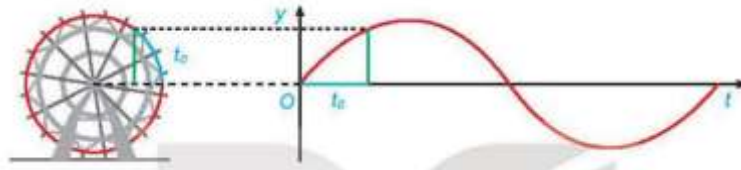


CHƯƠNG I

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC



Chủ đề 1: GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

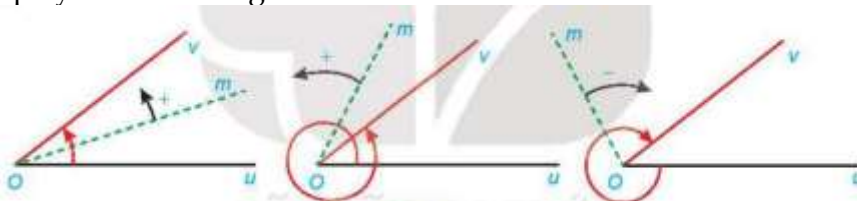
I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. GÓC LƯỢNG GIÁC

a. Góc lượng giác

Trong mặt phẳng, cho hai tia Ou, Ov . Xét tia Om cùng nằm trong mặt phẳng này. Nếu tia Om quay quanh điểm O , theo một chiều nhất định từ Ou đến Ov , thì ta nói nó quét **một góc lượng giác** với **tia đầu** Ou , **tia cuối** Ov và kí hiệu (Ou, Ov)

Quy ước: Chiều quay ngược với chiều quay của kim đồng hồ là **chiều dương**, chiều quay cùng với chiều quay của kim đồng hồ là **chiều âm**.



b. Số đo góc lượng giác

Khi tia Om quay góc α° thì ta nói góc lượng giác mà tia đó quét nên có số đo α° . **Số đo của góc lượng giác** có tia đầu Ou , tia cuối Ov được kí hiệu là $\text{sd}(Ou, Ov)$

Nhận xét:

Mỗi góc lượng giác gốc O được xác định bởi tia đầu Ou , tia cuối Ov và số đo của nó

Chú ý:

+) Cho hai tia Ou, Ov thì có vô số góc lượng giác tia đầu Ou , tia cuối Ov . Mỗi góc lượng giác như thế đều kí hiệu là (Ou, Ov) .

+) Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu Ou , tia cuối Ov , sai khác nhau một bội nguyên của 360° .

c. Hệ thức Chasles

Với ba tia Ou, Ov, Ow bất kì, ta có: $\text{sd}(Ou, Ov) + \text{sd}(Ov, Ow) = \text{sd}(Ou, Ow) + k360^\circ, (k \in \mathbb{Z})$

Chú ý:

Mỗi góc lượng giác $\alpha + \frac{k2\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$ thì có n điểm phân biệt biểu diễn trên đường tròn lượng giác.

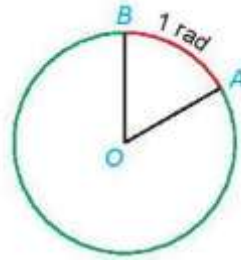
2. ĐƠN VỊ ĐO GÓC VÀ ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

a. Đơn vị đo góc và cung tròn

Đơn vị độ: Để đo góc, ta dùng đơn vị độ. Ta đã biết: Góc 1° bằng $\frac{1}{180}$ góc bẹt.

Đơn vị độ được chia thành những đơn vị nhỏ hơn: $1^\circ = 60'; 1' = 60''$.

Đơn vị radian: Cho đường tròn (O) tâm O , bán kính R và một cung AB trên (O) .



Ta nói cung tròn AB có số đo bằng 1 radian nếu độ dài của nó đúng bằng bán kính R . Khi đó, ta cũng nói rằng góc AOB có số đo bằng 1 radian và viết $AOB = 1 \text{ rad}$

Quan hệ giữa độ và radian:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$\text{và } 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ$$

Chú ý:

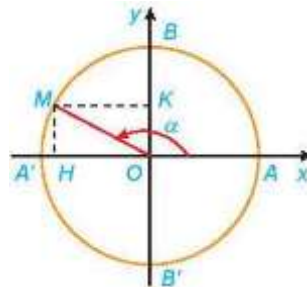
Độ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

b. Độ dài cung tròn

Một cung của đường tròn bán kính R và có số đo α rad thì có độ dài $l = R\alpha$

3. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

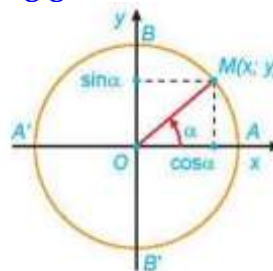
a. Đường tròn lượng giác



+) Đường tròn lượng giác là đường tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính bằng 1, được định hướng và lấy điểm $A(1;0)$ làm điểm gốc của đường tròn.

+) Điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo α (độ hoặc radian) là điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $sđ(OA, OM) = \alpha$

b. Các giá trị lượng giác của góc lượng giác



Giả sử $M(x; y)$ là điểm trên đường tròn lượng giác, biểu diễn góc lượng giác có số đo α , ta có:

+) Hoành độ x của điểm M được gọi là cosin của α , kí hiệu là $\cos \alpha \longrightarrow \cos \alpha = x$.

+) Tung độ y của điểm M được gọi là sin của α , kí hiệu là $\sin \alpha \longrightarrow \sin \alpha = y$.

+) Nếu $\cos \alpha \neq 0$, tỉ số $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ được gọi là tang của α , kí hiệu là $\tan \alpha$.

$$\longrightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{x}, (x \neq 0).$$

+) Nếu $\sin \alpha \neq 0$, tỉ số $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ được gọi là côtang của α , kí hiệu là $\cot \alpha$.

$$\longrightarrow \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{x}{y}, (y \neq 0).$$

Chú ý:

+) Ta còn gọi trục tung là trục sin, trục hoành là trục cosin.

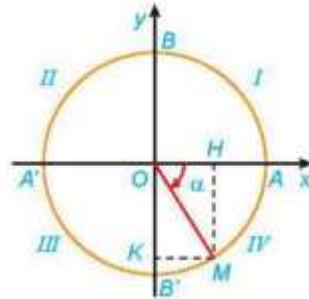
+) $\sin \alpha, \cos \alpha$ xác định với mọi giá trị của α và ta có:

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1; -1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha; \cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

+) $\tan \alpha$ xác định khi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\cot \alpha$ xác định khi $\alpha \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

+) Dấu của các giá trị lượng giác của một góc lượng giác:



Góc phần tư	I	II	III	IV
Giá trị lượng giác				
$\sin \alpha$	+	-	-	+
$\cos \alpha$	+	+	-	-
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-


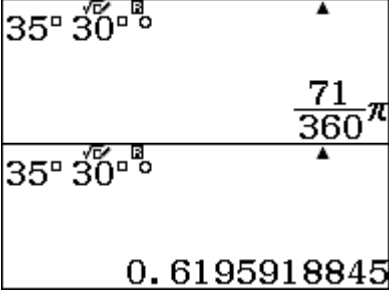
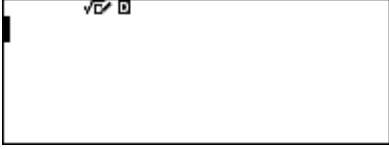
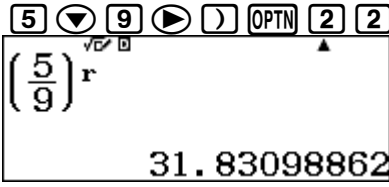
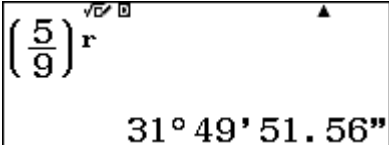
c. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

Góc α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định
$\cot \alpha$	Không xác định	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

d. Sử dụng máy tính cầm tay để đổi số đo góc và tìm giá trị lượng giác của góc

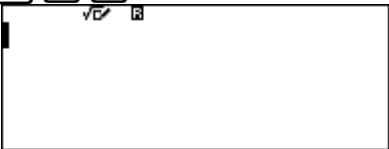
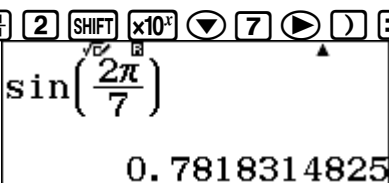
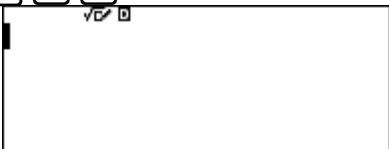
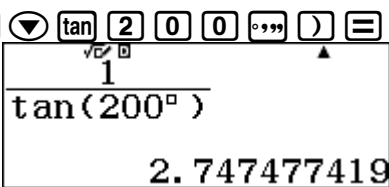
Kỹ thuật 1: Đổi số đo góc

