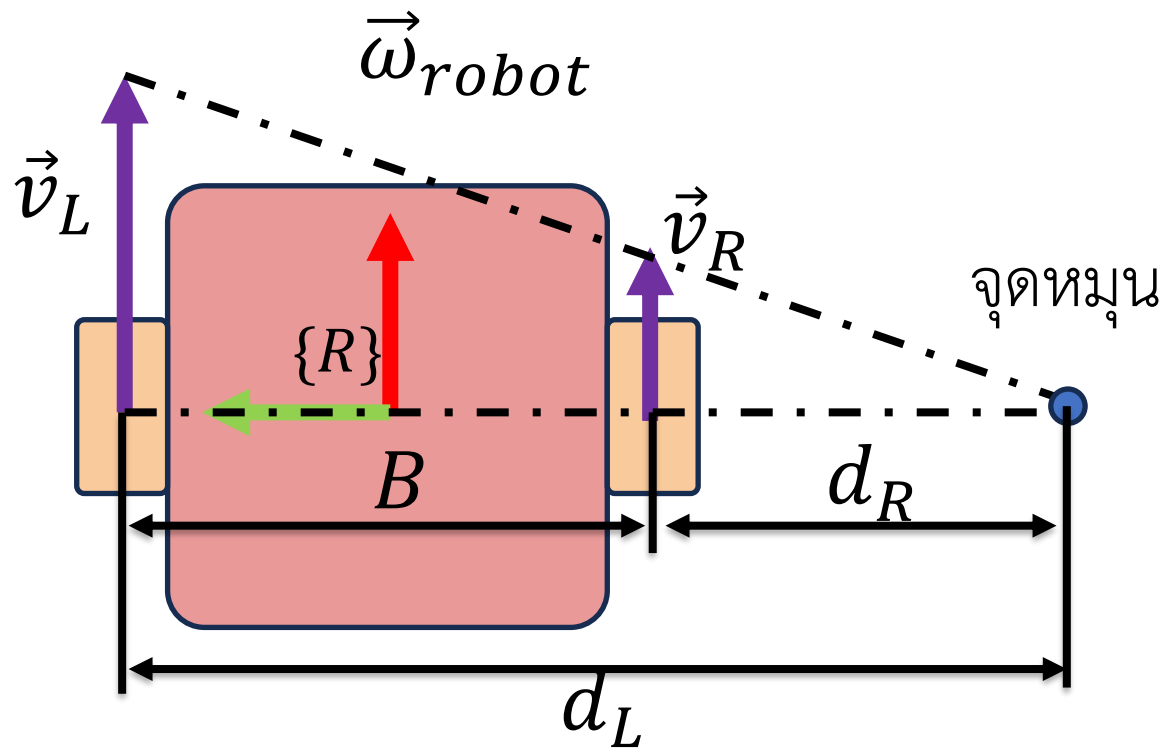
ให้อยู่ในรูปของ Matrix

$$\begin{bmatrix} v_{robot} \\ \omega_{robot} \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{B} & \frac{1}{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_L \\ \dot{\phi}_R \end{bmatrix}$$



# หุ่นยนต์เคลื่อนที่ได้ได้อย่างไร

การหาจลนศาสตร์ระหว่างความเร็วล้อและความเร็วของหุ่นยนต์ : Forward (Velocity) Kinematics



$$\begin{bmatrix} v_{robot} \\ \omega_{robot} \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{B} & \frac{1}{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_L \\ \dot{\phi}_R \end{bmatrix}$$

