

## Práctico 1.

### Probabilidad.

#### Ejercicio 1

En cada uno de los siguientes experimentos describir el espacio muestral,  $\Omega$ , e indicar su cardinal ( $\#$ ).

- a) Una fábrica de frenos de bicicleta produce dos tipos de frenos, los de aro (A) y los de disco (D). Se observan 3 frenos fabricados por la mencionada unidad y se registra su tipo.
- b) Los mismos artículos de **a)** se observan hasta que se produzcan dos frenos de disco consecutivos diferentes; el número máximo de inspecciones que se pueden realizar es 3.
- c) Se elige al azar un racional del intervalo abierto  $(0, 1)$ .
- d) Un simulador de números aleatorios genera números pares.
- e) (\*) Un torneo deportivo por eliminación comienza con  $2^n$  competidores y tiene  $n$  rondas. Los jugadores están numerados del 1 al  $2^n$  como aparecen en la tabla inicial. Para las posiciones  $2, 3, 4, \dots, 2^n - 1$  no hay posibilidad de empate, especificándose la tabla inicial de sorteos (tener en cuenta que en la primera ronda el resultado es un elemento del conjunto  $\{1, 2\} \times \{3, 4\}, \dots, \{2^n - 1, 2^n\}$  y así sucesivamente). El experimento es la ejecución del torneo.
- f) Se mide el tiempo de vida de una lámpara led.
- g) Se lanza repetidamente un dado de cuatro caras hasta que se obtiene por primera vez un número par.

#### Ejercicio 2

Rocío, Mateo y Giulia se turnan para tirar una moneda, en el orden Rocío, Mateo, Giulia, Rocío, Mateo, Julia, etc. El juego finaliza al salir la primera cara. Si representamos con 1 el evento *que salga cara* y con 0 el evento complementario, describir el espacio muestral,  $\Omega$ , como sucesiones de ceros y unos.

Definir en términos de los elementos de  $\Omega$  los siguientes eventos:  $A$  : “que Mateo gane”,  $B$  : “que Rocío gane” y  $C = (A \cup B)^c$ .

#### Ejercicio 3

De una bolsa que tiene fichas numeradas del 1 al 20 se saca una ficha al azar. Calcular la probabilidad de que esa ficha tenga números divisibles por 3 ó por 5.

#### Ejercicio 4

Un nuevo virus informático puede ingresar al sistema por correo electrónico o por Internet. Hay una probabilidad de 0.3 de recibir este virus por correo electrónico y de 0.40 a través de Internet. Además, el virus ingresa al sistema simultáneamente a través del correo electrónico e Internet con probabilidad 0.15 . ¿Cuál es la probabilidad de que el virus no ingrese?

### Ejercicio 5 (\*)

Un dado de 6 caras está cargado de tal forma que la probabilidad que al lanzarlo resulte - en su cara superior- un número par es el doble de que resulte un número impar. Todas las caras pares son igualmente probables, como así también las impares. Hallar un modelo de probabilidad para el lanzamiento de este dado y calcular la probabilidad de que el resultado sea menor que 4.

### Ejercicio 6 *Desigualdad de Bonferroni*

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  un espacio de probabilidad. Probar que si  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  entonces

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

### Ejercicio 7

Sean  $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$  dos sucesiones de eventos de un espacio de probabilidad tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = 1.$$

Probar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n \cap B_n) = 1$ .

### Ejercicio 8

Considere el conjunto de todas las palabras diferentes que pueden formarse intercambiando las letras de la palabra “llabaca”. Si se selecciona una palabra al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea la palabra “caballa”?

### Ejercicio 9

Supongamos que de un mazo de naipes de estilo español con 48 cartas, bien barajado, se extraen al azar y sin reposición 7 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que:

- a) haya 5 espadas y 2 bastos?
- b) haya 3 espadas, 2 bastos y 2 oros?
- c) haya exactamente 5 espadas?

### Ejercicio 10

Un mazo de póquer tiene 52 cartas clasificadas en cuatro grupos de 13: pique, corazón, trébol y diamante. En una mano de póquer se dan 5 cartas. Si las cartas tienen valores consecutivos y no todas son del mismo palo decimos que la mano es una escalera. Por ejemplo, una mano consistente de: el 5, 6, 7 y 8 de diamantes y el 9 de corazón es una escalera. ¿Cuál es la probabilidad de que una mano resulte escalera?

### Ejercicio 11

Arrojamos una moneda equilibrada 3 veces. Sea  $A$  el evento “que resulten más caras que cruces” y  $B$  el evento “que la primera moneda muestre cara”. Hallar  $P(A|B)$ .

### Ejercicio 12 (\*)

Se arrojan dos dados de 4 caras y se asume que los 16 resultados son igualmente probables. Sean  $X$  e  $Y$  el resultado del primer y del segundo dado, respectivamente. Hallar las probabilidades condicionales  $P(A_m|B)$  donde

$$A_m = \{\max(X, Y) = m\}, B = \{\min(X, Y) = 2\}$$

y  $m = 1, 2, 3, 4$ .

### Ejercicio 13 Teorema de Bayes

Sea  $B_1, \dots, B_n$  una partición de  $\Omega$  con  $B_i \in \mathcal{F}$  y  $P(B_i) > 0, \forall i = 1, \dots, n$ . Probar que, si  $A$  es un evento con probabilidad positiva, entonces

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j) P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i) P(B_i)}.$$

### Ejercicio 14

Hay una probabilidad del 1 % para un disco duro se bloquee. Por lo tanto, tiene dos copias de seguridad, cada una con un 2 % de probabilidad de bloquearse, y los tres componentes son independientes entre sí. La información almacenada se pierde solo en una desafortunada situación cuando los tres dispositivos se bloquean. ¿Cuál es la probabilidad de que la información esté guardada?

### Ejercicio 15

Un programa de computadora se prueba mediante 3 pruebas independientes. Cuando hay un error, estas pruebas lo detectan con probabilidades 0.2, 0.3 y 0.5, respectivamente. Supongamos que el programa contiene un error ¿Cuál es la probabilidad de que se detecte por lo menos en una prueba?

### Ejercicio 16 (\*)

Se tira un dado 15 veces. Hallar la probabilidad de que no veamos alguno de los números del 1 al 6 al menos una vez y compararla con la cota provista por la desigualdad de Bonferroni.

### Ejercicio 17

Se asume que un test de detección de un tipo de gripe es correcto el 95% de las veces, es decir si la persona tiene la enfermedad, el resultado es positivo con probabilidad 0.95 y, si la persona no tiene la enfermedad, el test da negativo con probabilidad 0.95. Una persona seleccionada al azar de cierta población tiene una probabilidad de portar la enfermedad de 0.001. Si para esta persona el test da positivo, ¿cuál es la probabilidad de que esté enferma?