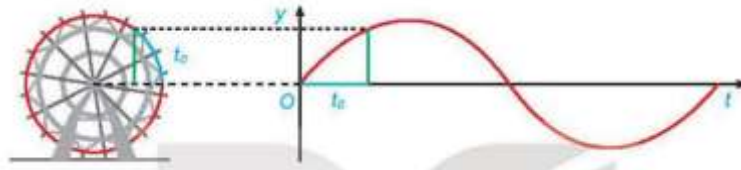


CHƯƠNG I

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC



Chủ đề 1: GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

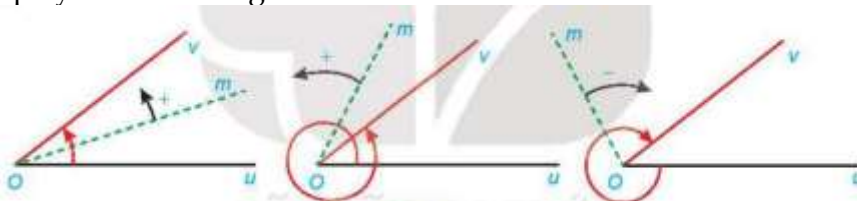
I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. GÓC LƯỢNG GIÁC

a. Góc lượng giác

Trong mặt phẳng, cho hai tia Ou, Ov . Xét tia Om cùng nằm trong mặt phẳng này. Nếu tia Om quay quanh điểm O , theo một chiều nhất định từ Ou đến Ov , thì ta nói nó quét **một góc lượng giác** với **tia đầu** Ou , **tia cuối** Ov và kí hiệu (Ou, Ov)

Quy ước: Chiều quay ngược với chiều quay của kim đồng hồ là **chiều dương**, chiều quay cùng với chiều quay của kim đồng hồ là **chiều âm**.



b. Số đo góc lượng giác

Khi tia Om quay góc α° thì ta nói góc lượng giác mà tia đó quét nên có số đo α° . **Số đo của góc lượng giác** có tia đầu Ou , tia cuối Ov được kí hiệu là $\text{sd}(Ou, Ov)$

Nhận xét:

Mỗi góc lượng giác gốc O được xác định bởi tia đầu Ou , tia cuối Ov và số đo của nó

Chú ý:

+) Cho hai tia Ou, Ov thì có vô số góc lượng giác tia đầu Ou , tia cuối Ov . Mỗi góc lượng giác như thế đều kí hiệu là (Ou, Ov) .

+) Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu Ou , tia cuối Ov , sai khác nhau một bội nguyên của 360° .

c. Hệ thức Chasles

Với ba tia Ou, Ov, Ow bất kì, ta có: $\text{sd}(Ou, Ov) + \text{sd}(Ov, Ow) = \text{sd}(Ou, Ow) + k360^\circ, (k \in \mathbb{Z})$

Chú ý:

Mỗi góc lượng giác $\alpha + \frac{k2\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$ thì có n điểm phân biệt biểu diễn trên đường tròn lượng giác.

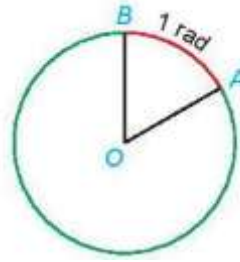
2. ĐƠN VỊ ĐO GÓC VÀ ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

a. Đơn vị đo góc và cung tròn

Đơn vị độ: Để đo góc, ta dùng đơn vị độ. Ta đã biết: Góc 1° bằng $\frac{1}{180}$ góc bẹt.

Đơn vị độ được chia thành những đơn vị nhỏ hơn: $1^\circ = 60'; 1' = 60''$.

Đơn vị radian: Cho đường tròn (O) tâm O , bán kính R và một cung AB trên (O) .



Ta nói cung tròn AB có số đo bằng 1 radian nếu độ dài của nó đúng bằng bán kính R . Khi đó, ta cũng nói rằng góc AOB có số đo bằng 1 radian và viết $AOB = 1 \text{ rad}$

Quan hệ giữa độ và radian:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$\text{và } 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ$$

Chú ý:

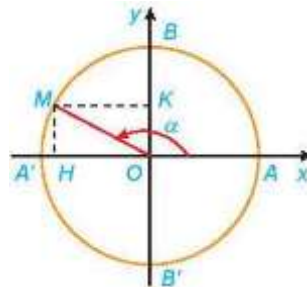
Độ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

b. Độ dài cung tròn

Một cung của đường tròn bán kính R và có số đo α rad thì có độ dài $l = R\alpha$

3. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

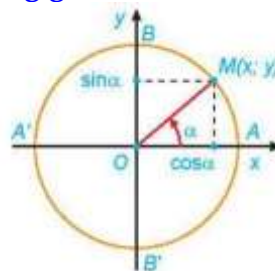
a. Đường tròn lượng giác



+) Đường tròn lượng giác là đường tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính bằng 1, được định hướng và lấy điểm $A(1;0)$ làm điểm gốc của đường tròn.

+) Điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo α (độ hoặc radian) là điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $\text{sđ}(OA, OM) = \alpha$

b. Các giá trị lượng giác của góc lượng giác



Giả sử $M(x; y)$ là điểm trên đường tròn lượng giác, biểu diễn góc lượng giác có số đo α , ta có:

+) Hoành độ x của điểm M được gọi là cosin của α , kí hiệu là $\cos \alpha \longrightarrow \cos \alpha = x$.

+) Tung độ y của điểm M được gọi là sin của α , kí hiệu là $\sin \alpha \longrightarrow \sin \alpha = y$.

+) Nếu $\cos \alpha \neq 0$, tỉ số $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ được gọi là tang của α , kí hiệu là $\tan \alpha$.

$$\longrightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{x}, (x \neq 0).$$

+) Nếu $\sin \alpha \neq 0$, tỉ số $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ được gọi là côtang của α , kí hiệu là $\cot \alpha$.

$$\longrightarrow \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{x}{y}, (y \neq 0).$$

Chú ý:

+) Ta còn gọi trục tung là trục sin, trục hoành là trục cosin.

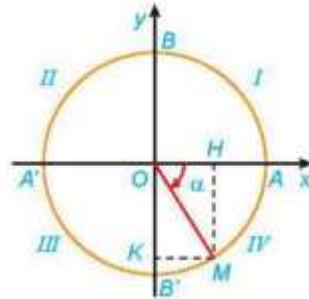
+) $\sin \alpha, \cos \alpha$ xác định với mọi giá trị của α và ta có:

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1; -1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha; \cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

+) $\tan \alpha$ xác định khi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\cot \alpha$ xác định khi $\alpha \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

+) Dấu của các giá trị lượng giác của một góc lượng giác:



Góc phần tư	I	II	III	IV
Giá trị lượng giác				
$\sin \alpha$	+	-	-	+
$\cos \alpha$	+	+	-	-
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

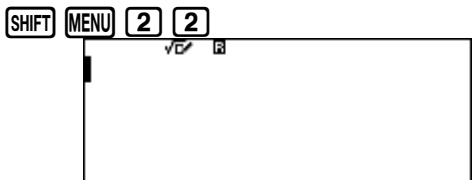
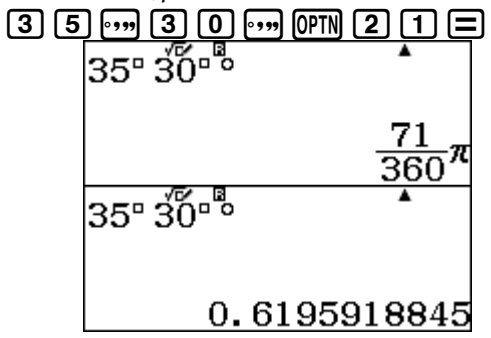
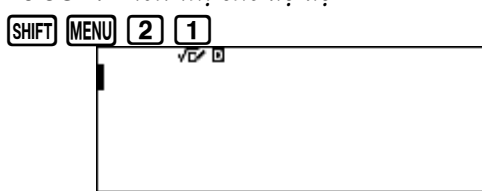
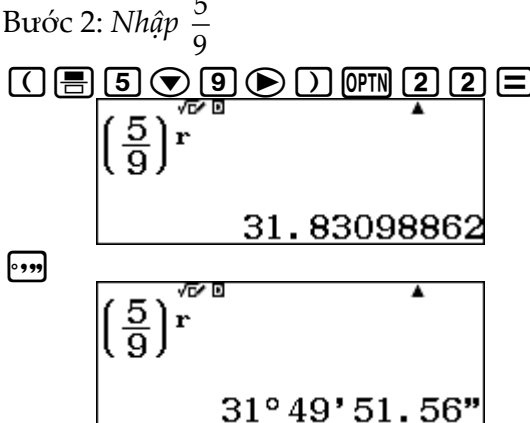
c. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

Góc α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định
$\cot \alpha$	Không xác định	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

d. Sử dụng máy tính cầm tay để đổi số đo góc và tìm giá trị lượng giác của góc

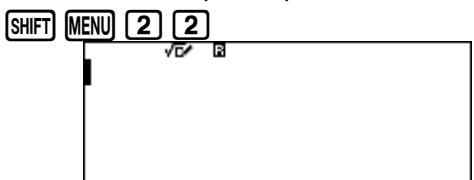
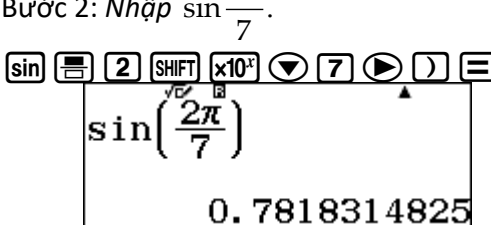
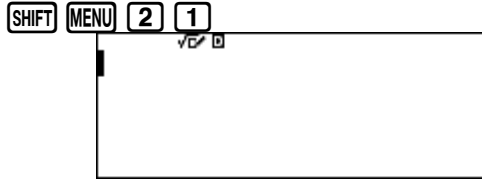
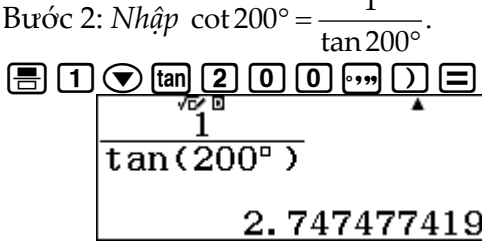
Kỹ thuật 1: Đổi số đo góc

Ví dụ 1:

<p>a) Đổi $35^\circ 30'$ sang đơn vị rad; Bước 1: <i>Hiện thị chế độ rad</i>  Bước 2: <i>Nhập $35^\circ 30'$</i>  </p>	<p>b) Đổi $\frac{5}{9}$ sang đơn vị độ. Bước 1: <i>Hiện thị chế độ độ</i>  Bước 2: <i>Nhập $\frac{5}{9}$</i>  </p>
--	---

Kỹ thuật 2: Tính các giá trị lượng giác của góc

Ví dụ 2:

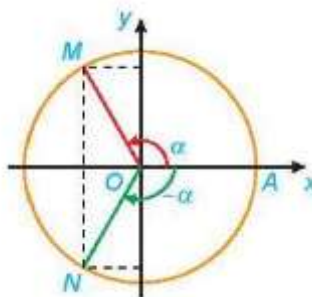
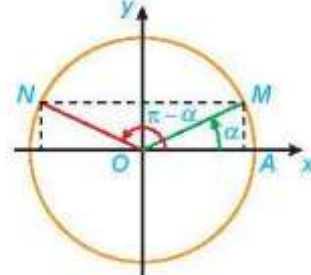
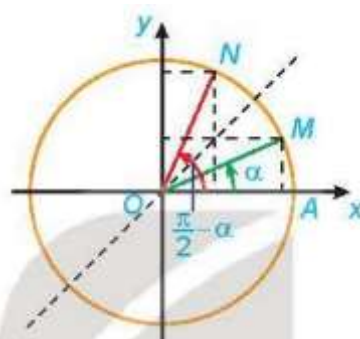
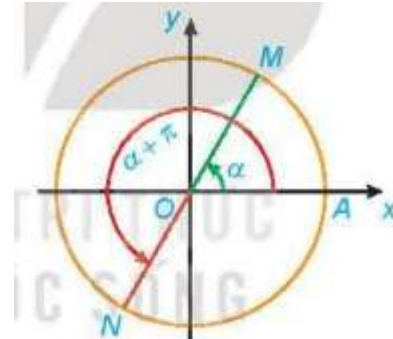
<p>a) Tính $\sin \frac{2\pi}{7}$; Bước 1: <i>Hiện thị chế độ rad</i>  Bước 2: <i>Nhập $\sin \frac{2\pi}{7}$</i>  </p>	<p>b) Tính $\cot 200^\circ$. Bước 1: <i>Hiện thị chế độ độ</i>  Bước 2: <i>Nhập $\cot 200^\circ = \frac{1}{\tan 200^\circ}$</i>  </p>
---	---

4. QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

a. Các công thức lượng giác cơ bản

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$
$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$	$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \left(\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right)$

b. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

<p>1. Hai góc đối nhau: α và $-\alpha$ (cos đối)</p>  <p> $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha;$ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha;$ </p> <p> $\cos(-\alpha) = \cos \alpha;$ $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha.$ </p>	<p>2. Hai góc bù nhau: α và $\pi - \alpha$ (sin bù)</p>  <p> $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha;$ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha;$ </p> <p> $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha;$ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha.$ </p>
<p>3. Hai góc phụ nhau: α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$ (chéo)</p>  <p> $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha;$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha;$ </p> <p> $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha;$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha.$ </p>	<p>4. Hai góc hơn kém nhau π: α và $\alpha + \pi$ (tan và cotang)</p>  <p> $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha;$ $\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha;$ </p> <p> $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha;$ $\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha.$ </p>

Lưu ý: Góc hơn kém $\frac{\pi}{2}$ (α và $\frac{\pi}{2} + \alpha$)

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$
---	--

II. BÀI TẬP MINH HỌA

- Câu 1:** Cho $\text{sđ}(Ou, Ov) = \alpha$ và $\text{sđ}(Ou', Ov') = \beta$. Chứng minh rằng hai góc hình học $uOv, u'Ov'$ bằng nhau khi và chỉ khi hoặc $\beta - \alpha = k2\pi$ hoặc $\beta + \alpha = k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- Câu 2:** Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo $-\frac{\pi}{7}$. Trong các số $-\frac{29\pi}{7}; -\frac{22}{7}; \frac{6\pi}{7}; \frac{41\pi}{7}$, những số nào là số đo của một góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho?
- Câu 3:** Tìm số đo α của góc lượng giác (Ou, Ov) với $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, biết một góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối với góc đó có số đo là:

a) $\frac{33\pi}{4}$. b) $-\frac{291983\pi}{3}$. c) 30.

Câu 4: a) Đổi số đo của các góc sau ra radian: $72^\circ, 600^\circ, -37^\circ 45' 30''$.

b) Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\frac{5\pi}{18}, \frac{3\pi}{5}, -4$.

Câu 5: Một đường tròn có bán kính $36m$. Tìm độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo là

a) $\frac{3\pi}{4}$. b) 51° . c) $\frac{1}{3}$.

Câu 6: Biểu diễn các góc(cung) lượng giác trên đường tròn lượng giác có số đo sau:

a) $\frac{\pi}{4}$. b) $-\frac{11\pi}{2}$. c) 120° . d) -765° .

Câu 7: Trên đường tròn lượng giác gốc A . Biểu diễn các góc lượng giác có số đo sau (với k là số nguyên tùy ý).

$$x_1 = k\pi; \quad x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi; \quad x_3 = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

Các góc lượng giác trên có thể viết dưới dạng công thức duy nhất nào?

Câu 8: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin \frac{7\pi}{6} + \cos 9\pi + \tan \left(-\frac{5\pi}{4} \right) + \cot \frac{7\pi}{2}$; b) $B = \frac{1}{\tan 368^\circ} + \frac{2 \sin 2550^\circ \cos(-188^\circ)}{2 \cos 638^\circ + \cos 98^\circ}$;

c) $C = \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 65^\circ$; d) $D = \tan^2 \frac{\pi}{8} \cdot \tan \frac{3\pi}{8} \cdot \tan \frac{5\pi}{8}$.

Câu 9: Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xác định dấu của các biểu thức sau:

a) $\sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)$; b) $\tan \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right)$;
c) $\cos \left(-\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \cdot \tan(\pi - \alpha)$; d) $\sin \frac{14\pi}{9} \cdot \cot(\pi + \alpha)$.

Câu 10: Chứng minh các đẳng thức sau: (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $\cos^4 x + 2 \sin^2 x = 1 + \sin^4 x$;

b) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x} = \cot^3 x + \cot^2 x + \cot x + 1$;

c) $\frac{\cot^2 x - \cot^2 y}{\cot^2 x \cdot \cot^2 y} = \frac{\cos^2 x - \cos^2 y}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y}$;

d) $\sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x} = 3 \tan \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \tan \left(\frac{\pi}{6} - x \right)$;

Câu 11: Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:

a) $\sin \left(\frac{A+B}{2} \right) = \cos \frac{C}{2}$;

b) $\frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos \left(\frac{A+2B+C}{2} \right)} - \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin \left(\frac{A+2B+C}{2} \right)} = \tan A \cdot \cot(B+C)$.

Câu 12: Rút gọn biểu thức: $A = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - a\right) + \cos(13\pi + a) - 3\sin(a - 5\pi)$.

Câu 13: Rút gọn biểu thức $M = \sin\left(7\pi + \alpha\right) + \cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) - \cot(3\pi - \alpha) + \tan\left(\frac{9\pi}{2} - \alpha\right) + 2\tan\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right)$.

Câu 14: Đơn giản các biểu thức sau: (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $A = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x);$

b) $B = \frac{\sin(900^\circ + x) - \cos(450^\circ - x) + \cot(1080^\circ - x) + \tan(630^\circ - x)}{\cos(450^\circ - x) + \sin(x - 630^\circ) - \tan(810^\circ + x) - \tan(810^\circ - x)};$

c) $C = \sqrt{2} - \frac{1}{\sin(x + 2013\pi)} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}}$ với $\pi < x < 2\pi$.

Câu 15: Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x .

a) $A = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x + 2}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1};$

b) $B = \frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} - \frac{2 + 2\cot^2 x}{(\tan x - 1)(\tan^2 x + 1)};$

c) $C = \sqrt{\sin^4 x + 6\cos^2 x + 3\cos^4 x} + \sqrt{\cos^4 x + 6\sin^2 x + 3\sin^4 x}.$

Câu 16: Tính giá trị lượng giác còn lại của góc α biết:

a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ;$

b) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2};$

c) $\tan \alpha = -2\sqrt{2}$ và $0 < \alpha < \pi;$

d) $\cot \alpha = -\sqrt{2}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$

Câu 17: a) Tính giá trị lượng giác còn lại của góc α biết $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ và $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$.

b) Cho $3\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $A = 2\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$.

Câu 18: a) Cho $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $A = \frac{\tan \alpha + 3\cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.

b) Cho $\tan \alpha = 3$. Tính $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3\cos^3 \alpha + 2\sin \alpha}$.

c) Cho $\cot \alpha = \sqrt{5}$. Tính $C = \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha$.

Câu 19: Cho $\tan \alpha - 4\cot \alpha = 3$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính giá trị biểu thức $M = \frac{2\sin \alpha - \tan \alpha}{\cos \alpha + \cot \alpha}$.

Câu 20: Cho $\tan \alpha + \cot \alpha = m$. Tính giá trị biểu thức $A = \tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha$ theo tham số thực m .

Câu 21: Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = m$, $m \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Tính các giá trị của $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$ theo m .

Câu 22: Biết $\sin x + \cos x = m$.

a) Tính theo m giá trị $\sin x \cos x$ và $|\sin^4 x - \cos^4 x|$.

b) Chứng minh rằng $|m| \leq \sqrt{2}$.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 23: Đường tròn lượng giác là đường tròn định hướng tâm O có bán kính bằng

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

- Câu 24:** Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. Mỗi đường tròn là một đường tròn định hướng.
B. Mỗi đường tròn đã chọn một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng.
C. Mỗi đường tròn đã chọn một chiều chuyển động và một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng.
D. Mỗi đường tròn đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương và chiều ngược lại được gọi là chiều âm là một đường tròn định hướng.
- Câu 25:** Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. Chỉ một cung lượng giác cố điểm đầu là A , điểm cuối là B .
B. Đúng hai cung lượng giác cố điểm đầu là A , điểm cuối là B .
C. Đúng bốn cung lượng giác cố điểm đầu là A , điểm cuối là B .
D. Vô số cung lượng giác cố điểm đầu là A , điểm cuối là B .
- Câu 26:** Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. Mỗi cung lượng giác AB xác định một góc lượng giác tia đầu OA tia cuối OB .
B. Mỗi cung lượng giác AB xác định hai góc lượng giác tia đầu OA tia cuối OB .
C. Mỗi cung lượng giác AB xác định bốn góc lượng giác tia đầu OA tia cuối OB .
D. Mỗi cung lượng giác AB xác định vô số góc lượng giác tia đầu OA tia cuối OB .
- Câu 27:** Trên đường tròn lượng giác với điểm gốc là A , cung AN , có điểm đầu là A , điểm cuối là N .
A. chỉ có một số đo. **B.** có đúng hai số đo.
C. có đúng 4 số đo. **D.** có vô số số đo.
- Câu 28:** Góc lượng giác tạo bởi cung lượng giác. Trên đường tròn cung có số đo $1rad$ là
A. cung có độ dài bằng 1. **B.** cung tương ứng với góc ở tâm 60° .
C. cung có độ dài bằng đường kính. **D.** cung có độ dài bằng nửa đường kính.
- Câu 29:** Trên đường tròn lượng giác với điểm gốc A , cung lượng giác có số đo 55° có điểm đầu A xác định
A. chỉ có một điểm cuối M . **B.** đúng hai điểm cuối M .
C. đúng 4 điểm cuối M . **D.** vô số điểm cuối M .
- Câu 30:** Có bao nhiêu điểm M trên đường tròn định hướng gốc A thỏa mãn $sđ AM = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$?
A. 3. **B.** 12. **C.** 4. **D.** 6.
- Câu 31:** Một cung tròn có độ dài bằng 2 lần bán kính. Số đo radian của cung tròn đó bằng
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.
- Câu 32:** Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $1 rad = 1^\circ$. **B.** $1 rad = 60^\circ$.
C. $1 rad = 180^\circ$. **D.** $1 rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.
- Câu 33:** Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn lượng giác có gốc là A , các đỉnh lấy theo thứ tự đó và các điểm B, C có tung độ dương. Khi đó, góc lượng giác có tia đầu OA , tia cuối OC bằng:
A. 120° . **B.** -240° .
C. 120° hoặc -240° . **D.** $120^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
- Câu 34:** Góc có số đo 108° đổi ra radian là

- A. $\frac{3\pi}{5}$. B. $\frac{\pi}{10}$. C. $\frac{3\pi}{2}$. D. $\frac{\pi}{4}$.
- Câu 35:** Đổi số đo góc 105° sang radian.
- A. $\frac{5\pi}{12}$. B. $\frac{7\pi}{12}$. C. $\frac{9\pi}{12}$. D. $\frac{5\pi}{8}$.
- Câu 36:** Góc có số đo $\frac{2\pi}{5}$ đổi sang độ là:
- A. 240° . B. 135° . C. 72° . D. 270° .
- Câu 37:** Góc có số đo $\frac{\pi}{9}$ đổi sang độ là:
- A. 15° . B. 18° . C. 20° . D. 25° .
- Câu 38:** Góc $63^\circ 48'$ gần bằng
- A. $1,108rad$. B. $1,107rad$. C. $1,114rad$. D. $1,113rad$.
- Câu 39:** Cho $a = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Tìm k để $10\pi < a < 11\pi$.
- A. $k = 4$. B. $k = 6$. C. $k = 7$. D. $k = 5$.
- Câu 40:** Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và một trục (ℓ) đi qua O . Xác định số đo của các góc giữa tia OA với trục (ℓ) , biết trục (ℓ) đi qua đỉnh A của hình vuông.
- A. $180^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. B. $90^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
C. $-90^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. D. $k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
- Câu 41:** Biết OMB' và ONB' là các tam giác đều. Cung α có điểm đầu là A và điểm cuối trùng với B hoặc M hoặc N . Tính số đo của α .
- A. $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. B. $\alpha = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.
C. $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. D. $\alpha = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.
- Câu 42:** Trong mặt phẳng định hướng cho tia Ox và hình vuông $OABC$ vẽ theo chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ, biết $sd(Ox, OA) = 30^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$, $sd(Ox, BC)$ bằng:
- A. $210^\circ + h360^\circ, h \in \mathbb{Z}$. B. $135^\circ + h360^\circ, h \in \mathbb{Z}$.
C. $-210^\circ + h360^\circ, h \in \mathbb{Z}$. D. $175^\circ + h360^\circ, h \in \mathbb{Z}$.
- Câu 43:** Trên đường tròn với điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 60° . Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua trục Oy , số đo cung AN là
- A. 120° . B. -240° .
C. -120° hoặc 240° . D. $120^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
- Câu 44:** Cho $(Ox, Oy) = 22^\circ 30' + k360^\circ$. Tính k để $(Ox, Oy) = 1822^\circ 30'$.
- A. $k \in \emptyset$. B. $k = 3$. C. $k = -5$. D. $k = 5$.
- Câu 45:** Cho số đo cung $(Ou, Ov) = 25^\circ + k360^\circ, (k \in \mathbb{Z})$. Với giá trị nào của k thì $(Ou, Ov) = -1055^\circ$?
- A. $k = -1$. B. $k = 2$. C. $k = -3$. D. $k = 4$.
- Câu 46:** Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là
- A. 30° . B. 40° . C. 50° . D. 60° .
- Câu 47:** Trên đường tròn bán kính $r = 5$, độ dài của cung đo $\frac{\pi}{8}$ là

A. $l = \frac{\pi}{8}$. B. $l = \frac{3\pi}{8}$. C. $l = \frac{5\pi}{8}$. D. $l = \frac{\pi}{4}$.

Câu 48: Trên đường tròn bán kính $r = 15$, độ dài của cung có số đo 50° là

A. $l = 750$. B. $l = 15 \cdot \frac{180}{\pi}$. C. $l = \frac{15\pi}{180}$. D. $l = \frac{25\pi}{6}$.

Câu 49: Cho bốn cung (trên một đường tròn định hướng): $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{25\pi}{3}$, $\delta = \frac{19\pi}{6}$. Các cung nào có điểm cuối trùng nhau?

A. α và β ; γ và δ . B. β và γ ; α và δ . C. α, β, γ . D. β, γ, δ .

Câu 50: Cho góc lượng giác (OA, OB) có số đo bằng $\frac{\pi}{5}$. Hỏi trong các số sau, số nào là số đo của một góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối?

A. $\frac{6\pi}{5}$. B. $-\frac{11\pi}{5}$. C. $\frac{9\pi}{5}$. D. $\frac{31\pi}{5}$.

Câu 51: Trên đường tròn lượng giác gốc A cho các cung có số đo:

I. $\frac{\pi}{4}$. II. $-\frac{7\pi}{4}$. III. $\frac{13\pi}{4}$. IV. $-\frac{71\pi}{4}$.

Hỏi cung nào có điểm cuối trùng nhau?

A. Chỉ I và II. B. Chỉ I, II và III. C. Chỉ I, II và IV. D. Chỉ II, III và IV

Câu 52: Cho góc α thỏa mãn $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\sin \alpha < 0$. B. $\cos \alpha \geq 0$. C. $\tan \alpha < 0$. D. $\cot \alpha > 0$.

Câu 53: Cho góc α thỏa mãn $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\tan \alpha > 0$; $\cot \alpha > 0$. B. $\tan \alpha < 0$; $\cot \alpha < 0$. C. $\tan \alpha > 0$; $\cot \alpha < 0$. D. $\tan \alpha < 0$; $\cot \alpha > 0$.

Câu 54: Cho $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$. Kết quả đúng là

A. $\tan \alpha > 0$; $\cot \alpha > 0$. B. $\tan \alpha < 0$; $\cot \alpha < 0$. C. $\tan \alpha > 0$; $\cot \alpha < 0$. D. $\tan \alpha < 0$; $\cot \alpha > 0$.

Câu 55: Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Kết quả nào sau đây sai?

A. $\cos(-\alpha) < 0$. B. $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) > 0$. C. $\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) < 0$. D. $\tan(\pi + \alpha) < 0$.

Câu 56: Cho α là một góc bất kì. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$. B. $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$.

C. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. D. $\tan \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \left(\alpha \neq k\pi \right)$.

Câu 57: Cho góc lượng giác α bất kì. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. B. $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = 1$.

C. $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$. D. $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 2$.

Câu 58: Kết quả nào cho ta tìm được góc α ?

A. $\begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{4} \\ \cos \alpha = \frac{3}{4} \end{cases}$ B. $\begin{cases} \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$ C. $\begin{cases} \sin \alpha = \frac{5}{13} \\ \cos \alpha = \frac{12}{13} \end{cases}$ D. $\begin{cases} \sin \alpha = 0.3 \\ \cos \alpha = 0.7 \end{cases}$

Câu 59: $\cos \alpha$ không thể bằng giá trị nào dưới đây?

A. 1. B. 2. C. 0,2. D. -0,9.

Câu 60: Cho góc α thỏa mãn $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ và $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $P = \sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}$ bằng

A. $\frac{4+\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{4-\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Câu 61: Cho $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ biết $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Tính $\cos \alpha$; $\tan \alpha$

A. $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$; $\tan \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$. B. $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$; $\tan \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{15}$.
C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$; $\tan \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{15}$. D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$; $\tan \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$.

Câu 62: Cho $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$ ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$). Khi đó, $\tan \alpha$ bằng

A. $\frac{\sqrt{21}}{5}$. B. $-\frac{\sqrt{21}}{2}$. C. $-\frac{\sqrt{21}}{5}$. D. $\frac{\sqrt{21}}{3}$.

Câu 63: Tính giá trị biểu thức $P = \sin 30^\circ \cos 90^\circ + \sin 90^\circ \cos 30^\circ$.

A. $P = 1$. B. $P = 0$. C. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $P = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.

Câu 64: $\cos 18^\circ - \cos 342^\circ$ bằng

A. 1. B. 0. C. $2 \cos 18^\circ$. D. $-2 \cos 18^\circ$.

Câu 65: $2 \sin 27^\circ - \sin 153^\circ + \sin(-270^\circ) + \sin 333^\circ$ bằng

A. 1. B. $2 \sin 27^\circ + 1$. C. 0. D. $\sin 27^\circ$.

Câu 66: Giá trị biểu thức $M = \tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ$ bằng

A. 1. B. 2. C. -1. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 67: Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sai?

A. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$. B. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$. C. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$. D. $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cot x$.

Câu 68: Cho α là một góc bất kì. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$. B. $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$.
C. $\tan(\pi + \alpha) = -\tan \alpha$. D. $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$.

Câu 69: Cho hai góc nhọn α và β phụ nhau. Hệ thức nào sau đây sai?

