《回归分析》作业参考答案

第一章

sword
2017 级统计系

nalzok
2016 级统计系

2019 年 9 月 23 日

1 第一节

1. 矩阵 A 为 n 阶实对称矩阵，证明:

   (iii) 矩阵 A 有 n 个实特征值（记作 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$），而且 n 个特征向量可正交化；

   (iv) 存在正交阵 P 使得

   $$A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P' \triangleq P\Lambda P'$$

   (v) 对任意正整数 s，有

   $$A^s = P\begin{pmatrix} \lambda_1^s & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^s \end{pmatrix} P' \triangleq P\Lambda^s P'$$

   从而 $\mathrm{tr}(A^s) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^s$；

   (vi) A 是非奇异的当且仅当 $\lambda_i \neq 0\ (\forall i)$，且矩阵 A^{-1} 的特征值为 λ_i^{-1}，$i = 1, 2, \cdots, n$；

   (vii) 矩阵 $\mathrm{I}_n + cA$ 的特征值为 $1 + c\lambda_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$；

   (viii) 半正定矩阵的特征值均非负，从而半正定矩阵的迹非负。

证明. (iii) 由代数学基本定理，知矩阵 A 的特征多项式在复数域中有且仅有 n 个根。又由 (i) 得 A 的复特征值均为实数，故矩阵 A 有 n 个实特征值。下面，借用 (iv) 的结论，矩阵 A 可相似对角化，则 A 各个特征值的几何重数等于代数重数，所以 A 有 n 个线性无关的特征向量，从而 n 个特征向量可正交化。

(iv) 对实对称矩阵 A 的阶数 n 作数学归纳法。

$n = 1$ 时，A 本身即为对角阵，再取 P 为一阶单位阵，结论成立。

假设任一 $n-1$ 阶实对称矩阵都能正交相似于一对角阵，下面来看 n 阶的情形。

设 λ_1 为 A 的一个特征值，η_1 为对应的单位特征向量，则 η_1 可扩成一个标准正交基 $\eta_1, \cdots, \eta_n$，并记矩阵 $T = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$。从而

$$AT = T\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

又因为

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & B \end{pmatrix}' = (T'AT)' = T'AT = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

所以 $\alpha = 0$，矩阵 B 为实对称矩阵。由归纳假设，存在 $n-1$ 阶正交阵 Q，使得 $B = Q'\Lambda_1 Q$，其中 Λ_1 为对角阵。令 $Q_1 = \mathrm{diag}(1\,, Q)$，就有

$$T'AT = Q' \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \Lambda_1 \end{pmatrix} Q$$

再取 $P = Q_1 T'$，即可证得 n 阶实对称矩阵亦正交相似于一对角矩阵。

根据数学归纳法，结论成立。

(v) 注意到 $PP' = \mathrm{I}$，从而 $A^s = (P\Lambda P')^s = P\Lambda P' P\Lambda P' \cdots P\Lambda P' = P\Lambda^s P'$。又因为相似矩阵有相同的迹，故 $\mathrm{tr}(A^s) = \mathrm{tr}(\Lambda^s) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^s$。

(vi) 矩阵 A 非奇异 $\Leftrightarrow$ 矩阵 Λ 非奇异 $\Leftrightarrow \lambda_i \neq 0\ (\forall i)$。

又 $A^{-1} = (P\Lambda P')^{-1} = P\Lambda^{-1}P'$ 及相似矩阵有相同的特征值，得矩阵 A^{-1} 的特征值为 λ_i^{-1}，$i = 1\,, 2\,, \cdots\,, n$。

(vii) 注意到 $\mathrm{I}_n + cA = PP' + P(c\Lambda)P' = P(\mathrm{I}_n + c\Lambda)P'$，与 (vi) 类似即可得证。

(viii) 任取非零向量 x，记向量 $y = Px$，则由 P 满秩知 y 亦为非零向量。从而

$$x'\Lambda x = x'P'APx = y'Ay \geq 0$$

将 x 取遍标准单位向量即可证得结论。

$\square$

2. 设 A 为实对称矩阵，用拉格朗日乘数法证明：

$$\max_{x'x \neq 0} \frac{x'Ax}{x'x} = \lambda_{\max}(A) \quad \text{及} \quad \min_{x'x \neq 0} \frac{x'Ax}{x'x} = \lambda_{\min}(A)$$

证明. 不失一般性，考虑 x 为单位向量的情形即可。取单位向量 $e = (x_1\,, \cdots\,, x_n)'$，则 e 的取值范围为单位球面（从而是有界闭集）。易见 $e'Ae$ 为 e 的连续函数，而连续函数在有界闭集上必取得最大、最小值，从而结论中的最值运算是有意义的。

