Лабораторна робота № 3.

Тема: Перевірка гіпотези про рівномірний закон розподілу випадкової величини

Мета: навчитись перевіряти статичні гіпотези щодо закону рівномірного розподілу випадкової величини.

Теоретичні відомості

Статистичною гіпотезою називають певне припущення про окремі властивості генеральної сукупності, що перевіряється на основі властивостей вибірки.

У математичній статистиці виділяють два основні типи статистичних гіпотез: гіпотези про закон розподілу ймовірності випадкової величини (ознаки генеральної сукупності) – ***непараметричні статистичні гіпотези***; гіпотези про значення параметрів розподілу випадкової величини (ознаки генеральної сукупності) – ***параметричні статистичні гіпотези***.

Основною (нульовою) гіпотезою називають висунуту гіпотезу, яку позначають H_0.

Альтернативною гіпотезою називають гіпотезу, яка заперечує твердження, висловлене в нульовій гіпотезі. Її позначають H_α.

Статистичним критерієм називається випадкова величина K, за допомогою якого проводиться перевірка гіпотези. Значення випадкової величини K, яке обчислене на основі певної вибірки, називають ***емпіричним*** (***спостережуваним***) ***значенням критерію*** і позначають $K_{емп}$.

Сукупність значень критерію K (випадкової величини K), згідно з яким нульова гіпотеза приймається, називається ***областю прийняття гіпотези***, а сукупність значень критерію K, згідно з яким гіпотеза відхиляється, називається ***критичною областю***.

Якщо емпіричне (спостережуване) значення критерію $K_{емп}$ належить критичній області, то нульову гіпотезу відхиляють, якщо $K_{емп}$ попадає в область прийняття гіпотези, то нульову гіпотезу приймають.

Критична область відмежовується від області прийняття гіпотези точкою, яка називається критичною і позначається $k_{кр}$.

Перевірка статистичної гіпотези проводиться за таким планом:

1. Формулюють нульову гіпотезу H_0, альтернативну гіпотезу H_1 і задають рівень значущості α для перевірки нульової гіпотези.
2. Визначають критерій K для перевірки гіпотези H_0, який є випадковою величиною з відомим розподілом ймовірностей.
3. Визначають критичні області відносно даних критерію K та рівня значущості α. Для визначення критичної області достатньо знайти критичні точки $k_{кр}$.
4. Знаходять емпіричне (спостережуване) значення критерію $K_{емп}$ на основі конкретної вибірки.

5. Приймають рішення: якщо емпіричне значення критерію $K_{емп}$ потрапляє в критичну область, то нульову гіпотезу H_0 відхиляють; якщо ж значення $K_{емп}$ потрапляє в область прийняття гіпотези, то нульову гіпотезу H_0 приймають.

Критерії, які призначені для перевірки сформульованих гіпотез, називають *критеріями узгодженості*. Критерії узгодженості дають змогу відповідати на питання про те, чи розбіжність між емпіричними і теоретичними розподілами є настільки незначною, що вона може бути приписана впливу випадковості, чи ні.

Нехай дані вибірки згруповані і подані у вигляді дискретного або інтервального варіаційного ряду. Згідно з критерієм Пірсона, для перевірки гіпотези H_0 вводиться випадкова величина K:

$$K = \chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}, \qquad (3.1)$$

де: m – кількість груп у статистичному розподілі вибірки; $n_i' = n \cdot p_i$ - теоретична частота; n_i - емпірична частота; p_i - імовірність того, що значення випадкової величини X належить до i-ої групи $[z_{i-1}, z_i)$, і вона розрахована за допомогою гіпотетичної функції розподілу $F(x)$ або густини розподілу $f(x)$,

$$p_i = F(z_i) - F(z_{i-1}) = \int_{z_{i-1}}^{z_i} f(x)dx \qquad (3.2)$$

Для обчислення ймовірностей p_1 і p_m у формулі (3.2) записують, відповідно, $z_0 = -\infty$ і $z_m = +\infty$.

Гіпотетичні функції розподілу $F(x)$ та $f(x)$, як правило, характеризуються деякими чисельними параметрами, точні значення яких є невідомими. Тоді для обчислення теоретичних ймовірностей p_i ці невідомі параметри замінюються їх точковими оцінками, визначеними за допомогою даних вибірки.