A. $\sin \alpha = -\cos \beta$. B. $\cos \alpha = \sin \beta$. C. $\cos \beta = \sin \alpha$. D. $\cot \alpha = \tan \beta$.

Câu 70: Cho tam giác ABC bất kì. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\sin \frac{A+C}{2} = \cos \frac{B}{2}$. B. $\cos \frac{A+C}{2} = \sin \frac{B}{2}$.

C. $\sin(A+B) = \sin C$.

D. $\cos(A+B) = \cos C$.

Câu 71: Biểu thức $M = \tan\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) + \cot\left(\frac{11\pi}{2} - \alpha\right) - \tan\left(\frac{15\pi}{2} + \alpha\right) - \cot\left(\frac{19\pi}{2} + \alpha\right)$ bằng

A. $\tan \alpha + \cot \alpha$

B. $2(\tan \alpha + \cot \alpha)$.

C. $2(\tan \alpha - \cot \alpha)$.

D. $\tan \alpha - \cot \alpha$

Câu 72: Cho $\tan x = 3$. Tính $P = \frac{2 \sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.

A. $P = \frac{3}{2}$.

B. $P = \frac{5}{4}$.

C. $P = 3$.

D. $P = \frac{2}{5}$.

Câu 73: Cho góc x thỏa mãn $\cot x = \frac{1}{2}$. Giá trị biểu thức $A = \frac{2}{\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x}$ bằng

A. 6.

B. 8.

C. 10.

D. 12.

Câu 74: Biết $\tan \alpha = 2$ và $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Giá trị $\sin \alpha + \cos \alpha$ bằng

A. $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

B. $1 - \sqrt{5}$.

C. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

D. $-\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Câu 75: Cho biểu thức $M = \tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ \cdot \tan 60^\circ \cdot \tan 70^\circ \cdot \tan 80^\circ$. Giá trị của M bằng

A. $M = 0$.

B. $M = 1$.

C. $M = 4$.

D. $M = 8$.

Câu 76: Cho $\sin a = \frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $A = \frac{\cot a - \tan a}{\tan a + 2 \cot a}$ bằng

A. $\frac{1}{9}$.

B. $\frac{7}{9}$.

C. $\frac{17}{81}$.

D. $\frac{7}{17}$.

Câu 77: Biểu thức $\sin^2 x \cdot \tan^2 x + 4 \sin^2 x - \tan^2 x + 3 \cos^2 x$ không phụ thuộc vào x và có giá trị bằng

A. 6.

B. 5.

C. 3.

D. 4.

Câu 78: Giá trị biểu thức $A = \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x}$ không phụ thuộc vào x và bằng

A. 1.

B. -1.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $-\frac{1}{4}$.

Câu 79: Giá trị biểu thức $A = \sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x$ bằng

A. $A = -1$.

B. $A = 1$.

C. $A = 4$.

D. $A = -4$.

Câu 80: Biểu thức $A = \sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x}$ có giá trị là

A. -3.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 81: Biểu thức $B = \frac{\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$ bằng

A. $\tan \alpha$.

B. $\tan^2 \alpha$.

C. $\tan^3 \alpha$.

D. $\tan^4 \alpha$.

Câu 82: Biểu thức $M = \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$ bằng

A. -2.

B. -1.

C. 1.

D. 2.

IV. LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho $\text{sđ}(Ou, Ov) = \alpha$ và $\text{sđ}(Ou', Ov') = \beta$. Chứng minh rằng hai góc hình học $uOv, u'Ov'$ bằng nhau khi và chỉ khi hoặc $\beta - \alpha = k2\pi$ hoặc $\beta + \alpha = k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải:

Ta có $\text{sđ}(Ou, Ov) = \alpha$ và $\text{sđ}(Ou', Ov') = \beta$ suy ra tồn tại $\alpha_0, \pi < \alpha_0 \leq \pi, \phi_0, \pi < \phi_0 \leq \pi$ và số nguyên k_0, l_0 sao cho $\alpha = \alpha_0 + k_0 2\pi, \beta = \phi_0 + l_0 2\pi$.

Khi đó $|\alpha_0|$ là số đo của uOv và $|\phi_0|$ là số đo của $u'Ov'$.

Hai góc hình học $uOv, u'Ov'$ bằng nhau khi và chỉ khi $|\alpha_0| = |\phi_0| \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \phi_0 \\ \alpha_0 = -\phi_0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \beta - \alpha = k2\pi$ hoặc $\beta + \alpha = k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 2: Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo $-\frac{\pi}{7}$. Trong các số $-\frac{29\pi}{7}; -\frac{22}{7}; \frac{6\pi}{7}; \frac{41\pi}{7}$, những số nào là số đo của một góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho?

Lời giải:

Hai góc có cùng tia đầu, tia cuối thì sai khác nhau một bội của 2π do đó

$$\text{Vì } -\frac{29\pi}{7} - \left(-\frac{\pi}{7}\right) = (-2) \cdot 2\pi, -\frac{22\pi}{7} - \left(-\frac{\pi}{7}\right) = -3\pi, \frac{6\pi}{7} - \left(-\frac{\pi}{7}\right) = \pi \text{ và } \frac{41\pi}{7} - \left(-\frac{\pi}{7}\right) = 3 \cdot 2\pi$$

nên các số $-\frac{29\pi}{7}; \frac{41\pi}{7}$ là số đo của một góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho.

Câu 3: Tìm số đo α của góc lượng giác (Ou, Ov) với $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, biết một góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối với góc đó có số đo là:

- a) $\frac{33\pi}{4}$. b) $-\frac{291983\pi}{3}$. c) 30.

Lời giải:

a) Mọi góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $\frac{33\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vì $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ nên $0 \leq \frac{33\pi}{4} + k2\pi \leq 2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{33}{4} + k2 \leq 2, k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow -\frac{33}{8} \leq k \leq -\frac{25}{8}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k = -4.$$

$$\text{Suy ra } \alpha = \frac{33\pi}{4} + (-4) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}$$

b) Mọi góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $-\frac{291983\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vì $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ nên $0 \leq -\frac{291983\pi}{3} + k2\pi \leq 2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 0 \leq -\frac{291983}{3} + k2 \leq 2, k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \frac{291983}{6} \leq k \leq \frac{291989}{6}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k = 48664.$$

$$\text{Suy ra } \alpha = -\frac{291983\pi}{3} + 48664 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3}.$$

c) Mọi góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $30 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

a) Ta có $\frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{8}$. Ta chia đường tròn thành tám phần bằng nhau.

Khi đó điểm M_1 là điểm biểu diễn bởi góc có số đo $\frac{\pi}{4}$.

b) Ta có $-\frac{13\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + (-3).2\pi$ do đó điểm biểu diễn bởi góc $-\frac{13\pi}{2}$ trùng với góc $-\frac{\pi}{2}$ và là điểm B' .

c) Ta có $\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$. Ta chia đường tròn thành ba phần bằng nhau.

Khi đó điểm M_2 là điểm biểu diễn bởi góc có số đo 120° .

d) Ta có $-765^\circ = -45^\circ + (-2).360^\circ$ do đó điểm biểu diễn bởi góc -765° trùng với góc -45° .

$\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$. Ta chia đường tròn làm tám phần bằng nhau (chú ý góc âm)

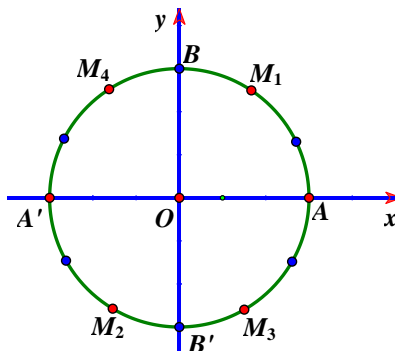
Khi đó điểm M_3 (điểm chính giữa cung nhỏ AB') là điểm biểu diễn bởi góc có số đo -765° .

Câu 7: Trên đường tròn lượng giác gốc A . Biểu diễn các góc lượng giác có số đo sau (với k là số nguyên tùy ý).

$$x_1 = k\pi; \quad x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi; \quad x_3 = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

Các góc lượng giác trên có thể viết dưới dạng công thức duy nhất nào?

Lời giải:



Ta có: $x_1 = \frac{k2\pi}{2}$ do đó có hai điểm biểu diễn bởi góc có số đo dạng $x_1 = k\pi$

+) Với $k=0 \Rightarrow x_1=0$ được biểu diễn bởi điểm A

+) $k=1 \Rightarrow x_1=\pi$ được biểu diễn bởi A'

Ta có: $x_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{2}$ do đó có hai điểm biểu diễn bởi góc có số đo dạng $x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi$

+) $k=0 \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{3}$ được biểu diễn bởi M_1

+) $k=1 \Rightarrow x_2 = \frac{4\pi}{3}$ được biểu diễn bởi M_2

Ta có: $x_3 = -\frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{2}$ do đó có hai điểm biểu diễn bởi góc có số đo dạng $x_3 = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

+) $k=0 \Rightarrow x_3 = -\frac{\pi}{3}$ được biểu diễn bởi M_3

+) $k=1 \Rightarrow x_6 = \frac{2\pi}{3}$ được biểu diễn bởi M_4 .

Do các góc lượng giác x_1, x_2, x_3 được biểu diễn bởi đỉnh của đa giác đều $AM_1M_4A'M_2M_3$ nên các góc lượng giác đó có thể viết dưới dạng một công thức duy nhất là $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 8: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin \frac{7\pi}{6} + \cos 9\pi + \tan \left(-\frac{5\pi}{4} \right) + \cot \frac{7\pi}{2};$

b) $B = \frac{1}{\tan 368^\circ} + \frac{2 \sin 2550^\circ \cos(-188^\circ)}{2 \cos 638^\circ + \cos 98^\circ};$

c) $C = \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 65^\circ;$

d) $D = \tan^2 \frac{\pi}{8} \cdot \tan \frac{3\pi}{8} \cdot \tan \frac{5\pi}{8}.$

Lời giải:

a) Ta có $A = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) + \cos(\pi + 4.2\pi) - \tan \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) + \cot \left(\frac{\pi}{2} + 3\pi \right)$

$$\Rightarrow A = -\sin \frac{\pi}{6} + \cos \pi - \tan \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2} - 1 - 1 + 0 = -\frac{5}{2}.$$

b) Ta có $B = \frac{1}{\tan(8^\circ + 360^\circ)} + \frac{2 \sin(30^\circ + 7.360^\circ) \cos(8^\circ + 180^\circ)}{2 \cos(-90^\circ + 8^\circ + 2.360^\circ) + \cos(90^\circ + 8^\circ)}$

$$B = \frac{1}{\tan 8^\circ} + \frac{2 \sin 30^\circ (-\cos 8^\circ)}{2 \cos(8^\circ - 90^\circ) - \sin 8^\circ} = \frac{1}{\tan 8^\circ} + \frac{2 \cdot \frac{1}{2} (-\cos 8^\circ)}{2 \cos(90^\circ - 8^\circ) - \sin 8^\circ} =$$

$$= \frac{1}{\tan 8^\circ} - \frac{\cos 8^\circ}{2 \sin 8^\circ - \sin 8^\circ} = \frac{1}{\tan 8^\circ} - \frac{\cos 8^\circ}{\sin 8^\circ} = 0.$$

c) Vì $25^\circ + 65^\circ = 90^\circ \Rightarrow \sin 65^\circ = \cos 25^\circ$ do đó

$$C = (\sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ) + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2$$

Suy ra $C = \frac{7}{4}.$

d) $D = -\left(\tan \frac{\pi}{8} \cdot \tan \frac{3\pi}{8} \right) \cdot \left[\tan \left(-\frac{\pi}{8} \right) \tan \frac{5\pi}{8} \right]$

Mà $\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \frac{3\pi}{8} = \cot \frac{\pi}{8}, \tan \frac{5\pi}{8} = \cot \left(-\frac{\pi}{8} \right)$

Nên $D = -\left(\tan \frac{\pi}{8} \cdot \cot \frac{\pi}{8} \right) \cdot \left[\tan \left(-\frac{\pi}{8} \right) \cot \left(-\frac{\pi}{8} \right) \right] = -1.$

Câu 9: Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xác định dấu của các biểu thức sau:

- a) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right);$ b) $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right);$
 c) $\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\pi - \alpha);$ d) $\sin\frac{14\pi}{9} \cdot \cot(\pi + \alpha).$

Lời giải:

a) Ta có $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \pi < \frac{\pi}{2} + \alpha < \frac{3\pi}{2}$ suy ra $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) < 0.$

Cách khác: $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha < 0.$

b) Ta có $-\frac{\pi}{2} > -\alpha > -\pi \Rightarrow 0 > \frac{3\pi}{2} - \alpha > -\frac{\pi}{2}$ suy ra $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) < 0.$

Cách khác: $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha < 0.$

c) Ta có $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow 0 < -\frac{\pi}{2} + \alpha < \frac{\pi}{2}$ suy ra $\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) > 0.$

Và $0 < \pi - \alpha < \frac{\pi}{2}$ suy ra $\tan(\pi - \alpha) > 0$

Vậy $\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\pi - \alpha) > 0.$

d) Ta có $\frac{3\pi}{2} < \frac{14\pi}{9} < 2\pi \Rightarrow \sin\frac{14\pi}{9} < 0.$

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < \pi + \alpha < 2\pi$ suy ra $\cot(\pi + \alpha) < 0.$

Vậy $\sin\frac{14\pi}{9} \cdot \cot(\pi + \alpha) > 0.$

Câu 10: Chứng minh các đẳng thức sau: (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

- a) $\cos^4 x + 2\sin^2 x = 1 + \sin^4 x;$
 b) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x} = \cot^3 x + \cot^2 x + \cot x + 1;$
 c) $\frac{\cot^2 x - \cot^2 y}{\cot^2 x \cdot \cot^2 y} = \frac{\cos^2 x - \cos^2 y}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y};$
 d) $\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x} = 3\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right);$

Lời giải:

a) Đẳng thức tương đương với $\cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x + (\sin^2 x)^2$

$$\Leftrightarrow \cos^4 x = (1 - \sin^2 x)^2 \quad (*)$$

$$\text{Mà } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow \cos^4 x = (\cos^2 x)^2 \quad (\text{đúng}) \quad (\text{đ.p.c.m})$$

Cách khác:

$$\cos^4 x + 2\sin^2 x = 1 + \sin^4 x \Leftrightarrow \cos^4 x - \sin^4 x + 2\sin^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) + 2\sin^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \text{ (đúng)}$$

$$\text{b) Ta có } VT = \frac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x} = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin^3 x}$$

$$\text{Mà } \cot^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x} \text{ và } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ nên}$$

$$VT = \cot^2 x + 1 + \cot x(\cot^2 x + 1) = \cot^3 x + \cot^2 x + \cot x + 1 = VP \text{ (đ.p.c.m)}$$

$$\text{c) Ta có } VT = \frac{\cot^2 x - \cot^2 y}{\cot^2 x \cdot \cot^2 y} = \frac{1}{\cot^2 y} - \frac{1}{\cot^2 x} = \tan^2 y - \tan^2 x$$

$$= \left(\frac{1}{\cos^2 y} - 1 \right) - \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = \frac{1}{\cos^2 y} - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \cos^2 y}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y} = VP \text{ (đ.p.c.m)}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } VT &= \sqrt{\sin^4 x + 4(1 - \sin^2 x)} + \sqrt{\cos^4 x + 4(1 - \cos^2 x)} \\ &= \sqrt{(\sin^2 x)^2 - 4\sin^2 x + 4} + \sqrt{(\cos^2 x)^2 - 4\cos^2 x + 4} = \sqrt{(\sin^2 x - 2)^2} + \sqrt{(\cos^2 x - 2)^2} \\ &= |\sin^2 x - 2| + |\cos^2 x - 2| = (2 - \sin^2 x) + (2 - \cos^2 x) = 4 - (\sin^2 x + \cos^2 x) = 3. \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác vì } \left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \text{ nên}$$

$$VP = 3 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 3 \Rightarrow VT = VP \text{ (đ.p.c.m)}$$

Câu 11: Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\frac{C}{2};$$

$$\text{b) } \frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{A+2B+C}{2}\right)} - \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{A+2B+C}{2}\right)} = \tan A \cdot \cot(B+C).$$

Lời giải:

$$\text{a) Ta có: } \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi-C}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}. \text{ (đ.p.c.m)}$$

$$\text{b) Vì } A+B+C = \pi \text{ nên}$$

$$VT = \frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}\right)} - \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}\right)} = \frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{-\sin \frac{B}{2}} - \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} = -\left(\sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2}\right) = -1$$

$$VP = \tan A \cdot \cot(\pi - A) = \tan A \cdot (-\cot A) = -1$$

$$\text{Suy ra } VT = VP. \text{ (đ.p.c.m)}$$

$$\text{Câu 12: Rút gọn biểu thức: } A = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - a\right) + \cos(13\pi + a) - 3\sin(a - 5\pi).$$

Lời giải:

Ta có $A = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - a\right) + \cos(13\pi + a) - 3\sin(a - 5\pi) = \cos a - \cos a + 3\sin a = 3\sin a$.

