# Práctico 2. Variables aleatorias discretas

## Ejercicio 1

La función de distribución de una variable aleatoria $X$ está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{3} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{11}{12} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases}$$

a) Dar el gráfico de $F$ y hallar:

   i) $P\left(X > \frac{1}{2}\right)$
   ii) $P\left(X = 1\right)$
   iii) $P\left(X < 3\right)$,
   iv) $P\left(2 < X \leq 4\right)$.

b) ¿Es $X$ una variable aleatoria discreta?

## Ejercicio 2

Probar que para una variable aleatoria $X$ con función de distribución $F$ se cumplen las propiedades siguientes:

a) $\forall x \in I\!R : P(X > x) = 1 - F(x)$.

b) $\forall x, y \in I\!R :$ si $x < y$ entonces $P(x < X \leq y) = F(y) - F(x)$.

## Ejercicio 3

Una moneda cargada tiene probabilidad $p \in (0, 1)$ de que al lanzarla resulte “cara”. Se lanza cuatro veces la moneda y se define la variable aleatoria discreta $X$: “número de caras en los cuatro lanzamientos”.

a) Para la variable aleatoria $X$:

   i) Hallar y graficar la función de probabilidad de masa masa y la función de distribución.
   ii) Si se sabe que la prob abilidad de que aparezcan cuatro caras es $3^{-4}$, hallar $p$.

b) Computar, utilizando la función de distribución las siguientes probabilidades:

   i) Que al menos en un lanzamiento aparezca cara.
   ii) $P(2 < X \leq 4)$.

iii) $P(X \geq 2)$.

c) Establecer relaciones entre las probabilidades y las gráficas del inciso a).

**Ejercicio 4**

a) Se lanza un dado equilibrado y se define $X$ la variable aleatoria discreta "resultado del lanzamiento". Hallar $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{VAR}(X)$.

b) Más generalmente, sea $X$ una variable aleatoria discreta con rango $R_X = \{1, \ldots, M\}$ y tal que $P(X = i) = 1/M$ para cada $i \in R_X$. Hallar $\mathrm{E}(X)$.

**Ejercicio 5**

Consideremos un juego de preguntas en el que una persona recibe dos preguntas y debe decidir cuál responder primero. La Pregunta 1 se responderá correctamente con una probabilidad del 0.8 y la persona recibirá un premio de 1000, mientras que la Pregunta 2 se responderá correctamente con una probabilidad del 0.5 y la persona recibirá un premio de 2000. Si la primera pregunta intentada se responde incorrectamente, el juego termina, es decir, la persona no tiene permitido intentar la segunda pregunta. Si la primera pregunta se responde correctamente, la persona puede intentar la segunda pregunta. ¿Qué pregunta debe responderse primero para maximizar el valor esperado del dinero total del premio recibido?

**Ejercicio 6**

La temperatura de una ciudad se modela como una variable aleatoria con una media y una desviación estándar, ambas iguales a 10 grados Celsius. Un día se describe como "estándar" si la temperatura durante ese día se encuentra dentro de una desviación estándar de la media. ¿Cuál sería el rango de temperatura para un día estándar si la temperatura se expresara en grados Fahrenheit? (recordar que si $X$ es la temperatura en grados Celsius, en grados Fahrenheit es $Y = 32 + 9X/5$.)

**Ejercicio 7**

Las Tablas 1 y 2 corresponden a funciones de probabilidad de masa de pares de vectores $(X, Y)$ y $(Z, T)$

| $X/Y$ | 0 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1/9 | 1/9 | 1/9 |
| 1 | 1/9 | 1/9 | 1/9 |
| 2 | 1/9 | 1/9 | 1/9 |

Tabla 1: $f_{(X,Y)}$

| $Z/T$ | 0 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1/3 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1/3 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1/3 |

Tabla 2: $f_{(Z,T)}$

a) ¿Son $X$ e $Y$ variables aleatorias independientes? ¿Y $Z$ y $T$ son independientes?

b) ¿Qué valor asumen los coeficientes de correlación de ambos pares de variables?

**Ejercicio 8**

Sean $X$ e $Y$ variables aleatorias discretas, $a$ y $b$ constantes. Probar que:

a) $\text{VAR}(aX + b) = a^2\text{VAR}(X)$.

b) Si $X$ e $Y$ son variables aleatorias independientes entonces estń no correlacionadas y además $\text{VAR}(X + Y) = \text{VAR}(X) + \text{VAR}(Y)$.

**Ejercicio 9**

Suponga que sólo el 20 % de los automovilistas se detienen por completo en un cruce donde hay un semáforo con luz roja intermitente en todas las direcciones, cuando no haya otros automóviles visibles.

a) Hallar la probabilidad de que de 20 automovilistas, seleccionados al azar, que lleguen al cruce en estas condiciones:

   i) a lo sumo 5 se detengan por completo.
   ii) exactamente 5 se detengan por completo.
   iii) por lo menos 5 se detengan por completo.

b) ¿Cuántos, de los siguientes 20 automovilistas, se espera que se detengan por completo?

**Ejercicio 10**

Un paquete de software consta de 12 programas, cinco de los cuales deben actualizarse. Si 4 programas son elegidos al azar para la prueba,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos de ellos deban actualizarse?

b) ¿Cuál es el número esperado de programas, de los cuatro elegidos, que deben ser actualizados?

**Ejercicio 11**

Supongamos que el número de errores tipográficos sobre una única página de un libro tiene una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 1$. Calcular la probabilidad de que:

a) exista al menos un error en esa página.

b) exista a lo sumo 2 errores en esa página.

**Ejercicio 12**

El número de visitas realizadas en un día entre semana en una determinada página web se decide modelizar por una variable de Poisson de media 8.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se reciban más de 4 visitas? Y ¿entre siete y diez visitas (ambos valores incluidos)?

b) ¿Qué valor asume el número medio del número de visitas?.

**Ejercicio 13**

Una persona usuaria de una computadora intenta recuperar su contraseña. La persona sabe que puede ser una de 4 posibles contraseñas de las que dispone. Prueba sus contraseñas hasta que encuentra la correcta. Sea $X$ : "número de contraseñas incorrectas probadas hasta encontrar la correcta". Hallar $E(X)$ y $\text{VAR}(X)$.