由 A 实对称，知存在正交阵 P 与对角阵 Λ，使得 $A = P'\Lambda P$。从而

$$e'Ae = e'P'\Lambda Pe \triangleq y'\Lambda y$$

由于正交变换保持距离且为可逆变换，所以向量 y 仍为单位向量且取值范围为单位球面。

记 $y=(y_1,\cdots,y_n)'$，$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，则

$$y'\Lambda y=\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$$

令 $f(y)=\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$，于是问题转化为求解

$$\max_y f(y) \qquad \text{s.t.} \sum_{i=1}^n y_i^2=1$$
$$\min_y f(y) \qquad \text{s.t.} \sum_{i=1}^n y_i^2=1$$

应用拉格朗日乘数法，构造拉格朗日函数

$$L(y,\mu)=\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_n y_n^2-\mu(y_1^2+\cdots+y_n^2-1)$$

上式两端对各分量求一阶偏导，得

$$\frac{\partial L}{\partial y_i}=2\lambda_i y_i-2\mu y_i=0 \qquad i=1,2,\cdots,n$$
$$\frac{\partial L}{\partial \mu}=y_1^2+\cdots+y_n^2-1=0$$

解得 $\mu=\lambda_i\,,y=\epsilon_i\,,f(\epsilon_i)=\lambda_i$，其中 ϵ_i 为第 i 个分量为 1，其余分量为 0 的单位向量。由此，遍历 A 的特征值，知结论成立。 □

3. 设向量 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)'$，证明：

(i) 对任意 n 维向量 a，有
$$\frac{\partial \beta' a}{\partial \beta}=a$$
对任意 n 列矩阵 A，有
$$\frac{\partial A\beta}{\partial \beta'}=A$$

(ii) 若 A 为对称矩阵，则
$$\frac{\partial \beta' A\beta}{\partial \beta}=2A\beta$$

证明. (i) 设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$，则 $\beta' a=a_1\beta_1+a_2\beta_2+\cdots+a_n\beta_n$。于是

$$\frac{\partial \beta' a}{\partial \beta}=\left(\frac{\partial}{\partial \beta_1},\frac{\partial}{\partial \beta_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial \beta_n}\right)'(a_1\beta_1+a_2\beta_2+\cdots+a_n\beta_n)=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'=a$$

又设 $A=(b_{ij})_n$，则

$$\frac{\partial A\beta}{\partial \beta'} = \frac{\partial}{\partial \beta'}\begin{pmatrix} b_{11}\beta_1+\cdots+b_{1n}\beta_n \\ b_{21}\beta_1+\cdots+b_{2n}\beta_n \\ \vdots \\ b_{n1}\beta_1+\cdots+b_{nn}\beta_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial}{\partial \beta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \beta_n} \end{pmatrix} (b_{11}\beta_1+\cdots+b_{1n}\beta_n\,,\cdots,b_{n1}\beta_1+\cdots+b_{nn}\beta_n)$$

$$= A$$

(ii) 对任意的 n 阶方阵 $A=(b_{ij})_n$，有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta' A\beta}{\partial \beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\beta_i\beta_j\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \beta_1},\frac{\partial}{\partial \beta_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial \beta_n}\right)'\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\beta_i\beta_j\right) \\ &= (A+A')\beta \end{aligned}$$

特别地，当 A 为对称矩阵时，有

$$\frac{\partial \beta' A\beta}{\partial \beta} = 2A\beta$$

□

4. 设四分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

满足 A 与 $D-CA^{-1}B$ 均可逆。给出上述四分块矩阵的逆矩阵。

解. 记矩阵 $M=D-CA^{-1}B$，则

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & M^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{I} & -M^{-1}B \\ & \mathrm{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & \\ -A^{-1}C & \mathrm{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \mathrm{I}$$

从而

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & M^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I} & -M^{-1}B \\ & \mathrm{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I} & \\ -A^{-1}C & \mathrm{I} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}M^{-1}BA^{-1}C & -A^{-1}M^{-1}B \\ -M^{-1}A^{-1}C & M^{-1} \end{pmatrix}$$

5. (i) 举例说明矩阵 A 的广义逆 A^- 不唯一;
   (ii) 给出计算矩阵 A 广义逆 A^- 的一般公式。

解. (i) 先回顾矩阵广义逆的定义。

定义. 设 A 是一个 $s \times n$ 矩阵，矩阵方程 $AXA = A$ 的通解称为 A 的广义逆矩阵，简称为 A 的广义逆，记作 A^-。

广义逆矩阵可以不唯一。事实上，对任意非单位阵的幂等阵 A，有

$$AAA = A$$
$$A\mathrm{I}A = A$$

成立。从而 A 的广义逆可以是 A 和 I，不唯一。
另一个反例是 $A = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$，此时 A^- 可取 $\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 42 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} -3.14 \end{pmatrix}$ 等。
认为退化的矩阵过于特殊的同学也可以自行构造对应的数量矩阵。

