Введение в статистику

Чепарухин Сергей

31 марта 2017 г.

Содержание

Вероятность

Эволюция взглядов на вероятность

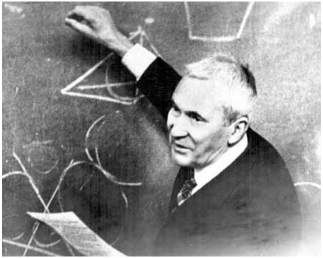
Часто, для описания концепции детерминизма используют следующую цитату П.Лапласа («демон Лапласа»):

> *«Ум, который в данный момент знал бы все силы, действующие в природе [...], охватил бы одной и той же формулой движения крупнейших тел Вселенной и легчайших атомов. Ничто не было бы для него недостоверным, и будущее, как и прошедшее, стояло бы перед его глазами»*

Важно отметить, что для Лапласа, который известен своим вкладом в теорию вероятностей, неопределенность являлась лишь следствием **неполноты** нашего знания.

Современное определение вероятности

Теория вероятностей в современном виде была описана А.Н. Колмоговорым («аксиоматика Колмогорова»).



Объектом нашего рассмотрения будет пространство элементарных исходов Ω. Пример элементарного исхода при игре в карты? В кости?

Сигма-алгебра и ее свойства. Случайные события как элементы сигма-алгебры.

Современное определение вероятности

Измеримость. Вероятность - неотрицательная мера на пространстве случайных событий.

Подмножества пространства элементарных исходов - случайные события. Объединение и пересечение случайных событий.

Свойства вероятности:

- $P(\varnothing) = 0;$
- $P(\Omega) = 1;$
- $P(B \setminus A) = P(B) - P(A),\ A \subset B;$
- $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B);$

Пример

Вопрос 1: Если сейчас потребуется выбрать случайного студента из аудитории, то какова вероятность, что выберут именно вас?

Вопрос 2: Какова вероятность выбора студента с «отличной успеваемостью» или «днем рождения в апреле»?

Вопрос 3: Менялось ли пространство элементарных исходов в данных двух задачах?

Условная вероятность

Условная вероятность для двух событий A и B :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Независимые события

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

Формула Байеса

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

Как правило, используется формула полной вероятности для группы несовместных событий:

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)\,P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\,P(A_i)}$$

Формула Байеса

Пример

Допустим, существет редкое заболевание, которым болеет лишь 0.001 населения. Самый точный тест выявляет всех заболевших ($FN = 0$), однако в 0.01 случаев он показывает заболевание для здорового индивида ($FP = 0.01$). Некто X сдает тест и результат положительный. Какова вероятность того, что он болен?

Формула Байеса

Пример

Допустим, существет редкое заболевание, которым болеет лишь 0.001 населения. Самый точный тест выявляет всех заболевших ($FN = 0$), однако в 0.01 случаев он показывает заболевание для здорового индивида ($FP = 0.01$). Некто X сдает тест и результат положительный. Какова вероятность того, что он болен?

Ответ

Шанс - всего 9%. Можем ли мы улучшить результат?

Формула Байеса

Пример

Нередко, при вводе запроса в поисковик мы допускаем опечатки, которые поисковик зачастую весьма успешно исправляет. Давайте рассмотрим, как можно построить систему исправления ошибок, пользуясь базовыми законами вероятности - ноутбук Bayes spell correction.ipynb.

Случайные величины

Случайные величины

Случайная величина - измеримая функция $X : \Omega \to \mathbb{R}$, такая что для любого $r \in \mathbb{R}$ событие $\omega : X(\omega) \leq r$ принадлежит сигма-алгебре на пространстве элементарных исходов.

Если случайная величина принимает счетное количество значений, то она называется **дискретной**, в противном случае - **непрерывной** случайной величиной.

Для описания случайной величины, помимо области значений, также необходимо описать её вероятностные свойства. Наиболее общий способ - задать **функцию распределения**.