Câu 13: Rút gọn biểu thức $M = \sin(7\pi + \alpha) + \cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) - \cot(3\pi - \alpha) + \tan\left(\frac{9\pi}{2} - \alpha\right) + 2\tan\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right)$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } M &= -\sin\alpha + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2} - 2\pi\right) - \cot(-\alpha) + \tan\left(4\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{2} - 3\pi\right) \\ &= -\sin\alpha + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cot\alpha + \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cot\alpha + \cot\alpha - 2\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ &= -\sin\alpha + \sin\alpha + \cot\alpha + \cot\alpha - 2\cot\alpha = 0. \end{aligned}$$

Câu 14: Đơn giản các biểu thức sau: (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $A = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x);$

b) $B = \frac{\sin(900^\circ + x) - \cos(450^\circ - x) + \cot(1080^\circ - x) + \tan(630^\circ - x)}{\cos(450^\circ - x) + \sin(x - 630^\circ) - \tan(810^\circ + x) - \tan(810^\circ - x)};$

c) $C = \sqrt{2} - \frac{1}{\sin(x + 2013\pi)} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}}$ với $\pi < x < 2\pi$.

Lời giải:

a) Ta có $\cos(5\pi - x) = \cos(\pi - x + 2.2\pi) = \cos(\pi - x) = -\cos x;$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x;$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x;$$

và $\cot(3\pi - x) = \cot(-x) = -\cot x;$

Suy ra $A = -\cos x - (-\cos x) + \cot x + (-\cot x) = 0.$

b) Ta có $\sin(900^\circ + x) = \sin(180^\circ + 2.360^\circ + x) = \sin(180^\circ + x) = -\sin x;$

$$\cos(450^\circ - x) = \cos(90^\circ + 360^\circ - x) = \cos(90^\circ - x) = \sin x;$$

$$\cot(1080^\circ - x) = \cot(3.360^\circ - x) = \cot(-x) = -\cot x;$$

$$\tan(630^\circ - x) = \tan(3.180^\circ + 90^\circ - x) = \tan(90^\circ - x) = \cot x;$$

$$\sin(x - 630^\circ) = \sin(x - 2.360^\circ + 90^\circ) = \sin(x + 90^\circ) = \cos x;$$

$$\tan(810^\circ + x) = \tan(4.180^\circ + 90^\circ + x) = \tan(90^\circ + x) = -\cot x;$$

và $\tan(810^\circ - x) = \tan(4.180^\circ + 90^\circ - x) = \tan(90^\circ - x) = \cot x;$

$$\text{Vậy } B = \frac{-\sin x - \sin x - \cot x + \cot x}{\sin x + \cos x - (-\cot x) - \cot x} = \frac{-2\sin x}{\sin x + \cos x}.$$

c) Ta có $\sin(x + 2013\pi) = \sin(x + \pi + 1006.2\pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x$ nên

$$C = \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos x + 1 + \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}}$$

$$= \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{1 - \cos^2 x}} = \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{\sin^2 x}} = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{\sin x |\sin x|} \right).$$

Vì $\pi < x < 2\pi \Rightarrow \sin x < 0$ nên $C = \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = -\sqrt{2} \cot^2 x$

Câu 15: Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x .

a) $A = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x + 2}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1};$

b) $B = \frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} - \frac{2 + 2 \cot^2 x}{(\tan x - 1)(\tan^2 x + 1)};$

c) $C = \sqrt{\sin^4 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{\cos^4 x + 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x}.$

Lời giải:

a) Ta có $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha;$

và $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)$
 $= \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha.$

Do đó $A = \frac{1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2}{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 1} = \frac{3(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)}{2(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)} = \frac{3}{2}.$

Vậy A không phụ thuộc vào x . (đ.p.c.m)

b) Ta có $B = \frac{1 + \frac{1}{\tan x}}{1 - \frac{1}{\tan x}} - \frac{2 + \frac{2 \cos^2 x}{\sin^2 x}}{(\tan x - 1) \frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1} - \frac{2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\tan x - 1} = \frac{\tan x + 1 - 2}{\tan x - 1} = 1.$

Vậy B không phụ thuộc vào x . (đ.p.c.m)

c) $C = \sqrt{(1 - \cos^2 x)^2 + 6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{(1 - \sin^2 x)^2 + 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x}$
 $= \sqrt{4 \cos^4 x + 4 \cos^2 x + 1} + \sqrt{4 \sin^4 x + 4 \sin^2 x + 1}$
 $= \sqrt{(2 \cos^2 x + 1)^2} + \sqrt{(2 \sin^2 x + 1)^2} = 2 \cos^2 x + 1 + 2 \sin^2 x + 1 = 3.$

Vậy C không phụ thuộc vào x . (đ.p.c.m)

Câu 16: Tính giá trị lượng giác còn lại của góc α biết:

a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ;$

b) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2};$

c) $\tan \alpha = -2\sqrt{2}$ và $0 < \alpha < \pi;$

d) $\cot \alpha = -\sqrt{2}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$

Lời giải:

a) Vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos \alpha < 0$ mặt khác $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

suy ra $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\text{Do đó } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{b) Vì } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ nên } \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{Mà } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha < 0 \text{ suy ra } \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{Ta có } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ và } \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{c) Vì } \tan \alpha = -2\sqrt{2} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{Ta có } \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{1}{(-2\sqrt{2})^2 + 1} = \frac{1}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{3}$$

$$\text{Vì } 0 < \alpha < \pi \Rightarrow \sin \alpha > 0 \text{ và } \tan \alpha = -2\sqrt{2} < 0 \text{ nên } \cos \alpha < 0.$$

$$\text{Vì vậy } \cos \alpha = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Ta có } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{d) Vì } \cot \alpha = -\sqrt{2} \text{ nên } \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Ta có } \cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{\cot^2 \alpha + 1} = \frac{1}{(-\sqrt{2})^2 + 1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Do } \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha < 0 \text{ và } \cot \alpha = -\sqrt{2} < 0 \text{ nên } \sin \alpha > 0$$

$$\text{Do đó } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Ta có } \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \cot \alpha \cdot \sin \alpha = -\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Câu 17: a) Tính giá trị lượng giác còn lại của góc α biết $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ và $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$.

$$\text{b) Cho } 3\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2}. \text{ Tính } A = 2\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha.$$

Lời giải:

$$\text{a) Ta có } \cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = 25 \Rightarrow \cot^2 \alpha = 24 \text{ hay } \cot \alpha = \pm 2\sqrt{6}$$

Vì $\tan \alpha, \cot \alpha$ cùng dấu và $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$ nên $\tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0$

Do đó $\cot \alpha = -2\sqrt{6}$. Ta lại có $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \cot \alpha \sin \alpha = -2\sqrt{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{-2\sqrt{6}}{5}$$

b) Ta có $3\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3\sin^4 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)^2 = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 6\sin^4 \alpha - 2(1 - 2\sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha) = 1 \Leftrightarrow 4\sin^4 \alpha + 4\sin^2 \alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 \alpha = -\frac{3}{2} < 0 \\ \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Suy ra $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$.

Ta lại có: $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Suy ra $A = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Câu 18: a) Cho $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $A = \frac{\tan \alpha + 3\cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.

b) Cho $\tan \alpha = 3$. Tính $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3\cos^3 \alpha + 2\sin \alpha}$.

c) Cho $\cot \alpha = \sqrt{5}$. Tính $C = \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha$.

Lời giải:

a) Ta có $A = \frac{\tan \alpha + 3\frac{1}{\tan \alpha}}{\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{\tan^2 \alpha + 3}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = 1 + 2\cos^2 \alpha$.

Suy ra $A = 1 + 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{17}{9}$.

b) Do $\tan \alpha = 3$ nên $\cos \alpha \neq 0$. Chia cả tử và mẫu của B cho $\cos^3 \alpha$, ta được:

$$B = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{3\cos^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{2\sin \alpha}{\cos^3 \alpha}} = \frac{\tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1) - (\tan^2 \alpha + 1)}{\tan^3 \alpha + 3 + 2\tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1)};$$

Suy ra $B = \frac{3(9+1) - (9+1)}{27 + 3 + 2 \cdot 3(9+1)} = \frac{2}{9}$

c) Do $\cot \alpha = \sqrt{5}$ nên $\sin \alpha \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } C &= \sin^2 \alpha \cdot \frac{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \sin^2 \alpha \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} (1 - \cot \alpha + \cot^2 \alpha) = \frac{1}{1 + (\sqrt{5})^2} (1 - \sqrt{5} + 5) = \frac{6 - \sqrt{5}}{6}. \end{aligned}$$

Câu 19: Cho $\tan \alpha - 4\cot \alpha = 3$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính giá trị biểu thức $M = \frac{2\sin \alpha - \tan \alpha}{\cos \alpha + \cot \alpha}$.

Lời giải:

Ta có: $\tan \alpha - 4 \cot \alpha = 3 \Leftrightarrow \tan \alpha - \frac{4}{\tan \alpha} = 3 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha - 3 \tan \alpha - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan \alpha = -1 \text{ (loại)} \\ \tan \alpha = 4 \text{ (nhận do } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

Ta có: $\tan \alpha = 4 \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{4}$.

$$\text{và } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{16}{17} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17} \text{ (loại)} \\ \cos \alpha = -\frac{4\sqrt{17}}{17} \text{ (nhận do } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

$$\text{Với } \cos^2 \alpha = \frac{16}{17} \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{1}{17} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{\sqrt{17}}{17} \text{ (loại)} \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17} \text{ (nhận do } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

Vậy ta có: $\tan \alpha = 4$, $\cot \alpha = \frac{1}{4}$, $\cos \alpha = -\frac{4\sqrt{17}}{17}$ và $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}$.

$$\text{Lúc đó } M = \frac{2 \sin \alpha - \tan \alpha}{\cos \alpha + \cot \alpha} = \frac{2 \left(-\frac{\sqrt{17}}{17} \right) - 4}{-\frac{4\sqrt{17}}{17} + \frac{1}{4}} = \frac{-272 - 8\sqrt{17}}{17 - 16\sqrt{17}}.$$

Câu 20: Cho $\tan \alpha + \cot \alpha = m$. Tính giá trị biểu thức $A = \tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha$ theo tham số thực m .

Lời giải:

Ta có: $\tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha = (\tan \alpha + \cot \alpha)^3 - 3 \tan \alpha \cot \alpha (\tan \alpha + \cot \alpha) = m^3 - 3m$.

Câu 21: Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = m$, $m \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Tính các giá trị của $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$ theo m .

Lời giải:

Ta có: $\sin \alpha + \cos \alpha = m \Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = m^2 \Leftrightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = m^2$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{m^2 - 1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha &= \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right) + \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 2 \\ &= \frac{1}{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} - 2 = \frac{1}{\left(\frac{m^2 - 1}{2} \right)^2} - 2 = \frac{4}{m^4 - 2m^2 + 1} - 2 = \frac{-2m^4 + 4m^2 + 2}{m^4 - 2m^2 + 1}. \end{aligned}$$

Câu 22: Biết $\sin x + \cos x = m$.

a) Tính theo m giá trị $\sin x \cos x$ và $|\sin^4 x - \cos^4 x|$.

b) Chứng minh rằng $|m| \leq \sqrt{2}$.

Lời giải:

a) Ta có $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2 \sin x \cos x$ (*)

Mặt khác $\sin x + \cos x = m$ nên $m^2 = 1 + 2\sin x \cos x$ hay $\sin x \cos x = \frac{m^2 - 1}{2}$

Đặt $A = |\sin^4 x - \cos^4 x|$.

Ta có: $A = |(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)| = |(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)|$

$$\Rightarrow A^2 = (\sin x + \cos x)^2 (\sin x - \cos x)^2 = (1 + 2\sin x \cos x)(1 - 2\sin x \cos x)$$

$$\Rightarrow A^2 = \left(1 + \frac{m^2 - 1}{2}\right) \left(1 - \frac{m^2 - 1}{2}\right) = \frac{3 + 2m^2 - m^4}{4}. \text{ Vậy } A = \frac{\sqrt{3 + 2m^2 - m^4}}{2}.$$

b) Ta có $2\sin x \cos x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Kết hợp với (*) suy ra: $(\sin x + \cos x)^2 \leq 2 \Rightarrow |\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$. Vậy $|m| \leq \sqrt{2}$. (đ.p.c.m)

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 23: Đường tròn lượng giác là đường tròn định hướng tâm O có bán kính bằng

- A. 1.** **B. 2.** **C. 3.** **D. 4.**

Câu 24: Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** Mỗi đường tròn là một đường tròn định hướng.
B. Mỗi đường tròn đã chọn một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng.
C. Mỗi đường tròn đã chọn một chiều chuyển động và một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng.
D. Mỗi đường tròn đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương và chiều ngược lại được gọi là chiều âm là một đường tròn định hướng.

Lời giải:

Nhắc lại định nghĩa SGK (T134): **Đường tròn định hướng** là một đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương, chiều ngược lại là chiều âm. Ta quy ước chọn chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ làm chiều dương.

Từ định nghĩa ta chọn đáp án **D**.

Câu 25: Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** Chỉ một cung lượng giác cố điểm đầu là A , điểm cuối là B .
B. Đúng hai cung lượng giác cố điểm đầu là A , điểm cuối là B .
C. Đúng bốn cung lượng giác cố điểm đầu là A , điểm cuối là B .
D. Vô số cung lượng giác cố điểm đầu là A , điểm cuối là B .

Lời giải:

Trên đường tròn định hướng cho hai điểm A, B . Một điểm M di động trên đường tròn luôn theo một chiều (âm hoặc dương) từ A đến B tạo nên một cung lượng giác có điểm đầu là A , điểm cuối là B . Do đó có vô số cung lượng giác có điểm đầu là A , điểm cuối là B .

Câu 26: Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** Mỗi cung lượng giác AB xác định một góc lượng giác tia đầu OA tia cuối OB .
B. Mỗi cung lượng giác AB xác định hai góc lượng giác tia đầu OA tia cuối OB .
C. Mỗi cung lượng giác AB xác định bốn góc lượng giác tia đầu OA tia cuối OB .
D. Mỗi cung lượng giác AB xác định vô số góc lượng giác tia đầu OA tia cuối OB .

