Soluciones a ejercicios seleccionados del Práctico 3.

El siguiente texto es un borrador y está sujeto a correcciones en clase.

Ejercicio 1

La vida útil, en años, de un componente electrónico es una variable aleatoria continua con función de densidad dada por:

$$f(x) = kx^{-5} I_{[1,\infty)}(x),$$

donde k es una constante.

a) Hallar k tal que f sea una función de densidad y mostrar la gráfica de f.

b) Encontrar la función de distribución F y dibujar su gráfica.

c) Calcular

$$P\left(X < \frac{1}{4}\right), P(X = 3),\ P(X > 5)\ \text{ y } P\left(\frac{3}{2} \leq X \leq 6\right)$$

relacionando los valores hallados con los gráficos.

d) Hallar e interpretar en términos del problema $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Desv}(X)$.

e) Marcar $\mathrm{E}(X)$ en el gráfico de la densidad f

Ejercicio 2

El período de funcionamiento hasta su primera falla (en cientos de horas) de cierto componente electrónico, es una variable aleatoria Y con función de distribución expresada por

$$F(y) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-y^2} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

a) Comprobar que F satisface las propiedades de una función de distribución.

b) Hallar y graficar la función de densidad f de la variable aleatoria.

c) Calcular la probabilidad de que el componente funcione por lo menos durante 2 hs hasta tener la primera falla.

Ejercicio 3 *Transformación lineal de una variable aleatoria con distribución uniforme*

a) Sean a y b dos números reales con $a < b$. Probar la validez de la siguiente equivalencia:

$$X \sim \text{uniforme}[a, b] \text{ si y sólo si } Y = \frac{X - a}{b - a} \sim \text{uniforme}[0, 1].$$

b) Sean X e Y como en el inciso anterior, con $a = 1$ y $b = 5$. Calcular $P(\frac{1}{4} < Y < \frac{3}{4})$ y relacionar este valor de probabilidad con las densidades ambas variables aleatorias.

Ejercicio 4 *Transformaciones no lineales*

a) Sea X una variable aleatoria continua con densidad f y definamos $Y = e^X$. Hallar la función de distribución y la de densidad de Y en términos de la f.

b) Aplicar el resultado anterior cuando X tiene una distribución uniforme en $[0, 1]$.

Ejercicio 5

En los siguientes ejercicios se sugiere utilizar las funciones provistas por R (u otro lenguaje).

a) Graficar las densidades correspondientes a las siguientes variables aleatorias: $X \sim N(3, 7)$, $Y \sim N(3, 1)$, $X \sim \text{gamma}(2, 1)$ e $Y \sim \text{gamma}(0.1, 5)$.

b) Para $Z \sim N(0, 1)$ y $X \sim N(5, 2)$ computar las siguientes probabilidades y vincularlos con el gráfico de la función de densidad

$$P(-0.5 \leq Z \leq 1),\ P(X \geq 1.2),\ \text{ y }\ P(Z \leq -10).$$

c) Para $Z \sim N(0, 1)$, $X \sim N(0, 0.01)$ e $Y \sim N(2, 16)$ resolver las siguientes ecuaciones

$$P(Y \geq z_o) = 0.117 \quad P(-z_0 \leq Z \leq z_0) = 0.90 \quad P(-z_0 \leq X \leq z_0) = 0.90..$$

Marcar las áreas o los cuantiles en la gráfica de la función de densidad ϕ.

d) Para una v.a. $X \sim \text{gamma}(4, 2)$ hallar un intervalo (z_o, z_1) con $0 < z_0 < z_1$ tal que en él se encuentre el "68 % de las observaciones".

Solución

a) Ver en el script los detalles para construir los gráficos.

b) Para $Z \sim N(0, 1)$ y $X \sim N(5, 2)$ computar las siguientes probabilidades y vincularlos con el gráfico de la función de densidad

$$P(-0.5 \leq Z \leq 1),\ P(X \geq 1.2),\ \text{ y }\ P(Z \leq -10).$$

Si utilizamos R, computamos las probabilidades del siguiente modo:

```
> pnorm(1)-pnorm(-0.5)
[1] 0.5328072
> 1-pnorm(1.2, mean=5, sd=sqrt(2))
[1] 0.9963952
> pnorm(-10)
[1] 7.619853e-24
```

Ver el archivo .R para graficar las densidades con las probabilidades.

c) Para $Z \sim N(0,1)$, $X \sim N(0, 0.01)$ e $Y \sim N(2, 16)$ resolver las siguientes ecuaciones

$$P(Y \geq z_o) = 0.117 \quad P(-z_0 \leq Z \leq z_0) = 0.90 \quad P(-z_0 \leq X \leq z_0) = 0.90.$$

Sea F_X, F_Y y Φ las función de distribución de X, Y y Z respectivamente. Notar entonces que, como

$$F_Y(z_o) = 1 - P(Y > z_o) = 1 - 0.117 = 0.883$$

entonces

$$z_o = F_X^{-1}(0.883).$$

En R computamos

```
> qnorm(0.883, mean=2, sd=sqrt(16))
[1] 6.760472
```

Por la simetría de la densidad ϕ respecto de 0, z_0 satisface $P(-z_0 \leq Z \leq z_0) = 0.90$ si y sólo si

$$P(Z \leq z_0) = 0.95$$

y, en R

```
> qnorm(0.995)
[1] 2.575829
```

Análogamente, utilizamos la simetría de la densidad de X y computamos

```
> qnorm(0.995, sd=sqrt(0.01))
[1] 0.2575829
```

Marcar las áreas o los cuantiles en la gráfica de la función de densidad correspondiente.

d) Para una v.a. $X \sim \text{gamma}(4, 2)$ hallar un intervalo (z_o, z_1) con $0 < z_0 < z_1$ tal que en él se encuentre el "68 % de las observaciones".

