Solucionário

"Undergraduate Algebra: A Unified Approach"

Matej Brešar

Guilherme Garcia Nallin

nallinguilherme@gmail.com

Sumário

Capítulo 1

Glossary of Basic Algebraic Structures

1.1 Binary Operations

Exercício 1.17: *Let $\mathcal{P}(x)$ be the power set of the nonempty set X. The union, intersection, and set difference are binary operations on P(X). Determine which among them are associative, commutative, and have a (left or right) identity element.*

Solução: Sejam $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$, assim, para a operação de união desses conjuntos, temos:

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\
(A \cup B) \cup C &= A \cup (C \cup B) \\
(A \cup B) \cup C &= (A \cup C) \cup B
\end{aligned}$$

O que mostra que a operação de união é associativa. Além disso, temos que: $A \cup B = B \cup A$, o que mostra que a operação de união é comutativa. Por fim, o conjunto vazio é o elemento identidade para a operação de união, pois $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$.

Para a operação de interseção, podemos verificar a associatividade:

$$\begin{aligned}
(A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\
(A \cap B) \cap C &= A \cap (C \cap B) \\
(A \cap B) \cap C &= (A \cap C) \cap B
\end{aligned}$$

E o conjunto X é o elemento identidade para a interseção, uma vez que: $X \cap A = A \cap X = A$.

Por fim, a operação de diferença de conjuntos não é comutativa, tome o contraexemplo em que $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$ e $C = \{2\}$, assim: $A - B = \emptyset$

mas $B-A=2$. Para a associatividade, temos: $(A-B)-C = A-(B-C)$, e o conjunto vazio é o elemento identidade para a diferença de conjuntos, pois: $A-\emptyset = A$. $\square$

Exercício 1.18: *Determine which of the following binary operations on* $\mathbb{N}$ *are associative, have a (left or right) identity element, and contain two different elements that commute:*

(a) $m * n = m + 2n$;

(b) $m * n = m^2 n$;

(c) $m * n = m$;

(d) $m * n = m^n$.

Solução: Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$ então para o caso (a), a comutatividade é falsa, uma vez que $m * n = m + 2n \neq n + m = n + 2m$, já a associatividade falha em:

$$\begin{aligned} (m * n) * p = (m + 2n) * p = m + 2n + 2p \\ \neq m * (n * p) = m * (n + 2p) = m + 2n + 4p \end{aligned}$$

Vamos verificar se há elemento neutro da operação, para isso tome $e \in \mathbb{N}$, para $e = 1$:

$$\begin{aligned} m * 1 = m + 2 \cdot 1 = m + 2 \\ \neq 1 * m = 1 + 2m \end{aligned}$$

Se considerarmos $0 \notin \mathbb{N}$, acabou. Caso contrário, para $e = 0$:

$$\begin{aligned} m * 0 = m + 2 \cdot 0 = m \\ \neq 0 * m = 0 + 2m = 2m \end{aligned}$$

Assim, a operação admite elemento identidade à direita.

Para o item *(b)*, vamos verificar a comutatividade: $m * n = m^2 n \neq n * m = n^2 m$, basta tomar $m = 2$, $n = 3$ que falha. Para a associatividade falha também, basta tomar $m = 2, n = 1, m = 3$. Seja $e \in \mathbb{N}$ o elemento neutro, então $e * m = e^2 m = em = m$, no entanto $m * e = m^2 e = m^2$, o que demonstra que a operação admite identidade à esquerda.

Para o item *(c)*, vamos verificar a comutatividade: $m * n = m \neq n * m = n$, basta que $m \neq n$ para que falhe a propriedade. Vamos verificar a associatividade:

$$\begin{aligned} m * (n * p) &= m * n = m \\ &= (m * n) * p = m * p = m \end{aligned}$$

E a existência do elemento identidade segue por: $m * e = m \neq e * m = e$, porém isso implica que, sendo $e_1 = 2, e_2 = 3 \in \mathbb{N}$ temos $m * 2 = m = m * 3 \implies 2 = 3$, o que é falso, contradizendo o proposição de que, uma vez que existe elemento neutro, ele é único.