Lời giải:

Trên đường tròn định hướng cho một cung lượng góc $\overset{p}{AB}$. Một điểm M chuyển động trên đường tròn từ A tới B tạo nên cung lượng góc $\overset{p}{AB}$ nói trên. Khi đó tia OM quay xung quanh gốc O từ vị trí OA tới vị trí OB . Ta nói tia OM tạo ra một góc lượng góc có tia đầu là OA , tai cuối là OB . Do đó có vô số góc lượng góc tia đầu OA tia cuối OB .

- Câu 27:** Trên đường tròn lượng góc với điểm gốc là A , cung AN , có điểm đầu là A , điểm cuối là N .
A. chỉ có một số đo. **B.** có đúng hai số đo.
C. có đúng 4 số đo. **D.** có vô số số đo.

Lời giải:

Trên đường tròn lượng góc với điểm gốc là A , cung AN , có điểm đầu là A , điểm cuối là N có vô số số đo, các số đo này sai khác nhau 2π .

- Câu 28:** Góc lượng góc tạo bởi cung lượng góc. Trên đường tròn cung có số đo $1rad$ là
A. cung có độ dài bằng 1. **B.** cung tương ứng với góc ở tâm 60° .
C. cung có độ dài bằng đường kính. **D.** cung có độ dài bằng nửa đường kính.

- Câu 29:** Trên đường tròn lượng góc với điểm gốc A , cung lượng góc có số đo 55° có điểm đầu A xác định
A. chỉ có một điểm cuối M . **B.** đúng hai điểm cuối M .
C. đúng 4 điểm cuối M . **D.** vô số điểm cuối M .

Lời giải:

Vì cung lượng góc có số đo xác định, điểm đầu A xác định nên chỉ có một điểm cuối M .

- Câu 30:** Có bao nhiêu điểm M trên đường tròn định hướng gốc A thỏa mãn $sđ AM = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$?
A. 3. **B.** 12. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải:

$$x = \alpha + \frac{k2\pi}{n}, n \in \mathbb{N}^* \text{ thì được biểu diễn bởi } n \text{ điểm trên đtlg vì vậy ta có } \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow n = 6.$$

- Câu 31:** Một cung tròn có độ dài bằng 2 lần bán kính. Số đo radian của cung tròn đó bằng
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải:

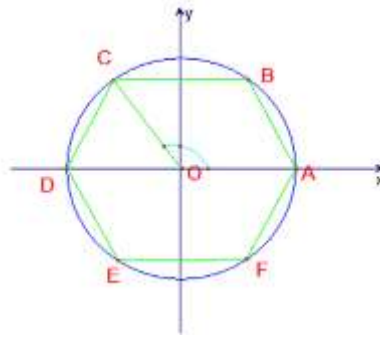
Ta có, cung tròn có độ dài bằng bán kính thì có số đo 1 radian. Vậy cung tròn đó có số đo là 2 radian.

- Câu 32:** Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $1 rad = 1^\circ$. **B.** $1 rad = 60^\circ$.
C. $1 rad = 180^\circ$. **D.** $1 rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

- Câu 33:** Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn lượng góc có gốc là A , các đỉnh lấy theo thứ tự đó và các điểm B, C có tung độ dương. Khi đó, góc lượng góc có tia đầu OA , tia cuối OC bằng:
A. 120° . **B.** -240° .
C. 120° hoặc -240° . **D.** $120^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải:

Theo bài ra ta có $\angle AOC = 120^\circ$ nên góc lượng góc có tia đầu OA , tia cuối OC có số đo bằng $120^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.



Câu 34: Góc có số đo 108° đổi ra radian là

- A. $\frac{3\pi}{5}$. B. $\frac{\pi}{10}$. C. $\frac{3\pi}{2}$. D. $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } 108^\circ = \frac{108^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{3\pi}{5}.$$

Câu 35: Đổi số đo góc 105° sang radian.

- A. $\frac{5\pi}{12}$. B. $\frac{7\pi}{12}$. C. $\frac{9\pi}{12}$. D. $\frac{5\pi}{8}$.

Lời giải:

$$105^\circ = \frac{105^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{7\pi}{12}.$$

Câu 36: Góc có số đo $\frac{2\pi}{5}$ đổi sang độ là:

- A. 240° . B. 135° . C. 72° . D. 270° .

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \frac{2\pi}{5} = \frac{2 \cdot 180^\circ}{5} = 72^\circ.$$

Câu 37: Góc có số đo $\frac{\pi}{9}$ đổi sang độ là:

- A. 15° . B. 18° . C. 20° . D. 25° .

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \frac{\pi}{9} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ.$$

Câu 38: Góc $63^\circ 48'$ gần bằng

- A. $1,108 \text{ rad}$. B. $1,107 \text{ rad}$. C. $1,114 \text{ rad}$. D. $1,113 \text{ rad}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } 63^\circ 48' = 63,8^\circ = \frac{63,8^\circ \times 3,1416}{180^\circ} \approx 1,114 \text{ rad}.$$

Câu 39: Cho $a = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Tìm k để $10\pi < a < 11\pi$.

- A. $k = 4$. B. $k = 6$. C. $k = 7$. D. $k = 5$.

Lời giải:

$$+ \text{Để } 10\pi < a < 11\pi \text{ thì } \frac{19\pi}{2} < k2\pi < \frac{21\pi}{2} \Rightarrow k = 5.$$

Câu 40: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và một trục (ℓ) đi qua O . Xác định số đo của các góc giữa tia OA với trục (ℓ) , biết trục (ℓ) đi qua đỉnh A của hình vuông.

A. $180^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

B. $90^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

C. $-90^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

D. $k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải:

Tia OA và trục (ℓ) cùng đi qua O và $A \Rightarrow$ góc giữa tia OA với trục (ℓ) là $0^\circ + k360^\circ$.

Câu 41: Biết OMB' và ONB' là các tam giác đều. Cung α có điểm đầu là A và điểm cuối trùng với B hoặc M hoặc N . Tính số đo của α .

A. $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

B. $\alpha = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

C. $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

D. $\alpha = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải:

+ Cung α có điểm đầu là A và điểm cuối trùng với B nên $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

+ $AM = AB + \frac{2\pi}{3}$, $AN = AM + \frac{2\pi}{3}$ nên chu kì của cung α là $\frac{2\pi}{3}$.

Câu 42: Trong mặt phẳng định hướng cho tia Ox và hình vuông $OABC$ vẽ theo chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ, biết $sd(Ox, OA) = 30^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$, $sd(Ox, BC)$ bằng:

A. $210^\circ + h360^\circ, h \in \mathbb{Z}$.

B. $135^\circ + h360^\circ, h \in \mathbb{Z}$.

C. $-210^\circ + h360^\circ, h \in \mathbb{Z}$.

D. $175^\circ + h360^\circ, h \in \mathbb{Z}$.

Lời giải:

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua O . Ta có:

$$sd(Ox, BC) = sd(Ox, OA) + sd(OA, OA') = 210^\circ + h360^\circ, h \in \mathbb{Z}.$$

Câu 43: Trên đường tròn với điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 60° . Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua trục Oy , số đo cung AN là

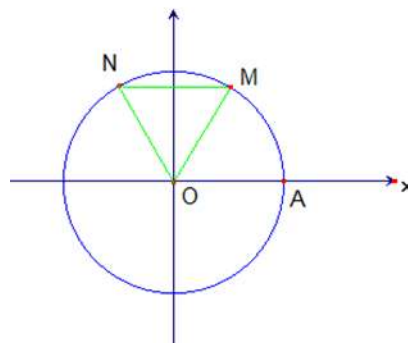
A. 120° .

B. -240° .

C. -120° hoặc 240° .

D. $120^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải:



Ta có: $AON = 60^\circ$, $MON = 60^\circ$ nên $AOM = 120^\circ$. Khi đó số đo cung AN bằng 120° .

Câu 44: Cho $\angle(Ox, Oy) = 22^\circ 30' + k360^\circ$. Tính k để $\angle(Ox, Oy) = 1822^\circ 30'$.

A. $k \in \emptyset$.

B. $k = 3$.

C. $k = -5$.

D. $k = 5$.

Lời giải:

Theo đề: $(Ox, Oy) = 1822^{\circ}30' \Leftrightarrow 22^{\circ}30' + k360^{\circ} = 1822^{\circ}30' \Leftrightarrow k = 5$.

Câu 45: Cho số đo cung $(Ou, Ov) = 25^{\circ} + k360^{\circ}, (k \in \mathbb{Z})$. Với giá trị nào của k thì $(Ou, Ov) = -1055^{\circ}$?

- A. $k = -1$. B. $k = 2$. C. $k = -3$. D. $k = 4$.

Lời giải:

Ta có: $(Ou, Ov) = 25^{\circ} + k360^{\circ} = -1055^{\circ} \Rightarrow k = -3$.

Câu 46: Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là

- A. 30° . B. 40° . C. 50° . D. 60° .

Lời giải:

+ 1 bánh răng tương ứng với $\frac{360^{\circ}}{72} = 5^{\circ} \Rightarrow 10$ bánh răng là 50° .

Câu 47: Trên đường tròn bán kính $r = 5$, độ dài của cung đo $\frac{\pi}{8}$ là

- A. $l = \frac{\pi}{8}$. B. $l = \frac{3\pi}{8}$. C. $l = \frac{5\pi}{8}$. D. $l = \frac{\pi}{4}$.

Lời giải:

Độ dài cung AB có số đo cung AB bằng n độ: $l = r.n = 5 \cdot \frac{\pi}{8}$.

Câu 48: Trên đường tròn bán kính $r = 15$, độ dài của cung có số đo 50° là

- A. $l = 750$. B. $l = 15 \cdot \frac{180}{\pi}$. C. $l = \frac{15\pi}{180}$. D. $l = \frac{25\pi}{6}$.

Lời giải:

Ta có: $50^{\circ} = \frac{5\pi}{18}$.

$\Rightarrow l = \frac{\pi \cdot r \cdot n^{\circ}}{180^{\circ}} = \frac{25\pi}{6}$.

Câu 49: Cho bốn cung (trên một đường tròn định hướng): $\alpha = -\frac{5\pi}{6}, \beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{25\pi}{3}, \delta = \frac{19\pi}{6}$. Các cung nào có điểm cuối trùng nhau?

- A. α và β ; γ và δ . B. β và γ ; α và δ . C. α, β, γ . D. β, γ, δ .

Lời giải:

Ta có: $\delta - \alpha = 4\pi \Rightarrow 2$ cung α và δ có điểm cuối trùng nhau.

$\gamma - \beta = 8\pi \Rightarrow$ hai cung β và γ có điểm cuối trùng nhau.

Câu 50: Cho góc lượng giác (OA, OB) có số đo bằng $\frac{\pi}{5}$. Hỏi trong các số sau, số nào là số đo của một góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối?

- A. $\frac{6\pi}{5}$. B. $-\frac{11\pi}{5}$. C. $\frac{9\pi}{5}$. D. $\frac{31\pi}{5}$.

Lời giải:

$\frac{31\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = 6\pi = 3 \cdot 2\pi$.

Câu 51: Trên đường tròn lượng giác gốc A cho các cung có số đo:

- I. $\frac{\pi}{4}$. II. $-\frac{7\pi}{4}$. III. $\frac{13\pi}{4}$. IV. $-\frac{71\pi}{4}$.

Hỏi cung nào có điểm cuối trùng nhau?

A. Chỉ I và II.

B. Chỉ I, II và III.

C. Chỉ I, II và IV.

D. Chỉ II, III và IV

Lời giải:

$$-\frac{7\pi}{4} = -2\pi + \frac{\pi}{4}; \quad \frac{13\pi}{4} = 2\pi + \frac{5\pi}{4}; \quad -\frac{71\pi}{4} = -18\pi + \frac{\pi}{4}$$

Dùng giả thiết sau cho các câu 1,2: Trên đường tròn lượng giác gốc A cho cung AM có

$$\text{sđ } AM = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

Câu 52: Cho góc α thỏa mãn $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\sin \alpha < 0$.

B. $\cos \alpha \geq 0$.

C. $\tan \alpha < 0$.

D. $\cot \alpha > 0$.

Lời giải:

Khẳng định đúng là $\tan \alpha < 0$.

Câu 53: Cho góc α thỏa mãn $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\tan \alpha > 0; \cot \alpha > 0$.

B. $\tan \alpha < 0; \cot \alpha < 0$.

C. $\tan \alpha > 0; \cot \alpha < 0$.

D. $\tan \alpha < 0; \cot \alpha > 0$.

Lời giải:

Vì $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$ nên điểm cuối của cung α thuộc góc phần tư thứ I, do đó $\tan \alpha > 0; \cot \alpha > 0$.

Câu 54: Cho $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$. Kết quả đúng là

A. $\tan \alpha > 0; \cot \alpha > 0$.

B. $\tan \alpha < 0; \cot \alpha < 0$.

C. $\tan \alpha > 0; \cot \alpha < 0$.

D. $\tan \alpha < 0; \cot \alpha > 0$.

Câu 55: Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Kết quả nào sau đây sai?

A. $\cos(-\alpha) < 0$.

B. $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) > 0$.

C. $\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) < 0$.

D. $\tan(\pi + \alpha) < 0$.

Lời giải:

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \cot\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha > 0 \quad (\text{do } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \tan \alpha < 0).$$

Câu 56: Cho α là một góc bất kì. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.

B. $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$.

C. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

D. $\tan \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \left(\alpha \neq k\pi \right)$.

Câu 57: Cho góc lượng giác α bất kì. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

B. $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = 1$.

C. $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

D. $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 2$.

Câu 58: Kết quả nào cho ta tìm được góc α ?

A. $\begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{4} \\ \cos \alpha = \frac{3}{4} \end{cases}$.

B. $\begin{cases} \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$.

C. $\begin{cases} \sin \alpha = \frac{5}{13} \\ \cos \alpha = \frac{12}{13} \end{cases}$.

D. $\begin{cases} \sin \alpha = 0.3 \\ \cos \alpha = 0.7 \end{cases}$.

Lời giải:

Vì $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{25}{169} + \frac{144}{169} = 1$.

Câu 59: $\cos \alpha$ không thể bằng giá trị nào dưới đây?

- A. 1. B. 2. C. 0,2. D. -0,9.

Câu 60: Cho góc α thỏa mãn $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ và $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $P = \sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}$ bằng

- A. $\frac{4+\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{4-\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải:

Cách 1: Ta có: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

Với $\cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

Vì $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ nên $\sin \alpha < 0 \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy: $P = \sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 = \frac{4-\sqrt{3}}{2}$.

Cách 2: Theo giả thiết: $\begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{3}$.

Vậy $P = \sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 = \frac{4-\sqrt{3}}{2}$.

Câu 61: Cho $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ biết $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Tính $\cos \alpha$; $\tan \alpha$

- A. $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$; $\tan \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$. B. $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$; $\tan \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{15}$.
C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$; $\tan \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{15}$. D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$; $\tan \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$.

Lời giải:

Ta có $\begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{4} \\ \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{15}{16} \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$; với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ nên $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Và $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ nên $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$.

Câu 62: Cho $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$ ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$). Khi đó, $\tan \alpha$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{21}}{5}$. B. $-\frac{\sqrt{21}}{2}$. C. $-\frac{\sqrt{21}}{5}$. D. $\frac{\sqrt{21}}{3}$.

Lời giải:

Ta có: $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$ (vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$).

Vậy, $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Câu 63: Tính giá trị biểu thức $P = \sin 30^\circ \cos 90^\circ + \sin 90^\circ \cos 30^\circ$.

- A. $P = 1$. B. $P = 0$. C. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $P = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải:

Ta có: $P = \sin 30^\circ \cos 90^\circ + \sin 90^\circ \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 64: $\cos 18^\circ - \cos 342^\circ$ bằng

- A. 1. B. 0. C. $2 \cos 18^\circ$. D. $-2 \cos 18^\circ$.