Hay infinitos intervalos que satisfacen la condición. Podemos por ejemplo dividir $(1 - 0.68)/2 = 0.32 = 0.16$ y plantear entonces

$$z_o : \; P(X \leq z_o) = 0.16 \text{ y } z_1 : \; P(X \leq z_o) = 0.16 + 0.68 = 0.84$$

y entonces:

```
> qgamma(0.16, shape=4, scale=1/2)
[1] 1.046404,
```

Es decir, z_o=1.046404. Análogamente, z_1=2.951884, ya que

```
> qgamma(0.84, shape=4, scale=1/2)
[1] 2.951884
```

Ejercicio 6

La precipitación de nieve X en el mes de junio en Bariloche es una variable aleatoria con distribución normal de media 85.3 milímetros y desvío 2.7 milímetros.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el año próximo la precipitación supere los 100 milímetros?.

b) Hallar el valor de precipitación x_0 tal que la probabilidad de que la precipitación sea inferior a x_0 sea 0.95.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la precipitación se encuentre entre $\mathrm{E}(X)-\sqrt{\mathrm{VAR}(X)}$ y $\mathrm{E}(X)+\sqrt{\mathrm{VAR}(X)}$?

d) Si la precipitación se mide en pulgadas, ¿qué valor asumen la esperanza y el desvío?.

Ejercicio 7 *Transformación lineal de una variable aleatoria con distribución normal*

a) Sean μ y σ dos números reales con $\sigma > 0$. Mostrar que vale la siguiente implicación:

$$\text{Si } Y \sim \mathrm{N}(0,1) \text{ entonces } \sigma Y + \mu \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2).$$

b) Dada X una variable aleatoria con distribución $\mathrm{N}(0,1)$, hallar la densidad de $(X-1)/2$.

Solución. El inciso a) fue trabajado en pizarra, en clase y en consulta.

Por el inciso a),

$$(X-1)/2 = \frac{1}{2}X + \frac{-1}{2} \sim N(-\frac{1}{2}, (\frac{1}{2})^2) = N(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$$

Luego, la densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1}{4}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}})^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi/2}}\mathrm{e}^{-2(x+\frac{1}{2})^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 8

En una zona de Argentina se pueden modelar las magnitudes de los terremotos mediante una distribución exponencial cuyo promedio es 2.4 en la escala de Richter. Calcular la probabilidad de que el siguiente temblor que se presente en esa zona

a) tenga una puntuación mayor que 3 grados en la escala de Richter.

b) tenga una puntuación entre 2 y 3 grados en la escala de Richter.

c) tenga una puntuación de a lo sumo dos veces su desvío.

Ejercicio 9

Los trabajos son enviados a una impresora a un promedio de 3 por hora. Queremos calcular el tiempo esperado entre trabajos y la probabilidad de que el próximo trabajo sea enviado en el lapso de los próximos cinco minutos.

Solución: sea T el tiempo de espera entre trabajos. Entonces T tiene una distribución exponencial de parámetro $\lambda = 3$ hrs^{-1}. Luego $\mathrm{E}(T) = 1/\lambda = 1/3$ horas o, equivalentemente, de 20 minutos entre trabajos.

Para calcular la probabilidad, como 5 minutos equivale a (1/12) hrs, entonces

$$P(T < 1/12 \text{ hrs }) = F_T(1/12) = 1 - e^{-\lambda(1/12)} = 1 - e^{-1/4} = 0.2212$$

Ejercicio 10

El tiempo de vida útil de los chips de memoria de una computadora tiene una distribución gamma con media $\mu = 12$ años y desvío estándar $\sigma = 4$ años. ¿Cuál es la probabilidad de que un chip tenga una vida entre 8 y 10 años?.

Solución. Si $X \sim gamma(\alpha, \lambda)$ entonces, como

$$\mathrm{E}(X) = \alpha/\lambda = 12 \text{ y } \textsc{var}(X) = \alpha/\lambda^2 = 4^2.$$

Resolviendo, obtenemos:

$$\alpha = 12\lambda \text{ y } \frac{12\lambda}{\lambda^2} = 16$$

en consecuencia

$$\lambda = \frac{3}{4} \text{ y } \alpha = 12\lambda = 9$$

Así, la probabilidad buscada es:

```
> pgamma(10, shape=9, scale=1/(3/4)) - pgamma(8, shape=9, scale=1/(3/4))
[1] 0.1852704
```