Komplexní rychlokurzy Matematiky a Fyziky

Matematická analýza NOFY151

Příklad 1 *Spočtěte:*

$$\int_0^{4\pi} \frac{1}{1+sin^2(x)}\,dx$$

Řešení 1.
Vidíme, že integrand konverguje v obou mezích, a proto můžeme přistoupit k počítání. Pro goniometrické integrály je užitečná substituce $tg(x) = y$, která nás vždy přivede k integrálům racionálně lomených funkcí[1] a ty umíme řešit, tj:

$$\int_0^{4\pi} \frac{1}{1+sin^2(x)}\,dx \quad \Bigg| \mathrm{substituce: tg(x) = y; dx} = \frac{1}{1+\mathrm{y}^2}; \sin^2(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{y}^2}{1+\mathrm{y}^2} \tag{1}$$

Výsledky substituce se dosadí do integrálu (1). Dále potřebujeme vypočítat neurčitý integrál, takže zadané meze nebudeme dále zapisovat, abychom je nemuseli přepočítávat v substituci, tedy:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+sin^2(x)}\,dx &= \int \frac{1}{1+\frac{y^2}{1+y^2}} \frac{1}{1+y^2}\,dy \\
&= \int \frac{\frac{1}{\cancel{1+y^2}}}{\frac{1+y^2+y^2}{\cancel{1+y^2}}}\,dy \\
&= \int \frac{1}{2y^2+1}\,dy \\
&= \int \frac{1}{(\sqrt{2}y)^2+1}\,dy \quad \Bigg| \mathrm{substituce:} \sqrt{2}\mathrm{y} = \mathrm{a}; \sqrt{2}\mathrm{dy} = \mathrm{da}; \mathrm{dy} = \frac{\mathrm{da}}{\sqrt{2}} \\
&= \int \frac{1}{a^2+1} \frac{1}{\sqrt{2}}\,dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(a) \quad \Bigg| \text{vrácení první substituce } \mathrm{a} = \sqrt{2}\mathrm{y} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2}y) \quad \Bigg| \text{vrácení druhé substituce } \mathrm{y} = \mathrm{tg(x)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2}tg(x))
\end{aligned} \tag{2}$$

[1] Jedná se o integrály typu $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$, kde $f(x)$ a $g(x)$ jsou polynomy.

Výsledek (2) je tedy neurčitý integrál a my jsme měli na začátku vypočítat určitý integrál, takže dosadíme zadané meze, tj.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2} tg(x)) \Big|_0^{4\pi} \tag{3}$$

Zde je nutné si uvědomit, že $tg(x)$ je na intervalu $\langle 0, 4\pi \rangle$ nespojitá, a proto musíme určitý integrál počítat pouze na podintervalech, kde je funkce spojitá. Na daném intervalu je funkce $tg(x)$ nespojitá v bodech $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ a $\frac{7\pi}{2}$, tedy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2} tg(x)) \Big|_0^{4\pi} &= \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2} tg(x)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2} tg(x)) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2} tg(x)) \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2} tg(x)) \Big|_{\frac{5\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{2}} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2} tg(x)) \Big|_{\frac{7\pi}{2}}^{4\pi} = f(x) \Big|_a^b \end{aligned} \tag{4}$$

kde dále použijeme definici Newtonova nebo Riemannova integrálu, a to $f(x) \Big|_a^b = [\lim_{x \to b^-} f(x) - \lim_{x \to a^+} f(x)]$, tj:

$$\begin{aligned} f(x) \Big|_a^b = &\left[\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2} tg(x)) - \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2} tg(x)) \right] + \\ + &\left[\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}^-} \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2} tg(x)) - \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2} tg(x)) \right] + \\ + &\left[\lim_{x \to \frac{5\pi}{2}^-} \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2} tg(x)) - \lim_{x \to \frac{3\pi}{2}^+} \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2} tg(x)) \right] + \\ + &\left[\lim_{x \to \frac{7\pi}{2}^-} \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2} tg(x)) - \lim_{x \to \frac{5\pi}{2}^+} \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2} tg(x)) \right] + \\ + &\left[\lim_{x \to 4\pi^-} \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2} tg(x)) - \lim_{x \to \frac{7\pi}{2}^+} \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2} tg(x)) \right] \end{aligned} \tag{5}$$

Víme, že limita funkce $tg(x)$ v bodech nespojitosti je rovna nekonečnu, a to buď s kladným, nebo záporným znaménkem, podle toho, zda limitu počítáme zleva, nebo zprava. Pokud se jedná o limitu zleva, výsledek je záporné nekonečno, a pokud zprava, výsledek je kladné nekonečno, takže pokud to dosadíme do (5), dostaneme:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2} tg(x))\bigg|_0^{4\pi} &= \left[\lim_{y\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}y) - \lim_{y\to 0}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}y)\right] + \\
&+ \left[\lim_{y\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}y) - \lim_{y\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}y)\right] + \\
&+ \left[\lim_{y\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}y) - \lim_{y\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}y)\right] + \\
&+ \left[\lim_{y\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}y) - \lim_{y\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}y)\right] + \\
&+ \left[\lim_{y\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}y) - \lim_{y\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}y)\right]
\end{aligned} \tag{6}
$$

Limity jsme počítali jako limity složených funkcí, takže jsme proměnnou x nahradili proměnnou y, abychom rozlišili vnější a vnitřní limity. V posledním kroku využijeme toho, že limita funkce $arctg(x)$ v nekonečnu je plus $\pi/2$ a v mínus nekonečnu je $-\pi/2$, takže:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2} tg(x))\bigg|_0^{4\pi} &= \left[\frac{\pi}{\sqrt{2}2} - 0\right] + \left[\frac{\pi}{\sqrt{2}2} + \frac{\pi}{\sqrt{2}2}\right] + \left[\frac{\pi}{\sqrt{2}2} + \frac{\pi}{\sqrt{2}2}\right] + \\
&+ \left[\frac{\pi}{\sqrt{2}2} + \frac{\pi}{\sqrt{2}2}\right] + \left[\frac{\pi}{\sqrt{2}2} - 0\right] \\
&= \left[\frac{\pi}{\sqrt{2}2}\right] + \left[\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right] + \left[\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right] + \left[\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right] + \left[\frac{\pi}{\sqrt{2}2}\right] \\
&= \frac{8\pi}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{4\pi}{\sqrt{2}}
\end{aligned} \tag{7}
$$

Odpověď: $\int_0^{4\pi} \frac{1}{1+sin^2(x)}\,dx = \frac{4\pi}{\sqrt{2}}$ $\square$

...