Lời giải:

$342^\circ = -18^\circ + 360^\circ$ nên $\cos 342^\circ = \cos(-18^\circ) = \cos 18^\circ$.

Câu 65: $2 \sin 27^\circ - \sin 153^\circ + \sin(-270^\circ) + \sin 333^\circ$ bằng

- A. 1. B. $2 \sin 27^\circ + 1$. C. 0. D. $\sin 27^\circ$.

Lời giải:

$153^\circ = 180^\circ - 27^\circ$ nên $\sin 153^\circ = \sin 27^\circ$; $-270^\circ = 90^\circ - 360^\circ$ nên $\sin(-270^\circ) = \sin 90^\circ = 1$

$333^\circ = -27^\circ + 360^\circ$ nên $\sin 333^\circ = \sin(-27^\circ) = -\sin 27^\circ$.

Câu 66: Giá trị biểu thức $M = \tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ$ bằng

- A. 1. B. 2. C. -1. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải:

$M = \tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ$
 $= (\tan 1^\circ \cdot \tan 89^\circ)(\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ) \dots (\tan 44^\circ \cdot \tan 46^\circ) \cdot \tan 45^\circ$
 $= (\tan 1^\circ \cdot \cot 1^\circ)(\tan 2^\circ \cdot \cot 2^\circ) \dots (\tan 44^\circ \cdot \cot 44^\circ) \cdot \tan 45^\circ = 1$.

Câu 67: Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **sai**?

- A. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$. B. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$. C. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$. D. $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cot x$.

Câu 68: Cho α là một góc bất kì. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$. B. $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$.
 C. $\tan(\pi + \alpha) = -\tan \alpha$. D. $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$.

Câu 69: Cho hai góc nhọn α và β phụ nhau. Hệ thức nào sau đây **sai**?

- A. $\sin \alpha = -\cos \beta$. B. $\cos \alpha = \sin \beta$. C. $\cos \beta = \sin \alpha$. D. $\cot \alpha = \tan \beta$.

Câu 70: Cho tam giác ABC bất kì. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. $\sin \frac{A+C}{2} = \cos \frac{B}{2}$. B. $\cos \frac{A+C}{2} = \sin \frac{B}{2}$.
 C. $\sin(A+B) = \sin C$. D. $\cos(A+B) = \cos C$.

Lời giải:

Ta có: $\cos(A+B) = \cos(\pi-C) = -\cos C$, do đó mệnh đề D sai.

Câu 71: Biểu thức $M = \tan\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) + \cot\left(\frac{11\pi}{2} - \alpha\right) - \tan\left(\frac{15\pi}{2} + \alpha\right) - \cot\left(\frac{19\pi}{2} + \alpha\right)$ bằng

- A. $\tan \alpha + \cot \alpha$ B. $2(\tan \alpha + \cot \alpha)$. C. $2(\tan \alpha - \cot \alpha)$. D. $\tan \alpha - \cot \alpha$

Lời giải:

$$\frac{7\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha + 3\pi \text{ nên } \tan\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha;$$

$$\frac{11\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha + 5\pi \text{ nên } \cot\left(\frac{11\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

$$\text{Tương tự: } \tan\left(\frac{15\pi}{2} + \alpha\right) = \cot(-\alpha) = -\cot \alpha; \cot\left(\frac{19\pi}{2} + \alpha\right) = \tan(-\alpha) = -\tan \alpha.$$

$$\text{Vậy } M = 2(\tan \alpha + \cot \alpha).$$

Câu 72: Cho $\tan x = 3$. Tính $P = \frac{2\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.

- A. $P = \frac{3}{2}$. B. $P = \frac{5}{4}$. C. $P = 3$. D. $P = \frac{2}{5}$.

Lời giải:

Do $\tan x = 3$ nên $\cos x \neq 0$. Chia cả tử và mẫu của P cho $\cos x$, ta được:

$$\text{Khi đó } P = \frac{2\tan x - 1}{\tan x + 1} = \frac{5}{4}.$$

Câu 73: Cho góc x thỏa mãn $\cot x = \frac{1}{2}$. Giá trị biểu thức $A = \frac{2}{\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x}$ bằng

- A. 6. B. 8. C. 10. D. 12.

Lời giải:

Do $\cot x = \frac{1}{2}$ nên $\sin x \neq 0$. Chia cả tử và mẫu của A cho $\sin^2 x$, ta được:

$$\text{Ta có: } A = \frac{2}{\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x} = \frac{\frac{2}{\sin^2 x}}{\frac{\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{2(1 + \cot^2 x)}{1 - \cot x - \cot^2 x}$$

$$\text{Vì } \cot x = \frac{1}{2} \text{ nên } A = 10.$$

Câu 74: Biết $\tan \alpha = 2$ và $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Giá trị $\sin \alpha + \cos \alpha$ bằng

- A. $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$. B. $1 - \sqrt{5}$. C. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$. D. $-\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Do } 180^\circ < \alpha < 270^\circ \text{ nên } \cos \alpha < 0 \text{ suy ra } \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}. \text{ Do đó } \sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{5}} = -\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 75: Cho biểu thức $M = \tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ \cdot \tan 60^\circ \cdot \tan 70^\circ \cdot \tan 80^\circ$. Giá trị của M bằng

A. $M = 0$.

B. $M = 1$.

C. $M = 4$.

D. $M = 8$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} M &= (\tan 10^\circ \cdot \tan 80^\circ)(\tan 20^\circ \cdot \tan 70^\circ)(\tan 30^\circ \cdot \tan 60^\circ)(\tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ) \\ &= (\tan 10^\circ \cdot \cot 10^\circ)(\tan 20^\circ \cdot \cot 20^\circ)(\tan 30^\circ \cdot \cot 30^\circ)(\tan 40^\circ \cdot \cot 40^\circ) = 1 \end{aligned}$$

Câu 76: Cho $\sin a = \frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $A = \frac{\cot a - \tan a}{\tan a + 2 \cot a}$ bằng

A. $\frac{1}{9}$.

B. $\frac{7}{9}$.

C. $\frac{17}{81}$.

D. $\frac{7}{17}$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \frac{\cot a - \tan a}{\tan a + 2 \cot a} = \frac{\frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\sin a}{\cos a}}{\frac{\sin a}{\cos a} + 2 \frac{\cos a}{\sin a}} = \frac{\frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\sin a \cos a}}{\frac{\sin^2 a + 2 \cos^2 a}{\sin a \cos a}} \\ &= \frac{(1 - \sin^2 a) - \sin^2 a}{\sin^2 a + 2(1 - \sin^2 a)} = \frac{1 - 2 \sin^2 a}{2 - \sin^2 a} = \frac{7}{17} \end{aligned}$$

Câu 77: Biểu thức $\sin^2 x \cdot \tan^2 x + 4 \sin^2 x - \tan^2 x + 3 \cos^2 x$ không phụ thuộc vào x và có giá trị bằng

A. 6.

B. 5.

C. 3.

D. 4.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \sin^2 x \cdot \tan^2 x + 4 \sin^2 x - \tan^2 x + 3 \cos^2 x &= (\sin^2 x - 1) \tan^2 x + 3 \sin^2 x + 3 \cos^2 x + \sin^2 x \\ &= -\cos^2 x \tan^2 x + 3 + \sin^2 x = -\cos^2 x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 3 + \sin^2 x = -\sin^2 x + 3 + \sin^2 x = 3. \end{aligned}$$

Câu 78: Giá trị biểu thức $A = \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x}$ không phụ thuộc vào x và bằng

A. 1.

B. -1.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $-\frac{1}{4}$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x} = \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)^2}{4 \sin^2 x \cos^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x} \\ A &= \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x + 1)(\cos^2 x - \sin^2 x - 1)}{4 \sin^2 x \cos^2 x} = \frac{2 \cos^2 x \cdot (-2 \sin^2 x)}{4 \sin^2 x \cos^2 x} = -1. \end{aligned}$$

Câu 79: Giá trị biểu thức $A = \sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x$ bằng

A. $A = -1$.

B. $A = 1$.

C. $A = 4$.

D. $A = -4$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x.$$

$$\text{Suy ra: } A = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1.$$

Câu 80: Biểu thức $A = \sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x}$ có giá trị là

A. -3.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải:

$$A = \sqrt{\sin^4 x + 4 - 4\sin^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4 - 4\cos^2 x} = |\sin^2 x - 2| + |\cos^2 x - 2|$$

$$= (2 - \sin^2 x) + (2 - \cos^2 x) = 3.$$

Câu 81: Biểu thức $B = \frac{\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$ bằng

A. $\tan \alpha$.

B. $\tan^2 \alpha$.

C. $\tan^3 \alpha$.

D. $\tan^4 \alpha$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } B = \frac{\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)} = \tan^4 \alpha.$$

Câu 82: Biểu thức $M = \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$ bằng

A. -2.

B. -1.

C. 1.

D. 2.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } M = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 1.$$

$$\left(\frac{\pi}{4} - x \text{ phụ với } \frac{\pi}{4} + x \longrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right).$$

HẾT

Huế, 08h20' Ngày 14 tháng 3 năm 2023

CHƯƠNG I

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Chủ đề 2: CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. CÔNG THỨC CỘNG

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

(giả sử các biểu thức đều có nghĩa)

2. CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

$$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$= 2 \cos^2 a - 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

(giả sử các biểu thức đều có nghĩa)

3. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

4. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

5. MỘT SỐ KẾT QUẢ CẦN LƯU Ý

1) $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$

$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$

2) Đặt $t = \tan \frac{a}{2}$. Lúc đó: $\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\tan a = \frac{2t}{1-t^2}$

3) $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin \left(a + \frac{\pi}{4} \right)$ $\cos a - \sin a = \sqrt{2} \cos \left(a + \frac{\pi}{4} \right)$

$1 + \sin 2a = (\sin a + \cos a)^2$

$1 - \sin 2a = (\sin a - \cos a)^2$

$$\tan a + \cot a = \frac{2}{\sin 2a}$$

$$\cot a - \tan a = 2\cot 2a$$

(giả sử các biểu thức đều có nghĩa)

II. BÀI TẬP MINH HỌA

Câu 1: Không sử dụng máy tính, tính các giá trị lượng giác sau: $\cos 795^\circ$, $\sin 18^\circ$, $\tan \frac{7\pi}{12}$, $\cot \frac{5\pi}{8}$.

Câu 2: Không sử dụng máy tính, tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

a) $A = \frac{1}{\cos 290^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3} \sin 250^\circ}$

b) $B = (1 + \tan 20^\circ)(1 + \tan 25^\circ)$

c) $C = \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ$

d) $D = \sin^2 \frac{\pi}{9} + \sin^2 \frac{2\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9}$

Câu 3: Không sử dụng máy tính, tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

a) $A = \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8}$;

b) $B = \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ$;

c) $C = \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5}$;

d) $D = \cos^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{2\pi}{7} + \cos^2 \frac{3\pi}{7}$.

Câu 4: Cho α, β thỏa mãn $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Tính $\cos(\alpha - \beta)$ và $\sin(\alpha + \beta)$.

Câu 5: Cho $\cos 2x = -\frac{4}{5}$, với $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin x$, $\cos x$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 6: Cho $\cos 4\alpha + 2 = 6\sin^2 \alpha$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\tan 2\alpha$.

Câu 7: Cho $\frac{1}{\tan^2 \alpha} + \frac{1}{\cot^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 7$. Tính $\cos 4\alpha$.

Câu 8: Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = \cot \frac{\alpha}{2}$ với $0 < \alpha < \pi$. Tính $\tan\left(\frac{\alpha + 2013\pi}{2}\right)$.

Câu 9: Cho $\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}$, $\tan \alpha = -2\tan \beta$. Tính $A = \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{8}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\beta - \frac{5\pi}{12}\right)\sin\left(\beta - \frac{\pi}{12}\right)$.

Câu 10: Chứng minh rằng với mọi góc lượng giác α làm cho biểu thức xác định thì

a) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4\alpha}{4}$;

b) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4\alpha$;

c) $\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \cot^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$.

Câu 11: Cho $0 < \alpha < \pi, \alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng:

a) $\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha} = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$;

b) $\frac{\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha}}{\sqrt{1 + \cos \alpha} - \sqrt{1 - \cos \alpha}} = \tan\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 12: Chứng minh rằng:

a) $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$;

b) $\cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2} = 2$ với $\sin \alpha + \sin \beta = 3\sin(\alpha + \beta), \alpha + \beta \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$;

$$c) \frac{\sin \alpha + \sin \beta \cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha - \sin \beta \sin(\alpha + \beta)} = \tan(\alpha + \beta).$$

Câu 13: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x :

$$a) A = \cos^2 \alpha + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right);$$

$$b) B = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \cdot \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos \left(\alpha + \frac{3\pi}{4} \right).$$

Câu 14: Đơn giản biểu thức sau: (giả sử các biểu thức có nghĩa)

$$a) A = \frac{\cos a + 2 \cos 2a + \cos 3a}{\sin a + \sin 2a + \sin 3a}; \quad b) B = \frac{\cos \left(a + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(a - \frac{\pi}{3} \right)}{\cot a - \cot \frac{a}{2}};$$

$$c) C = \cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \dots + \cos(a+nb) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Câu 15: Cho $\sin(a+b) = 2 \cos(a-b)$. Chứng minh rằng biểu thức $M = \frac{1}{2 - \sin 2a} + \frac{1}{2 - \sin 2b}$ không phụ thuộc vào a, b .

Câu 16: Chứng minh rằng với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ thì

$$a) 2 \cot^2 \alpha \geq 1 + \cos 2\alpha;$$

$$b) \cot \alpha \geq 1 + \cot 2\alpha.$$

Câu 17: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng: $\left(\sin \alpha + \frac{1}{2 \cos \alpha} \right) \left(\cos \alpha + \frac{1}{2 \sin \alpha} \right) \geq 2$.

Câu 18: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức sau:

$$a) A = \sin x + \cos x;$$

$$b) B = \sin^4 x + \cos^4 x.$$

Câu 19: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức $A = 2 - 2 \sin x - \cos 2x$

Câu 20: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

$$a) \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2};$$

$$b) \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C);$$

$$c) \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$$

Câu 21: Chứng minh trong mọi tam giác ABC không vuông, ta đều có:

$$a) \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C;$$

$$b) \cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1.$$

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 22: Với a, b là các góc bất kì, đẳng thức nào sau đây **sai**?

$$A. \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$$

$$B. \cos(a-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

$$C. \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

$$D. 2 \cos a \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b).$$

Câu 23: Cho góc a bất kì, đẳng thức nào sau đây đúng?

$$A. \sin 2x = 2 \sin x \cos x. \quad B. \sin 2x = \sin x \cos x. \quad C. \sin 2x = 2 \cos x. \quad D. \sin 2x = 2 \sin x.$$

Câu 24: Cho góc a bất kì, đẳng thức nào sau đây **sai**?

$$A. \cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a.$$

$$B. \sin^2 3a + \cos^2 3a = 3.$$

C. $\sin 4a = 2 \sin 2a \cos 2a$.

D. $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

Câu 25: Cho góc a bất kì, đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$.

B. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.

C. $\cos 2a = 1 - 2 \cos^2 a$.

D. $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$.

Câu 26: Cho góc a bất kì, đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\cos 2a = 2 \cos a - 1$.

B. $2 \sin^2 a = 1 - \cos 2a$.

C. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

D. $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

Câu 27: Cho góc a bất kì, đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$.

B. $\cos 2a = 2 \sin a \cos a$

C. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.

D. $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$.

Câu 28: Cho góc a bất kì, đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.