Ví dụ 1:

<p>a) Đổi $35^\circ 30'$ sang đơn vị rad; Bước 1: <i>Hiện thị chế độ rad</i> $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{MENU}} \boxed{2} \boxed{2}$</p>  <p>Bước 2: <i>Nhập $35^\circ 30'$</i> $\boxed{3} \boxed{5} \boxed{\text{° ' "}} \boxed{3} \boxed{0} \boxed{\text{° ' "}} \boxed{\text{OPTN}} \boxed{2} \boxed{1} \boxed{=}$</p> 	<p>b) Đổi $\frac{5}{9}$ sang đơn vị độ. Bước 1: <i>Hiện thị chế độ độ</i> $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{MENU}} \boxed{2} \boxed{1}$</p>  <p>Bước 2: <i>Nhập $\frac{5}{9}$</i> $\boxed{(} \boxed{\text{=}} \boxed{5} \boxed{\text{° ' "}} \boxed{9} \boxed{\text{° ' "}} \boxed{\text{OPTN}} \boxed{2} \boxed{2} \boxed{=}$</p>  <p>$\boxed{\text{° ' "}}$</p> 
--	--

Kỹ thuật 2: Tính các giá trị lượng giác của góc

Ví dụ 2:

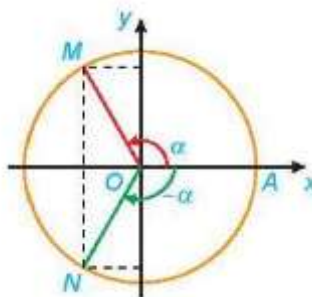
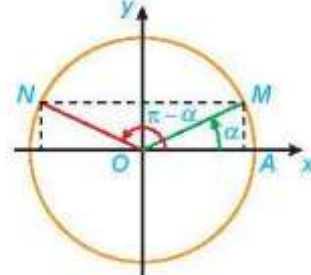
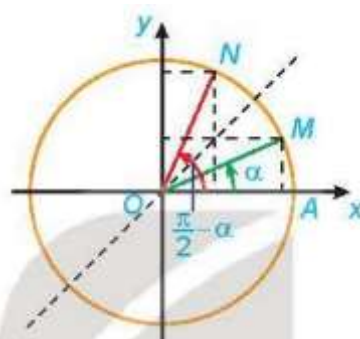
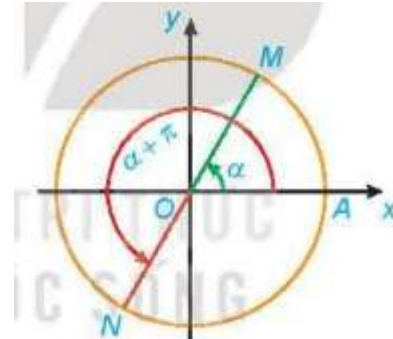
<p>a) Tính $\sin \frac{2\pi}{7}$; Bước 1: <i>Hiện thị chế độ rad</i> $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{MENU}} \boxed{2} \boxed{2}$</p>  <p>Bước 2: <i>Nhập $\sin \frac{2\pi}{7}$</i> $\boxed{\text{sin}} \boxed{\text{=}} \boxed{2} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\times 10^x} \boxed{\text{° ' "}} \boxed{7} \boxed{\text{° ' "}} \boxed{\text{OPTN}} \boxed{2} \boxed{1} \boxed{=}$</p> 	<p>b) Tính $\cot 200^\circ$. Bước 1: <i>Hiện thị chế độ độ</i> $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{MENU}} \boxed{2} \boxed{1}$</p>  <p>Bước 2: <i>Nhập $\cot 200^\circ = \frac{1}{\tan 200^\circ}$</i> $\boxed{\text{=}} \boxed{1} \boxed{\text{° ' "}} \boxed{\text{tan}} \boxed{2} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{\text{° ' "}} \boxed{\text{OPTN}} \boxed{2} \boxed{2} \boxed{=}$</p> 
--	---

4. QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

a. Các công thức lượng giác cơ bản

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$
$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$	$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \left(\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right)$

b. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

<p>1. Hai góc đối nhau: α và $-\alpha$ (cos đối)</p>  <p> $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha;$ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha;$ </p> <p> $\cos(-\alpha) = \cos \alpha;$ $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha.$ </p>	<p>2. Hai góc bù nhau: α và $\pi - \alpha$ (sin bù)</p>  <p> $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha;$ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha;$ </p> <p> $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha;$ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha.$ </p>
<p>3. Hai góc phụ nhau: α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$ (chéo)</p>  <p> $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha;$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha;$ </p> <p> $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha;$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha.$ </p>	<p>4. Hai góc hơn kém nhau π: α và $\alpha + \pi$ (tan và cotang)</p>  <p> $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha;$ $\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha;$ </p> <p> $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha;$ $\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha.$ </p>

Lưu ý: Góc hơn kém $\frac{\pi}{2}$ (α và $\frac{\pi}{2} + \alpha$)

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$
---	--

II. BÀI TẬP MINH HỌA

- Câu 1:** Cho $\text{sđ}(Ou, Ov) = \alpha$ và $\text{sđ}(Ou', Ov') = \beta$. Chứng minh rằng hai góc hình học $uOv, u'Ov'$ bằng nhau khi và chỉ khi hoặc $\beta - \alpha = k2\pi$ hoặc $\beta + \alpha = k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- Câu 2:** Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo $-\frac{\pi}{7}$. Trong các số $-\frac{29\pi}{7}; -\frac{22}{7}; \frac{6\pi}{7}; \frac{41\pi}{7}$, những số nào là số đo của một góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho?
- Câu 3:** Tìm số đo α của góc lượng giác (Ou, Ov) với $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, biết một góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối với góc đó có số đo là:

a) $\frac{33\pi}{4}$. b) $-\frac{291983\pi}{3}$. c) 30.

Câu 4: a) Đổi số đo của các góc sau ra radian: $72^\circ, 600^\circ, -37^\circ 45' 30''$.

b) Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\frac{5\pi}{18}, \frac{3\pi}{5}, -4$.

Câu 5: Một đường tròn có bán kính $36m$. Tìm độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo là

a) $\frac{3\pi}{4}$. b) 51° . c) $\frac{1}{3}$.

Câu 6: Biểu diễn các góc(cung) lượng giác trên đường tròn lượng giác có số đo sau:

a) $\frac{\pi}{4}$. b) $-\frac{11\pi}{2}$. c) 120° . d) -765° .

Câu 7: Trên đường tròn lượng giác gốc A . Biểu diễn các góc lượng giác có số đo sau (với k là số nguyên tùy ý).

$$x_1 = k\pi; \quad x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi; \quad x_3 = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

Các góc lượng giác trên có thể viết dưới dạng công thức duy nhất nào?

Câu 8: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin \frac{7\pi}{6} + \cos 9\pi + \tan \left(-\frac{5\pi}{4} \right) + \cot \frac{7\pi}{2}$; b) $B = \frac{1}{\tan 368^\circ} + \frac{2 \sin 2550^\circ \cos(-188^\circ)}{2 \cos 638^\circ + \cos 98^\circ}$;

c) $C = \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 65^\circ$; d) $D = \tan^2 \frac{\pi}{8} \cdot \tan \frac{3\pi}{8} \cdot \tan \frac{5\pi}{8}$.

Câu 9: Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xác định dấu của các biểu thức sau:

a) $\sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)$; b) $\tan \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right)$;
c) $\cos \left(-\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \cdot \tan(\pi - \alpha)$; d) $\sin \frac{14\pi}{9} \cdot \cot(\pi + \alpha)$.

Câu 10: Chứng minh các đẳng thức sau: (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $\cos^4 x + 2 \sin^2 x = 1 + \sin^4 x$;

b) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x} = \cot^3 x + \cot^2 x + \cot x + 1$;

c) $\frac{\cot^2 x - \cot^2 y}{\cot^2 x \cdot \cot^2 y} = \frac{\cos^2 x - \cos^2 y}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y}$;

d) $\sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x} = 3 \tan \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \tan \left(\frac{\pi}{6} - x \right)$;

Câu 11: Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:

a) $\sin \left(\frac{A+B}{2} \right) = \cos \frac{C}{2}$;

b) $\frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos \left(\frac{A+2B+C}{2} \right)} - \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin \left(\frac{A+2B+C}{2} \right)} = \tan A \cdot \cot(B+C)$.