Функция распределения

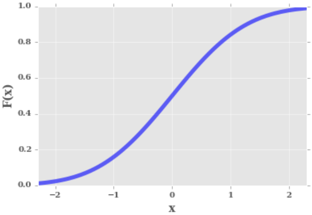
Функция распределения - функция $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$, определенная как $F_X(x) = P(X \leq x)$. Функция распределения неубывающая и непрерывна справа. Значения функции распределения ограничены $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.

Квантильная функция (Quantile function) определяет такое значение случайной величины, что вероятность события «X меньше или равен x» в точности равно p: $Q(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} : p \leq F_X(x)\}$. Для непрерывной случайной величины квантильная функция представляет из себя обратную функцию от функции распределения.

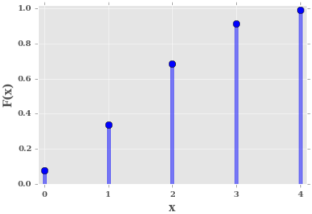
Квантили. Медиана, интерквартильный размах. t-digest.

Пример функции распределения

Определенной на несчетном множестве



Определенной на счетном множестве



Основные законы распределения

Основные сведения

Дискретная случайная величина принимает счетное множество значений. Для каждого из значений ДСВ можем по определению найти вероятность данного значения, поэтому удобно работать с функцией вероятности $p_X(x) = P(X = x)$.

Тогда, функцию распределения можно выразить через функцию вероятности:

$$F_X(x) = \sum_{x_j \le x} p(x_j).$$

Если мы взвесим все возможные исходы по вероятности их наступления, то получим **математическое ожидание**:

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) x_i.$$

Дискретные случайные величины

Дисперсия: мера разброса значений случайной величины вокруг своего математического ожидания.

$$V(X) = E((X - E(X)^2).$$

Стандартное отклонение: $\sigma = \sqrt{V(X)}$

k-начальный момент:

$$\nu^k = E(X^k) = \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i){x_i}^k.$$

k-центральный момент:

$$\kappa^k = E((X - E(X))^k) = \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i)(x_i - E(X))^k.$$

Математическое ожидание - первый начальный момент, дисперсия - второй центральный момент.

Дискретные случайные величины

Коэффициент асимметрии - мера того, насколько «хвосты распределения» отличаются «по длине» друг относительно друга.

$$\gamma_1(X) = \frac{\kappa^3}{\sigma^3}.$$

Коэффициент эксцесса - мера остроты пика распределения случайной величины.

$$\gamma_2(X) = \frac{\kappa^4}{\sigma^4} - 3.$$

Энтропия - способ описать «информацию» о случайной величине, содержащуюся в ее значениях.

$$H(X) = E(-\ln P(X)) = \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) \log p(x_i).$$

Энтропия

Пример

Хорошее объяснение энтропии случайной величины представлено тут - http://colah.github.io/posts/2015-09-Visual-Information/

Дискретные случайные величины

Пример

Давайте ознакомимся с примерами дискретных случайных величин и вспомним основные законы распределения - ноутбук Discrete RV.ipynb.

Непрерывные случайные величины

По аналогии, непрырывная случайная величина прнимает несчетное множество значений. Говорят, что случайная величина является непрырывной, если существует неотрицательная функция $f(x)$, определенная для всех вещественных x, такая что для любого измеримого множества $B \subset \mathbb{R}$ выполняется:

$$P(X \in B) = \int_B f(x)\, dx.$$

Если $B = [a, b]$, то:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Вероятность на множествах меры ноль равна нулю.

$$P(X < a) = P(X \le a) = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x)\, dx.$$

Непрерывные случайные величины

Первые моменты равны:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx.$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)\,dx.$$

Энтропия непрерывного распределения:

$$H(X) = E(-\ln P(X)) = -\int_{-\infty}^{\infty} P(x)\log P(x)\,dx.$$

Моменты более высоких порядков определены аналогичным (по сравнению с дискретной случайной величиной) образом.

k-начальный момент:

$$\nu^k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\, dx.$$

k-центральный момент:

$$\kappa^k = E((X - E(X))^k) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^k f(x)\, dx.$$

Пример

Давайте ознакомимся с примерами непрерывных случайных величин и вспомним основные законы распределения - ноутбук Continuos RV.ipynb.