Випадкова величина χ^2 характеризується ***кількістю ступенів свободи***

$$k = m - s - 1, \qquad (3.3)$$

де m – кількість інтервалів статистичного розподілу, s – кількість параметрів, що входять до гіпотетичного розподілу.

Якщо маємо повне узгодження теоретичного і статистичного розподілів, то $K = 0$, у протилежному випадку $K > 0$, тобто маємо правобічну критичну область. За формулою (3.1) обчислюємо $K_{емп} = \chi^2_{емп}$ і визначаємо за рівнем значущості α та кількістю ступенів свободи з таблиці критичних точок розподілу χ^2 критичне значення $\chi^2_{кр} = k_{кр}$. Якщо $K_{емп} > k_{кр}$, то нульову гіпотезу відхиляємо, інакше нульову гіпотезу приймаємо.

Застосування критерію χ^2 вимагає дотримання таких вимог:

1) експериментальні дані мають бути незалежними, тобто вибірка повинна бути випадковою;
2) обсяг вибірки має бути великим (практично не меншим 50 одиниць), а частота кожної групи не менша 5. Якщо остання умова не виконується, проводять об'єднання нечисленних груп.

Завдання: Для 15 мобільних додатків при опитуванні користувачів (90 осіб) були визначенні значення характеристик якості програмного забезпечення (ПЗ): I – функціональність; II – відповідність стандартам; III – захищеність; IV – надійність; V – зрілість; VI – завершеність; VII – стійкість до відмов; VIII – здатність до відновлення; IX – зручність використання; X – зрозумілість; XI – зручність роботи; XII – привабливість; XIII – продуктивність; XIV – часова ефективність; XV – зручність супроводу. Результати впорядкування наведено в такій таблиці:

	I	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**	**IX**	**X**	**XI**	**XII**	**XIII**	**XIV**	**XV**
1	18	12	6	0	1	6	2	24	2	3	5	3	0	4	5
2	12	8	9	5	3	7	4	16	7	2	4	3	2	4	4
3	11	6	6	4	5	8	4	7	6	8	5	5	5	7	3
4	10	10	3	2	11	9	2	4	2	6	8	6	6	4	6
5	3	9	6	5	8	11	2	8	5	4	7	11	1	4	5
6	11	8	9	2	10	7	1	3	4	14	4	6	3	7	1
7	6	4	6	5	10	5	5	4	9	7	13	5	3	4	3
8	5	8	10	5	3	6	6	4	1	6	7	6	7	6	10
9	5	5	6	8	7	7	6	3	4	8	6	12	4	7	2
10	2	5	2	9	2	6	11	6	10	6	4	9	7	6	7
11	1	3	8	6	5	2	7	0	11	5	7	5	8	11	12
12	2	3	7	5	9	3	14	3	4	4	10	7	5	6	9
13	2	4	5	6	4	2	12	3	5	6	4	5	7	7	14
14	2	1	2	12	6	10	3	1	13	7	3	4	10	9	6
15	0	4	5	16	6	1	11	4	7	4	3	3	22	4	3

Чи можна стверджувати, що мобільний додаток не достатньо має функціональності? Чи можна те ж саме стверджувати про захищеність? Перевірити твердження для кожної з характеристик якості ПЗ мобільного додатоку.

