

# Solucionário

*"Undergraduate Algebra: A Unified Approach"*

Matej Brešar

Guilherme Garcia Nallin

`nallinguilherme@gmail.com`



# Sumário

|     |  |   |
|-----|--|---|
| 1   | Glossary of Basic Algebraic Structures | 5 |
| 1.1 | Binary Operations . . . . .            | 5 |



# Capítulo 1

## Glossary of Basic Algebraic Structures

### 1.1 Binary Operations

**Exercício 1.17:** *Let  $\mathcal{P}(X)$  be the power set of the nonempty set  $X$ . The union, intersection, and set difference are binary operations on  $\mathcal{P}(X)$ . Determine which among them are associative, commutative, and have a (left or right) identity element.*

**Solução:** Sejam  $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ , assim, para a operação de união desses conjuntos, temos:

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (C \cup B) \\ (A \cup B) \cup C &= (A \cup C) \cup B\end{aligned}$$

O que mostra que a operação de união é associativa. Além disso, temos que:  $A \cup B = B \cup A$ , o que mostra que a operação de união é comutativa. Por fim, o conjunto vazio é o elemento identidade para a operação de união, pois  $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$ .

Para a operação de interseção, podemos verificar a associatividade:

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (C \cap B) \\ (A \cap B) \cap C &= (A \cap C) \cap B\end{aligned}$$

E o conjunto  $X$  é o elemento identidade para a interseção, uma vez que:  $X \cap A = A \cap X = A$ .

Por fim, a operação de diferença de conjuntos não é comutativa, tome o contraexemplo em que  $A = \{1\}$ ,  $B = \{1, 2\}$  e  $C = \{2\}$ , assim:  $A - B = \emptyset$

mas  $B - A = 2$ . Para a associatividade, temos:  $(A - B) - C = A - (B - C)$ , e o conjunto vazio é o elemento identidade para a diferença de conjuntos, pois:  $A - \emptyset = A$ .  $\square$

**Exercício 1.18:** *Determine which of the following binary operations on  $\mathbb{N}$  are associative, have a (left or right) identity element, and contain two different elements that commute:*

$$(a) \ m * n = m + 2n;$$

$$(b) \ m * n = m^2 n;$$

$$(c) \ m * n = m;$$

$$(d) \ m * n = m^n.$$

**Solução:** Sejam  $m, n, p \in \mathbb{N}$  então para o caso (a), a comutatividade é falsa, uma vez que  $m * n = m + 2n \neq n + m = n + 2m$ , já a associatividade falha em:

$$\begin{aligned} (m * n) * p &= (m + 2n) * p = m + 2n + 2p \\ &\neq m * (n * p) = m * (n + 2p) = m + 2n + 4p \end{aligned}$$

Vamos verificar se há elemento neutro da operação, para isso tome  $e \in \mathbb{N}$ , para  $e = 1$ :

$$\begin{aligned} m * 1 &= m + 2 \cdot 1 = m + 2 \\ &\neq 1 * m = 1 + 2m \end{aligned}$$

Se considerarmos  $0 \notin \mathbb{N}$ , acabou. Caso contrário, para  $e = 0$ :

$$\begin{aligned} m * 0 &= m + 2 \cdot 0 = m \\ &\neq 0 * m = 0 + 2m = 2m \end{aligned}$$

Assim, a operação admite elemento identidade à direita.

Para o item (b), vamos verificar a comutatividade:  $m * n = m^2 n \neq n * m = n^2 m$ , basta tomar  $m = 2, n = 3$  que falha. Para a associatividade falha também, basta tomar  $m = 2, n = 1, m = 3$ . Seja  $e \in \mathbb{N}$  o elemento neutro, então  $e * m = e^2 m = em = m$ , no entanto  $m * e = m^2 e = m^2$ , o que demonstra que a operação admite identidade à esquerda.

Para o item (c), vamos verificar a comutatividade:  $m * n = m \neq n * m = n$ , basta que  $m \neq n$  para que falhe a propriedade. Vamos verificar a associatividade:

$$\begin{aligned} m * (n * p) &= m * n = m \\ &= (m * n) * p = m * p = m \end{aligned}$$

E a existência do elemento identidade segue por:  $m * e = m \neq e * m = e$ , porém isso implica que, sendo  $e_1 = 2, e_2 = 3 \in \mathbb{N}$  temos  $m * 2 = m = m * 3 \implies 2 = 3$ , o que é falso, contradizendo a proposição de que, uma vez que existe elemento neutro, ele é único.

Para (d), vamos verificar a comutatividade:  $m * n = m^n \neq n * m = n^m$ , basta tomar  $m = 2, n = 3$  que falha. Para a associatividade falha também, basta tomar  $m = 2, n = 1, p = 3$ . Seja  $e \in \mathbb{N}$  o elemento neutro, então  $e * m = e^m = m$ , no entanto  $m * e = m^e = m$ , o que demonstra que a operação admite identidade à esquerda. (d)  $\square$

**Exercício 1.19:** *Let  $S$  be a set with a binary operation  $*$ . If subsets  $T$  and  $T'$  of  $S$  are closed under  $*$ , then so is their intersection  $T \cap T'$ . Find an example showing that this does not always hold for the union  $T \cup T'$ .*

**Solução:** Sejam  $S = \mathbb{Z}, T = \{1, 0\}, T' = \{-1\}$  e a operação de adição definida em [1.1]. Assim,  $1 + (-1) = 0 \notin T \cap T'$ , porém  $0 \in T \cup T'$ .

... Procurarei um exemplo melhor.

