特殊相対論

1　電磁波

1.1　maxwell 方程式

マクスウェル方程式の結果から電場と磁場は次の波動方程式を満たす。

$$\Box \boldsymbol{E} = 0 \tag{1}$$

$$\Box \boldsymbol{B} = 0 \tag{2}$$

ただし、$\Box \equiv \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ であり、ダランベール演算子、ダランベルシアンなどと呼ばれる。

1.2　ガリレイ変換

$$\begin{aligned} x &= x' + xt \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned} \tag{3}$$

の変換をガリレイ変換という。

2　ローレンツ変換

特殊相対性理論の基本法則

1、特殊相対性原理
2、光速度不変原理

これらの条件はダランベルシアンが座標変換に対して不変であることと同じ。この座標変換のことをローレンツ変換という。
ちなみに、ダランベルシアンはガリレイ変換に対して不変ではない。このような変換を考えていくが、x 方向だけの変換を考える。

$$
\begin{aligned}
x' &= ax + bt \\
t' &= dx + et
\end{aligned} \tag{4}
$$

x 軸方向に速度 v で動く変換を考えて、$b = -av$ とすると以下のように書ける。

$$
x' = a(x - vt) \tag{5}
$$

$$
t' = dx + et \tag{6}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t'} = a\frac{\partial}{\partial x'} + d\frac{\partial}{\partial t'} \tag{7}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} = -av\frac{\partial}{\partial x'} + e\frac{\partial}{\partial t'} \tag{8}
$$

今、x 方向のみ考えたダランベルシアンは

$$
\Box_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{9}
$$

より

$$
\begin{aligned}
\Box_x &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(a\frac{\partial}{\partial x'} + d\frac{\partial}{\partial t'}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(-av\frac{\partial}{\partial x'} + e\frac{\partial}{\partial t'}\right)^2 \\
&= a^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + 2a\left(d + \frac{ve}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} + \left(d^2 - \frac{e^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t'^2}
\end{aligned} \tag{10}
$$

これがダランベルシアンの形になっているためには次の式が成立していればよい。

$$
a^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1 \tag{11}
$$

$$
a\left(d + \frac{ve}{c^2}\right) = 0 \tag{12}
$$

$$
\left(d^2 - \frac{e^2}{c^2}\right) = -\frac{1}{c^2} \tag{13}
$$

(11) から、$a = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ がわかる。また、(12) から、$d = -\dfrac{ve}{c^2}$ がわかる。

(13) に上の結果を代入すると、$e = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ である。これらの結果を x'、t' に代入すると

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{14}$$

$$t' = \frac{t - \dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{15}$$

(14)(15) のことをローレンツ変換と呼ぶ。$\left|v\right| < \left|c\right|$ の時、ガリレイ変換と一致する。行列形式で書くと以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\dfrac{\gamma v}{c^2} & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{16}$$

ただし、$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ となっている。