Хід роботи

1. Відкриваємо робочий лист Excel і називаємо його **«Якість ПЗ»**.
2. Вводимо дані таблиці в комірки **A2:O16**. У комірки **A1:O1** вводимо назви характеристик якості ПЗ.
3. Відкриваємо новий робочий лист і називаємо його **«Результати»**.
4. Формуємо таблицю для проведення обчислень. Об’єднуємо комірки **A1:B1**, **C1:D1**, **E1:F1**, …, **AC1:AD1** і вводимо назви **«Функціональність»**, **«Відповідність стандартам»**, **«Захищеність»**, …, **«Зручність супроводу»**. У комірках **A2**, **C2**, **E2**, …, **AC2** вводимо назву **«бали»**, а у комірках **B2**, **D2**, **F2**,…, **AD2** назву **«частоти»**. Комірки **AE1:AF1** теж об’єднуємо і вводимо назву **«Теоретичні частоти»**. У відповідні комірки вносимо числові дані задачі. ***Зауваження:*** *якщо припущення задачі правильне, то вибір ознаки мав би рівномірно розподілитися між 15 місцями, тобто на кожне місце припало б по шість виборів (90:15=6, де 90 − обсяг вибірки, 15− кількість характеристик якості ПЗ). Якщо рейтинг певної характеристики розподілений за рівномірним законом, то це означає, що користувачі не надають переваги цієї характеристики якості ПЗ, якщо ж розподіл відмінний від рівномірного, то відповідній характеристиці якості ПЗ віддається перевага.* Сформулюємо дві гіпотези:
   - H_0: користувачі не надали переваги функціональності (розподіл ознаки «функціональність» є рівномірним);
   - H_1: користувачі акцентують свою увагу на характеристиці якості ПЗ «функціональність» (розподіл ознаки «функціональність» є нерівномірним).
5. Вводимо в стовпець **AE3:AE17** число 6, що відповідає теоретичній частоті рівномірного розподілу для даної задачі 90:15=6.
6. Вводимо у комірку **F3** формулу **= (E3 – AE3)^2/AE3** і поширюємо її вміст за допомогою маркера на весь стовпець **F3:F17**.
7. Вводимо у комірку **P3** формулу **= (O3 – AE3)^2/AE3** і поширюємо її вміст за допомогою маркера на весь стовпець **P3:P17**.
8. Об’єднуємо комірки **A21:B21**, **A22:B22**, …, **A35:B35** і вводимо назви **«Функціональність», «Відповідність стандартам», «Захищеність», …, «Зручність супроводу».**
9. Об’єднуємо комірки **C20:D20** і вводимо назву **«хі-квадрат»**. Об’єднуємо комірки стовпця **«хі-квадрат»**.
10. Об’єднуємо комірки **E20:F20** і вводимо назву **«Розподіл для 0,05»**. Об’єднуємо комірки стовпця **«Розподіл для 0,05»**. Об’єднуємо комірки **I20:J20** і вводимо назву **«Розподіл для 0,01»**. Об’єднуємо комірки стовпця **«Розподіл для 0,01»**.

11. Об’єднуємо комірки **M20:N20, O20:P20, Q20:R20**, і вводимо назви **«Рівні значущості»**, **«Ступені свободи»**, **«Критичні точки»**. Об’єднуємо комірки стовпців **«Рівні значущості»**, **«Ступені свободи»**, **«Критичні точки»**, врахувавши, що кожен з них складається тільки з двох комірок.
12. У стовпець **«Рівні значущості»** вводимо числа 0,05 та 0,01. У стовпець **«Ступені свободи»** вводимо числа 14 та 14.
13. У комірку **Q21** вводимо статистичну функцію **= ХИ2ОБР** і заповнюємо її діалогове вікно (рис. 3.1).

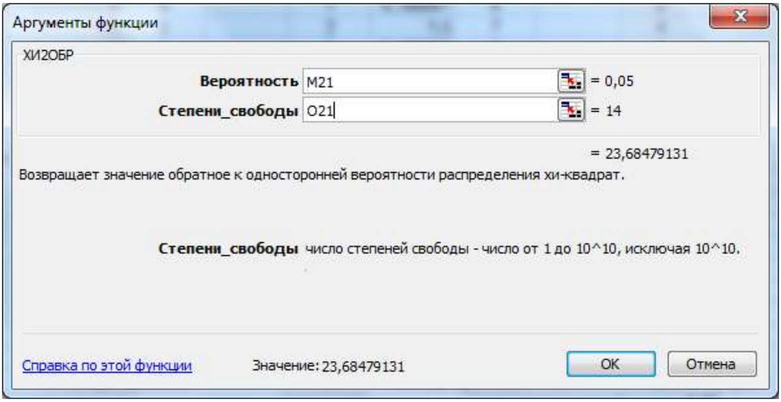

Рис. 3.1. Меню статистичної функції **ХИ2ОБР**

14. У комірці **R21** здійснюємо аналогічну операцію, але вже для рівня значущості 0,01.
15. У комірку **C23** вводимо формулу **= СУММ**, заповнюємо її діалогове вікно (рис. 3.2.). У рядок **Число 1** вводимо адреси комірок **F3:F17**, які відповідають частотам риси характеру **«Функціональність»**.

