Komplexní rychlokurzy Matematiky a Fyziky

Matematická analýza - 4MM101, 4MM106

Příklad 1 *Určete reálny parametr a tak, aby platilo*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{an^2}{3-2n}+2n+1\right)=\infty$$

Řešení 1.
Tento typ příkladu poznáme podle toho, že opět obsahuje nejvýše celé mocniny n, ale narozdíl od příkladu 6 obsahuje i zlomek. Ideálním postupem při řešení tohoto typu je úprava celé limity na společného jmenovatele, t.j.:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{an^2}{3-2n}+2n+1\right)&=\infty\\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{an^2+2n(3-2n)+1(3-2n)}{3-2n}\right)&=\infty\\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{an^2+6n-4n^2+3-2n}{3-2n}\right)&=\infty\\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2(a-4)+4n+3}{3-2n}\right)&=\infty\end{aligned}\tag{1}$$

Druhým krokom zůstává vždy vytknout z čitatele i jmenovatele největší mocninu, tedy:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2(a-4)+4n+3}{3-2n}\right)&=\infty\\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{\cancel{2}1}\left(\frac{\cancel{n^2}(a-4)}{\cancel{n^2}}+\frac{4\cancel{n}}{n^{\cancel{2}1}}+\frac{3}{n^2}\right)}{\cancel{n}\left(\frac{3}{n}-\frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}}\right)}\right)&=\infty\\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\left((a-4)+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{\left(\frac{3}{n}-2\right)}\right)&=\infty\end{aligned}\tag{2}$$

Posledním krokem je dosazení limity do mezivýsledku (2), tedy.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\infty\left((a-4)+\frac{4}{\infty}+\frac{3}{\infty^2}\right)}{\left(\frac{3}{\infty}-2\right)}\right)&=\infty\\ \left(\frac{\infty\left((a-4)+0+0\right)}{(0-2)}\right)&=\infty\\ \frac{\infty\,(a-4)}{(-2)}&=\infty\\ -\infty\,(a-4)&=\infty\end{aligned}\tag{3}$$

kde jsme opět použili pouze základní charakteristiky úprav s nekonečnami. Podobně jako v předchozím příkladu musíme vyřešit všechny možnosti závorky v rovnici (3).

- $(a-4) < 0 \implies -\infty\,(-) = \infty \implies \infty = \infty$. Vidíme, že v tomto případě získáme rovnost dané limitní rovnice, záporná závorka tedy patří mezi přípustná řešení rovnice.

- $(a-4) = 0 \implies -\infty\,(0) = ?$. V případě nulové závorky dostaneme neurčitý výraz nekonečno krát nula, a proto musíme konkrétně řešit $(a-4) = 0 \implies a = 4$. Tuto hodnotu a dosadíme do dané limitní rovnice a vypočítáme:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2}{3-2n} + 2n + 1\right) &= \infty \\
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2 + 2n(3-2n) + 1(3-2n)}{3-2n}\right) &= \infty \\
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{4n^2} + 6n - \cancel{4n^2} + 3 - 2n}{3-2n}\right) &= \infty \\
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+3}{3-2n}\right) &= \infty \\
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n}\left(\frac{4\cancel{n}}{\cancel{n}} + \frac{3}{n}\right)}{\cancel{n}\left(\frac{3}{n} - \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}}\right)}\right) &= \infty \\
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(4 + \frac{3}{n}\right)}{\left(\frac{3}{n} - 2\right)}\right) &= \infty \\
\left(\frac{\left(4 + \frac{3}{\infty}\right)}{\left(\frac{3}{\infty} - 2\right)}\right) &= \infty \\
\frac{(4+0)}{(0-2)} &= \infty \\
\frac{(4)}{(-2)} &= \infty \\
-2 &\neq \infty
\end{aligned} \tag{4}$$

kde jsme opět použili pouze základní vlastnosti práce s nekonečnem. Dostali jsme nesmyslný výraz, takže závorka $(a-4) = 0$ není řešením původně zadané limitní rovnice.

- $(a-4) < 0 \implies -\infty\,(+) = \infty \implies -\infty \neq \infty$. Daná rovnost neplatí, takže ani tento případ není řešením dané limitní rovnice.

Řešením naší limitní rovnice je tedy záporná závorka $(a-4) < 0 \implies a < 4$.

Odpověď: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{an^2}{3-2n} + 2n + 1\right) = \infty \implies a < 4 \qquad \square$

Příklad 2 *Pomocí Bolzanovy věty řešte nerovnici*

$$\left(x - \tfrac{1}{2}\right) arcsin(x) < 0$$

Řešení 2.
Pokud máme příklad počítat pomocí Bolzanovy věty, postup je vždy následující:

- Nejprve musíme určit definiční obor funkce a tedy i určit body nespojitosti, t.j. body, kde je jmenovatel nulový.
- Poté spočítáme nulové body. Ty určíme vždy tak, že celou funkci odepíšeme a dosadíme ji rovnu nule.
- Definiční obor rozdělíme na tolik intervalů, kolik potřebujeme. Jinými slovy, vždy v každém nulovém bodě a bodě nespojitosti.
- V každém z těchto intervalů budeme zkoumat znaménko funkce.
- Vybereme si buď kladné, nebo záporné intervaly, protože příklad bude vždy dán tím, že na pravé straně bude nula, jinými slovy budeme právě zkoumat, kde je funkce záporná nebo kladná.