(ii) 记矩阵 A 的秩为 r，对 A 作满秩分解

$$A = P \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$

则矩阵 A 的广义逆的一般形式为

$$A^- = Q^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & B \\ C & D \end{pmatrix} P^{-1}$$

其中 $B\,, C\,, D$ 分别是任意 $r \times (s-r)\,, (n-r) \times r\,, (n-r) \times (s-r)$ 阶矩阵。证明请参阅丘维声著《高等代数》第一版上册 251-252 页。

6. 对任意 $n \times p$ 阶矩阵 X，证明:

   (i) 无论 $(X'X)^-$ 如何变化，$X(X'X)^-X'$ 保持不变;

   (ii) $X(X'X)^-X'$ 是一个从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathcal{M}(X)$ 的投影矩阵。

证明. (i) 记矩阵 X 的秩为 r。由线性代数的知识，知将 X 作一系列初等列变换，可得到一个列阶梯矩阵，即

$$X = AQ$$

其中矩阵 A 为列阶梯矩阵（前 r 列为标准单位向量，后 $p-r$ 列为 0），Q 为可逆矩阵。再适当交换矩阵 A 的行，得

$$PA = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \triangleq \Lambda$$

其中，P 为若干行交换矩阵相乘得到的矩阵（因而是正交阵)。于是，我们得到了矩阵 X 的一个满秩分解 $X = P'\Lambda Q$。从而 $X'X = Q'\Lambda Q$。由第一章习题一 $5(2)$ 的结论，$(X'X)^-$ 的一般形式为

$$(X'X)^- = Q^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & B \\ C & D \end{pmatrix} (Q')^{-1}$$

其中 $B\,, C\,, D$ 分别是任意 $r \times (p-r)\,, (n-r) \times r\,, (n-r) \times (p-r)$ 阶矩阵。故

$$X(X'X)^-X' = P'\Lambda P$$

而与 $B\,, C\,, D$ 无关，即 $X(X'X)^-X'$ 与 $(X'X)^-$ 的选取无关。

(ii) 由 (1) 知 $X(X'X)^-X' = P'\Lambda P$，容易验证 $X(X'X)^-X'$ 是一个对称幂等阵，且对 $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$，$X(X'X)^-X'\alpha = X((X'X)^-X'\alpha) \in \mathcal{M}(X)$，从而结论成立。

□

7. 令矩阵 $\Sigma = (1-\rho)\mathrm{I}_n + \rho 1_n 1_n'$，其中 1_n 为元素全为 1 的 n 维向量。求 Σ 的特征值和对应的特征向量。又问 ρ 取何值时 Σ（半）正定?

解. 由第一章习题一 $1(\mathrm{vii})$ 的结论，只需考察矩阵 $1_n 1_n'$ 的特征值与特征向量即可。因为 $1_n 1_n'$ 的秩为 1 且易见行和 n 为其特征值，所以矩阵 $1_n 1_n'$ 的特征值为 n（1 重）和 0（$n-1$ 重)。同时容易求出对应的特征值为 1_n 和 $\epsilon_1 - \epsilon_j$，$j = 2\,, \cdots, n$。从而矩阵 Σ 的特征值为 $1 + (n-1)\rho$（1 重）和 $1-\rho$（$n-1$ 重)，所对应的特征向量即为上述特征向量。

由于 Σ 是对称矩阵，所以判断 Σ 是否（半）正定只需考察其特征值。于是容易得出，$\rho = -\frac{1}{n-1}$ 或 $\rho = 1$ 时，Σ 严格半正定；$-\frac{1}{n-1} < \rho < 1$ 时，Σ 正定。

当然硬要抬杠的话，$n = 1$ 的情况还需要另外讨论。

8. 在 p 维向量空间 $\mathbb{R}^p$ 中，超平面是由线性方程组 $H_{(A,b)} = \{x \mid Ax = b\}$ 所定义的点集。

(i) 取定点 $x_0 \in H_{(A,b)}$，证明：$H_{(A,b)} = \{x \mid (x - x_0) \perp \mathcal{M}(A')\}$；

(ii) 若矩阵 A 行满秩，对 $\forall x \in \mathbb{R}^p$，计算欧氏距离 $\mathrm{d}(x\,, H_{(A,b)})$。

