

第一章习题

1. 证明若 $2|n, 3|n, 5|n$, 则 $30|n$ 。
2. 证明若 a 是整数, 则 $3|a^3 - a$ 。
3. 证明任意三个连续的整数的乘积都能被6整除。
4. 证明每个奇整数的平方具有形式 $8a + 1$ 。
5. 利用 Eratosthenes 筛法求出 150 以内的所有素数, 要求给出计算过程。
6. 对于下列整数 a, b 运用带余除法, 分别求出以 a 除 b 所得的商和余数。
 - (i) $a = 17, b = 35$;
 - (ii) $a = 7, b = -58$ 。
7. 利用广义欧几里得除法计算两个整数 $a = 2295, b = 4471$ 的最大公因数 (a, b) , 并求出整数 s, t , 使得 $(a, b) = sa + tb$ 。
8. 计算 $[2295, 4471]$ 。
9. 利用因子分解定理求解整数 30, 90, 114, 243 的最大公因数与最小公倍数。
10. 求以下整数对的最大公因数、最小公倍数。
 - (i) $(2n + 1, 2n - 1)$
 - (ii) $(2n, 2(n + 1))$
11. 设 a, b 为正整数, 证明若 $[a, b] = (a, b)$, 则 $a = b$ 。
12. 设 a, b 是两个正整数, 证明 $(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{(a, b)} - 1$ 。
13. 设 n 为合数, 证明 n 必有素因子 p 满足 $p \leq \sqrt{n}$ 。
14. 问是否存在这样的整数 a, b, c , 使得 $a|bc$, 但 $a \nmid b, a \nmid c$, 举两例说明。若无, 给出证明。
15. 证明对于任意给定的正整数 k , 必有连续 k 个正整数都是合数。