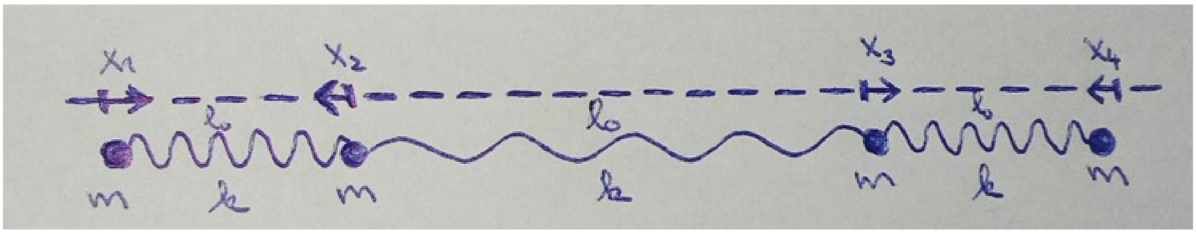
Komplexní rychlokurzy Matematiky a Fyziky

MFF Fyzika NOFY021

Příklad 1 *Na základě úvahy o působících silách:*



Obrázek 1: Pohyb čtyř těles.

(i) *Odvoďte soustavu Newtonových pohybových rovnic pro níže uvedení systém.*

(ii) *Nyní hledejte vlastní kmity soustavy (tzv. normální módy), kdy všechna 4 tělesa kmitají se stejnou frekvencí ω, t.j. $x_i = C_i exp(i\omega t)$. Ukažte, že pohybové rovnice přecházejí v soustavu čtyř lineárních rovnic pro amplitudy C_i, kde matice soustavy je:*

$$\begin{pmatrix} (m\omega^2 - k) & k & 0 & 0 \\ k & (m\omega^2 - 2k) & k & 0 \\ 0 & k & (m\omega^2 - 2k) & k \\ 0 & 0 & k & (m\omega^2 - k) \end{pmatrix} \tag{1}$$

.

(iii) *Soustava rovnic má netriviální řešení tehdy a jen tehdy, je-li determinant matice (1) nulový. Z výše uvedené podmínky ověřte, že 4 vlastní frekvence $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4$ mají velikost:*

$$\omega_1 = 0; \quad \omega_2 = \sqrt{(2-\sqrt{2})\frac{k}{m}}; \quad \omega_3 = \sqrt{2\frac{k}{m}}; \quad \omega_4 = \sqrt{(2+\sqrt{2})\frac{k}{m}} \tag{2}$$

.

(iv) *Pro každou z těchto vlastních frekvencí vypočítejte vektor amplitud (C_1,C_2,C_3,C_4), což je odpovídající vlastní vektor matice.*

(v) *Podle velikosti a znamének amplitud C_i pro každou vlastní frekvenci diskutujte (např. pomocí schématu), jak jsou jednotlivé pružiny systému stlačeny.*

(vi) *Co se stane v bodech 1 a 2, když místo 4 těles a 3 pružin vezmeme n stejných těles a n-1 stejných pružin? Zkuste rozhodnout, zda mezi všemi vlastními frekvencemi bude stále $\omega_1 = 0$.*

Řešení 1.
Postupně vyřešíme jednotlivé body zadání.

Řešení (i)