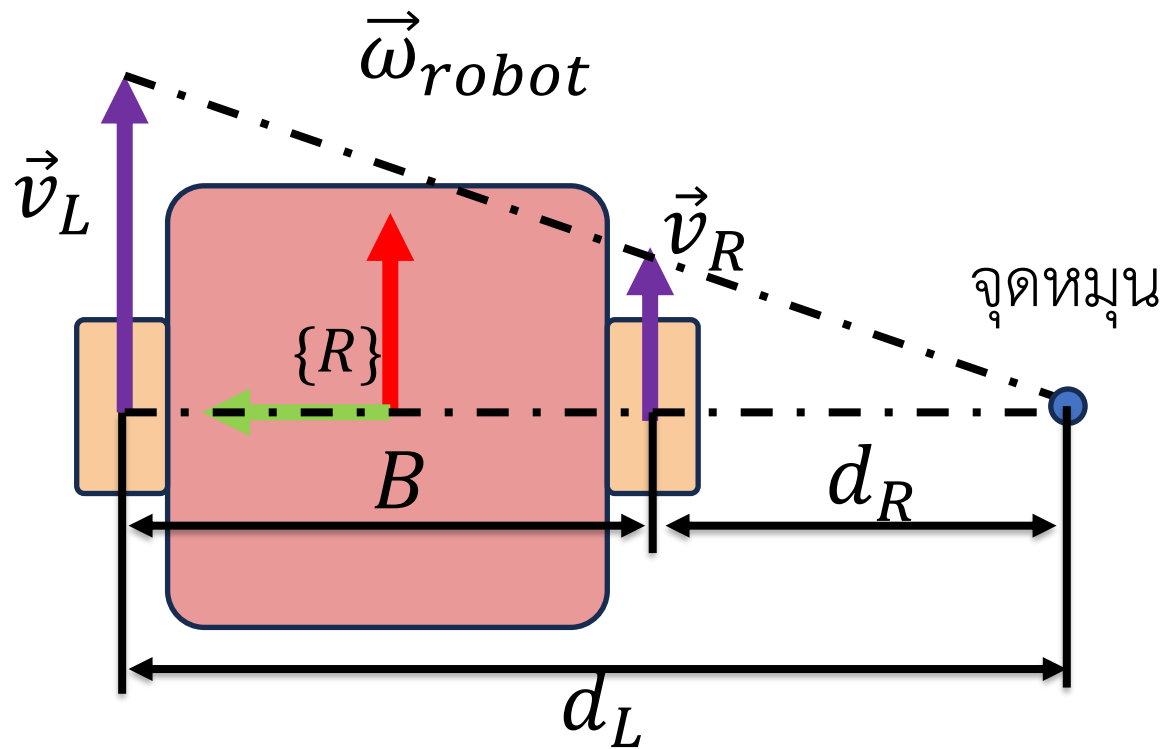
จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปของ Twist in 2D

$$\zeta^R = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{B} & \frac{1}{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_L \\ \dot{\phi}_R \end{bmatrix}$$

ถ้าทราบความเร็วล้อ -> หาความเร็วหุ่นได้

# หุ่นยนต์เคลื่อนที่ได้อย่างไร

การหาจลนศาสตร์ระหว่างความเร็วล้อและความเร็วของหุ่นยนต์ : Inverse (Velocity) Kinematics