Para *(d)*, vamos verificar a comutatividade: $m * n = m^n \neq n * m = n^m$, basta tomar $m = 2$, $n = 3$ que falha. Para a associatividade falha também, basta tomar $m = 2, n = 1, p = 3$. Seja $e \in \mathbb{N}$ o elemento neutro, então $e * m = e^m = m$, no entanto $m * e = m^e = m$, o que demonstra que a operação admite identidade à esquerda.(d) $\square$

Exercício 1.19: *Let S be a set with a binary operation $*$. If subsets T and T' of S are closed under $*$, then so is their intersection $T \cap T'$. Find an example showing that this does not always hold for the union $T \cup T'$.*

Solução: Sejam $S = \mathbb{Z}, T = \{1, 0\}, T' = \{-1\}$ e a operação de adição definida em [1.1]. Assim, $1 + (-1) = 0 \notin T \cap T'$, porém $0 \in T \cup T'$.

... Procurarei um exemplo melhor.

$\square$

Exercício 1.20: *Find all finite nonempty subsets of Z that are closed under addition.*

Solução: Seja $A \subseteq \mathbb{Z}$ um subconjunto finito não vazio fechado sob adição. Vamos analisar os possíveis casos:

1. Se A contém apenas um elemento, então $A = \{a\}$ onde $a \in \mathbb{Z}$. Neste caso, A é fechado sob adição, pois $a + a = 2a \in A$ se e somente se $a = 0$. Portanto, $A = \{0\}$.

2. Se A contém mais de um elemento, seja a o menor elemento positivo em A. Como A é fechado sob adição, todos os múltiplos de a devem estar em A. No entanto, como A é finito, isso implica que A deve ser da forma $\{0, a, 2a, \dots, ka\}$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

3. Se A contém elementos negativos, seja $-b$ o menor elemento negativo em A. Similarmente, todos os múltiplos de $-b$ devem estar em A. Portanto, A deve ser da forma $\{-kb, \ldots, -b, 0, b, \ldots, jb\}$ para alguns $k, j \in \mathbb{N}$.

Portanto, os únicos subconjuntos finitos não vazios de $\mathbb{Z}$ que são fechados sob adição são da forma $\{0\}$ ou $\{-ka, \ldots, -a, 0, a, \ldots, ja\}$ para algum $a \in \mathbb{Z}$ e $k, j \in \mathbb{N}$. $\square$

Exercício 1.20: *Let T be a nonempty subset of $\mathbb{Z}$. Consider the following conditions:*

(a) T is closed under subtraction.

(b) T is closed under addition.

(c) T is closed under multiplication.

Show that (a) implies both (b) and (c), whereas (b) and (c) are independent conditions (to establish the latter, find an example of a set satisfying (b) but not (c), and an example of a set satisfying (c) but not (b)). Also, find some examples of sets satisfying (a). Can you find them all?

Solução: Vamos mostrar que $(a) \implies (b)$. Tome $a \in \mathbb{Z}$,
$T = \{-ka, \ldots, -a, 0, a, \ldots, ja\}$ para algum $a \in \mathbb{Z}$ e $k, j \in \mathbb{N}$, sem perda de generalidade. Sendo assim, tome $-ka$ e ja e faça $(-ka)+(ja) = (-k+j)a = (j-k)a \in T$, pois T é fechado por subtração.

Vamos mostrar $(a) \implies (c)$. *finalizar...* $\square$

Exercício 1.22: *How many binary operations are there on a set with n elements?*

Solução: Sejam A, B dois conjuntos finitos tais que $|A| = n$, $|B| = m$, assim, o número de mapeamentos (ou seriam funções ?) de A para B é igual a m^n, pois, para cada n-ésimo elemento de A existem m possibilidades de mapeamento em B. Este é um caso mais geral. Para a operação binária, seja S um conjunto finito tal que $|S| = n$, assim, os mapeamentos tais que $S \times S \longrightarrow S$ são $n^{n \cdot n} = n^{n^2}$. Pois, para cada elemento n-ésimo do conjunto de chegada S temos $n \cdot n$ elementos para serem escolhidos na tupla de partida que constitui $S \times S$. $\square$

Exercício 1.23: *Let S be a set with two elements. Find a binary operation on S such that $(x * y) * z \neq x * (y * z)$ for all $x, y, z \in S$.*

Solução: *Comentário:* Note que o enunciado diz que S tem apenas dois elementos, porém em seguida ele declara três elementos x, y, z que pertencem a S. Caso forem distintos, há contradição. Caso contrário, $y = z$.

Sejam $x, y, z \in S$ e a operação binária $x * y = x + 2y$. Basta tomar $x = 1$, $y = 2, z = 1$ como exemplo. $\square$

Exercício 1.24: *Seja $f \in Map(\mathbb{Z})$ dada por $f(n) = n + 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Queremos determinar todos os elementos $g \in Map(\mathbb{Z})$ que comutam com f, ou seja, tais que:*

Solução: Seja $g \in Map(\mathbb{Z})$ tal que $g(n) = k + n$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$. Assim:

$$(f \circ g)(n) = k + n + 1 = (g \circ f)(n) = k + n + 1$$

$\square$

Exercício 1.25: *Denote by $Inj(X)$ the set of all injective maps in $Map(X)$, by $Sur(X)$ the set of all surjective maps in $Map(X)$, and by $Bij(X)$ the set of all bijective maps in $Map(X)$.*

(a) Prove that the sets $Inj(X)$, $Sur(X)$, $Bij(X)$, $Map(X) \setminus Inj(X)$, and $Map(X) \setminus Sur(X)$ are closed under $\circ$.

(b) Prove that $Inj(X) = Sur(X) = Bij(X)$ if X is a finite set.

(c) Prove that the set $Map(X) \setminus Bij(X)$ is closed under $\circ$ if and only if X is a finite set.

Solução:

$\square$

1.2 Semigrupos e Monóides

Exercício 1.40: *Show that $\mathbb{N}$ is a semigroup under the operation $m * n = max\{m, n\}$, as well as under the operation $m * n = min\{m, n\}$. Which one among them is a monoid?*

Solução: Primeiro, seja $*$ a operação tal que, dados $m, n, p \in \mathbb{N}$, então $m * n = max\{m, n\}$. Assim,

$$m * (n * p) = m * \max(n, p) = \max(m, n, p) = \max\{m, n\} * p = (m * n) * p$$

Para a operação $m * n = \min(m, n)$:

$$
\begin{aligned}
&m * (n * p) = m * \min(n, p) = \min(m, n, p) \\
&= \min(m, n) * p = (m * n) * p \\
&.
\end{aligned}
$$

Note que apenas no primeiro caso, podemos considerar $(\mathbb{N}, *)$ um monóide, uma vez que possui o elemento identidade $1 \in \mathbb{N}$:

$$m * 1 = \max(1, n) = \max(n, 1) = 1 * m, \, \forall m \in \mathbb{N}$$

$\square$

Exercício 1.41: *Find all binary operations on the set $S = \{e, a\}$ for which S is a semigroup and e is a left identity element.*

Solução: Sendo e identidade à esquerda, podemos definir a operação $a * e = a$.

Para que S seja um semigrupo, a operação deve ser associativa. Vamos analisar todas as possíveis operações binárias em $S = \{e, a\}$:

1. $e * e = e$ 2. $e * a = a$ 3. $a * e = a$ 4. $a * a = x$, onde $x \in \{e, a\}$

Vamos verificar a associatividade para cada caso de $a * a$:

Caso 1: $a * a = e$

$$(a * a) * a = e * a = a \quad \text{e} \quad a * (a * a) = a * e = a$$

Neste caso, a operação é associativa.

