

MIEI/MI - Estruturas Criptográficas

Trabalho Prático 0

João Alves
a77070@alunos.uminho.pt

Nuno Leite
a70132@alunos.uminho.pt

Universidade do Minho

1 Introdução

A resolução deste trabalho prático tem como objetivo servir de iniciação à componente prática da unidade curricular de Estruturas criptográficas, onde se pretende:

- Instalar as ferramentas computacionais necessárias para a realização dos trabalhos práticos.
- Demonstrar pequenas aplicações implementadas em **Python** e em **SageMath**.

A aplicação em **Python** deve ser implementada de tal forma que permita a comunicação entre um emissor e um recetor, com as seguintes características:

- Criptograma e metadados devem ser autenticados.
- Utilizar uma cifra simétrica em modo *stream cipher*.
- Autenticar previamente a chave.

A aplicação em **SageMath** deve ser implementada de tal forma que:

- Crie 4 corpos finitos primos.
- Crie um *plot* de uma função em cada um dos corpos finitos primos.
- Teste, por amostragem, o facto de que, considerando um expoente n , um elemento primitivo de um corpo g e um número primo p , se $g^n = 1$, então $n = 0 \bmod (p - 1)$.

2 Aplicação Python

2.1 Imports

Esta secção executa os *imports* de **Python** que contêm as funções necessárias para desenvolver a aplicação enunciada.

```
In [1]: import os
        from getpass import getpass
        from multiprocessing import Process, Pipe
        from cryptography.hazmat.backends import default_backend
        from cryptography.hazmat.primitives import hashes, hmac
```

```

from cryptography.hazmat.primitives.kdf.pbkdf2 import PBKDF2HMAC
from cryptography.hazmat.primitives.ciphers import Cipher, algorithms, modes
from cryptography.exceptions import InvalidSignature
from base64 import b64encode, b64decode

```

2.2 Definição da classe de multiprocessamento

Esta secção tem o propósito de definir a classe de multiprocessamento, que permite uma comunicação bidireccional com o *Emitter* e o *Receiver*, sendo estes dois processos criados e implementados pela API **multiprocessing**.

```

In [2]: class BiConnection(object):
        def __init__(self, left, right):
            left_side, right_side = Pipe()
            self.timeout = None
            self.left_process = Process(target=left, args=(left_side,))
            self.right_process = Process(target=right, args=(right_side,))
            self.left = lambda : left(left_side)
            self.right = lambda : right(right_side)

        # Execução manual apenas devido ao facto de a password
        # ter que ser lida em ambos os lados do Pipe
        def manual(self):
            self.left()
            self.right()

```

2.3 Definição do Emissor e do Recetor

Nesta secção encontram-se implementados os comportamentos do emissor e do recetor que participam na comunicação bidireccional da aplicação.

```

In [3]: def Emissor(connection):
        con_salt = os.urandom(16)
        passwd = bytes(getpass('Password do emissor: '), 'utf-8')
        text_to_send = os.urandom(128)
        print('Texto a cifrar e enviar:')
        print(b64encode(text_to_send))
        try:
            # derivar a chave apartir da password
            derivation = PBKDF2HMAC(
                algorithm = hashes.SHA256(),
                length = 96,
                salt = con_salt,
                iterations = 100000,
                backend = default_backend()
            )
            # Separar a password para cifragem e autenticação

```

```

full_key = derivation.derive(passwd)
cript_key = full_key[:32]
mac_key = full_key[32:64]
mac_passwd_key = full_key[64:]

# Utilizar o AES com um dos modos que o torna numa stream cipher
# para cifrar o criptograma.
nonce = os.urandom(16)
cipher = Cipher(algorithm = algorithms.AES(cript_key),
mode= modes.CTR(nonce),backend = default_backend())
cryptogram = cipher.encryptor().update(text_to_send)

#geração do código de autenticação do criptograma e dos metadados
message_to_authenticate = cryptogram + nonce + con_salt
hasher = hmac.HMAC(mac_key,hashes.SHA256(),default_backend())
hasher.update(message_to_authenticate)
hash_msg = hasher.finalize()

#geração do código de autenticação da chave
#esforço computacional é reduzido no recetor caso insira a password errada.
hasher_passwd = hmac.HMAC(mac_passwd_key,hashes.SHA256(),default_backend())
hasher_passwd.update(cript_key)
hash_pass = hasher_passwd.finalize()
obj = {'cryptogram': cryptogram, 'mac_code': hash_msg
,'pass_code': hash_pass, 'salt': con_salt, 'nonce': nonce}
connection.send(obj)
except Exception as e:
    print(e)
def Recetor(connection):
    passwd = bytes(getpass('Password do recetor: '), 'utf-8')
    try:
        obj = connection.recv()

        #Obter parâmetros no objeto
        pass_code = obj['pass_code']
        cryptogram = obj['cryptogram']
        mac_code = obj['mac_code']
        salt = obj['salt']
        nonce = obj['nonce']

        #derivar a chave apartir da password lida
        derivation = PBKDF2HMAC(
            algorithm = hashes.SHA256(),
            length = 96,
            salt = salt,
            iterations = 100000,
            backend = default_backend()
        )

```

```

#Separar a password para cifragem e autenticação
full_key = derivation.derive(passwd)
cript_key = full_key[:32]
mac_key = full_key[32:64]
mac_passwd_key = full_key[64:]

#Autenticação prévia da chave
hasher_passwd = hmac.HMAC(mac_passwd_key,hashes.SHA256(),default_backend())
hasher_passwd.update(cript_key)
hasher_passwd.verify(pass_code)

#Autenticação do criptograma e metadados
message_to_authenticate = cryptogram + nonce + salt
hash_msg = hmac.HMAC(mac_key,hashes.SHA256(),default_backend())
hash_msg.update(message_to_authenticate)
try:
    hash_msg.verify(mac_code)

#Decifrar criptograma
cipher = Cipher(algorithm = algorithms.AES(cript_key),
mode = modes.CTR(nonce),backend = default_backend())
plain_text = cipher.decryptor().update(cryptogram)
print('Texto decifrado:')
print(b64encode(plain_text))
except InvalidSignature as i:
    print("Código de autenticação não é válido!")
except Exception as e:
    print(e)
connection.close()

```

2.4 Iniciação do processo

Por último, resta apenas criar um objeto de conexão bidireccional passando-lhe como argumentos o emissor e o recetor definidos e, finalmente, prosseguindo com a execução de ambos os processos através da chamada à função manual.

```
In [4]: BiConnection(Emissor,Recetor).manual()
```

Password do emissor:

Texto a cifrar e enviar:

```
b'Bp7wjCNmvFlppA98akTdp/GDIHBqUOWiF7rSNuZRFzKEJ3dkCZV7xGeqJt+Y8XSeR820mOAVgckpMAY
+GRcTP1UPT+8osucvorZ1pN4RcWZCFH1Nburz1wcIZRwFOYHmMYFubBToo/ZwlqSoJvcESi5vjiceWxc='

```

Password do recetor:

Texto decifrado:

```
b'Bp7wjCNmvFlppA98akTDp/GDIHBqUOWiF7rSNuZRFzKEJ3dkCZV7xGeqJt+Y8XSeR820m0AVgckpMAY
+GRcTP1UPT+8osucvorZ1pN4RcWZCFH1Nburz1wcIZRwFOYHmMYFubBToo/ZwlqSoJvcESi5vjiceWxc= '
```

Através de uma ligera comparação entre o texto antes de ser cifrado e depois de ser decifrado, pode-se verificar que é exatamente o mesmo.

3 Aplicação SageMath

3.1 Criação dos corpos finitos primos

Nesta secção são criadas duas listas:

- A primeira (P) corresponde à lista de números primos que serão analisados.
- A segunda (GP) corresponde à lista de corpos finitos primos, onde cada elemento corresponde ao corpo finito primo de um dos números primos, previamente adicionados à lista P .

```
In [1]: P = [37, 163, 263, 1009]
        GP = [GF(p) for p in P]
```

3.2 Definições Iniciais

De seguida, definiu-se a função que será aplicada aos pontos dos corpos finitos primos. Esta recebe um ponto x e um primo p e calcula “ x elevado a p menos 2”. Além disso, é definida também uma lista de listas L , onde cada uma das mesmas contém os pontos resultantes da aplicação da função aos pontos de um dos corpos finitos primos.

```
In [2]: def f(x,p):
        return x^(p-2)

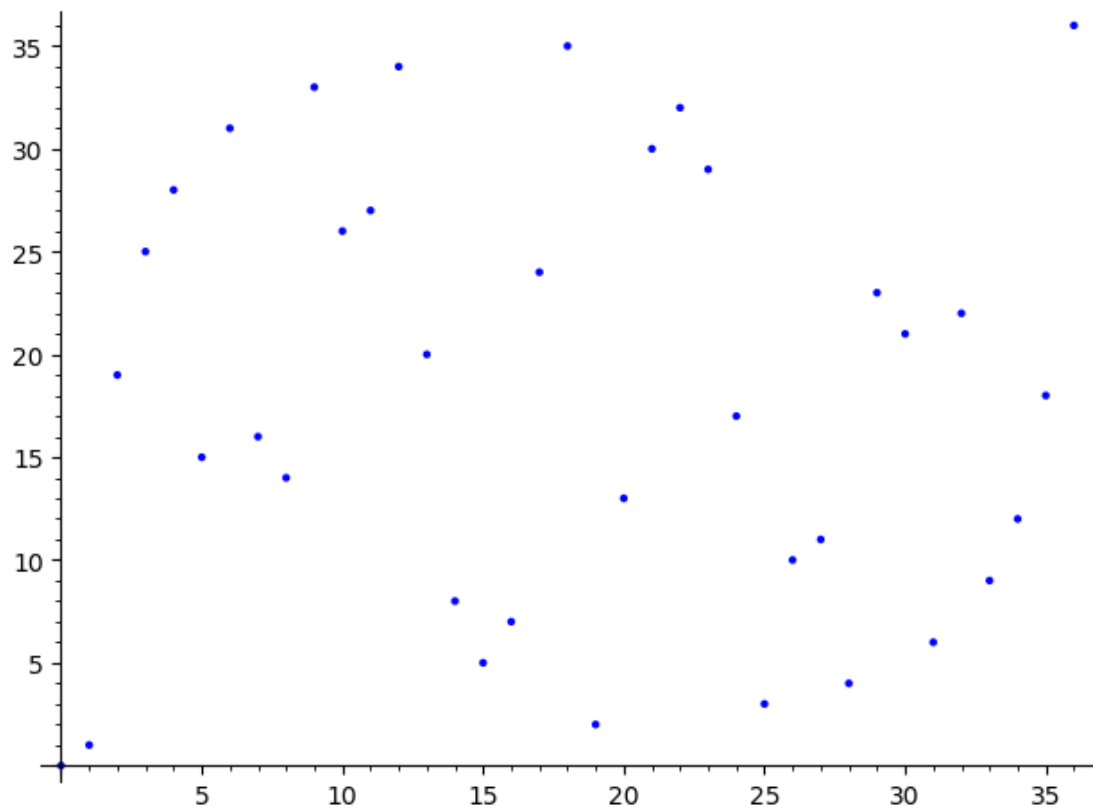
        L = [[f(x,p) for x in GF(p)] for p in P]
```

3.3 Plot da função aplicada a cada um dos corpos finitos

Esta secção tem como objetivo fazer o **plot** dos pontos resultantes da aplicação da função definida anteriormente como $f(x,p)$ a cada um dos corpos finitos primos, sendo que o resultado deverá ser apresentado como um gráfico por cada lista de pontos do corpo finito respetivo.

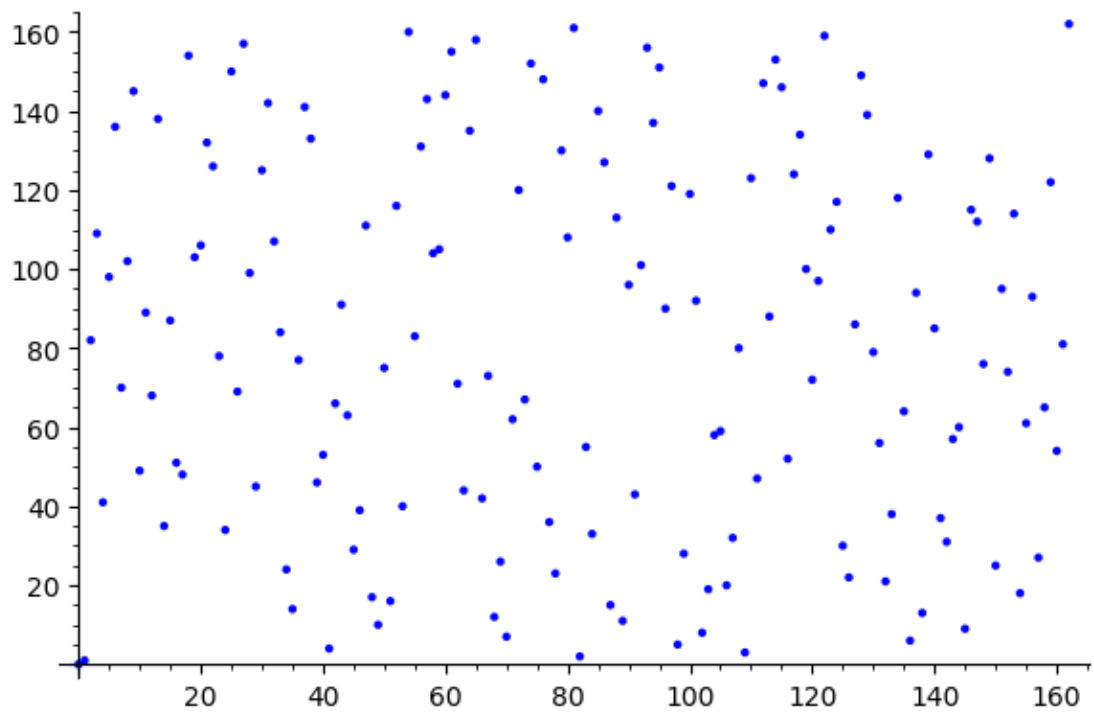
```
In [3]: # Plot dos pontos resultantes da aplicação da função aos pontos do
In [3]: # corpo finito primo GF(37)
        list_plot(L[0])
```

Out [3]:



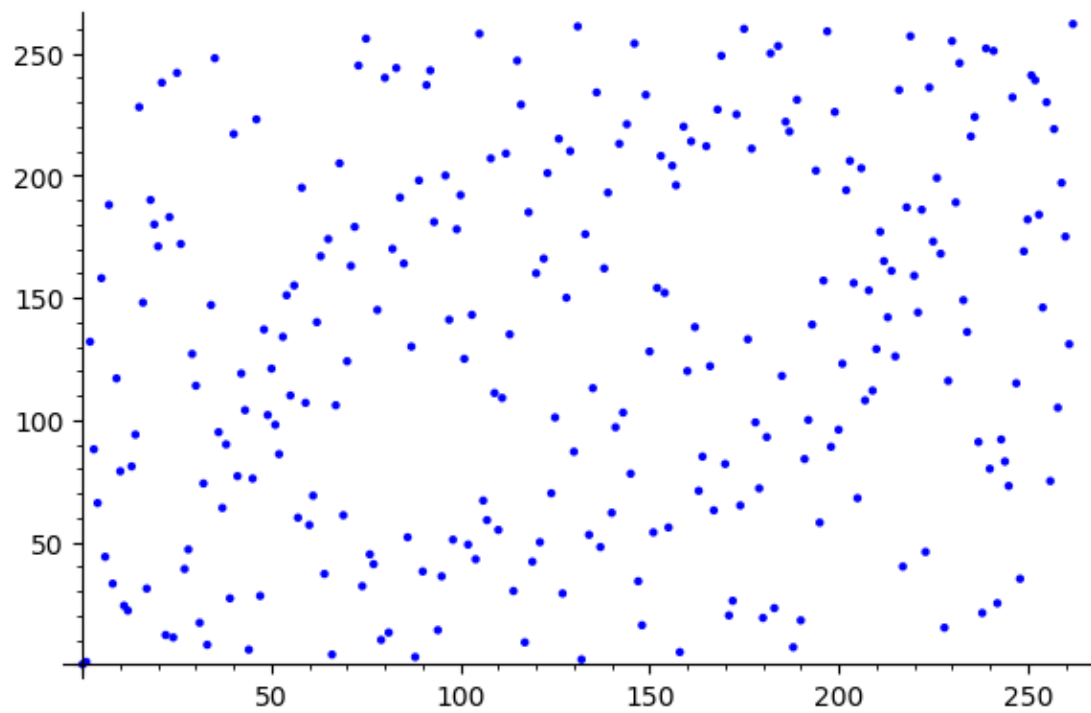
```
In [4]: # Plot dos pontos resultantes da aplicação da função aos pontos do
In [4]: # corpo finito primo GF(163)
list_plot(L[1])
```

Out[4]:



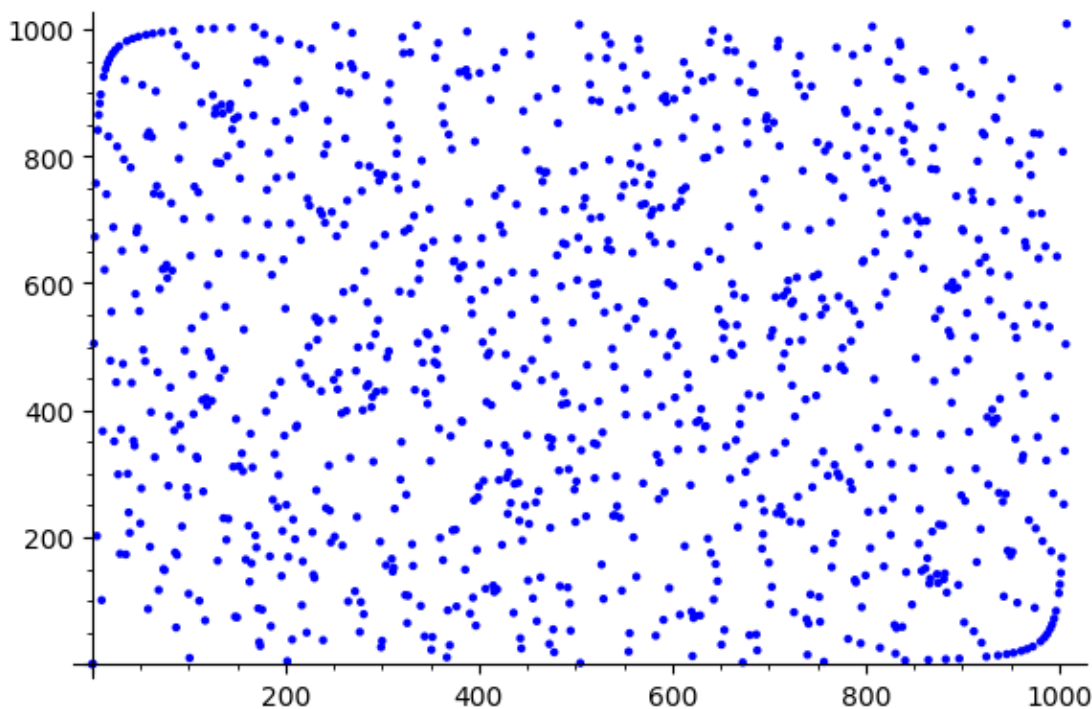
```
In [5]: # Plot dos pontos resultantes da aplicação da função aos pontos do  
In [5]: # corpo finito primo GF(263)  
list_plot(L[2])
```

Out [5]:



```
In [6]: # Plot dos pontos resultantes da aplicação da função aos pontos do  
In [6]: # corpo finito primo GF(1009)  
list_plot(L[3])
```

Out[6]:



A partir da análise dos gráficos previamente gerados podemos verificar que, em todos eles, à primeira vista, parece existir uma certa aleatoriedade nos pontos desenhados mas, analisando melhor cada um deles, podemos confirmar a existência de um padrão simétrico que existe no gráfico.

3.4 Funções da proposição e auxiliares

Resta agora definir duas funções que são utilizadas para garantir a proposição na totalidade. A função `checker(n,g,p)` testa, com o auxílio das funções anteriormente referidas, a veracidade da proposição para um dado expoente, elemento primitivo e número primo, ao tentar encontrar, por amostragem, elementos que provem que a proposição é incorrecta, seguindo o seguinte algoritmo:

- Se $g^n = 1$:
 - Se $n = 0 \bmod (p - 1)$, a proposição verifica-se, pelo que o resultado retornado é 0 (não existe erro a ser somado).
 - Se $n! = 0 \bmod (p - 1)$, a proposição falha, pelo que o resultado retornado é 1 (proposição é falsa para estes elementos, erro deve ser somado).
- Se $g^{n!} = 1$, a proposição não é testada.

```
In [7]: def prop1(g,n):
        return g^n

        def prop2(p):
            return Mod(0,p-1)
```

```
def checker(n,g,p):
    if(prop1(g,n) == 1):
        if(prop2(p) == n):
            return 0
        else: return 1
    else: return 0
```

3.5 Criação da lista de expoentes aleatórios

Por último criou-se uma lista de expoentes, por amostragem, para que seja averiguada a veracidade da proposição enunciada. São criados 100000 expoentes aleatórios que variam entre 1 e 1 bilhão.

```
In [8]: import numpy
        exponents_list = [numpy.random.randint(1,1000000000000) for i in xrange(100000)]
```

3.6 Prova da proposição por amostragem

Nesta secção pretendemos, com o auxílio da função `checker(n,g,p)` definida anteriormente, verificar, para todos os corpos finitos primos criados, que a proposição enunciada se verifica, seguindo o seguinte algoritmo:

- Para todo o número primo p em P , onde P é a lista dos números primos utilizados para criar os corpos finitos:
 - Para todo o expoente n na lista de expoentes previamente calculada:
 - * Calcular o resultado de `checker(n,GF(p).primitive_element(),p)`, onde o segundo argumento é o elemento primitivo do corpo finito do primo p .
 - * Se a proposição se verificar falsa, a variável `checkFalses` será incrementada de uma unidade, caso contrário será incrementada de 0 (sem falsos).
 - Imprimir o número primo e o número de falsos encontrados na aplicação da proposição ao mesmo.

```
In [9]: checkFalses = 0
        for p in P:
            for n in exponents_list:
                checkFalses += checker(n,GF(p).primitive_element(),p)
            print('Primo:')
            print(p)
            print('Nº de erros na proposição:')
            print(checkFalses)
            print('\n')
            checkFalses = 0
```

```
Primo:
37
Nº de erros na proposição:
0
```

```
Primo:
163
Nº de erros na proposição:
0
```

```
Primo:
263
Nº de erros na proposição:
0
```

```
Primo:
1009
Nº de erros na proposição:
0
```

Como é possível verificar pelo output produzido, a proposição enunciada verifica-se para todos os expoentes gerados por amostragem e para todos os corpos finitos primos criados.

4 Conclusão

Os resultados da resolução deste trabalho prático são, na nossa opinião, bastante satisfatórios, tendo em conta que os mesmos são os que eram esperados. O desenvolvimento das aplicações foi feito de um modo gradual (texto de explicação pelo entre o código), de forma a tornar a leitura e compreensão do trabalho mais agradável.

As maiores dificuldades que surgiram durante a resolução deste trabalho prático resumiram-se, na sua maior parte, aos aspetos que dizem respeito ao desenvolvimento utilizando **sagemath**, visto que este foi o primeiro contacto do grupo com esta tecnologia. Além disso, este é também o primeiro relatório que o grupo produz neste formato, ou seja, utilizando apenas o **jupyter** para a produção do código e do próprio texto do mesmo, pelo que tentámos familiarizar-nos apenas com a ferramenta, especificamente, na produção do ficheiro necessário, que representa o relatório na sua totalidade.

5 Referências

1. [Worksheets do TP0 fornecidas pelo professor](#)
2. [Cryptography - Symmetric encryption](#)
3. [Cryptography - Message Authentication Codes](#)
4. [Cryptography - Key Derivation Functions](#)
5. [SageMath - Finite Prime Fields](#)
6. [SageMath - 2D Plotting](#)

7. SageMath - Base Classes for Finite Fields