- Ze zadání víme, že tělesa jsou stejná se stejnou hmotností m, máme 3 ideální pružiny o tuhosti k a klidové délce l_0.
- Je třeba pro každé těleso sestavit odpovídající pohybovou rovnici s klasickým vztahem $m\ddot{x}_i$ na levé straně, kde $x_i = x_1, x_2, x_3, x_4$.
- Dále víme, že se bude jednat o harmonický pohyb, a tedy rovnice harmonického oscilátoru má tvar $F = m\ddot{x} = -kx$.
- Dále si můžeme všimnout, že koncové tělesa již nejsou spojeny s další pružinou, takže na ně bude působit pouze těleso, které s nimi sousedí, tedy pouze jedna síla. Pro dvě tělesa uvnitř soustavy to budou vždy dvě síly od sousedního tělesa.
- **Pohybová rovnice pro první těleso:** První těleso sousedí s jedním tělesem vpravo $\implies$ $F = m\ddot{x}_1 = -kx$, kde musíme určit x $\implies$ dochází ke změně polohy $\implies$ $x = x_1 - x_2$.
$$m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2)$$
- **Pohybová rovnice pro druhé těleso:** Druhé těleso sousedí s dvěma tělesy $\implies$ $F = m\ddot{x}_2 = -kx_a - kx_b$. x_a patří do polohy mezi prvním a druhým tělesem, ale z opačného směru $\implies$ $x_a = x_2 - x_1$. x_b patří do polohy mezi druhým a třetím tělesem, ale z opačného směru $\implies$ $x_b = x_2 - x_3$.
$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3)$$
- **Pohybová rovnice pro třetí těleso**[1]**:** Třetí těleso sousedí s dvěma tělesy $\implies$ $F = m\ddot{x}_3 = -kx_c - kx_d$. x_c patří do polohy mezi druhým a třetím tělesem, ale z opačného směru $\implies$ $x_c = x_3 - x_2$. x_d patří do polohy mezi třetím a čtvrtým tělesem, ale z opačného směru $\implies$ $x_d = x_3 - x_4$.
$$m\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2) - k(x_3 - x_4)$$
- **Pohybová rovnice pro čtvrté těleso**[2]**:** Čtvrté těleso sousedí s jedním tělesem vlevo $\implies$ $F = m\ddot{x}_4 = -kx$, kde musíme určit x $\implies$ dochází ke změně polohy $\implies$ $x = x_4 - x_3$.
$$m\ddot{x}_4 = -k(x_4 - x_3)$$

Řešení (ii)

Z otázky (i) jsme odvodili pohybové rovnice pro danou soustavu:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -k(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3) \\ m\ddot{x}_3 &= -k(x_3 - x_2) - k(x_3 - x_4) \\ m\ddot{x}_4 &= -k(x_4 - x_3) \end{aligned} \tag{3}$$

[1] Podobně jako u druhého tělesa.
[2] Podobně jako u prvního tělesa.

A ze zadání víme, že $x_i = C_i exp(i\omega t)$. Tento výraz budeme postupně dosazovat do výše uvedené soustavy pohybových rovnic (3), tedy:

$$\begin{aligned}
&m(C_1 e\ddot{x}p(i\omega t)) = -k(C_1 exp(i\omega t) - C_2 exp(i\omega t))\\
&m(C_2 e\ddot{x}p(i\omega t)) = -k(C_2 exp(i\omega t) - C_1 exp(i\omega t)) - k(C_2 exp(i\omega t) - C_3 exp(i\omega t))\\
&m(C_3 e\ddot{x}p(i\omega t)) = -k(C_3 exp(i\omega t) - C_2 exp(i\omega t)) - k(C_3 exp(i\omega t) - C_4 exp(i\omega t))\\
&m(C_4 e\ddot{x}p(i\omega t)) = -k(C_4 exp(i\omega t) - C_3 exp(i\omega t))
\end{aligned} \tag{4}$$

Levou stranu soustavy (4) dvakrát derivujeme podle času a z pravé strany vyjměme výraz $exp(i\omega t)$, tedy:

$$\begin{aligned}
C_1 m(-\omega^2)\cancel{exp(i\omega t)} &= -k\cancel{exp(i\omega t)}(C_1 - C_2)\\
C_2 m(-\omega^2)\cancel{exp(i\omega t)} &= -k\cancel{exp(i\omega t)}(C_2 - C_1) - k\cancel{exp(i\omega t)}(C_2 - C_3)\\
C_3 m(-\omega^2)\cancel{exp(i\omega t)} &= -k\cancel{exp(i\omega t)}(C_3 - C_2) - k\cancel{exp(i\omega t)}(C_3 - C_4)\\
C_4 m(-\omega^2)\cancel{exp(i\omega t)} &= -k\cancel{exp(i\omega t)}(C_4 - C_3)
\end{aligned} \tag{5}$$