Caso 2: $a * a = a$

$$(a * a) * a = a * a = a \quad \text{e} \quad a * (a * a) = a * a = a$$

Neste caso, a operação também é associativa.

Portanto, as operações binárias que fazem de S um semigrupo com e como identidade à esquerda são:

1. $e * e = e$, $e * a = a$, $a * e = a$, $a * a = e$ 2. $e * e = e$, $e * a = a$, $a * e = a$, $a * a = a$ $\square$

Exercício 1.42: *Show that $\mathbb{R}$ is a semigroup under the operation $x * y = |x|y$. Does it have a left or right identity element? For each $x \in \mathbb{R}$, find all elements commuting with x.*

Solução: Devemos verificar a associatividade em $(\mathbb{R}, *)$. Para isso, tome $x, y, z \in \mathbb{R}$, daí:

$$
\begin{aligned}
&x * (y * z) = x * |y|z = |x|y||z = |xy|z \\
&= ||x|y|z = |x|y * z = (x * y) * z \\
&\implies x * (y * z) = (x * y) * z
\end{aligned}
$$

Agora, vamos determinar os elementos que comutam com x. Para $x \geq 0$, os elementos que comutam são $p \in \mathbb{R}$ tal que $p \geq 0$ e o contrário é válido. □

Exercício 1.43: *Show that $\mathbb{Z}$ is a monoid under the operation $m * n = m + n + mn$. Find all its invertible elements.*

Solução: Vamos mostrar que $(\mathbb{Z}, *)$ é um monóide. Verifiquemos a associatividade, para isso, considere $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

$$
\begin{gathered}
a * (b * c) = a * (b + c + bc) = a + (b + c + bc) + ab + ac + abc \\
(a * b) * c = (a + b + ab) * c = (a + b + ab) + c + ac + bc + abc \\
\therefore a * (b * c) = (a * b) * c.
\end{gathered}
$$

Note que o elemento identidade da operação definida é $0 \in \mathbb{Z}$: $a * 0 = a + 0 + a0 = a = 0 + a + 0a = 0 * a$ e, pela sua existência, $(\mathbb{Z}, *)$ é monóide.

O único elemento invertível do monóide é $0 \in \mathbb{Z}$. □

Exercício 1.44: *Prove that in each monoid with identity element e,$x * y * x = e$ implies that x and y are invertible and $y = x^{-2}$.*

Solução: Primeiro, vamos provar que $x * y * x = e \implies \exists\ x^{-1}, y^{-1}$. Observe que $y * x$ é inversa a direita de x e $x * y$ é inversa a esquerda de x, assim, x é invertível. Para y fazemos: $x * y * x * (y * x) = y * x \implies x * y = y * x$ o que mostra que existe y^{-1}.

Segundo, vamos provar que $y = x^{-2}$. Como provamos, existe x^{-1} então:

$$
\begin{aligned}
x * y * x &= e \\
x^{-1} * x * y * x &= x^{-1} \\
y * x &= x^{-1} \\
y * x * x^{-1} &= x^{-1}x^{-1} \\
y &= x^{-2}.
\end{aligned}
$$

□

Exercício 1.45: *Determine which among the following conditions imply that an element of a monoid S is invertible:*

(a) There exists a $y \in S$ *such that* $x * y$ *is invertible.*

(b) There exists a $y \in S$ *commuting with* x *such that* $x * y$ *is invertible.*

(c) There exists an $n \in \mathbb{N}$ *such that* x^n *is invertible.*

Solução: Para o item (a)

Para o item (b), temos que y comuta com x, ou seja:

$$x * y = y * x$$

$\square$