Komplexní rychlokurzy Matematiky a Fyziky

Matematická analýza - NOFY151

Příklad 1 *Spočtěte:*

$$\int_0^{4\pi} \frac{1}{1+sin^2(x)}\,dx$$

Řešení 1.
Vidíme, že integrand konverguje v obou mezích, a proto můžeme přistoupit k počítání. Pro goniometrické integrály je užitečná substituce $tg(x) = y$, která nás vždy přivede k integrálům racionálně lomených funkcí[1] a ty umíme řešit, tj:

$$\int_0^{4\pi} \frac{1}{1+sin^2(x)}\,dx \quad \Bigg| \mathrm{substituce: tg(x) = y; dx = \frac{1}{1+y^2}; sin^2(x) = \frac{y^2}{1+y^2}} \tag{1}$$

Výsledky substituce se dosadí do integrálu (1). Dále potřebujeme vypočítat neurčitý integrál, takže zadané meze nebudeme dále zapisovat, abychom je nemuseli přepočítávat v substituci, tedy:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+sin^2(x)}\,dx &= \int \frac{1}{1+\frac{y^2}{1+y^2}}\frac{1}{1+y^2}\,dy \\
&= \int \frac{\frac{1}{\cancel{1+y^2}}}{\frac{1+y^2+y^2}{\cancel{1+y^2}}}\,dy \\
&= \int \frac{1}{2y^2+1}\,dy \\
&= \int \frac{1}{(\sqrt{2}y)^2+1}\,dy \quad \Bigg| \mathrm{substituce: \sqrt{2}y = a; \sqrt{2}dy = da; dy = \frac{da}{\sqrt{2}}} \\
&= \int \frac{1}{a^2+1}\frac{1}{\sqrt{2}}\,dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}arctg(a) \quad \Bigg| \text{vrácení první substituce } \mathrm{a = \sqrt{2}y} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}y) \quad \Bigg| \text{vrácení druhé substituce } \mathrm{y = tg(x)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}tg(x))
\end{aligned} \tag{2}$$

[1] Jedná se o integrály typu $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$, kde $f(x)$ a $g(x)$ jsou polynomy.

Výsledek (2) je tedy neurčitý integrál a my jsme měli na začátku vypočítat určitý integrál, takže dosadíme zadané meze, tj.

$$\left.\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}tg(x))\right|_{0}^{4\pi} \tag{3}$$

Zde je nutné si uvědomit, že $tg(x)$ je na intervalu $\langle 0, 4\pi\rangle$ nespojitá, a proto musíme určitý integrál počítat pouze na podintervalech, kde je funkce spojitá. Na daném intervalu je funkce $tg(x)$ nespojitá v bodech $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ a $\frac{7\pi}{2}$, tedy:

$$\begin{aligned} \left.\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}tg(x))\right|_{0}^{4\pi} &= \left.\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}tg(x))\right|_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \left.\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}tg(x))\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \\ &+ \left.\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}tg(x))\right|_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} + \left.\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}tg(x))\right|_{\frac{5\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{2}} + \\ &+ \left.\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}tg(x))\right|_{\frac{7\pi}{2}}^{4\pi} = \left.f(x)\right|_{a}^{b} \end{aligned} \tag{4}$$

kde dále použijeme definici Newtonova nebo Riemannova integrálu, a to $\left.f(x)\right|_{a}^{b} = [\lim_{x\to b^-} f(x) - \lim_{x\to a^+} f(x)]$, tj:

$$\begin{aligned} \left.f(x)\right|_{a}^{b} &= \left[\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}tg(x)) - \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}tg(x))\right] + \\ &+ \left[\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-} \frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}tg(x)) - \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}tg(x))\right] + \\ &+ \left[\lim_{x\to\frac{5\pi}{2}^-} \frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}tg(x)) - \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^+} \frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}tg(x))\right] + \\ &+ \left[\lim_{x\to\frac{7\pi}{2}^-} \frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}tg(x)) - \lim_{x\to\frac{5\pi}{2}^+} \frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}tg(x))\right] + \\ &+ \left[\lim_{x\to 4\pi^-} \frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}tg(x)) - \lim_{x\to\frac{7\pi}{2}^+} \frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}tg(x))\right] \end{aligned} \tag{5}$$

Víme, že limita funkce $tg(x)$ v bodech nespojitosti je rovna nekonečnu, a to buď s kladným, nebo záporným znaménkem, podle toho, zda limitu počítáme zleva, nebo zprava. Pokud se jedná o limitu zleva, výsledek je záporné nekonečno, a pokud zprava, výsledek je kladné nekonečno, takže pokud to dosadíme do (5), dostaneme:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}tg(x))\Big|_0^{4\pi} &= \left[\lim_{y\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}y) - \lim_{y\to 0}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}y)\right] + \\
&+ \left[\lim_{y\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}y) - \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}y)\right] + \\
&+ \left[\lim_{y\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}y) - \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}y)\right] + \\
&+ \left[\lim_{y\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}y) - \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}y)\right] + \\
&+ \left[\lim_{y\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}y) - \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}y)\right]
\end{aligned} \tag{6}
$$

Limity jsme počítali jako limity složených funkcí, takže jsme proměnnou x nahradili proměnnou y, abychom rozlišili vnější a vnitřní limity. V posledním kroku využijeme toho, že limita funkce $arctg(x)$ v nekonečnu je plus $\pi/2$ a v mínus nekonečnu je $-\pi/2$, takže:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}tg(x))\Big|_0^{4\pi} &= \left[\frac{\pi}{\sqrt{2}2} - 0\right] + \left[\frac{\pi}{\sqrt{2}2} + \frac{\pi}{\sqrt{2}2}\right] + \left[\frac{\pi}{\sqrt{2}2} + \frac{\pi}{\sqrt{2}2}\right] + \\
&+ \left[\frac{\pi}{\sqrt{2}2} + \frac{\pi}{\sqrt{2}2}\right] + \left[\frac{\pi}{\sqrt{2}2} - 0\right] \\
&= \left[\frac{\pi}{\sqrt{2}2}\right] + \left[\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right] + \left[\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right] + \left[\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right] + \left[\frac{\pi}{\sqrt{2}2}\right] \\
&= \frac{8\pi}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{4\pi}{\sqrt{2}}
\end{aligned} \tag{7}
$$

Odpověď: $\int_0^{4\pi} \frac{1}{1+sin^2(x)}\,dx = \frac{4\pi}{\sqrt{2}}$ □

...