Câu 12: Rút gọn biểu thức: $A = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - a\right) + \cos(13\pi + a) - 3\sin(a - 5\pi)$.

Câu 13: Rút gọn biểu thức $M = \sin\left(7\pi + \alpha\right) + \cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) - \cot(3\pi - \alpha) + \tan\left(\frac{9\pi}{2} - \alpha\right) + 2\tan\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right)$.

Câu 14: Đơn giản các biểu thức sau: (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $A = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$;

b) $B = \frac{\sin(900^\circ + x) - \cos(450^\circ - x) + \cot(1080^\circ - x) + \tan(630^\circ - x)}{\cos(450^\circ - x) + \sin(x - 630^\circ) - \tan(810^\circ + x) - \tan(810^\circ - x)}$;

c) $C = \sqrt{2} - \frac{1}{\sin(x + 2013\pi)} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}}$ với $\pi < x < 2\pi$.

Câu 15: Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x .

a) $A = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x + 2}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1}$;

b) $B = \frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} - \frac{2 + 2\cot^2 x}{(\tan x - 1)(\tan^2 x + 1)}$;

c) $C = \sqrt{\sin^4 x + 6\cos^2 x + 3\cos^4 x} + \sqrt{\cos^4 x + 6\sin^2 x + 3\sin^4 x}$.

Câu 16: Tính giá trị lượng giác còn lại của góc α biết:

a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

b) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

c) $\tan \alpha = -2\sqrt{2}$ và $0 < \alpha < \pi$;

d) $\cot \alpha = -\sqrt{2}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Câu 17: a) Tính giá trị lượng giác còn lại của góc α biết $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ và $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$.

b) Cho $3\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $A = 2\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$.

Câu 18: a) Cho $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $A = \frac{\tan \alpha + 3\cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.

b) Cho $\tan \alpha = 3$. Tính $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3\cos^3 \alpha + 2\sin \alpha}$.

c) Cho $\cot \alpha = \sqrt{5}$. Tính $C = \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha$.

Câu 19: Cho $\tan \alpha - 4\cot \alpha = 3$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính giá trị biểu thức $M = \frac{2\sin \alpha - \tan \alpha}{\cos \alpha + \cot \alpha}$.

Câu 20: Cho $\tan \alpha + \cot \alpha = m$. Tính giá trị biểu thức $A = \tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha$ theo tham số thực m .

Câu 21: Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = m$, $m \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Tính các giá trị của $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$ theo m .

Câu 22: Biết $\sin x + \cos x = m$.

a) Tính theo m giá trị $\sin x \cos x$ và $|\sin^4 x - \cos^4 x|$.

b) Chứng minh rằng $|m| \leq \sqrt{2}$.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 23: Đường tròn lượng giác là đường tròn định hướng tâm O có bán kính bằng

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

- Câu 24:** Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. Mỗi đường tròn là một đường tròn định hướng.
B. Mỗi đường tròn đã chọn một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng.
C. Mỗi đường tròn đã chọn một chiều chuyển động và một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng.
D. Mỗi đường tròn đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương và chiều ngược lại được gọi là chiều âm là một đường tròn định hướng.
- Câu 25:** Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. Chỉ một cung lượng giác cố điểm đầu là A , điểm cuối là B .
B. Đúng hai cung lượng giác cố điểm đầu là A , điểm cuối là B .
C. Đúng bốn cung lượng giác cố điểm đầu là A , điểm cuối là B .
D. Vô số cung lượng giác cố điểm đầu là A , điểm cuối là B .
- Câu 26:** Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. Mỗi cung lượng giác AB xác định một góc lượng giác tia đầu OA tia cuối OB .
B. Mỗi cung lượng giác AB xác định hai góc lượng giác tia đầu OA tia cuối OB .
C. Mỗi cung lượng giác AB xác định bốn góc lượng giác tia đầu OA tia cuối OB .
D. Mỗi cung lượng giác AB xác định vô số góc lượng giác tia đầu OA tia cuối OB .
- Câu 27:** Trên đường tròn lượng giác với điểm gốc là A , cung AN , có điểm đầu là A , điểm cuối là N .
A. chỉ có một số đo. **B.** có đúng hai số đo.
C. có đúng 4 số đo. **D.** có vô số số đo.
- Câu 28:** Góc lượng giác tạo bởi cung lượng giác. Trên đường tròn cung có số đo $1rad$ là
A. cung có độ dài bằng 1. **B.** cung tương ứng với góc ở tâm 60° .
C. cung có độ dài bằng đường kính. **D.** cung có độ dài bằng nửa đường kính.
- Câu 29:** Trên đường tròn lượng giác với điểm gốc A , cung lượng giác có số đo 55° có điểm đầu A xác định
A. chỉ có một điểm cuối M . **B.** đúng hai điểm cuối M .
C. đúng 4 điểm cuối M . **D.** vô số điểm cuối M .
- Câu 30:** Có bao nhiêu điểm M trên đường tròn định hướng gốc A thỏa mãn $sđ AM = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$?
A. 3. **B.** 12. **C.** 4. **D.** 6.
- Câu 31:** Một cung tròn có độ dài bằng 2 lần bán kính. Số đo radian của cung tròn đó bằng
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.
- Câu 32:** Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $1 rad = 1^\circ$. **B.** $1 rad = 60^\circ$.
C. $1 rad = 180^\circ$. **D.** $1 rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.
- Câu 33:** Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn lượng giác có gốc là A , các đỉnh lấy theo thứ tự đó và các điểm B, C có tung độ dương. Khi đó, góc lượng giác có tia đầu OA , tia cuối OC bằng:
A. 120° . **B.** -240° .
C. 120° hoặc -240° . **D.** $120^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
- Câu 34:** Góc có số đo 108° đổi ra radian là

