Отчет по лабораторной работе № 5. Модель хищник-жертва

дисциплина: Математическое моделирование

Наливайко Сергей Максимович

Содержание

1 Цель работы

Научиться моделировать простейшую модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры.

2 Выполнение лабораторной работы

2.1 Краткая теоретическая справка

Двувидовая модель Лотки-Вольтерры основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории);
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает;
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными;
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается;
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников;

$$\frac{\partial x}{\partial t} = ax(t) - bx(t)y(t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -cy(t) + bx(t)y(t)$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c -

естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние (A на рис. 2.1) всякое же другое начальное состояние (B) приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние B.

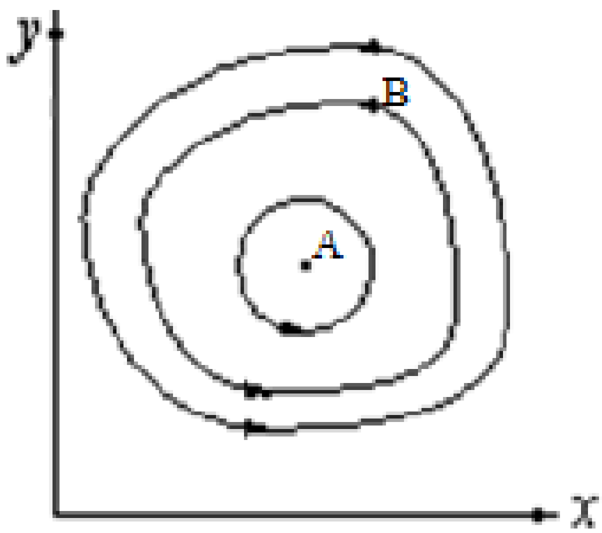

Рис. 2.1: Эволюция популяции жертв и хищников в модели Лотки-Вольтерры.

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

2.2 Формулировка задачи. Вариант 45

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = -0.32y(t) + 0.04x(t)y(t) \\ \frac{\partial y}{\partial t} = 0.42y(t) - 0.02x(t)y(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 9, y_0 = 20$. Найдите стационарное состояние системы.

2.3 Решение задачи

Напишем программный код и посмотрим на вывод программы.

```
using Plots
using DifferentialEquations
pyplot();
a = 0.32;
b = 0.04;
c = 0.42;
d = 0.02;

t = (0.0, 400.0);
step = 0.01;
p = [a,b,c,d];
```

```
x0 = [9,20];

function syst(dx,x,p,t)
    a,b,c,d = p;
    dx[1] = -a*x[1] + b*x[1] * x[2];
    dx[2] =  c*x[2] - d*x[1] * x[2];
end

prob = ODEProblem(syst, x0, t, p);
sol = solve(prob, saveat = step);

n = length(sol);
y1 = zeros(n);
y2 = zeros(n);

for i in 1:n
    y1[i] = sol.u[i][1];
    y2[i] = sol.u[i][2];
end

plot(y1,y2, xlabel = "Хищники", ylabel = "Жертвы", label = "График измене
scatter!([c/d], [a/b], label = "Стац точка")
title!("Модель хищник-жертва")
```

При запуске программы мы получим зависимости изменения численности хищников от изменения численности жертв (рис. 2.2).

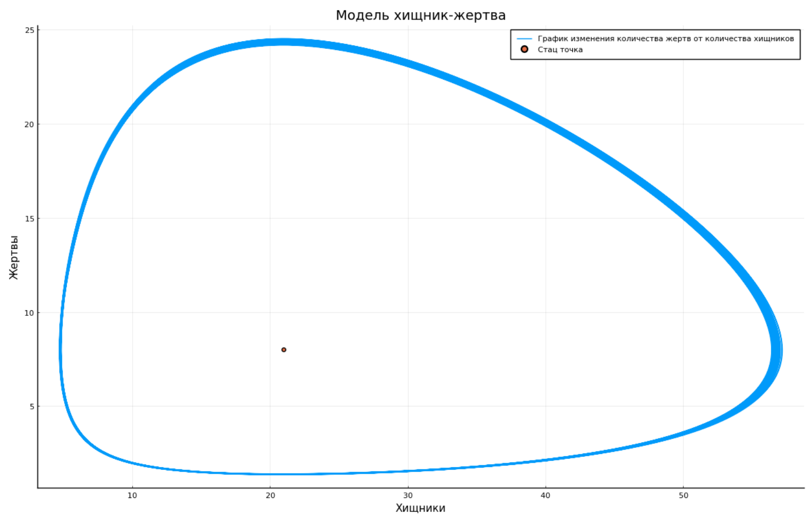

Рис. 2.2: Зависимости изменения численности хищников от изменения численности жертв

Закроем график и выполним команды

```
plot(sol, xlabel = "t", ylabel = "Количество особей", label = ["Хищники"
title!("Модель хищник-жертва")
```

Получим графики изменения численности хищников и численности жертв (рис. 2.3)

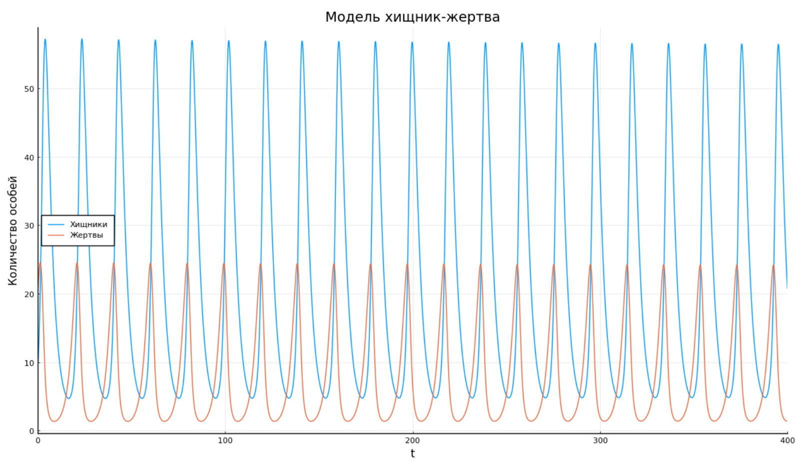

Рис. 2.3: Графики изменения численности хищников и численности жертв

3 Вывод

В ходе лабораторной работы мы научились моделировать простейшую модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва».