Soluciones a ejercicios seleccionados del Práctico 1.

El siguiente texto es un borrador y está sujeto a correcciones en clase.

Ejercicio 1

En cada uno de los siguientes experimentos describir el espacio muestral, Ω, e indicar su cardinal (#).

a) Una fábrica de frenos de bicicleta produce dos tipos de frenos, los de aro (A) y los de disco (D). Se observan 3 frenos fabricados por la mencionada unidad y se registra su tipo.

b) Los mismos artículos de **a)** se observan hasta que se produzcan dos frenos de disco consecutivos diferentes; el número máximo de inspecciones que se pueden realizar es 3.

c) Se elige al azar un racional del intervalo abierto $(0,1)$.

d) Un simulador de números aleatorios genera números pares.

e) * Un torneo deportivo por eliminación comienza con 2^n competidores y tiene n rondas. Los jugadores están numerados del 1 al 2^n como aparecen en la tabla inicial. Para las posiciones $2, 3, 4, \ldots, 2^n - 1$ no hay posibilidad de empate, especificándose la tabla inicial de sorteos (tener en cuenta que en la primera ronda el resultado es un elemento del conjunto $\{1,2\} \times \{3,4\}, \ldots, \{2^n - 1, 2^n\}$ y así sucesivamente).

f) Se mide el tiempo de vida de una lámpara led.

g) Se lanza repetidamente un dado de cuatro caras hasta que se obtiene por primera vez un número par.

Solución: Inciso e) .

a) Si observamos considerando el orden de estracción entonces

$$\Omega = \{(A,A,A),(A,A,D),(A,D,A),(D,A,A),(A,D,D),(D,A,D),(D,D,A),(D,D,D)\}.$$

El espacio muestral es finito y su cardinal es 8.

c)

$$\Omega = (0,1) \cap \mathbb{Q};$$

es decir, los números racionales del intervalo abierto $(0,1)$. Ω es un conjunto infinito numerable.

d)

$$\Omega = \{2k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Este espacio muestral tiene el mismo cardinal que el del inciso anterior.

e) En la primera ronda el resultado es un elemento del conjunto $V_n = \{1,2\} \times \{3,4\}, \ldots, \{2^n - 1, 2^n\}$. Sin pérdida de generalidad supongamos en la primera ronda el resultado fue $(1,3,5,\ldots, 2^n-1)$. Renombrando los jugadores que continúan juntando, el resultado de la segunda ronda es un elemento de V_{n-1}, y así sucesivamente. El espacio muestral puede ser pensado como $V_n \times V_{n-1} \times \ldots \times V_1$ y su cardinal es $2^{2^{n-1}} 2^{2^{n-2}} \cdots 2^1 = 2^{2^n - 1}$.

f)
$$\Omega = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}.$$
Este conjunto es infinito no numerable.

$\square$

Ejercicio 2

De una bolsa que tiene fichas numeradas del 1 al 20 se saca una ficha al azar. Calcular la probabilidad de que esa ficha tenga números divisibles por 3 ó por 5.

Ejercicio 3

Un nuevo virus infomático puede ingresar al sistema por correo electrónico o por Internet. Hay una probabilidad de 0.3 de recibir este virus por correo electrónico y de 0.40 a través de Internet. Además, el virus ingresa al sistema simultáneamente a través del correo electrónico e Internet con probabilidad 0.15 . ¿Cuál es la probabilidad de que el virus no ingrese?

Ejercicio 4

Rocío, Mateo y Giulia se turnan para tirar una moneda, en el orden Rocío, Mateo, Giulia, Rocío, Matemo, Julia, etc. El juego finaliza al salir la primera cara. Si representamos con 1 el evento *que salga cara* y con 0 el evento complementario, describir el espacio muestral, Ω, como sucesiones de ceros y unos.

Definir en términos de los elementos de Ω los siguientes eventos: A : "que Mateo gane", B : "que Rocío gane" y $C = (A \bigcup B)^c$.

Ejercicio 5

Un dado de 6 caras está cargado de tal forma que la probabilidad que al lanzarlo resulte - en su cara superior- un número par es el doble de que resulte un número impar. Todas las caras pares son igualmente probables, como así también las impares. Hallar un modelo de probabilidad para el lanzamiento de este dado y calcular la probabilidad de que el resultado sea menor que 4.

Ejercicio 6 *Desigualdad de Bonferroni*

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espacio de probabilidad. Probar que si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ entonces

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Demostración: Se prueba por inducción, tomando como caso base $n = 2$.

Para el caso base, utilizamos 5) de la Proposición 1 y establecemos que, dados dos eventos cualesquiera A y B:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B).$$

La desigualdad es consecuencia de que- por definición de probabilidad- $P(C) \geq 0$ para cualquier evento C; en particular para $C = A \cap B$.

Consideremos que la desigualdad vale para n eventos cualesquiera y probemos que es válida para $n + 1$ eventos.

Así, si consideramos $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ y escribimos $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ y $B = A_{n+1}$, entonces:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}) &= P(A \cup B) \text{ (por la definición de los eventos A y B)} \\ &\leq P(A) + P(B) \text{ (por el caso base)} \\ &= P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) + P(A_{n+1}) \text{ (por la definición de los eventos A y B)} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P(A_{n+1}) \text{ (por la hipótesis inductiva).} \end{aligned}$$

De este modo hemos demostrado la tesis. □

Ejercicio 7

Sean $A_1, A_2, \cdots, B_1, B_2, \cdots$ eventos de un espacio de probabilidad tales que

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = 1.$$

Probar que $\lim_{n\to\infty} P(A_n \cap B_n) = 1$.

Demostración: Como $A_n \subseteq A_n \cup B_n$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} P(A_n \cup B_n) = 1$. Teniendo en cuenta este hecho y que $P(A_n \cap B_n) = P(A_n) + P(B_n) - P(A_n \cup B_n)$, el resultado se sigue tomando límite. □

Ejercicio 8

Considere el conjunto de todas las palabras diferentes que pueden formarse intercambiando las letras de la palabra "llabaca". Si se selecciona una palabra al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea la palabra "caballa"?

Solución: Si distinguimos las aes y las les hay 7! permutaciones. Pero cualquiera de las 3! permutaciones de la a y 2! permutaciones de la l conducen a la misma palabra. En consecuencia hay $7!/(2!3!) = 420$ palabras distintas y entonces la proba es $1/420$. □

Ejercicio 9

Supongamos que de un mazo de naipes de estilo español con 48 cartas, bien barajado, se extraen al azar y sin reposición 7 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) haya 5 espadas y 2 bastos?

b) haya 3 espadas, 2 bastos y 2 oros?

c) haya exactamente 5 espadas?

Solución: El espacio muestral consta de $\binom{48}{7} = 73629072$ elementos, que se corresponden al número de subconjuntos posibles que se pueden pueden formar con 48 objetos diferentes.

a) El evento A: "en las 7 cartas haya 5 espadas y 2 bastos" tiene un cardinal de

$$\binom{12}{5}\binom{12}{2} = 627264.$$

Luego

$$P(A) = 627264/73629072 = 0.0085$$

b) Análogamente la probabilidad de este evento B : "en las 7 cartas haya 3 espadas, 2 bastos y 2 oros" es

$$\frac{\binom{12}{3}\cdot\binom{12}{2}\cdot\binom{12}{2}}{\binom{48}{7}} = 0.0130$$

c) Ahora la probabilidad es $\left[\binom{12}{5}\cdot\binom{48-12}{2}\right]/\binom{48}{7}$.

Ejercicio 10

Una mano de póquer consiste de 5 cartas (el mazo tiene 52, clasificadas en cuatro grupos de 13 cartas: pique, corazón, trébol y diamante). Si las cartas tienen valores consecutivos y no todas son del mismo palo decimos que la mano es una escalera (por ejemplo, una mano consistente de: el $5, 6, 7$ y 8 de diamantes y el 9 de corazón es una escalera). ¿Cuál es la probabilidad de que en una mano resulte una escalera?

Solución: Hay un total de $\binom{52}{5}$ maneras de distribuir las cartas en una mano. Para hallar el número de escaleras posibles, fijemos, para empezar, la secuencia As,2,3,4,5 sin importar el palo. Hay 4^5 de estas secuencias posibles; y hay cuatro secuencias con los números del mismo palo. Luego hay $4^5 - 4$ manos que son escaleras.

Por otro lado hay 10 secuencias de números consecutivos: consideremos la primera secuencia AS,2,3,4,5, la segunda 2,3,4,5,6 ... hasta la última secuencia 10, J, Q, K, As (El As es la única carta que puede iniciar y cerrar una escalera).

En consecuencia, la probabilidad buscada es:

$$\frac{10(4^5-4)}{\binom{52}{5}} \approx .0039$$

Ejercicio 11

Arrojamos una moneda equilibrada 3 veces. Sea A el evento "que resulten más caras que cruces" y B el evento "que la primera moneda muestre cara". Hallar $P(A|B)$.

Ejercicio 12

Se arrojan dos dados de 4 caras y se asume que los 16 resultados son igualmente probables. Sean X e Y el resultado del primer y del segundo dado, respectivamente. Hallar las probabilidades condicionales $P(A_m|B)$ donde

$$A_m = \{\text{máx}(X, Y) = m\},\ B = \{\text{mín}(X, Y) = 2\}$$

y $m = 1, 2, 3, 4$.

Solución: El conjunto $A = \{\text{máx}(X, Y) = m\}$ comparte con B dos elementos si $m = 3$ o $m = 4$, un elemento si $m = 2$, and ningún elemento si $m = 1$. En consecuencia, utilizando la definición de probabilidad condicional y, como el espacio muestral es de equiprobabilidad, obtenemos:

$$\mathbf{P}(\{\text{máx}(X.Y) = m\} \mid B) = \begin{cases} 2/5. & \text{si } m = 3 \text{ or } m = 4 \\ 1/5, & \text{if } m = 2. \\ 0. & \text{si } m = 1. \end{cases}$$

Ejercicio 13 *Teorema de Bayes*

Sea $B_1, \ldots, B_n$ una partición de Ω con $B_i \in \mathcal{F}$ y $P(B_i) > 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Probar que, si A es un evento con probabilidad positiva, entonces

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)\, P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\, P(B_i)}.$$

Demostración: La realizamos en la clase de teoría.

Ejercicio 14

Hay una probabilidad del 1 % para un disco duro se bloquee. Por lo tanto, tiene dos copias de seguridad, cada una con un 2 % de probabilidad de bloquearse, y los tres componentes son independientes entre sí. La información almacenada se pierde solo en una desafortunada situación cuando los tres dispositivos se bloquean. ¿Cuál es la probabilidad de que la información esté guardada?

Solución: Sea D_1 el evento que "el disco duro se bloquee" y D_2 y D_3 que "la primera" y "segunda copia lo haga". Sea A el evento "que la información esté guardada". Luego, A^c es el evento que "la información se pierda" y esto ocurre cuando los tres eventos D_i ocurren simultáneamente.

Así, por la independencia

$$
\begin{aligned}
P(A) &= 1 - P(A^c) \\
&= 1 - P(D_1 \cap D_2 \cap D_3) \\
&= P(D_1) \cdot P(D_1) \cdot P(D_3) \\
&= 0.01 \cdot 0.02 \cdot 0.02 \\
&= 0.999996
\end{aligned}
$$

Ejercicio 15

Un programa de computadora se prueba mediante 3 pruebas independientes. Cuando hay un error, estas pruebas lo detectan con probabilidades 0.2, 0.3 y 0.5, respectivamente. Supongamos que el programa contiene un error ¿Cuál es la probabilidad de que se detecte por lo menos en una prueba?

Solución: Sea D_i el evento que "la i-ésima prueba no detecte el error", $i = 1, 2, 3$. Sea A el evento "que el error se detecte en por lo menos una prueba". Luego

$$A = \bigcup_{i=1}^{3} D_i.$$

Para utilizar la independencia pasamos al complemento y asumimos que los eventos D_i^c son eventos independientes como consecuencia de que los D_i lo son. Así

$$P(A^c) = P(\bigcap_{i=1}^{3} D_i^c) = \prod_{i=1}^{3} P(D_i^c) = (1 - 0.2) \cdot (1 - 0.3) \cdot (1 - 0.5) = 0.28.$$

Luego la probabilidad de "que el error se detecte en por lo menos una prueba" es 1-0.28=0.72.

Restaría probar la siguiente proposición: "Si $\{D_i\}_{i=1}^3$ es una colección de eventos independientes entonces $\{D_i^c\}_{i=1}^3$ también." Dejamos la demostración como ejercicio.

Ejercicio 16 *(*)*

Se tira un dado 15 veces. Hallar la probabilidad de que no veamos alguno de los números del 1 al 6 al menos una vez y compararla con la cota provista por la desigualdad de Bonferroni.

Solución: Sea A_i el evento "que no veamos el número i en las 15 tiradas". Por la Proposición 1:

$$
\begin{aligned}
&P\left(\bigcup_{i=1}^{6} A_i\right) = \sum_{i=1}^{6} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le 6} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le 6} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \\
&- \sum_{1 \le i < j < k < \ell \le 6} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_\ell) + \sum_{1 \le i < j < k < \ell < m \le 6} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_\ell \cap A_m) \\
&- P(A_1 \cap A_2 \ldots A_6).
\end{aligned}
$$

El último término es $P\left(A_1 \cap A_2 \ldots A_6\right)=0$ y si computamos los restantes términos obtenemos:

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{6} A_i\right) &= 6(5/6)^{15}-15(4/6)^{15}+20(3/6)^{15}-15(2/6)^{15}+6(1/6)^{15} \\
&= 0.389433-0.03426+3.05\times10^{-5}-1.045\times10^{-6}+1.27\times10^{-11} \\
&= 0.3557873
\end{aligned}$$

La cota provista por Bonferroni es

$$\sum_{i=1}^{6} P\left(A_i\right)=6(0.064905)=0.3894328.$$

Así, la diferencia entre la probabilidad exacta y la cota es de 0.0336455.

Ejercicio 17

Se asume que un test de detección de un tipo de gripe es correcto el 95 % de las veces, es decir si la persona tiene la enfermedad, el resultado es positivo con probabilidad 0.95 y, si la persona no tiene la enfermedad, el test da negativo con probabilidad 0.95. Una persona seleccionada al azar de cierta población tiene una probabilidad de portar la enfermedad de 0.001. Si para esta persona el test da positivo, ¿cuál es la probabilidad de que esté enferma?

Solución:

La partición la provocan los eventos B_1 : "que una persona seleccionada al azar esté enferma" y B_2 : "que una persona seleccionada al azar esté sana". El evento en cuestión es A : "que una persona seleccionada al azar arroje un valor positivo del test".

$$\begin{aligned}
P(B_1 \mid A) &= \frac{P(B_1)P(A \mid B_1)}{P(B_1)P(A \mid B_1)+P(B_2)P(A \mid B_2)} \\
&= \frac{0.001\cdot 0.95}{0.001\cdot 0.95+0.999\cdot 0.05} \\
&= 0.0187.
\end{aligned}$$

Notar que aunque el test era bastante confiable, una persona que haya resultado positiva es muy improbable que tenga la enfermedad (menos del 2 %). Bersekas comenta que en una encuesta la mayoría, el 80 %, de las personas creyó que esta última probabilidad era 0.95.