Solucionário

"Undergraduate Algebra: A Unified Approach"

Matej Brešar

Guilherme Garcia Nallin

nallinguilherme@gmail.com

Sumário

Capítulo 1

Glossary of Basic Algebraic Structures

1.1 Binary Operations

Exercício 1.17: *Let $\mathcal{P}(x)$ be the power set of the nonempty set X. The union, intersection, and set difference are binary operations on P(X). Determine which among them are associative, commutative, and have a (left or right) identity element.*

Solução: Sejam $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$, assim, para a operação de união desses conjuntos, temos:

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C)\\(A \cup B) \cup C &= A \cup (C \cup B)\\(A \cup B) \cup C &= (A \cup C) \cup B\end{aligned}$$

O que mostra que a operação de união é associativa. Além disso, temos que: $A \cup B = B \cup A$, o que mostra que a operação de união é comutativa. Por fim, o conjunto vazio é o elemento identidade para a operação de união, pois $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$.

Para a operação de interseção, podemos verificar a associatividade:

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C)\\(A \cap B) \cap C &= A \cap (C \cap B)\\(A \cap B) \cap C &= (A \cap C) \cap B\end{aligned}$$

E o conjunto X é o elemento identidade para a interseção, uma vez que: $X \cap A = A \cap X = A$.

Por fim, a operação de diferença de conjuntos não é comutativa, tome o contraexemplo em que $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$ e $C = \{2\}$, assim: $A - B = \emptyset$

mas $B-A=2$. Para a associatividade, temos: $(A-B)-C = A-(B-C)$, e o conjunto vazio é o elemento identidade para a diferença de conjuntos, pois: $A - \emptyset = A$. $\square$

Exercício 1.18: *Determine which of the following binary operations on* $\mathbb{N}$ *are associative, have a (left or right) identity element, and contain two different elements that commute:*

(a) $m * 2n = m + 2n$;

(b) $m * n = m^2 n$;

(c) $m * n = m$;

(d) $m * n = m^n$.

Solução: Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$ então para o caso (a), a comutatividade é falsa, uma vez que $m * n = m + 2n \neq n + m = n + 2m$, já a associatividade falha em:

$$\begin{aligned} (m * n) * p &= (m + 2n) * p = m + 2n + 2p \\ \neq m * (n * p) &= m * (n + 2p) = m + 2n + 4p \end{aligned}$$

Vamos verificar se há elemento neutro da operação, para isso tome $e \in \mathbb{N}$, para $e = 1$:

$$\begin{aligned} &m * 1 = m + 2 \cdot 1 = m + 2 \\ &\neq 1 * m = 1 + 2m \end{aligned}$$

Se considerarmos $0 \notin \mathbb{N}$, acabou. Caso contrário, para $e = 0$:

$$\begin{aligned} &m * 0 = m + 2 \cdot 0 = m \\ &\neq 0 * m = 0 + 2m = 2m \end{aligned}$$

Assim, a operação admite elemento identidade à direita.

Para o item *(b)*, vamos verificar a comutatividade: $m * n = m^2 n \neq n * m = n^2 m$, basta tomar $m = 2$, $n = 3$ que falha. Para a associatividade falha também, basta tomar $m = 2, n = 1, m = 3$. Seja $e \in \mathbb{N}$ o elemento neutro, então $e * m = e^2 m = em = m$, no entanto $m * e = m^2 e = m^2$, o que demonstra que a operação admite identidade à esquerda.

Para o item *(c)*, vamos verificar a comutatividade: $m * n = m \neq n * m = n$, basta que $m \neq n$ para que falhe a propriedade. Vamos verificar a associatividade:

$$\begin{aligned} m * (n * p) &= m * n = m \\ &= (m * n) * p = m * p = m \end{aligned}$$

E a existência do elemento identidade segue por: $m * e = m \neq e * m = e$, porém isso implica que, sendo $e_1 = 2, e_2 = 3 \in \mathbb{N}$ temos $m * 2 = m = m * 3 \implies 2 = 3$, o que é falso, contradizendo o proposição de que, uma vez que existe elemento neutro, ele é único.

Para *(d)*, vamos verificar a comutatividade: $m * n = m^n \neq n * m = n^m$, basta tomar $m = 2$, $n = 3$ que falha. Para a associatividade falha também, basta tomar $m = 2, n = 1, p = 3$. Seja $e \in \mathbb{N}$ o elemento neutro, então $e * m = e^m = m$, no entanto $m * e = m^e = m$, o que demonstra que a operação admite identidade à esquerda.(d) □

Exercício 1.19: *Let S be a set with a binary operation $*$. If subsets T and T' of S are closed under $*$, then so is their intersection $T \cap T'$. Find an example showing that this does not always hold for the union $T \cup T'$.*

Solução: Sejam $S = \mathbb{Z}, T = \{1, 0\}, T' = \{-1\}$ e a operação de adição definida em [1.1]. Assim, $1 + (-1) = 0 \notin T \cap T'$, porém $0 \in T \cup T'$.

... Procurarei um exemplo melhor.

□

Exercício 1.20: *Find all finite nonempty subsets of Z that are closed under addition.*

Solução: Seja $A \subseteq \mathbb{Z}$ um subconjunto finito não vazio fechado sob adição. Vamos analisar os possíveis casos:

1. Se A contém apenas um elemento, então $A = \{a\}$ onde $a \in \mathbb{Z}$. Neste caso, A é fechado sob adição, pois $a + a = 2a \in A$ se e somente se $a = 0$. Portanto, $A = \{0\}$.

2. Se A contém mais de um elemento, seja a o menor elemento positivo em A. Como A é fechado sob adição, todos os múltiplos de a devem estar em A. No entanto, como A é finito, isso implica que A deve ser da forma $\{0, a, 2a, \ldots, ka\}$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

3. Se A contém elementos negativos, seja $-b$ o menor elemento negativo em A. Similarmente, todos os múltiplos de $-b$ devem estar em A. Portanto, A deve ser da forma $\{-kb, \ldots, -b, 0, b, \ldots, jb\}$ para alguns $k, j \in \mathbb{N}$.

Portanto, os únicos subconjuntos finitos não vazios de $\mathbb{Z}$ que são fechados sob adição são da forma $\{0\}$ ou $\{-ka, \ldots, -a, 0, a, \ldots, ja\}$ para algum $a \in \mathbb{Z}$ e $k, j \in \mathbb{N}$. $\square$

Exercício 1.20: *Let T be a nonempty subset of $\mathbb{Z}$. Consider the following conditions:*

(a) T is closed under subtraction.

(b) T is closed under addition.

(c) T is closed under multiplication.

Show that (a) implies both (b) and (c), whereas (b) and (c) are independent conditions (to establish the latter, find an example of a set satisfying (b) but not (c), and an example of a set satisfying (c) but not (b)). Also, find some examples of sets satisfying (a). Can you find them all?

Solução: Vamos mostrar que $(a) \implies (b)$. Tome $a \in \mathbb{Z}$,
$T = \{-ka, \ldots, -a, 0, a, \ldots, ja\}$ para algum $a \in \mathbb{Z}$ e $k, j \in \mathbb{N}$, sem perca de generalidade. Sendo assim, tome $-ka$ e ja e faça $(-ka)+(ja) = (-k+j)a = (j-k)a \in T$, pois T é fechado por subtração.

Vamos mostrar $(a) \implies (c)$. $\square$