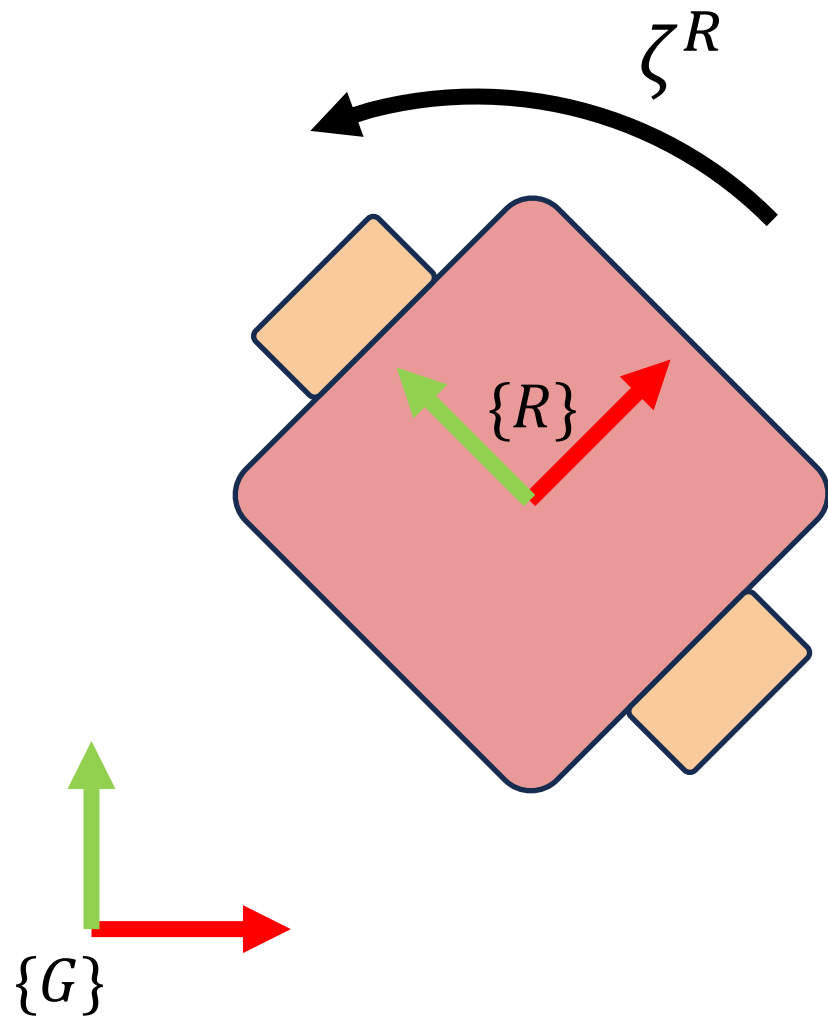
$$\begin{bmatrix} v_{robot} \\ \omega_{robot} \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{B} & \frac{1}{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_L \\ \dot{\phi}_R \end{bmatrix}$$

สามารถ Inverse Matrix เพื่อคำนวณหาความเร็วล้อ

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_L \\ \dot{\phi}_R \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & -\frac{B}{2r} \\ \frac{1}{r} & \frac{B}{2r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{robot} \\ \omega_{robot} \end{bmatrix}$$

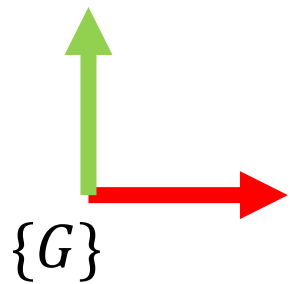
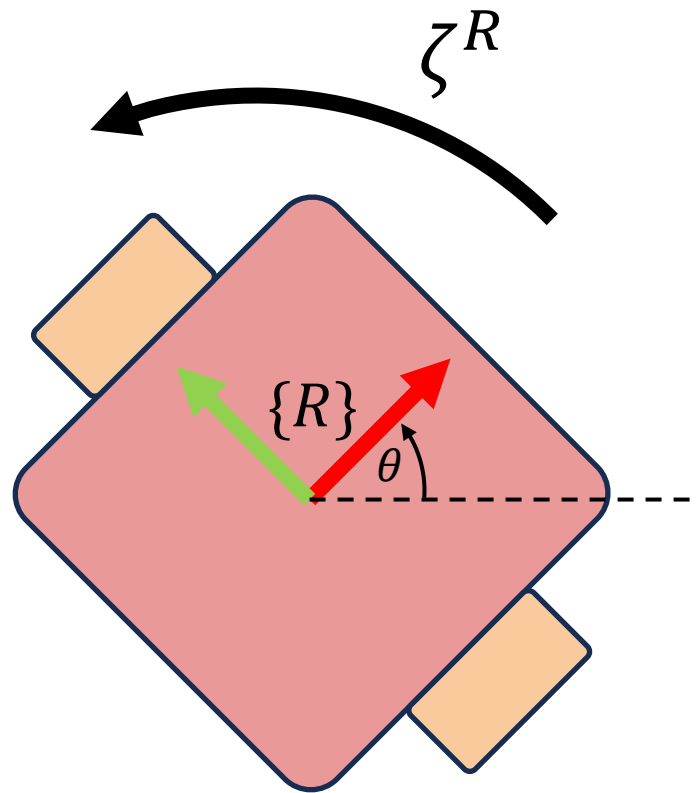
ถ้าทราบความเร็วหุ่น -> หาความเร็วล้อได้

