

# Машинное обучение, ФКН ВШЭ

## Теоретическое домашнее задание №5

**Задача 1.** Рассмотрим двойственное представление задачи гребневой регрессии:

$$Q(a) = \frac{1}{2} \|Ka - y\|^2 + \frac{\lambda}{2} a^T Ka \rightarrow \min_a.$$

Покажите, что решение этой задачи записывается как

$$a = (K + \lambda I)^{-1} y.$$

**Задача 2.** Покажите, что функция

$$K(x, z) = \cos(x - z)$$

для  $x, z \in \mathbb{R}$  является ядром.

**Задача 3.** Рассмотрим функцию, равную косинусу угла между двумя векторами  $x, z \in \mathbb{R}^d$ :

$$K(x, z) = \cos(\widehat{x, z}).$$

Покажите, что она является ядром.

**Задача 4.** Рассмотрим ядра  $K_1(x, z) = (xz + 1)^2$  и  $K_2(x, z) = (xz - 1)^2$ , заданные для  $x, z \in \mathbb{R}$ . Найдите спрямляющие пространства для  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K_1 + K_2$ .

**Задача 5.** Рассмотрим следующую функцию на пространстве вещественных чисел:

$$K(x, z) = \frac{1}{1 + e^{-xz}}.$$

Покажите, что она не является ядром.

**Задача 6.** На одном из занятий было рассмотрено all-subsequences kernel. Рассмотрим его модификацию fixed length subsequences kernel, которая учитывает лишь подпоследовательности фиксированной длины  $p$ :

$$(\varphi^p(s))_u = |\{i : s(i) = u\}|, \quad u \in \Sigma^p,$$
$$K_p(s, t) = \langle \varphi^p(s), \varphi^p(t) \rangle = \sum_{u \in \Sigma^p} (\varphi^p(s))_u (\varphi^p(t))_u.$$

Выведите рекуррентные формулы для вычисления  $K_p(s, t)$  аналогично выведенным на семинаре.