- A. $\frac{3\pi}{5}$. B. $\frac{\pi}{10}$. C. $\frac{3\pi}{2}$. D. $\frac{\pi}{4}$.
- Câu 35:** Đổi số đo góc 105° sang radian.
- A. $\frac{5\pi}{12}$. B. $\frac{7\pi}{12}$. C. $\frac{9\pi}{12}$. D. $\frac{5\pi}{8}$.
- Câu 36:** Góc có số đo $\frac{2\pi}{5}$ đổi sang độ là:
- A. 240° . B. 135° . C. 72° . D. 270° .
- Câu 37:** Góc có số đo $\frac{\pi}{9}$ đổi sang độ là:
- A. 15° . B. 18° . C. 20° . D. 25° .
- Câu 38:** Góc $63^\circ 48'$ gần bằng
- A. $1,108rad$. B. $1,107rad$. C. $1,114rad$. D. $1,113rad$.
- Câu 39:** Cho $a = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Tìm k để $10\pi < a < 11\pi$.
- A. $k = 4$. B. $k = 6$. C. $k = 7$. D. $k = 5$.
- Câu 40:** Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và một trục (ℓ) đi qua O . Xác định số đo của các góc giữa tia OA với trục (ℓ) , biết trục (ℓ) đi qua đỉnh A của hình vuông.
- A. $180^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. B. $90^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
C. $-90^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. D. $k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
- Câu 41:** Biết OMB' và ONB' là các tam giác đều. Cung α có điểm đầu là A và điểm cuối trùng với B hoặc M hoặc N . Tính số đo của α .
- A. $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. B. $\alpha = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.
C. $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. D. $\alpha = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.
- Câu 42:** Trong mặt phẳng định hướng cho tia Ox và hình vuông $OABC$ vẽ theo chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ, biết $sd(Ox, OA) = 30^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$, $sd(Ox, BC)$ bằng:
- A. $210^\circ + h360^\circ, h \in \mathbb{Z}$. B. $135^\circ + h360^\circ, h \in \mathbb{Z}$.
C. $-210^\circ + h360^\circ, h \in \mathbb{Z}$. D. $175^\circ + h360^\circ, h \in \mathbb{Z}$.
- Câu 43:** Trên đường tròn với điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 60° . Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua trục Oy , số đo cung AN là
- A. 120° . B. -240° .
C. -120° hoặc 240° . D. $120^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
- Câu 44:** Cho $(Ox, Oy) = 22^\circ 30' + k360^\circ$. Tính k để $(Ox, Oy) = 1822^\circ 30'$.
- A. $k \in \emptyset$. B. $k = 3$. C. $k = -5$. D. $k = 5$.
- Câu 45:** Cho số đo cung $(Ou, Ov) = 25^\circ + k360^\circ, (k \in \mathbb{Z})$. Với giá trị nào của k thì $(Ou, Ov) = -1055^\circ$?
- A. $k = -1$. B. $k = 2$. C. $k = -3$. D. $k = 4$.
- Câu 46:** Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là
- A. 30° . B. 40° . C. 50° . D. 60° .
- Câu 47:** Trên đường tròn bán kính $r = 5$, độ dài của cung đo $\frac{\pi}{8}$ là