解. 不妨设 A 为 $m \times p$ 阶矩阵。

(i) 记集合 $S_1 = \{x \mid Ax = b\}$，$S_2 = \{x \mid (x - x_0) \perp \mathcal{M}(A')\}$。要证明 S_1 与 S_2 相互包含。
一方面，任取 $x \in S_1$，有 $Ax = b$。对 $\forall \alpha \in \mathcal{M}(A')$，存在向量 $\beta \in \mathbb{R}^m$，使得 $\alpha = A'\beta$。从而

$$\begin{aligned}(\alpha\,, x - x_0) &= \beta' A(x - x_0)\\ &= \beta'(b - b) = 0\end{aligned}$$

即 $(x - x_0) \perp \alpha$ $(\forall \alpha \in \mathcal{M}(A'))$。所以 $x \in S_2$，$S_1 \subset S_2$。
另一方面，任取 $y \in S_2$，有 $(y - x_0) \perp \mathcal{M}(A')$。取 $\mathbb{R}^m$ 中一个基 $\gamma_1\,, \cdots, \gamma_m$，令矩阵 $T = (\gamma_1\,, \cdots, \gamma_m)$，则 T 为 m 阶可逆矩阵。由于

$$\begin{aligned}&0 = (A'\gamma_1\,, y - x_0) = \gamma_1'(Ay - b)\\ &0 = (A'\gamma_2\,, y - x_0) = \gamma_2'(Ay - b)\\ &\cdots\\ &0 = (A'\gamma_m\,, y - x_0) = \gamma_m'(Ay - b)\end{aligned}$$

从而 $T'(Ay - b) = 0$，$Ay - b = 0$，故 $y \in S_1$，$S_2 \subset S_1$。
综上，S_1 与 S_2 相互包含，结论成立。事实上，$H_{(A,b)}$ 为 $\mathbb{R}^p$ 上的线性流形，$H_{(A,b)} - x_0$ 为 $\mathbb{R}^p$ 的线性子空间。从 $H_{(A,b)} - x_0$ 的定义上可以看出 $H_{(A,b)} - x_0$ 是 $\mathcal{M}(A')$ 的正交补空间，于是 $H_{(A,b)} = \{x \mid (x - x_0) \perp \mathcal{M}(A')\}$。

(ii) 由于矩阵 A 行满秩，所以方程组 $Ax = b$ 必有解，从而 $H_{(A,b)}$ 不为空集。记方程组 $Ax = 0$ 的一个基解矩阵为 U，则 $\mathrm{d}(x\,, H_{(A,b)})$ 即为向量 $x - x_0$ 到 $\mathcal{M}(U)$ 的距离。若记 y^* 为关于 y 的方程组 $U'Uy = U'(x - x_0)$ 的解，则 $\mathrm{d}(x\,, H_{(A,b)}) = \|x - x_0 - Uy^*\|_2$。

9. 设矩阵 A 非奇异，矩阵 D 为一方阵，证明：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|$$

证明. 由初等变换，易见

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I} & -A^{-1}B \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

从而结论成立。 $\square$

10. 设矩阵 $A\,,B$ 均为半正定矩阵（且 $A \leq B$）。

   (i) 证明：$AB^{-}A \leq A$；

   (ii) $AB^{-}A$ 依赖于广义逆的选择吗？

证明. (i) 首先，如果没有 $A \leq B$ 的条件，

$$A = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, B^{-} = \begin{pmatrix} 42 \end{pmatrix}.$$

即可作为反例。

加入这个条件之后，B^{-} 仍不一定是对称矩阵，从而无法保证 $AB^{-}A$ 是对称矩阵，偏序关系无从谈起。

(ii)

$\square$

11. 举例说明：存在这样的矩阵 Σ，Σ 非半正定，但可以找到正交阵 $(P\ Q)$，使得 $P'\Sigma P = \Lambda_r\,, Q'\Sigma Q = 0$。

证明. 令

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

容易验证，矩阵 Σ 的特征值为 0 和 1，$(P\ Q)$ 为正交阵且 $P'\Sigma P = 1\,, Q'\Sigma Q = 0$。 $\square$