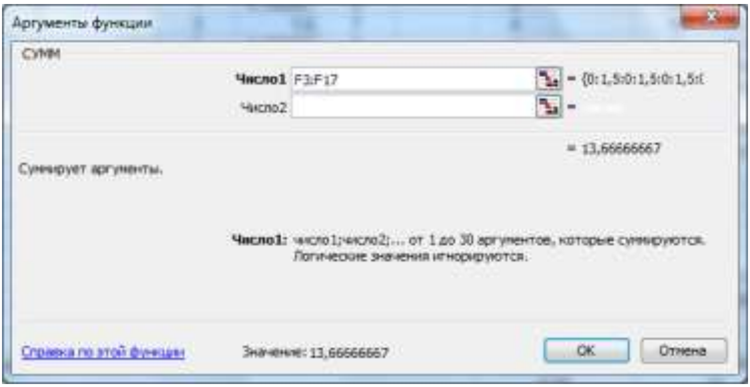

Рис. 3.2. Обчислення емпіричного значення критерію хі-квадрат

16. Вводимо у комірку **E23** формулу **= ЕСЛИ (C23<Q21; "рівномірний розподіл"; "нерівномірний розподіл")**. Щоб ввести цю формулу, необхідно зайти в меню **Вставка → Функция → Логические** і заповнити діалогове вікно цієї функції (рис. 3.3).

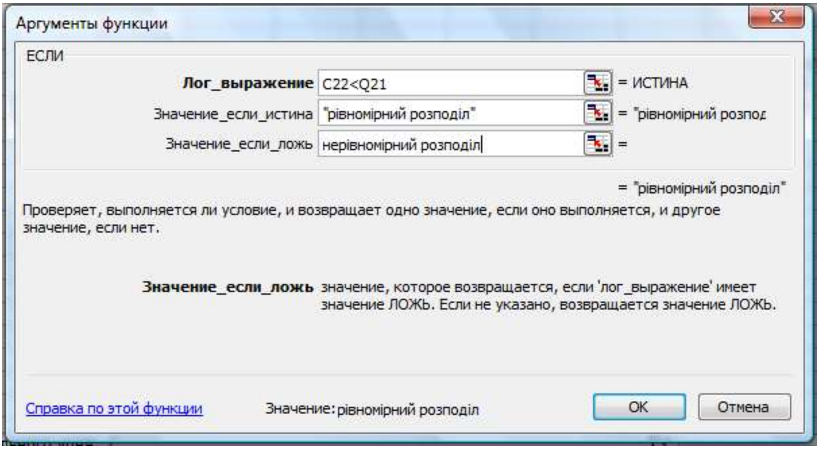

Рис. 3.3 Діалогове вікно логічної функції **ЕСЛИ**

17. У комірці **I23** повторюємо дії пункту 16, але вже для критичної точки при рівні значущості 0,01.
18. Виконуємо обчислення для всіх характеристик якості ПЗ. Побудуємо гістограми для деяких характеристик якості ПЗ, наприклад, для функціональності та захищеності.
19. Виділяємо стовпець **E3:E17**. Заходимо в меню **Вставка → Диаграмма… → Стандартные** і вибираємо з меню **Гистограмма** (рис. 3.4).

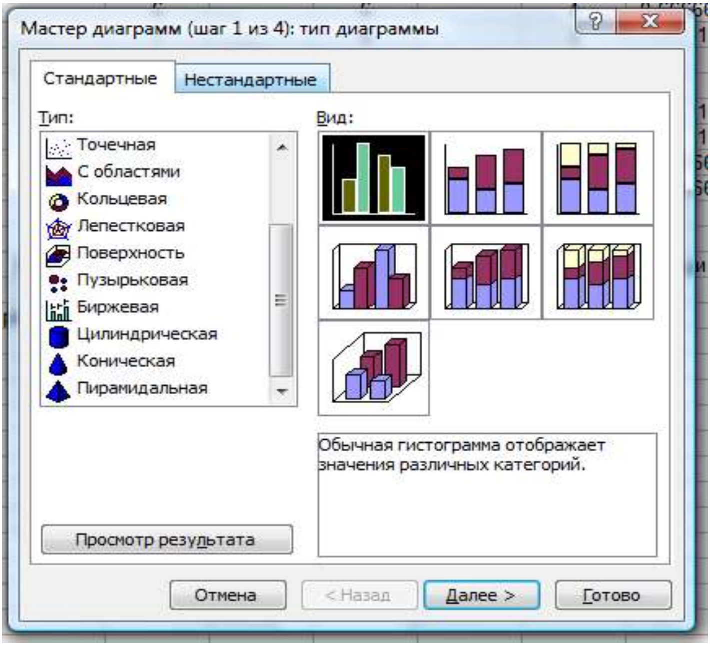

Рис. 3.4. Вибір виду гістограми

20. Натискаємо **Далее >** (крок 2 з 4), внаслідок чого з'явиться діалогове вікно (крок 3 з 4), в якому заповнюємо назву осі *X* – функціональність (рис. 3.5).