Definiční obor funkce lze určit velmi snadno. Vidíme, že máme součin dvou funkcí, a to $(x - \frac{1}{2})$ a $arcsin(x)$. Víme, že funkce $(x - \frac{1}{2})$ je polynom, a má tedy definiční obor celé číslo $\mathbb{R}$. Dále víme, že funkce $arcsin(x)$ má definiční obor $\langle -1; 1\rangle$, tudíž celý definiční obor funkce je:

$$D_{(x-\frac{1}{2})arcsin(x)} = \langle -1; 1\rangle \tag{5}$$

Dále je třeba určit body nespojitosti, a protože tato funkce nemá žádný zlomek a žádnou nespojitost, je tato funkce spojitá a nemá žádné body nespojitosti. Nulové body vypočítáme z rovnice $f(x) = 0$, tedy:

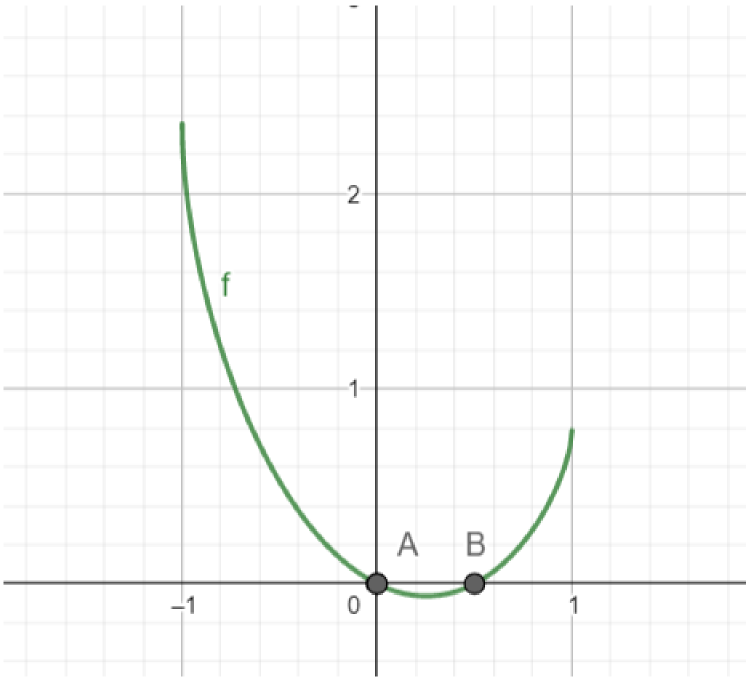
$$\begin{gathered}\left(x - \frac{1}{2}\right) arcsin(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \vee arcsin(x) = 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \; x = \frac{1}{2} \\ arcsin(x) = 0 \quad \Longrightarrow \; x = 0\end{gathered} \tag{6}$$

Získali jsme dva nulové body. Jinými slovy, dva průsečníky s osou x. Nyní můžeme náš definiční obor (5) rozdělit vzhledem k nulovým bodům, které jsme spočítali, t.j. $\langle -1; 0\rangle$, $\langle 0; \frac{1}{2}\rangle$, $\langle \frac{1}{2}; 1\rangle$. Nakonec sestavíme tabulku, kde do řádků vložíme dané intervaly a do sloupců naši funkci, t.j.:

Tabulka 1: Řešení nerovnice pomocí Bolzanovy věty

Interval	$\left(x - \frac{1}{2}\right)$	arcsin(x)	$\left(x - \frac{1}{2}\right) arcsin(x)$
$\langle -1; 0\rangle$	(−)	(−)	(−)(−)=(+)
$\langle 0; \frac{1}{2}\rangle$	(−)	(+)	(−)(+)=(−)
$\langle \frac{1}{2}; 1\rangle$	(+)	(+)	(+)(+)=(+)

Ze zadání zkoumáme, kdy je daná funkce menší než nula, takže budeme zkoumat, kdy má poslední sloupec tabulky (1) záporné znaménko. To je splněno pouze pro interval $\langle 0; \frac{1}{2}\rangle$. Podle zadání se jedná o ostrou nerovnost, jinými slovy nám chybí znaménko rovnosti, takže interval musí být otevřený z obou stran. Řešení je tedy $(0; \frac{1}{2})$. Zkontrolujme výsledek na grafu funkce, který lze vykreslit například pomocí programu Geogebra.



Obrázek 1: Graf funkce $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) arcsin(x)$

Z grafu vidíme, že jsme naše řešení vypočítali správně, funkce je záporná právě na intervalu $(0; \frac{1}{2})$, jinými slovy na tomto intervalu je pod osou x. Body A a B jsou naše počítané nulové body, jinými slovy průsečníky s osou x, a celá funkce je definována pouze na definičním oboru $\langle -1; 1\rangle$, na kterém je také spojitá, přesně jak jsme určili.

Odpověď: $\left(x - \frac{1}{2}\right) arcsin(x) < 0 \quad \Longrightarrow x \in (0, \frac{1}{2}) \qquad \square$

...