Отчет по лабораторной работе № 4. Модель гармонических колебаний

дисциплина: Математическое моделирование

Наливайко Сергей Максимович

Содержание

1 Цель работы

Научиться моделировать гармонические колебания.

2 Выполнение лабораторной работы

2.1 Краткая теоретическая справка

Движение грузика на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется линейным гармоническим осциллятором.

Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2\gamma\frac{\partial x}{\partial t} + w_0^2 x = 0$$

где x - переменная, описывающая состояние системы, γ – параметр, характеризующий потери энергии, w_0 – собственная частота колебаний, t – время. Это уравнение есть линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка и оно является примером линейной динамической системы.

Для однозначной разрешимости уравнения второго порядка необходимо задать два начальных условия вида

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x''(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Отталкиваясь от этого, можно решить данное уравнение с помощью системы

$$\begin{cases} x'(t) = y \\ y'(t) = -2\gamma y - w_0^2 x \end{cases}$$

2.2 Формулировка задачи. Вариант 45

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев:

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $x''(t) + 17x = 0$,
2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $x''(t) + 22x'(t) + 23x = 0$,
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $x''(t) + 5x'(t) + 8x = 0.25 \sin 8t$,

На интервале $t \in [0; 58]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = 0.2, y_0 = -0.3$.

2.3 Решение задачи

1. Напишем программный код и выведем график зависимости x от x' (рис. 2.1).

```
using Plots
using DifferentialEquations
pyplot();

w_sqr = 17.00;
step = 0.05;
```

```
t = (0.0,58.0);
x0 = [0.2; -0.3];
p = [w_sqr];

function syst(dx,x,p,t)
    w = p[1];
    dx[1]  = x[2];
    dx[2] =  - w * x[1];
end

prob = ODEProblem(syst, x0, t, p);
sol = solve(prob, saveat = step);
n = length(sol.u);
y1 = zeros(n);
y2 = zeros(n);
for i in 1:n
    y1[i] = sol.u[i][1];
    y2[i] = sol.u[i][2];
end

plot(y1, y2, xlabel = "X", ylabel = "X'", label = "График зависимости x(x
title!("Фазовая зависимость")
```

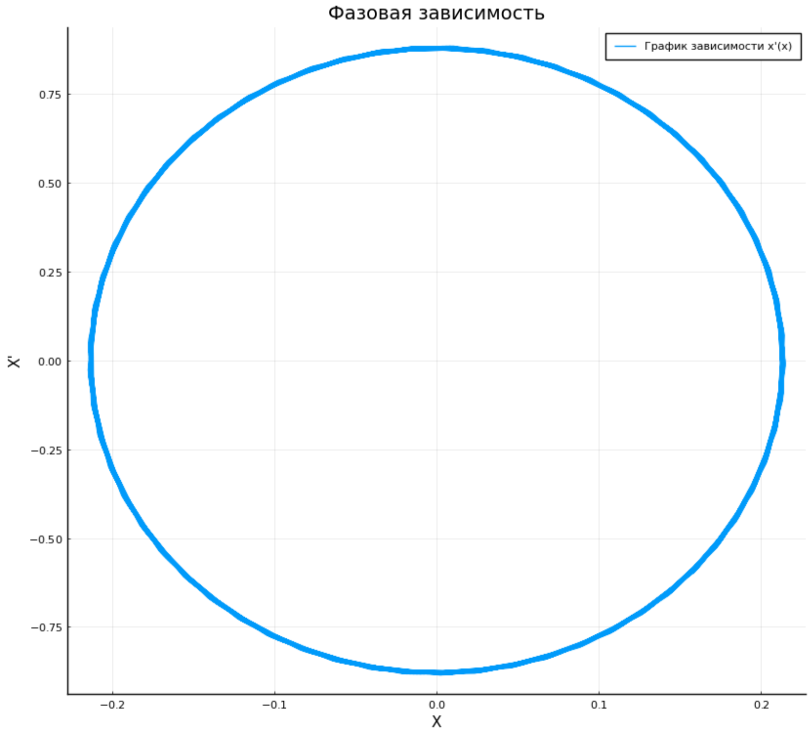

Рис. 2.1: Фазовый портрет колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