Získáme tedy rovnice:

$$\begin{aligned}
-C_1 m\omega^2 &= -k(C_1 - C_2)\\
-C_2 m\omega^2 &= -k(C_2 - C_1) - k(C_2 - C_3)\\
-C_3 m\omega^2 &= -k(C_3 - C_2) - k(C_3 - C_4)\\
-C_4 m\omega^2 &= -k(C_4 - C_3)
\end{aligned} \tag{6}$$

Všechny členy soustavy (6) převedeme na levou stranu, t.j.:

$$\begin{aligned}
-C_1 m\omega^2 + kC_1 - kC_2 &= 0\\
-C_2 m\omega^2 + kC_2 - kC_1 + kC_2 - kC_3 &= 0\\
-C_3 m\omega^2 + kC_3 - kC_2 + kC_3 - kC_4 &= 0\\
-C_4 m\omega^2 + kC_4 - kC_3 &= 0
\end{aligned} \tag{7}$$

Celou soustavu rovnic (7) vynásobíme číslem -1, abychom získali kladné hodnoty amplitudy, a současně vytkněme amplitudy před závorku, t.j.:

$$\begin{aligned}
C_1(m\omega^2 - k) + kC_2 &= 0\\
C_2(m\omega^2 - 2k) + kC_1 + kC_3 &= 0\\
C_3(m\omega^2 - 2k) + kC_2 + kC_4 &= 0\\
C_4(m\omega^2 - k) + kC_3 &= 0
\end{aligned} \tag{8}$$

Převedeme soustavu rovnic (8) do maticového tvaru, abychom ověřili tvrzení v otázce 2 tohoto zadání, tedy:

$$\begin{pmatrix} (m\omega^2 - k) & k & 0 & 0\\ k & (m\omega^2 - 2k) & k & 0\\ 0 & k & (m\omega^2 - 2k) & k\\ 0 & 0 & k & (m\omega^2 - k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1\\ C_2\\ C_3\\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Když porovnáme matici systému (9) s maticí ze zadání, vidíme, že jsou shodné.

Řešení *(iii)*

Potřebujeme vypočítat determinant matice systému. Pro zjednodušení zavedeme substituci $m\omega^2 = a$, tedy:

$$\begin{vmatrix} (a-k) & k & 0 & 0 \\ k & (a-2k) & k & 0 \\ 0 & k & (a-2k) & k \\ 0 & 0 & k & (a-k) \end{vmatrix} \tag{10}$$

V prvním kroku vynásobíme první řádek determinantu (10) číslem $-\frac{k}{(a-k)}$ a přičteme jej k druhému řádku, t.j.:

$$\begin{vmatrix} (a-k) & k & 0 & 0 \\ 0 & \left[(a-2k) - \frac{k^2}{(a-k)}\right] & k & 0 \\ 0 & k & (a-2k) & k \\ 0 & 0 & k & (a-k) \end{vmatrix} \tag{11}$$

V dalším kroku vyjměme z prvního řádku determinantu (11) číslo $(a-k)$, t.j.:

$$(a-k)\begin{vmatrix} 1 & \frac{k}{(a-k)} & 0 & 0 \\ 0 & \left[(a-2k) - \frac{k^2}{(a-k)}\right] & k & 0 \\ 0 & k & (a-2k) & k \\ 0 & 0 & k & (a-k) \end{vmatrix} \tag{12}$$

Nyní rozvineme determinant (12) podle prvního sloupce, t.j.:

$$(a-k)\begin{vmatrix} \left[(a-2k) - \frac{k^2}{(a-k)}\right] & k & 0 \\ k & (a-2k) & k \\ 0 & k & (a-k) \end{vmatrix} \tag{13}$$