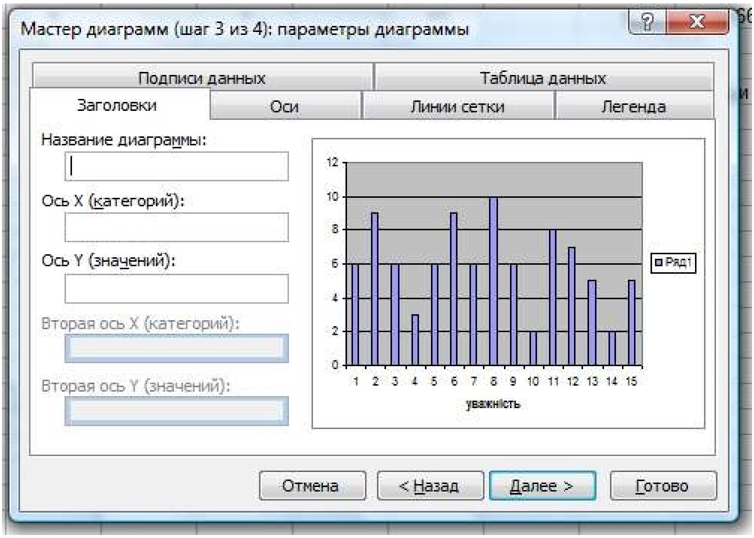

Рис. 3.5. Введення назв осей гістограми

21. Натискаємо **Далее >**. В діалоговому вікні ставимо позначку, яка вкаже куди помістити діаграму (рис. 3.6.), і натискаємо **Готово**.

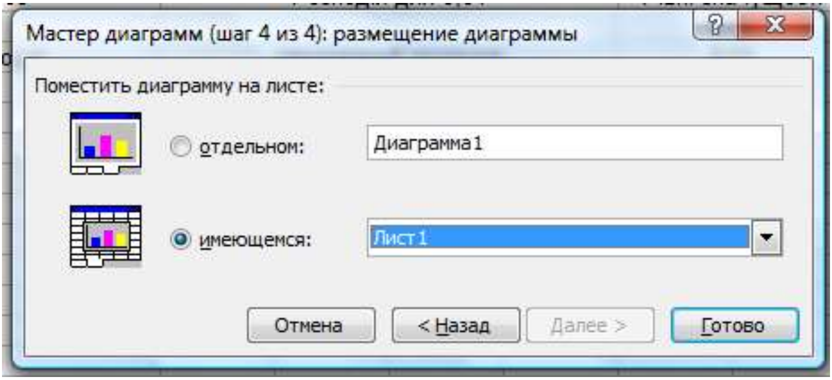

Рис. 3.6. Вибір місця розміщення діаграми

22. Переміщуємо діаграму під таблицю результатів обчислень, попередньо відредагувавши її.
23. Аналогічно будуємо решту діаграм.

Індивідуальне завдання № 3

Випадково не означає довільно: випадковість підпорядковується своїм суворим законам. Послідовність випадкових цифр має задовольнити ряд вимог випадковості. Зокрема, від такої послідовності природно вимагати, щоб поява всіх цифр була рівно ймовірною. Заповнюємо таблицю №1 своїми випадковими (на ваш погляд) числами в діапазоні (1-25)*N, де N порядковий номер за списком студентів в mia і перевірте за допомогою критерію χ^2, чи справді запропонована вами послідовність цифр є випадковою (чи розподіл цифр, виписаних вами є рівномірним). Виконайте послідовність дій з 1п. до 23 п. Якщо послідовність не є випадковою, то якій цифрі ви надаєте перевагу?

Примітка. Виписуючи послідовність, не передивляйтесь і не використовуйте в який-небудь інший спосіб уже виписану частину послідовності: кожну наступну цифру виписуйте так, ніби ви пишете її вперше (ніби до цього нічого не записувалося).

Рекомендації щодо оформлення звіту

Звіт повинен містити:
- титульний аркуш;
- найменування і мету роботи;
- відомості щодо виконання завдання;
- висновки по роботі.