A. $l = \frac{\pi}{8}$. B. $l = \frac{3\pi}{8}$. C. $l = \frac{5\pi}{8}$. D. $l = \frac{\pi}{4}$.

Câu 48: Trên đường tròn bán kính $r = 15$, độ dài của cung có số đo 50° là

A. $l = 750$. B. $l = 15 \cdot \frac{180}{\pi}$. C. $l = \frac{15\pi}{180}$. D. $l = \frac{25\pi}{6}$.

Câu 49: Cho bốn cung (trên một đường tròn định hướng): $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{25\pi}{3}$, $\delta = \frac{19\pi}{6}$. Các cung nào có điểm cuối trùng nhau?

A. α và β ; γ và δ . B. β và γ ; α và δ . C. α, β, γ . D. β, γ, δ .

Câu 50: Cho góc lượng giác (OA, OB) có số đo bằng $\frac{\pi}{5}$. Hỏi trong các số sau, số nào là số đo của một góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối?

A. $\frac{6\pi}{5}$. B. $-\frac{11\pi}{5}$. C. $\frac{9\pi}{5}$. D. $\frac{31\pi}{5}$.

Câu 51: Trên đường tròn lượng giác gốc A cho các cung có số đo:

I. $\frac{\pi}{4}$. II. $-\frac{7\pi}{4}$. III. $\frac{13\pi}{4}$. IV. $-\frac{71\pi}{4}$.

Hỏi cung nào có điểm cuối trùng nhau?

A. Chỉ I và II. B. Chỉ I, II và III. C. Chỉ I, II và IV. D. Chỉ II, III và IV

Câu 52: Cho góc α thỏa mãn $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\sin \alpha < 0$. B. $\cos \alpha \geq 0$. C. $\tan \alpha < 0$. D. $\cot \alpha > 0$.

Câu 53: Cho góc α thỏa mãn $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\tan \alpha > 0$; $\cot \alpha > 0$. B. $\tan \alpha < 0$; $\cot \alpha < 0$. C. $\tan \alpha > 0$; $\cot \alpha < 0$. D. $\tan \alpha < 0$; $\cot \alpha > 0$.

Câu 54: Cho $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$. Kết quả đúng là

A. $\tan \alpha > 0$; $\cot \alpha > 0$. B. $\tan \alpha < 0$; $\cot \alpha < 0$. C. $\tan \alpha > 0$; $\cot \alpha < 0$. D. $\tan \alpha < 0$; $\cot \alpha > 0$.

Câu 55: Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Kết quả nào sau đây sai?

A. $\cos(-\alpha) < 0$. B. $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) > 0$. C. $\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) < 0$. D. $\tan(\pi + \alpha) < 0$.

Câu 56: Cho α là một góc bất kì. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$. B. $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$.
C. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. D. $\tan \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \left(\alpha \neq k\pi \right)$.

Câu 57: Cho góc lượng giác α bất kì. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. B. $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = 1$.
C. $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$. D. $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 2$.

Câu 58: Kết quả nào cho ta tìm được góc α ?

A. $\begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{4} \\ \cos \alpha = \frac{3}{4} \end{cases}$ B. $\begin{cases} \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$ C. $\begin{cases} \sin \alpha = \frac{5}{13} \\ \cos \alpha = \frac{12}{13} \end{cases}$ D. $\begin{cases} \sin \alpha = 0.3 \\ \cos \alpha = 0.7 \end{cases}$

Câu 59: $\cos \alpha$ không thể bằng giá trị nào dưới đây?

- A. 1. B. 2. C. 0,2. D. -0,9.

Câu 60: Cho góc α thỏa mãn $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ và $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $P = \sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}$ bằng

- A. $\frac{4+\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{4-\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Câu 61: Cho $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ biết $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Tính $\cos \alpha$; $\tan \alpha$

- A. $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$; $\tan \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$. B. $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$; $\tan \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{15}$.
C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$; $\tan \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{15}$. D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$; $\tan \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$.

Câu 62: Cho $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$ ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$). Khi đó, $\tan \alpha$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{21}}{5}$. B. $-\frac{\sqrt{21}}{2}$. C. $-\frac{\sqrt{21}}{5}$. D. $\frac{\sqrt{21}}{3}$.