12. 设矩阵 $A\,,B$ 均为半正定矩阵，且 $A \leq B$。证明：

   (i) $\mathrm{tr}(A) \leq \mathrm{tr}(B)$；

   (ii) 矩阵 A 的最大特征值不大于矩阵 B 的最大特征值；

   (iii) 矩阵 A 的最小特征值不大于矩阵 B 的最大特征值；

(iv) $|A| \le |B|$；

(v) $\mathcal{M}(A) \subset \mathcal{M}(B)$；

(vi) 设 P_A, P_B 分别是 A, B 的正交投影矩阵，则 $P_A \le P_B$。

证明. (i) 由 $A \le B$ 知 $\forall x \in \mathbb{R}^m$，有 $x'Ax \le x'Bx$。从而将 x 取遍 ϵ_i，$i = 1, 2, \cdots, m$，就得到 A 对角线元素的值均不大于 B 对角线元素的值。因此 $\operatorname{tr}(A) \le \operatorname{tr}(B)$。

(ii) 易见

$$\lambda_{\max}(A) = \max_{x'x \neq 0} \frac{x'Ax}{x'x} \le \max_{x'x \neq 0} \frac{x'Bx}{x'x} = \lambda_{\max}(B)$$

(iii) 同样地，有

$$\lambda_{\min}(A) = \min_{x'x \neq 0} \frac{x'Ax}{x'x} \le \min_{x'x \neq 0} \frac{x'Bx}{x'x} = \lambda_{\min}(B)$$

(iv) 不妨设矩阵 A, B 均正定。由 $A \le B$ 知 $\forall x \in \mathbb{R}^m$ 且 $x \neq 0$，有 $0 < x'Ax \le x'Bx$。从而

$$\begin{aligned} 1 &\ge \frac{x'Ax}{x'Bx} \\ &= \frac{y'B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}y}{y'y} \qquad (y = B^{\frac{1}{2}}x) \end{aligned}$$

因此 $\lambda_{\max}(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}) \le 1$。又易见矩阵 $B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}$ 为正定矩阵，从而其特征值介于 0 和 1 之间（不包含 0）。因此 $|B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}| \le 1$，即 $|A| \le |B|$。

(v) 对 $x \in \mathcal{M}(B)^{\perp}$，有

$$\begin{aligned} Bx = 0 \quad &\Rightarrow x'Bx = 0 \\ &\Rightarrow x'Ax \le x'Bx = 0 \\ &\Rightarrow x'Ax = 0 \\ &\Rightarrow (A^{\frac{1}{2}}x)'(A^{\frac{1}{2}}x) = 0 \\ &\Rightarrow (A^{\frac{1}{2}}x) = 0 \\ &\Rightarrow Ax = 0 \\ &\Rightarrow \mathcal{M}(B)^{\perp} \subset \mathcal{M}(A)^{\perp} \end{aligned}$$

从而 $\mathcal{M}(A) \subset \mathcal{M}(B)$。

(vi) 对 $\forall \xi \in \mathbb{R}^m$，存在 $\xi_1 \in \mathcal{M}(A)$ 和 $\xi_2 \in \mathcal{M}(A)^\perp$ 使得 $\xi = \xi_1 + \xi_2$。从而

$$\xi' P_A \xi = \xi' P_A P_A \xi = (P_A \xi)'(P_A \xi) = \xi_1' \xi_1$$

于是

$$\begin{aligned}
\xi' P_B \xi &= \xi_1' P_B \xi_1 + \xi_1' P_B \xi_2 + \xi_2' P_B \xi_1 + \xi_2' P_B \xi_2 \\
&= (P_B \xi)'(P_B \xi) + (P_B \xi_1)' \xi_2 + \xi_2' (P_B \xi_1) + \xi_2' P_B \xi_2 \\
&= \xi_1' \xi_1 + \xi_1 \text{‘’} \xi_2 + \xi_2' \xi_1 + \xi_2' P_B \xi_2 \\
&= \xi_1' \xi_1 + \xi_2' P_B \xi_2 \\
&\geq \xi_1' \xi_1 = \xi' P_A \xi
\end{aligned}$$

从而 $P_A \leq P_B$。

□

13. 设矩阵 $A\,,B$ 均为半正定矩阵，且 $\mathcal{M}(A) \subset \mathcal{M}(B)$。举例说明 $A \leq B$ 未必成立。

证明. 令 $A = \mathrm{diag}(1\,,3\,,0\,,0)$,$B = \mathrm{diag}(1\,,1\,,1\,,0)$，则易见 A 每一列都可由 B 线性表出，从而 $\mathcal{M}(A) \subset \mathcal{M}(B)$。取向量 $x = (0\,,1\,,0\,,0)'$，则 $x'Ax > x'Bx$，即 $A \leq B$ 不成立。

事实上,假设命题成立,则根据对称性可知 $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(B) \implies \forall x, x'Ax = x'Bx \implies A = B$。为了构造反例，注意到所有满秩矩阵的列空间均为 $\mathbb{R}^n$，因此只需找两个不同的满秩矩阵即可。 □