Совместная функция распределения

Для двух случайных величин X и Y совместная функция распределения определена как:

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

Путем предельного перехода можем получить маржинальную (marginal) функцию распределения:

$$F_X(x) = P(X \leq x, Y < \infty) = \lim_{y \to \infty} F_{XY}(x, y).$$

Совместное распределение ДСВ

Для дискретных случайных величин совместная функция вероятности определена как

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x|Y = y)P(Y = y).$$

или в более общем виде:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n) = P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2|X_1 = x_1)... \\ P(X_n = x_n|X_1 = x_1, X_12 = x_2, ..., X_{n-1} = x_{n-1}).$$

Условные вероятности для ДСВ:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

Совместное распределение ДСВ

Исходя из этого определения легко получить:

$$F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{X<x} \sum_{Y<y} P(x,y).$$

И маржинальные вероятности:

$$P(X = x) = \sum_{y} P(X = x, Y = y) = \sum_{y} P(X = x, Y = y).$$

Совместное распределение НСВ

Соответственно, для НСВ функция $f(x, y)$ является функцией плотнотсти вероятности, если $f(x, y) \geq 0$ для всех (x, y) и ограничена:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dxdy = 1.$$

Тогда вероятность для СВ принять значение в области $A \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$P(X, Y \in A) = \int \int_{A} f(x, y)\, dxdy.$$

Маржинальная функция плотности:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X Y(x, y)\, dy.$$

Совместное распределение НСВ

Ранее, мы отметили, что условная вероятность для ДСВ имеет вид:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

Для НСВ мы используем условную функцию плотности вероятности:

$$f_{x|Y=y} = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

Соответствующую вероятность для события $X \in A$ можно легко получить как:

$$P(X \in A|Y = y) = \int_A f_{X|Y}(x|y)\, dx.$$

Условное распределение СВ

Так как для функции условной вероятности выполняются все необходимые условие, то мы можем говорить об условных моментах случайных величин, например математическом ожидании:

$$E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{x|Y=y}\, dx.$$

и условной дисперсии:

$$E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X|Y))^2 f_{X|Y}\, dx.$$

Задача нахождения ожидаемого значения некоторой функции $Y = f(X) + \epsilon$, где ϵ - отклонение (ошибка), а X - известная нам реализация случайной величины (величин) имеет большое применение в прикладной статистике.

Независимость СВ

Будем говорить, что СВ X, Y независимы, если для любого $A, B \in \mathbb{R}$ верно:

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B).$$

Таким образом, для НСВ условие независимости принимает вид

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y),$$

для дискретных случайных величин -

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

В случае, если это условие не выполняется - будем считать, что случайные величины зависимы.

Меры зависимости СВ

Ненормированная мера **линейной** зависимости - ковариация:

$$cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])].$$

Корреляция - нормированная мера **линейной** зависимости:

$$corr(X, Y) = \rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Взаимная энтропия KL для распределений P и Q:

$$D_{KL}(P||Q) = \sum_i P(i) \log \frac{P(i)}{Q(i)},$$

если существуют функции плотности вероятности p и q:

$$D_{KL}(P||Q) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)},$$

Случайный вектор

Случайный вектор - набор из n случайных величин $X = (X_1, ..., X_n)$.
Случайные величины $(X_1, ..., X_n)$ независимы, если

$$P(X_1 \in A_1, ..., X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i).$$

Если каждая из СВ, входящих в вектор X, подчинена одному и тому же закону распределения с функцией вероятности F, то говорят что $(X_1, ..., X_n)$ - **независимые одинаково распределенные** величины или IID (independent identically distributed):

$$X_1, ..., X_n \sim F.$$

Аналогично, будем называть $(X_1, ..., X_n)$ **выборкой** размера n.

Спасибо за внимание!