Câu 63: Tính giá trị biểu thức $P = \sin 30^\circ \cos 90^\circ + \sin 90^\circ \cos 30^\circ$.

- A. $P = 1$. B. $P = 0$. C. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $P = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.

Câu 64: $\cos 18^\circ - \cos 342^\circ$ bằng

- A. 1. B. 0. C. $2 \cos 18^\circ$. D. $-2 \cos 18^\circ$.

Câu 65: $2 \sin 27^\circ - \sin 153^\circ + \sin(-270^\circ) + \sin 333^\circ$ bằng

- A. 1. B. $2 \sin 27^\circ + 1$. C. 0. D. $\sin 27^\circ$.

Câu 66: Giá trị biểu thức $M = \tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ$ bằng

- A. 1. B. 2. C. -1. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 67: Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sai?

- A. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$. B. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$. C. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$. D. $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cot x$.

Câu 68: Cho α là một góc bất kì. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$. B. $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$.
C. $\tan(\pi + \alpha) = -\tan \alpha$. D. $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$.

Câu 69: Cho hai góc nhọn α và β phụ nhau. Hệ thức nào sau đây sai?

- A. $\sin \alpha = -\cos \beta$. B. $\cos \alpha = \sin \beta$. C. $\cos \beta = \sin \alpha$. D. $\cot \alpha = \tan \beta$.

Câu 70: Cho tam giác ABC bất kì. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $\sin \frac{A+C}{2} = \cos \frac{B}{2}$. B. $\cos \frac{A+C}{2} = \sin \frac{B}{2}$.

C. $\sin(A+B) = \sin C$.

D. $\cos(A+B) = \cos C$.

Câu 71: Biểu thức $M = \tan\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) + \cot\left(\frac{11\pi}{2} - \alpha\right) - \tan\left(\frac{15\pi}{2} + \alpha\right) - \cot\left(\frac{19\pi}{2} + \alpha\right)$ bằng

A. $\tan \alpha + \cot \alpha$

B. $2(\tan \alpha + \cot \alpha)$.

C. $2(\tan \alpha - \cot \alpha)$.

D. $\tan \alpha - \cot \alpha$

Câu 72: Cho $\tan x = 3$. Tính $P = \frac{2 \sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.

A. $P = \frac{3}{2}$.

B. $P = \frac{5}{4}$.

C. $P = 3$.

D. $P = \frac{2}{5}$.

Câu 73: Cho góc x thỏa mãn $\cot x = \frac{1}{2}$. Giá trị biểu thức $A = \frac{2}{\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x}$ bằng

A. 6.

B. 8.

C. 10.

D. 12.

Câu 74: Biết $\tan \alpha = 2$ và $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Giá trị $\sin \alpha + \cos \alpha$ bằng

A. $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

B. $1 - \sqrt{5}$.

C. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

D. $-\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Câu 75: Cho biểu thức $M = \tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ \cdot \tan 60^\circ \cdot \tan 70^\circ \cdot \tan 80^\circ$. Giá trị của M bằng

A. $M = 0$.

B. $M = 1$.

C. $M = 4$.

D. $M = 8$.

Câu 76: Cho $\sin a = \frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $A = \frac{\cot a - \tan a}{\tan a + 2 \cot a}$ bằng

A. $\frac{1}{9}$.

B. $\frac{7}{9}$.

C. $\frac{17}{81}$.

D. $\frac{7}{17}$.

Câu 77: Biểu thức $\sin^2 x \cdot \tan^2 x + 4 \sin^2 x - \tan^2 x + 3 \cos^2 x$ không phụ thuộc vào x và có giá trị bằng

A. 6.

B. 5.

C. 3.

D. 4.

Câu 78: Giá trị biểu thức $A = \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x}$ không phụ thuộc vào x và bằng

A. 1.

B. -1.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $-\frac{1}{4}$.

Câu 79: Giá trị biểu thức $A = \sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x$ bằng

A. $A = -1$.

B. $A = 1$.

C. $A = 4$.

D. $A = -4$.

Câu 80: Biểu thức $A = \sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x}$ có giá trị là

A. -3.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 81: Biểu thức $B = \frac{\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$ bằng

A. $\tan \alpha$.

B. $\tan^2 \alpha$.

C. $\tan^3 \alpha$.

D. $\tan^4 \alpha$.

Câu 82: Biểu thức $M = \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$ bằng

A. -2.

B. -1.

C. 1.

D. 2.