B. $\cos 2a = 2 \cos^2 a + 1$.

C. $\cos 2a = \cos^2 a + \sin^2 a$.

D. $\cos 2a = 2 \sin^2 a - 1$.

Câu 29: Với a, b là các góc bất kì, đẳng thức nào sau đây **sai**? (giả sử các biểu thức lượng giác đều có nghĩa)

A. $\tan(a-\pi) = \tan a$.

B. $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$.

C. $\sin a = \tan a \cos a$.

D. $\cos(a-b) = \sin a \sin b + \cos a \cos b$.

Câu 30: Với a, b là các góc bất kì, đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$.

B. $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$.

C. $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$.

D. $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]$.

Câu 31: Với a, b là các góc bất kì, đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\sin(a+b) = \sin a \sin b - \cos a \cos b$.

B. $\sin(a+b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

C. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

D. $\sin(a+b) = \sin a \sin b + \cos a \cos b$.

Câu 32: Cho góc a bất kì, đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \sin a - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos a$.

B. $\cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cos a - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a$.

C. $\cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right) = \cos a + \frac{1}{2}$.

D. $\cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a - \frac{1}{2} \cos a$.

Câu 33: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} - \frac{\cos 4\alpha}{4}$.

B. $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4\alpha}{4}$.

C. $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4\alpha}{2}$.

D. $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{2} - \frac{\cos 4\alpha}{4}$.

Câu 34: Cho góc x bất kì, đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$.

B. $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{4} \cos 4x$.

C. $\sin^4 x - \cos^4 x = -\cos 2x$.

D. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cos 4x$.

Câu 35: Tính giá trị của biểu thức $P = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$, biết $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$.

- A. $\frac{1}{3}$. B. 1. C. $\frac{9}{7}$. D. $\frac{7}{9}$.

Câu 36: Biểu thức $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right)$ được viết lại thành

- A. $\sin a + \frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin a + \frac{1}{2} \cos a$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin a - \frac{1}{2} \cos a$. D. $\frac{1}{2} \sin a - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos a$.

Câu 37: Biểu thức $\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)}$ bằng biểu thức nào sau đây?

- A. $\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b}$. B. $\frac{\sin a - \sin b}{\sin a + \sin b}$. C. $\frac{\tan a + \tan b}{\tan a - \tan b}$. D. $\frac{\cot a + \cot b}{\cot a - \cot b}$.

Câu 38: Giá trị biểu thức $\frac{\sin \frac{\pi}{15} \cdot \cos \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi}{15}}{\cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15} \cdot \sin \frac{\pi}{5}}$ bằng

- A. 1. B. -1. C. $-\frac{3}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 39: Cho $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. Tính $\cos 2\alpha$.

- A. $\frac{1}{8}$. B. $\frac{\sqrt{7}}{4}$. C. $-\frac{\sqrt{7}}{4}$. D. $-\frac{1}{8}$.

Câu 40: Cho góc lượng giác α thỏa mãn $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$, và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\sin 2\alpha$.

- A. $\frac{7}{9}$. B. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$. C. $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$. D. $-\frac{2}{3}$.

Câu 41: Cho $\cos x = -\frac{3}{5}$. Tính $\cos 2x$.

- A. $-\frac{7}{25}$. B. $-\frac{3}{10}$. C. $-\frac{8}{9}$. D. $\frac{7}{25}$.

Câu 42: Tính giá trị biểu thức $P = (1 - 3\cos 2\alpha)(2 + 3\cos 2\alpha)$, biết $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

- A. $\frac{49}{27}$. B. $\frac{50}{27}$. C. $\frac{48}{27}$. D. $\frac{42}{27}$.

Câu 43: Cho biết $\sin x + \cos x = -\frac{1}{2}$. Tính $\sin 2x$.

- A. $-\frac{3}{4}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. -1.

Câu 44: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\sin \alpha + 2\cos \alpha = -1$. Tính giá trị $\sin 2\alpha$.

- A. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$. B. $\frac{24}{25}$. C. $-\frac{2\sqrt{6}}{5}$. D. $-\frac{24}{25}$.

Câu 45: Cho góc α thỏa mãn $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $P = \frac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$.

- A. $P = -\frac{2\sqrt{5}}{3}$. B. $P = \frac{3}{2}$. C. $P = \frac{2\sqrt{5}}{3}$. D. $P = -\frac{3}{2}$.

Câu 46: Cho $\tan \alpha = 2$. Giá trị $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. 1. D. $-\frac{1}{3}$.

Câu 47: Cho α và β là hai góc nhọn mà $\tan \alpha = \frac{1}{7}$ và $\tan \beta = \frac{3}{4}$. Góc $\alpha + \beta$ có giá trị bằng

- A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{3}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 48: Nếu $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$, $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ thì $\sin 2\alpha$ bằng

- A. $\frac{\pi}{2}$. B. 1. C. $-\frac{1}{3}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 49: Biết $\sin a = -\frac{4}{5}$, $\cos b = \frac{3}{5}$ $\left(\pi < a < \frac{3\pi}{2}, 0 < b < \frac{\pi}{2}\right)$, tính $\cos(a-b)$.

- A. $\frac{7}{25}$. B. 0. C. -1. D. $-\frac{33}{65}$.

Câu 50: Cho hai góc α, β thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{5}{13}, \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$ và $\cos \beta = \frac{3}{5}, \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$. Tính giá trị đúng của $\cos(\alpha - \beta)$.

- A. $\frac{16}{65}$. B. $-\frac{18}{65}$. C. $\frac{18}{65}$. D. $-\frac{16}{65}$.

Câu 51: Giá trị của $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ bằng bao nhiêu khi $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$?

- A. $\frac{48+25\sqrt{3}}{11}$. B. $\frac{8-5\sqrt{3}}{11}$. C. $\frac{8-\sqrt{3}}{11}$. D. $\frac{48-25\sqrt{3}}{11}$.

Câu 52: Rút gọn biểu thức $M = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ ta được

- A. $M = \sqrt{3} \sin x$. B. $M = -\sqrt{3} \cos x$. C. $M = -\sqrt{3} \sin x$. D. $M = \sqrt{3} \cos x$.

Câu 53: Cho $\tan \alpha = 2$. Tính $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $-\frac{1}{3}$. C. 1. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 54: Cho $\sin a = \frac{4}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Tính $\tan\left(\frac{\pi}{6} - a\right)$.

- A. $\frac{-48+25\sqrt{3}}{11}$. B. $\frac{-48+25\sqrt{3}}{39}$. C. $\frac{48+25\sqrt{3}}{11}$. D. $\frac{48+25\sqrt{3}}{39}$.

Câu 55: Cho biết $\tan x = \frac{5}{7}$. Tính giá trị của biểu thức $P = 5 \sin 2x + 7 \cos 2x$.

- A. $P = 13$. B. $P = 7$. C. $P = 2$. D. $P = 9$.

Câu 56: Biết $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Tính $P = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ theo m .

- A. $\frac{m}{\sqrt{2}}$. B. $\frac{m}{2}$. C. $2m$. D. $m\sqrt{2}$.

Câu 57: Biết $\sin a = \frac{5}{13}$, $\cos b = -\frac{3}{5}$ với $0 < a < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < b < \pi$. Tính $\cos(a+b)$.

- A. $-\frac{63}{65}$. B. $\frac{21}{65}$. C. $-\frac{16}{65}$. D. $-\frac{56}{65}$.

Câu 58: Cho các góc α, β thỏa $\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \pi$, $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \beta = -\frac{2}{3}$. Tính $\sin(\alpha + \beta)$.

- A. $\frac{\sqrt{5} + 4\sqrt{2}}{9}$. B. $\frac{\sqrt{5} - 4\sqrt{2}}{9}$. C. $\frac{2\sqrt{10} - 2}{9}$. D. $-\frac{2 + 2\sqrt{10}}{9}$.

Câu 59: Cho $\tan(2a + b + 1) = 2$; $\tan(b - 3a + 2024) = 10$. Giá trị của $\tan(2023 - 5a)$ bằng:

- A. $-\frac{8}{21}$. B. $\frac{7}{15}$. C. $\frac{8}{21}$. D. $-\frac{7}{15}$.

Câu 60: Cho $\triangle ABC$ nếu có quan hệ $\sin A(\cos B + \cos C) = \sin B + \sin C$ thì đó là tam giác gì?

- A. Tam giác đều. B. Tam giác cân.
C. Tam giác vuông cân. D. Tam giác vuông.

Câu 61: Rút gọn biểu thức $M = \cos(115^\circ) \cdot \cos(-365^\circ) + \sin(115^\circ) \cdot \sin(-365^\circ)$.

- A. $M = \cos(-245^\circ)$. B. $M = \sin(480^\circ)$. C. $M = \sin(-245^\circ)$. D. $M = \cos(480^\circ)$.

Câu 62: Rút gọn biểu thức $A = \sin(x - y) \cos y + \cos(x - y) \sin y$.

- A. $A = \cos x$. B. $A = \sin x$. C. $A = \sin x \cdot \cos 2y$. D. $A = \cos x \cdot \cos 2y$.

Câu 63: Nếu $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ thì $\sin 2x$ bằng

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{3}{8}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $-\frac{3}{4}$.

Câu 64: Chọn đẳng thức đúng.

- A. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \sin a}{2}$. B. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \sin a}{2}$.
C. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \cos a}{2}$. D. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \cos a}{2}$.

Câu 65: Biểu thức $2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ bằng

- A. $\sin 2\alpha$. B. $\cos 2\alpha$. C. $\sin \alpha$. D. $\cos \alpha$.

Câu 66: Biểu thức $4 \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$ bằng

- A. $-3 + 4 \sin^2 \alpha$. B. $4 + 3 \sin^2 \alpha$. C. $3 - 4 \sin^2 \alpha$. D. $\sin^2 \alpha$.

- Câu 67:** Cho $\cos 2\alpha = m$. Tính theo m giá trị của biểu thức $A = 2\sin^2 \alpha + 4\cos^2 \alpha$.
A. $A = 3 + m$. **B.** $A = 4 + 2m$. **C.** $A = 4 + m$. **D.** $A = 3 - m$.
- Câu 68:** Cho tam giác ABC thỏa mãn $2\sin A \cdot \sin B = 1 + \cos C$, khẳng định nào sau đây đúng?
A. Tam giác ABC vuông tại C . **B.** Tam giác ABC vuông tại A .
C. Tam giác ABC cân tại C . **D.** Tam giác ABC cân tại A .
- Câu 69:** Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin A = 2\sin B \cos C$ và $A = 50^\circ$, khẳng định nào sau đây đúng?
A. $B = 60^\circ$. **B.** $C = 75^\circ$. **C.** $B = 65^\circ$. **D.** $C = 55^\circ$.
- Câu 70:** Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$, tính giá trị biểu thức $P = 2\tan \alpha + \tan 2\alpha$.
A. $P = \frac{8}{3}$. **B.** $P = \frac{2}{3}$. **C.** $P = \frac{4}{3}$. **D.** $P = 2$.
- Câu 71:** Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$, khẳng định nào sau đây đúng?
A. $\sin 2\alpha = \frac{3}{8}$. **B.** $\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$. **C.** $\sin 2\alpha = \frac{3}{4}$. **D.** $\sin 2\alpha = -\frac{3}{8}$.
- Câu 72:** Tính giá trị $A = \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{5\pi}{12}$.
A. $A = \frac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $A = \frac{1}{2}$. **C.** $A = \frac{1}{4}$. **D.** $A = \sqrt{3}$.
- Câu 73:** Cho biết $\sin^4 x = a + b \cdot \cos 2x + \cos 4x$ với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Tính tổng $S = a + b + c$.
A. $S = 1$. **B.** $S = -1$. **C.** $S = 4$. **D.** $S = 0$.
- Câu 74:** Cho góc α thỏa mãn $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ mà $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Tính $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$
A. $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{10}$. **B.** $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{15} - 2\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{15} - 2\sqrt{5}}{10}$.
- Câu 75:** Biết $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \beta = \frac{1}{4}$. Tính $\cos(\alpha - \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta)$.
A. $\frac{25}{144}$. **B.** $\frac{-19}{144}$. **C.** $\frac{5}{144}$. **D.** $\frac{-119}{144}$.
- Câu 76:** Đơn giản biểu thức $A = \frac{2\cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x}$ ta được kết quả nào sau đây?
A. $A = \sin x - \cos x$. **B.** $A = \cos x + \sin x$. **C.** $A = -\sin x - \cos x$. **D.** $A = \cos x - \sin x$.
- Câu 77:** Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin x + \sin 3x}{2\cos x}$.
A. $A = \sin 4x$. **B.** $A = \sin x$. **C.** $A = \sin 2x$. **D.** $A = \cos 2x$.
- Câu 78:** Rút gọn biểu thức $\frac{4\sin 2x \cdot \cos 2x}{\cos 3x + \cos x}$ (với điều kiện biểu thức có nghĩa), ta được biểu thức có dạng $\frac{a \sin 2x}{b \cos x}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$, $\frac{a}{b}$ tối giản. Giá trị của $a^2 + b$ bằng
A. 2. **B.** -5. **C.** 5. **D.** 3.
- Câu 79:** Rút gọn biểu thức $P = \frac{\cos a - \cos 5a}{\sin 4a + \sin 2a}$ (với $\sin 4a + \sin 2a \neq 0$) ta được:
A. $P = 2 \cot a$. **B.** $P = 2 \cos a$. **C.** $P = 2 \tan a$. **D.** $P = 2 \sin a$.

- Câu 80:** Rút gọn biểu thức: $\frac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}$ bằng:
- A. $\tan^2 \alpha$. B. $-\tan^2 \alpha$. C. $\tan^2 2\alpha$. D. $\cot^2 \alpha$.
- Câu 81:** Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin x + \sin 3x}{2\cos x}$.
- A. $A = \sin 4x$. B. $A = \sin x$. C. $A = \sin 2x$. D. $A = \cos 2x$.
- Câu 82:** Biến đổi thành tích biểu thức $\frac{\sin 7\alpha - \sin 5\alpha}{\sin 7\alpha + \sin 5\alpha}$ ta được
- A. $\tan 5\alpha \cdot \tan \alpha$. B. $\cos \alpha \cdot \sin \alpha$. C. $\cos 2\alpha \cdot \sin 3\alpha$. D. $\cot 6\alpha \cdot \tan \alpha$.
- Câu 83:** Biết $\tan x = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $I = \frac{\cos 5x + \cos 3x}{\sin 5x - \sin 3x}$.
- A. $I = \frac{1}{3}$. B. $I = -\frac{1}{3}$. C. $I = 3$. D. $I = -3$.
- Câu 84:** Giả sử biểu thức $M = \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}$ có nghĩa, khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $M = \tan 2\alpha$. B. $M = \cot 2\alpha$. C. $M = -\tan 2\alpha$. D. $M = -\cot 2\alpha$.
- Câu 85:** Biểu thức $\frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha}$ có kết quả rút gọn bằng
- A. $\cos 2\alpha$. B. $\cot 2\alpha$. C. $\tan 2\alpha$. D. $\sin 2\alpha$.
- Câu 86:** Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sin 2x - \sin x}{1 - \cos x + \cos 2x}$ (với điều kiện biểu thức có nghĩa) ta được kết quả
- A. $P = \cot x$. B. $P = \tan x$. C. $P = \cos x$. D. $P = \sin x$.
- Câu 87:** Biểu thức thu gọn của biểu thức $B = \left(\frac{1}{\cos 2x} + 1 \right) \cdot \tan x$ là
- A. $\tan 2x$. B. $\cot 2x$. C. $\cos 2x$. D. $\sin x$.
- Câu 88:** Rút gọn biểu thức $\frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{2\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1}$ bằng
- A. $-2\cos \alpha$. B. $\cos \alpha$. C. $2\cos \alpha$. D. $2\sin \alpha$.
- Câu 89:** Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin 2a + \sin 5a - \sin 3a}{1 + \cos a - 2\sin^2 2a}$.
- A. $\cos a$. B. $\sin a$. C. $2\cos a$. D. $2\sin a$.
- Câu 90:** Với điều kiện xác định, hãy rút gọn biểu thức $A = \frac{(\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2}{\cot x - \tan x}$.
- A. $A = \frac{2}{\cot 2x}$. B. $A = 4$. C. $A = \frac{4}{\cot 2x}$. D. $A = \frac{8}{\cot 2x}$.
- Câu 91:** Cho góc nhọn α thỏa mãn $\cos \alpha = 2\sin \alpha$, khẳng định nào sau đây sai?
- A. $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. B. $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. C. $\cot \alpha = 2$. D. $\sin 2\alpha = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.
- Câu 92:** Nếu α, β, γ là ba góc nhọn và thỏa mãn $\tan(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = \cos \gamma$ thì
- A. $\alpha + \beta + \gamma = 45^\circ$. B. $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$.
C. $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. D. $\alpha + \beta + \gamma = 120^\circ$.