K výpočtu determinantu (13) použijeme Sarrusovo pravidlo. Předtím vynásobíme první řádek číslem $(a-k)$, čímž se zbavíme i zlomku na začátku determinantu, t.j.:

$$\begin{aligned} |A| &= \left[(a-2k)(a-k) - k^2\right](a-2k)(a-k) + 0 + 0 - \\ &\quad - \left[(a-2k)(a-k) - k^2\right]k^2 - k^2(a-k)(a-k) \\ &= (a^2 - 2ak - ak + 2k^2 - k^2)(a^2 - 2ak - ak + 2k^2) \\ &\quad - k^2(a^2 - 2ak - ak + 2k^2 - k^2) - k^2(a^2 - 2ak + k^2) \\ &= (a^2 - 3ak + k^2)(a^2 - 3ak + 2k^2) - k^2(a^2 - 3ak + k^2) - \\ &\quad - k^2(a^2 - 2ak + k^2) \\ &= a^4 + 9a^2k^2 - 3a^3k + a^2k^2 - 3a^3k - 3ak^3 + 2a^2k^2 - \\ &\quad - 6ak^3 + 2k^4 - a^2k^2 + 3ak^3 - k^4 - k^2a^2 + 2ak^3 - k^4 \\ &= a^4 - 6a^3k + 10a^2k^2 - 4ak^3 \end{aligned} \tag{14}$$

V posledním kroku vrátíme substituci a získáme konečný výsledek determinantu jako:

$$m^4\omega^8 - 6km^3\omega^6 + 10k^2m^2\omega^4 - 4k^3m\omega^2 \tag{15}$$

Tvar (15) přepíšeme do tvaru:

$$m^2\omega^2(2k - m\omega^2)(m^2\omega^4 - 4mk\omega^2 + 2k^2) = 0 \tag{16}$$

Z rovnice (16) vyplývá, že:

$$\begin{aligned} m^2\omega^2 &= 0 \\ (2k - m\omega^2) &= 0 \\ (m^2\omega^4 - 4mk\omega^2 + 2k^2) &= 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Postupně vyřešíme všechny části rovnice (17), a to:

1. $m^2\omega^2 = 0 \implies \omega_{1,2} = \pm 0$
2. $(2k - m\omega^2) = 0 \implies \frac{2k}{m} = \omega^2 \implies \omega_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{2k}{m}}$
3. V této části musíme použít substituci $\omega^2 = p$ a dosadit ji do posledního výrazu (17), t.j. $p^2m^2 - 4mkp + 2k^2 = 0$. Řešením je jednoduchá kvadratická rovnice, tedy:

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \frac{4mk \pm \sqrt{16m^2k^2 - 4m^22k^2}}{2m^2} \\ &= \frac{4mk \pm \sqrt{16m^2k^2 - 8m^2k^2}}{2m^2} \\ &= \frac{4mk \pm \sqrt{8m^2k^2}}{2m^2} \\ &= \frac{4mk \pm 2\sqrt{2}mk}{2m^2} \\ &= (2 \pm \sqrt{2})\frac{k}{m} \end{aligned} \tag{18}$$

   Vrátíme substituci a získáme poslední řešení pro frekvenci, tedy:

$$\omega_{5,6,7,8} = \pm\sqrt{(2 \pm \sqrt{2})\frac{k}{m}} \tag{19}$$

Ze všech řešení, na která jsme přišli, mají fyzikální smysl pouze 4, jinými slovy vylučujeme záporné frekvence, protože existují pouze kladné frekvence. Fyzikálně přípustné frekvence jsou tedy:

- $\omega_1 = 0$
- $\omega_2 = \sqrt{(2 - \sqrt{2})\frac{k}{m}}$
- $\omega_3 = \sqrt{2\frac{k}{m}}$
- $\omega_4 = \sqrt{(2 + \sqrt{2})\frac{k}{m}}$

Vidíme, že jsme ověřili otázku 3 se zadání, když jsme spočítali všechny 4 frekvence, které odpovídají zadání.

Řešení *(iv)*

...