เราสามารถประมาณตำแหน่งของหุ่นยนต์ได้อย่างไร



$$\zeta^G = {}^G_R R \zeta^R$$

เราสามารถประมาณตำแหน่งของหุ่นยนต์ได้อย่างไร

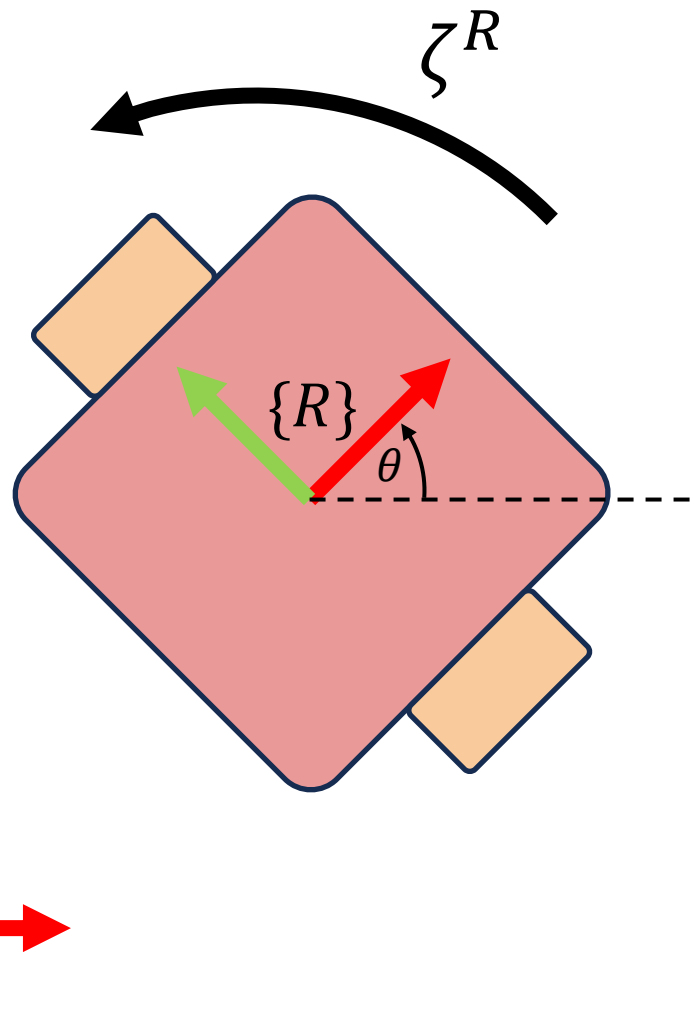


$$\zeta^G = {}^G_R R \zeta^R$$

$$\begin{bmatrix} v_x^G \\ v_y^G \\ v_z^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x^R \\ v_y^R \\ v_z^R \end{bmatrix}$$



