数值计算导论
数值分析

计 72 谢兴宇 2017011326

June 2019

目录

1 第 1 题

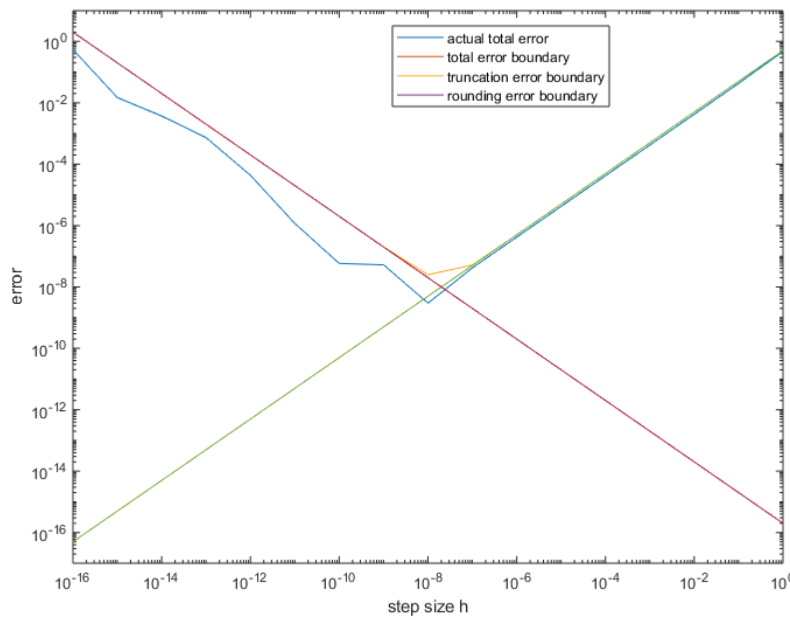

图 1: 不同步长取值对应的差商近似导数的误差

在步长 $h < 10^{-8}$ 时，舍入误差占主导地位；在步长 $h > 10^{-8}$ 时，截断误差占主导地位。

```
% 关键代码
for i = 0: n
    h = 10 ^ -i;
    x(i+1) = h;
    y(i+1) = abs((sin(1 + h) - sin (1)) / h - cos(1));
    y1(i+1) = M*h/2 + 2*epsilon/h;
    yt(i+1) = M*h/2;
    yr(i+1) = 2*epsilon/h;
end
```

2 第 3 题

2.1 第 1 小题

使用 IEEE 单精度浮点数计算，当 $n \geq 2097152$ 时，$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$，此时，$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx 15.4037$。

根据定理 1.6 估计：

$$n \geq 2/(\epsilon_{\mathrm{mach}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}) \tag{1}$$

利用 Euler-Maschernoi 常数估计调和级数：

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \approx \ln n + \gamma$$

对于 IEEE 单精度浮点数而言，机器精度 $\epsilon_{\mathrm{mach}} = 2^{-24}$。

代入式 1可得，$n \geq 2209629$。

实验结果与理论分析大概有 10% 的误差。

```
% 关键代码
while sum ~= presum
    n = n + 1;
    presum = sum;
    sum = sum + single(1/n);
end
```

2.2 第 2 小题

使用双精度浮点数计算 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx 16.1333$, 其中 $n = 2097152$。

IEEE 单精度浮点数计算结果与 IEEE 双精度浮点数计算结果有 0.7296。

2.3 第 3 小题

利式用 1估算，当 $n \approx 5.2265 \times 10^{14}$ 时，求和结果不再变化。

通过测速，在当前实验的计算机上，累加 $\sum_{n=1}^{10^7} \frac{1}{n}$ 需要大约 1.702 s。这样，若累加调和级数直到求和结果不再变化，大概需要 8.8955×10^{14} s。