$\square$

**Exercício 1.20:** *Find all finite nonempty subsets of  $\mathbb{Z}$  that are closed under addition.*

**Solução:** Seja  $A \subseteq \mathbb{Z}$  um subconjunto finito não vazio fechado sob adição. Vamos analisar os possíveis casos:

1. Se  $A$  contém apenas um elemento, então  $A = \{a\}$  onde  $a \in \mathbb{Z}$ . Neste caso,  $A$  é fechado sob adição, pois  $a + a = 2a \in A$  se e somente se  $a = 0$ . Portanto,  $A = \{0\}$ .

2. Se  $A$  contém mais de um elemento, seja  $a$  o menor elemento positivo em  $A$ . Como  $A$  é fechado sob adição, todos os múltiplos de  $a$  devem estar em  $A$ . No entanto, como  $A$  é finito, isso implica que  $A$  deve ser da forma  $\{0, a, 2a, \dots, ka\}$  para algum  $k \in \mathbb{N}$ .

## 8 CAPÍTULO 1. GLOSSARY OF BASIC ALGEBRAIC STRUCTURES

3. Se  $A$  contém elementos negativos, seja  $-b$  o menor elemento negativo em  $A$ . Similarmente, todos os múltiplos de  $-b$  devem estar em  $A$ . Portanto,  $A$  deve ser da forma  $\{-kb, \dots, -b, 0, b, \dots, jb\}$  para alguns  $k, j \in \mathbb{N}$ .

Portanto, os únicos subconjuntos finitos não vazios de  $\mathbb{Z}$  que são fechados sob adição são da forma  $\{0\}$  ou  $\{-ka, \dots, -a, 0, a, \dots, ja\}$  para algum  $a \in \mathbb{Z}$  e  $k, j \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Exercício 1.20:** *Let  $T$  be a nonempty subset of  $\mathbb{Z}$ . Consider the following conditions:*

(a)  *$T$  is closed under subtraction.*

(b)  *$T$  is closed under addition.*

(c)  *$T$  is closed under multiplication.*

*Show that (a) implies both (b) and (c), whereas (b) and (c) are independent conditions (to establish the latter, find an example of a set satisfying (b) but not (c), and an example of a set satisfying (c) but not (b)). Also, find some examples of sets satisfying (a). Can you find them all?*

**Solução:** Vamos mostrar que (a)  $\implies$  (b). Tome  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $T = \{-ka, \dots, -a, 0, a, \dots, ja\}$  para algum  $a \in \mathbb{Z}$  e  $k, j \in \mathbb{N}$ , sem perda de generalidade. Sendo assim, tome  $-ka$  e  $ja$  e faça  $(-ka) + (ja) = (-k + j)a = (j - k)a \in T$ , pois  $T$  é fechado por subtração.

Vamos mostrar (a)  $\implies$  (c). *finalizar...*  $\square$

**Exercício 1.22:** *How many binary operations are there on a set with  $n$  elements?*

**Solução:** Sejam  $A, B$  dois conjuntos finitos tais que  $|A| = n$ ,  $|B| = m$ , assim, o número de mapeamentos (ou seriam funções ?) de  $A$  para  $B$  é igual a  $m^n$ , pois, para cada  $n$ -ésimo elemento de  $A$  existem  $m$  possibilidades de mapeamento em  $B$ . Este é um caso mais geral. Para a operação binária, seja  $S$  um conjunto finito tal que  $|S| = n$ , assim, os mapeamentos tais que  $S \times S \longrightarrow S$  são  $n^{n \cdot n} = n^{n^2}$ . Pois, para cada elemento  $n$ -ésimo do conjunto de chegada  $S$  temos  $n \cdot n$  elementos para serem escolhidos na tupla de partida que constitui  $S \times S$ .  $\square$

**Exercício 1.23:** *Let  $S$  be a set with two elements. Find a binary operation on  $S$  such that  $(x * y) * z \neq x * (y * z)$  for all  $x, y, z \in S$ .*

**Solução:** *Comentário:* Note que o enunciado diz que  $S$  tem apenas dois



elementos, porém em seguida ele declara três elementos  $x, y, z$  que pertencem a  $S$ . Caso forem distintos, há contradição. Caso contrário,  $y = z$ .

Sejam  $x, y, z \in S$  e a operação binária  $x * y = x + 2y$ . Basta tomar  $x = 1, y = 2, z = 1$  como exemplo.  $\square$

**Exercício 1.24:** *Seja  $f \in \text{Map}(\mathbb{Z})$  dada por  $f(n) = n + 1$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Queremos determinar todos os elementos  $g \in \text{Map}(\mathbb{Z})$  que comutam com  $f$ , ou seja, tais que:*

**Solução:** Seja  $g \in \text{Map}(\mathbb{Z})$  tal que  $g(n) = k + n, \forall k \in \mathbb{Z}$ . Assim:

$$(f \circ g)(n) = k + n + 1 = (g \circ f)(n) = k + n + 1$$

$\square$

**Exercício 1.25:** *Denote by  $\text{Inj}(X)$  the set of all injective maps in  $\text{Map}(X)$ , by  $\text{Sur}(X)$  the set of all surjective maps in  $\text{Map}(X)$ , and by  $\text{Bij}(X)$  the set of all bijective maps in  $\text{Map}(X)$ .*

- (a) *Prove that the sets  $\text{Inj}(X)$ ,  $\text{Sur}(X)$ ,  $\text{Bij}(X)$ ,  $\text{Map}(X) \setminus \text{Inj}(X)$ , and  $\text{Map}(X) \setminus \text{Sur}(X)$  are closed under  $\circ$ .*
- (b) *Prove that  $\text{Inj}(X) = \text{Sur}(X) = \text{Bij}(X)$  if  $X$  is a finite set.*
- (c) *Prove that the set  $\text{Map}(X) \setminus \text{Bij}(X)$  is closed under  $\circ$  if and only if  $X$  is a finite set.*