เราสามารถประมาณตำแหน่งของหุ่นยนต์ได้อย่างไร

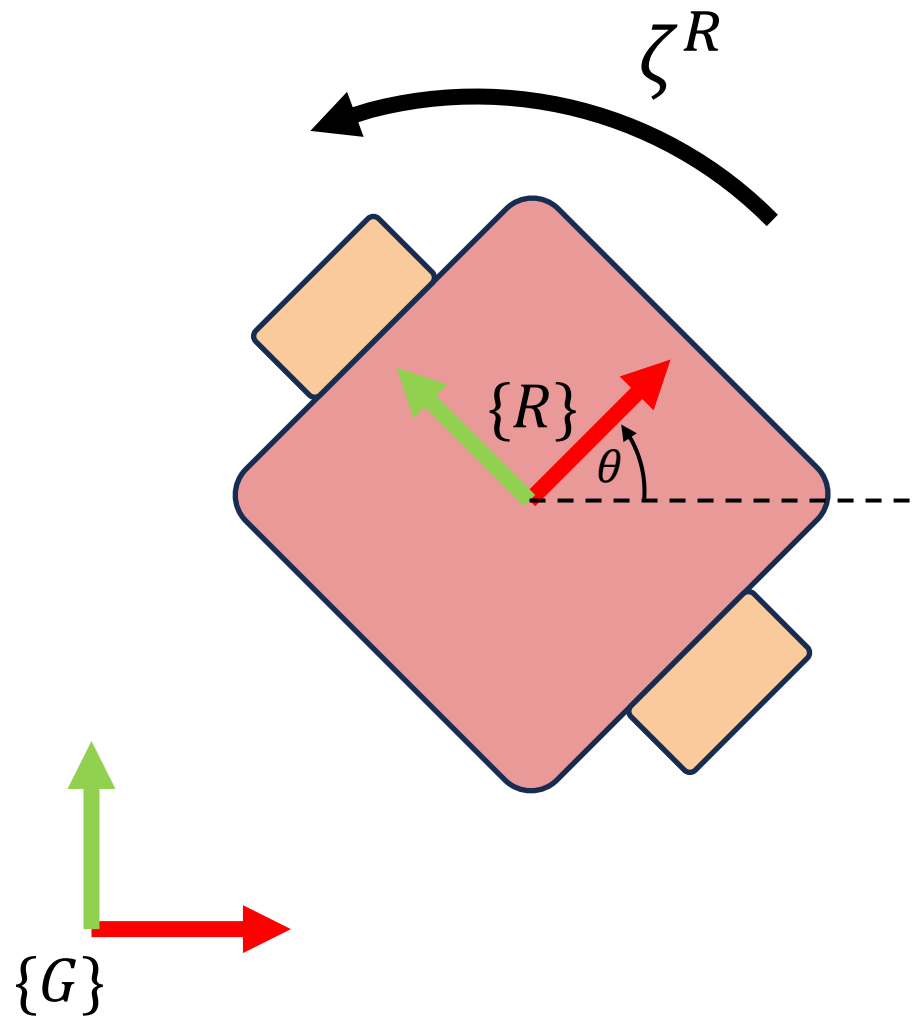


$$\zeta^G = {}^G_R R \zeta^R$$

$$\begin{bmatrix} v_x^G \\ v_y^G \\ v_z^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x^R \\ v_y^R \\ v_z^R \end{bmatrix}$$

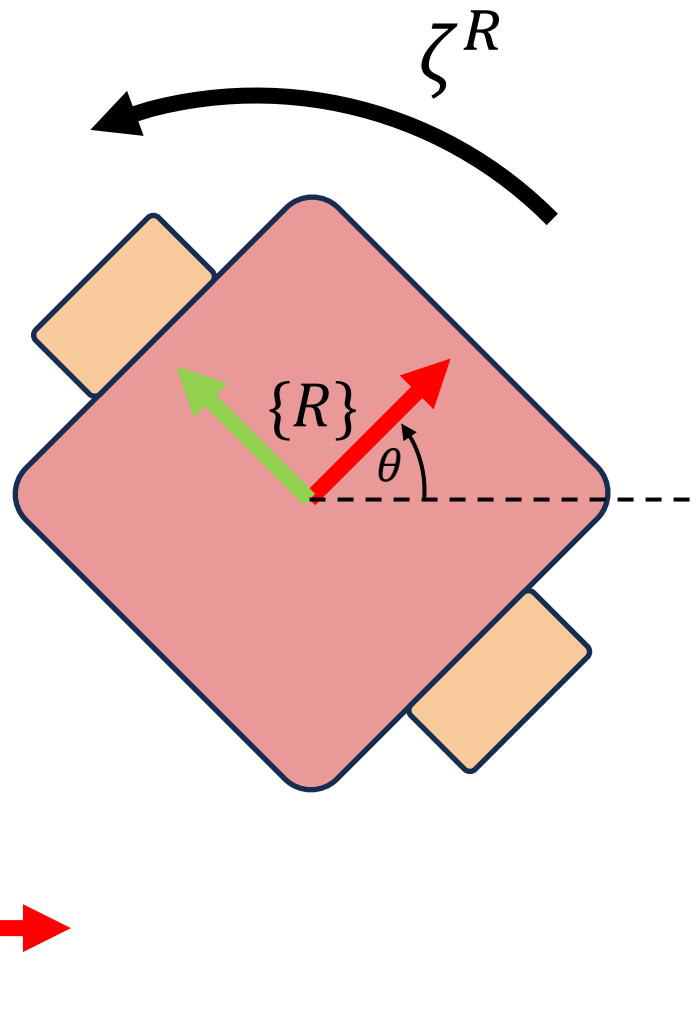
$$\begin{bmatrix} v_x^G \\ v_y^G \\ v_z^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} r \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{B} & \frac{1}{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_L \\ \dot{\phi}_R \end{bmatrix}$$