2. Напишем программный код и выведем график зависимости x от x' (рис. 2.2).

```
using Plots
using DifferentialEquations
pyplot();

w_sqr = 23.00;
g = 22.00;
step = 0.05;
t = (0.0,58.0);
x0 = [0.2; -0.3];
p = [w_sqr,g];
```

```
function syst(dx,x,p,t)
    w,g = p
    dx[1]  = x[2];
    dx[2] =  - w * x[1]  - g * x[2];
end


prob = ODEProblem(syst, x0, t, p);
sol = solve(prob, saveat = step);
n = length(sol.u);
y1 = zeros(n);
y2 = zeros(n);
for i in 1:n
    y1[i] = sol.u[i][1];
    y2[i] = sol.u[i][2];
end
plot(y1, y2, xlabel = "X", ylabel = "X'", label = "График зависимости x(x
title!("Фазовая зависимость")
```

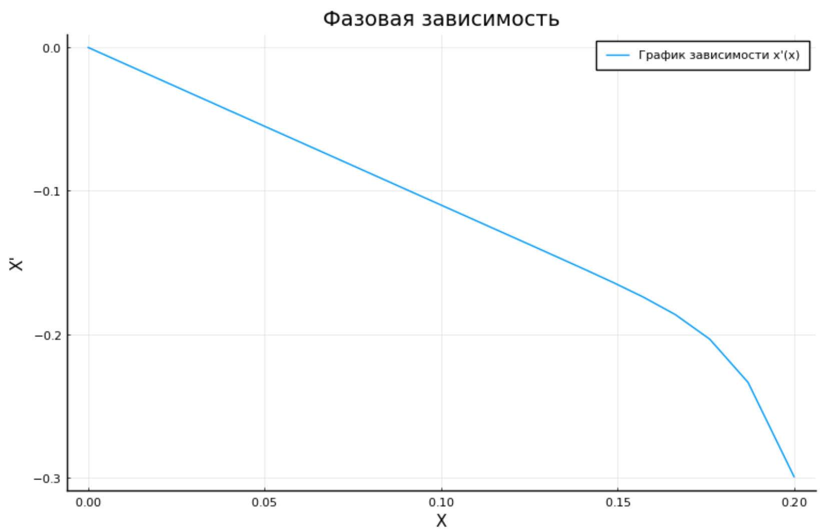

Рис. 2.2: Фазовый портрет колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

3. Напишем программный код и выведем график зависимости x от x' (рис. 2.3).

```
using Plots
using DifferentialEquations
pyplot();

w_sqr = 8.00;
g = 5.00;
step = 0.05;
t = (0.0,58.0);
x0 = [0.2; -0.3];
p = [w_sqr,g];

f(t) = 0.25 * sin(8*t);
function syst(dx,x,p,t)
    w,g = p
    dx[1]  = x[2];
```

```
    dx[2] =  - w * x[1]  - g * x[2] + f(t);
end



prob = ODEProblem(syst, x0, t, p);
sol = solve(prob, saveat = step);
n = length(sol.u);
y1 = zeros(n);
y2 = zeros(n);
for i in 1:n
    y1[i] = sol.u[i][1];
    y2[i] = sol.u[i][2];
end
plot(y1, y2, xlabel = "X", ylabel = "X'", label = "График зависимости x(x
title!("Фазовая зависимость")
```

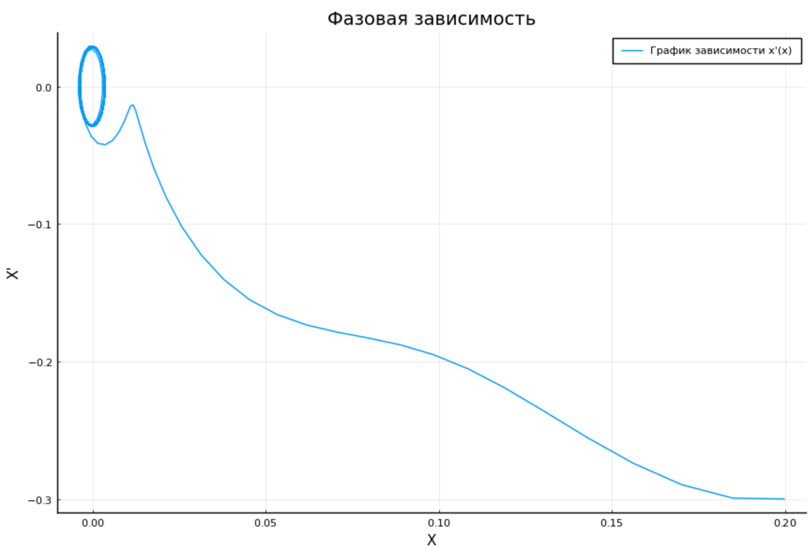

Рис. 2.3: Фазовый портрет колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

3 Вывод

В ходе лабораторной работы мы научились моделировать гармонические колебания.