เราสามารถประมาณตำแหน่งของหุ่นยนต์ได้อย่างไร



$${}^G_R \vec{p}(t) = {}^G_R \vec{p}(t) + \int_{\tau=0}^{\tau=t} \zeta^G(t) d\tau$$

เราสามารถประมาณตำแหน่งของหุ่นยนต์ได้อย่างไร



$${}^G_R\vec{p}(t) = {}^G_R\vec{p}(t) + \int_{\tau=0}^{\tau=t} \zeta^G(t) d\tau$$

$$dx = v \cdot \cos(\theta) \cdot dt$$

$$dy = v \cdot \sin(\theta) \cdot dt$$

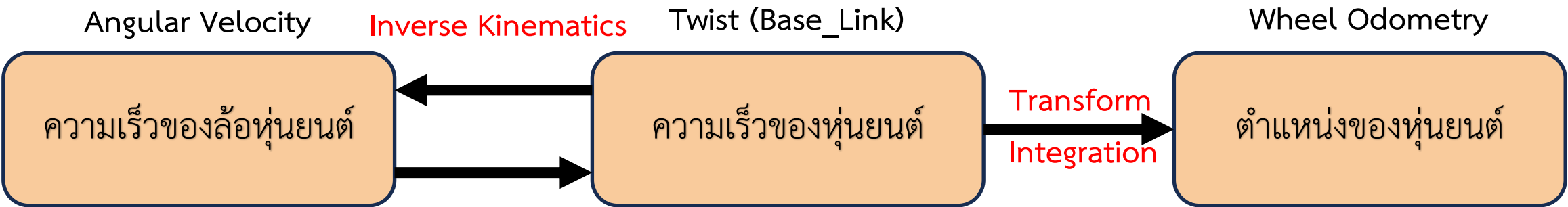
$$d\theta = w \cdot dt$$

$$x = x + dx$$

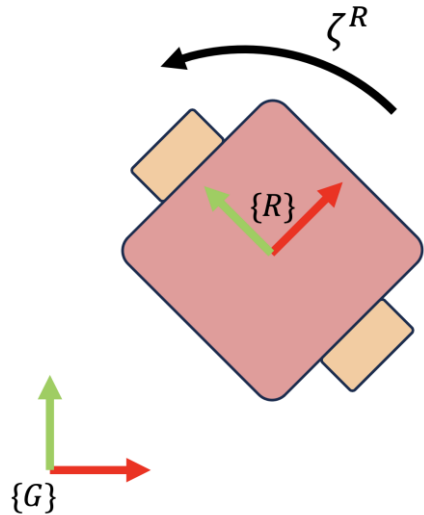
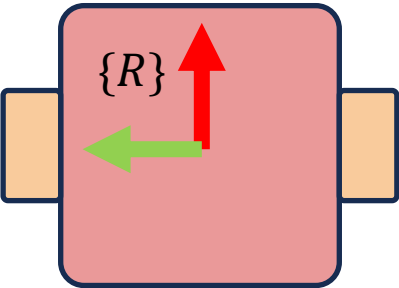
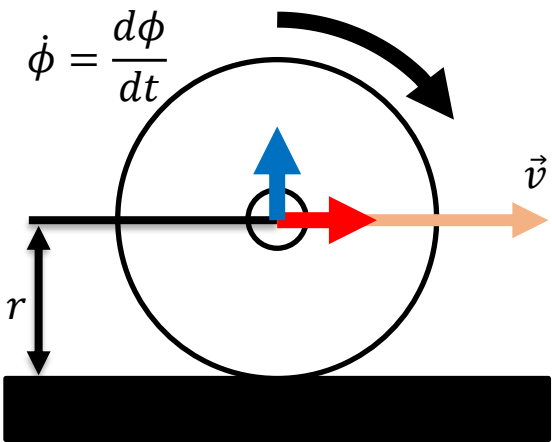
$$y = y + dy$$

$$\theta = \theta + d\theta$$

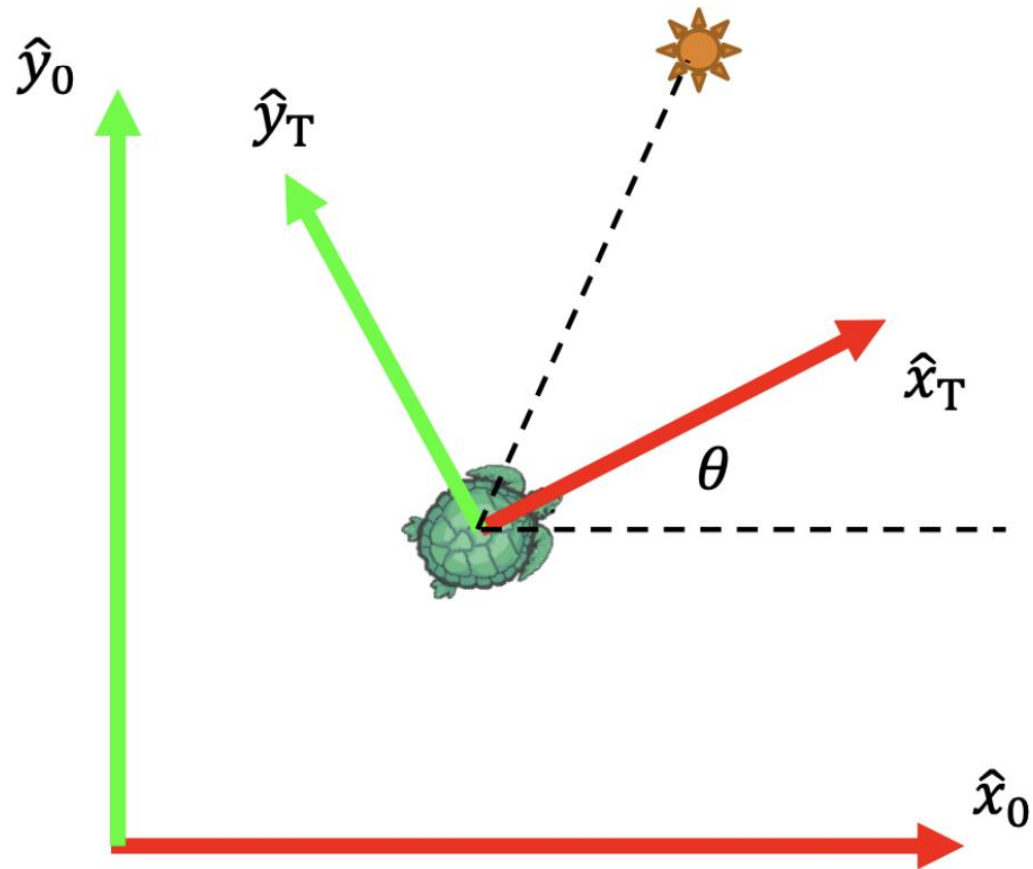
# เป้าหมายของการหาสมการ Kinematics



Forward Kinematics



# Simple Robot Controller : Point-to-Point Controller





# Q & A

**A Cradle of Future Leaders in Robotics**