Câu 93: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \sin \alpha + \sin \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right)$.

- A. 2. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. 1.

Câu 94: Giá trị lớn nhất của biểu thức $\sin^4 x + \cos^7 x$ là

- A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 1.

Câu 95: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha$.

- A. 2. B. $-1 - \sqrt{3}$. C. -2. D. 0.

Câu 96: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$.

- A. $M + 4m = 0$. B. $M + 4m = 2$. C. $M + 4m = 4$. D. $M + 4m = 1$.

Câu 97: Cho $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sin^4 x + \cos^4 x$.

- A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{4}$. D. 0.

Câu 98: Cho tam giác ABC . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2 \cos A + 2 \cos B + 2\sqrt{3} \cos C$.

- A. $2\sqrt{3}$. B. $\frac{7\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

IV. LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Không sử dụng máy tính, tính các giá trị lượng giác sau: $\cos 795^\circ, \sin 18^\circ, \tan \frac{7\pi}{12}, \cot \frac{5\pi}{8}$.

Lời giải:

Vì $795^\circ = 75^\circ + 2.360^\circ = 30^\circ + 45^\circ + 2.360^\circ$ nên

$$\cos 795^\circ = \cos 75^\circ = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Vì $54^\circ + 36^\circ = 90^\circ$ nên $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ$

Mà $\cos 36^\circ = \cos(2.18^\circ) = 1 - 2\sin^2 18^\circ$

$$\begin{aligned} &= \sin 18^\circ (1 - 2\sin^2 18^\circ) + 2\sin 18^\circ \cos^2 18^\circ = \sin 18^\circ (1 - 2\sin^2 18^\circ) + 2\sin 18^\circ (1 - \sin^2 18^\circ) \\ &= 3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } 3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ \Leftrightarrow (\sin 18^\circ - 1)(4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 18^\circ = 1 \text{ hoặc } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \text{ hoặc } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$\text{Vì } 0 < \sin 18^\circ < 1 \text{ nên } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

$$\tan \frac{7\pi}{12} = \tan \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}; \cot \frac{5\pi}{8} = \cot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = -\tan \frac{\pi}{8}.$$

$$\text{Ta lại có } 1 = \tan \frac{\pi}{4} = \tan \left(2 \cdot \frac{\pi}{8} \right) = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}}$$

$$\text{Suy ra } 1 - \tan^2 \frac{\pi}{8} = 2 \tan \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow \tan^2 \frac{\pi}{8} + 2 \tan \frac{\pi}{8} - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan \frac{\pi}{8} = -1 - \sqrt{2} \text{ hoặc } \tan \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}$$

$$\text{Do } \tan \frac{\pi}{8} > 0 \text{ nên } \tan \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}. \text{ Vậy } \cot \frac{5\pi}{8} = 1 - \sqrt{2}.$$

Câu 2: Không sử dụng máy tính, tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

$$\text{a) } A = \frac{1}{\cos 290^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3} \sin 250^\circ}$$

$$\text{b) } B = (1 + \tan 20^\circ)(1 + \tan 25^\circ)$$

$$\text{c) } C = \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ$$

$$\text{d) } D = \sin^2 \frac{\pi}{9} + \sin^2 \frac{2\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9}$$

Lời giải:

$$\text{a) Ta có } \cos 290^\circ = \cos(180^\circ + 90^\circ + 20^\circ) = -\cos(90^\circ + 20^\circ) = \sin 20^\circ$$

$$\sin 250^\circ = \sin(180^\circ + 90^\circ - 20^\circ) = -\sin(90^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\sqrt{3} \cos 20^\circ} = \frac{\sqrt{3} \sin 20^\circ - \sin 20^\circ}{\sqrt{3} \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ} = 4 \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 20^\circ - \frac{1}{2} \sin 20^\circ}{\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ} \\ &= 4 \frac{\sin 60^\circ \cos 20^\circ - \cos 60^\circ \sin 20^\circ}{\sqrt{3} \sin 40^\circ} = \frac{4 \sin 40^\circ}{\sqrt{3} \sin 40^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Cách 1: Ta có } B &= \left(1 + \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} \right) \left(1 + \frac{\sin 25^\circ}{\cos 25^\circ} \right) = \frac{\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} \cdot \frac{\sin 25^\circ + \cos 25^\circ}{\cos 25^\circ} \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{\sin 20^\circ \cos 45^\circ + \cos 20^\circ \sin 45^\circ}{\cos 20^\circ} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sin 25^\circ \cos 45^\circ + \cos 25^\circ \sin 45^\circ}{\cos 25^\circ} = 2 \frac{\sin 65^\circ \sin 70^\circ}{\cos 20^\circ \cos 25^\circ} = 2. \end{aligned}$$

$$\text{Cách 2: Ta có } \tan 45^\circ = \tan(20^\circ + 25^\circ) = \frac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 25^\circ}$$

$$\text{Suy ra } 1 = \frac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 25^\circ} \Leftrightarrow \tan 20^\circ + \tan 25^\circ + \tan 20^\circ \tan 25^\circ = 1 \Leftrightarrow (1 + \tan 20^\circ)(1 + \tan 25^\circ) = 2.$$

Vậy $B = 2$.

$$\text{c) } C = \tan 9^\circ + \tan 81^\circ - (\tan 27^\circ + \tan 63^\circ)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin 9^\circ \cos 81^\circ + \sin 81^\circ \cos 9^\circ}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ} - \frac{\sin 27^\circ \cos 63^\circ + \sin 63^\circ \cos 27^\circ}{\cos 27^\circ \cos 63^\circ} \\ &= \frac{1}{\cos 9^\circ \sin 9^\circ} - \frac{1}{\cos 27^\circ \sin 27^\circ} = \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = \frac{2(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = \frac{4 \cos 36^\circ \cdot \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ} = 4 \end{aligned}$$

$$\text{d) } D = \sin^2 \frac{\pi}{9} + \sin^2 \frac{2\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} = \left(\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{2\pi}{9} \right)^2 - \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9}$$

$$= \left(2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{18} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{9} \right) = \cos^2 \frac{\pi}{18} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \cos \frac{\pi}{9} \right)$$

$$= \frac{1 + \cos \frac{\pi}{9}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \cos \frac{\pi}{9} \right) = \frac{3}{4}.$$

Lưu ý: Biến đổi sau thường xuyên được sử dụng:

$$\sin x \pm \sqrt{3} \cos x = 2 \left[\frac{1}{2} \sin x \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right] = 2 \sin \left(x \pm \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\sqrt{3} \sin x \pm \cos x = 2 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \pm \frac{1}{2} \cos x \right] = 2 \sin \left(x \pm \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right] = \sqrt{2} \sin \left(x \pm \frac{\pi}{4} \right).$$

Câu 3: Không sử dụng máy tính, tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

a) $A = \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8};$

b) $B = \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ;$

c) $C = \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5};$

d) $D = \cos^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{2\pi}{7} + \cos^2 \frac{3\pi}{7}.$

Lời giải:

a) $A = \frac{1}{2} \left(2 \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \right) \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{16}$

b) Ta có $B = \frac{1}{2} \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$

Do đó: $16 \sin 20^\circ \cdot B = 8 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$
 $= 4 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ = \sin 160^\circ.$

Suy ra $B = \frac{\sin 160^\circ}{16 \sin 20^\circ} = \frac{1}{16}.$

c) Ta có $C = 2 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}.$

Vì $\sin \frac{\pi}{5} \neq 0$ nên $2 \sin \frac{\pi}{5} \cdot C = 4 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = 2 \sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{4\pi}{5}.$

Suy ra $C = \frac{1}{2}.$

c) $D = \frac{1 + \cos \frac{2\pi}{7}}{2} + \frac{1 + \cos \frac{4\pi}{7}}{2} + \frac{1 + \cos \frac{6\pi}{7}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \right)$

Xét $T = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}.$

Vì $\sin \frac{\pi}{7} \neq 0$ nên $2 \sin \frac{\pi}{7} T = 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7}$

$= \left(\sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \right) + \left(\sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} \right) + \left(\sin \pi - \sin \frac{5\pi}{7} \right) = -\sin \frac{\pi}{7}.$

Suy ra $T = -\frac{1}{2}$.

Vậy $D = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$.

Câu 4: Cho α, β thỏa mãn $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Tính $\cos(\alpha - \beta)$ và $\sin(\alpha + \beta)$.

Lời giải:

Ta có $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}$ (1)

$\cos \alpha + \cos \beta = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta = \frac{3}{2}$ (2)

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được:

$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta = 2$

$\Leftrightarrow 2 + 2(\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta) = 2 \Leftrightarrow 2 \cos(\alpha - \beta) = 0$

Vậy $\cos(\alpha - \beta) = 0$. (*)

Từ giả thiết ta có $(\sin \alpha + \sin \beta)(\cos \alpha + \cos \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) + \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Mặt khác: $\sin 2\alpha + \sin 2\beta = 2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = 0$ (Do $\cos(\alpha - \beta) = 0$ từ (*))

Suy ra $\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 5: Cho $\cos 2x = -\frac{4}{5}$, với $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin x$, $\cos x$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải:

Vì $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin x > 0$, $\cos x > 0$.

Áp dụng công thức hạ bậc, ta có: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{9}{10} \Rightarrow \sin x = \frac{3}{\sqrt{10}}$;

$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Ta có: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{3}{5}$.

Theo công thức cộng, ta có:

$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{10}}$;

$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \sin 2x = -\frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{\sqrt{2}}{10}$.

Câu 6: Cho $\cos 4\alpha + 2 = 6\sin^2 \alpha$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\tan 2\alpha$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \cos 4\alpha + 2 = 6\sin^2 \alpha \Leftrightarrow 2\cos^2 2\alpha - 1 + 2 = 3(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2\alpha + 3\cos 2\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2\alpha = \frac{1}{2} \\ \cos 2\alpha = -2 \end{cases} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{1}{2} \text{ (Vì } \cos 2\alpha + 2 > 0 \text{)}$$

$$\text{Ta có: } 1 + \tan^2 2\alpha = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} \Rightarrow \tan^2 2\alpha = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} - 1 = 3.$$

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \pi < 2\alpha < 2\pi$ nên $\sin 2\alpha < 0$. Mặt khác $\cos 2\alpha > 0$ do đó $\tan 2\alpha < 0$.

$$\text{Vậy } \tan 2\alpha = -\sqrt{3}.$$

Câu 7: Cho $\frac{1}{\tan^2 \alpha} + \frac{1}{\cot^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 7$. Tính $\cos 4\alpha$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \frac{1}{\tan^2 \alpha} + \frac{1}{\cot^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 7 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 \alpha + 1}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha} = 7$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + 1) + \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha + 1)}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = 7$$

$$\Leftrightarrow \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 1 = 7\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 1 = 7\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow 2 = 9\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \Leftrightarrow 8 = 9(2\sin \alpha \cos \alpha)^2$$

$$\Leftrightarrow 8 = 9\sin^2 2\alpha \Leftrightarrow 16 = 9(1 - \cos 4\alpha) \Leftrightarrow \cos 4\alpha = -\frac{7}{9}.$$

$$\text{Vậy } \cos 4\alpha = -\frac{7}{9}.$$

Câu 8: Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = \cot \frac{\alpha}{2}$ với $0 < \alpha < \pi$. Tính $\tan\left(\frac{\alpha + 2013\pi}{2}\right)$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \sin \alpha = 2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 1}$$

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 1}$$

$$\text{Do đó: } \sin \alpha + \cos \alpha = \cot \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \frac{2\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 1} + \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 1} = \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{\alpha}{2} \left(1 + 2 \tan \frac{\alpha}{2} - \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) = 1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \tan^3 \frac{\alpha}{2} - \tan^2 \frac{\alpha}{2} - \tan \frac{\alpha}{2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\tan \frac{\alpha}{2} - 1 \right)^2 \left(\tan \frac{\alpha}{2} + 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \pm 1$$

Vì $0 < \alpha < \pi \Rightarrow 0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ do đó $\tan \frac{\alpha}{2} > 0$ nên $\tan \frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \cot \frac{\alpha}{2} = 1$

$$\text{Ta có } \tan \left(\frac{\alpha + 2013\pi}{2} \right) = \tan \left(\frac{\alpha}{2} + 2006\pi + \frac{\pi}{2} \right) = -\cot \frac{\alpha}{2} = -1$$

$$\text{Vậy } \tan \left(\frac{\alpha + 2013\pi}{2} \right) = -1.$$

Lưu ý: Ta có thể biểu diễn $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ qua $t = \tan \frac{\alpha}{2}$ như sau:

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tan \alpha = \frac{2t}{1-t^2}, \cot \alpha = \frac{1-t^2}{2t}$$

(với α làm các biểu thức có nghĩa)

Câu 9: Cho $\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}$, $\tan \alpha = -2 \tan \beta$. Tính $A = \sin \left(\alpha + \frac{3\pi}{8} \right) \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{8} \right) + \sin \left(\beta - \frac{5\pi}{12} \right) \sin \left(\beta - \frac{\pi}{12} \right)$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\text{và } \tan \alpha = -2 \tan \beta \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \beta = -2 \sin \beta \cos \alpha \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta được } \begin{cases} \cos \alpha \sin \beta = -\frac{1}{3} \\ \sin \alpha \cos \beta = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = \frac{1}{9} \\ \sin^2 \alpha \cos^2 \beta = \frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta = \frac{1}{9} \\ \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) = \frac{4}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta = \frac{1}{9} \\ \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 - \sin^2 \beta - \frac{1}{3}) \sin^2 \beta = \frac{1}{9} \\ \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin^4 \beta - \frac{2}{3} \sin^2 \beta + \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{3} \right)^2 = 0 \Rightarrow \sin^2 \beta = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Do đó } \sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Ta có } \sin \left(\alpha + \frac{3\pi}{8} \right) \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{8} \right) = \frac{1}{2} \left[\sin \left(2\alpha + \frac{\pi}{2} \right) - \sin \frac{\pi}{4} \right] = \frac{1}{2} \left(\cos 2\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - 2 \sin^2 \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - 2 \cdot \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{2 + 3\sqrt{2}}{12}$$

$$\sin \left(\beta - \frac{\pi}{12} \right) \cos \left(\beta - \frac{5\pi}{12} \right) = \frac{1}{2} \left[\sin \left(2\beta - \frac{\pi}{2} \right) + \sin \frac{\pi}{3} \right] = \frac{1}{2} \left[-\cos 2\beta + \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(-1 + 2 \sin^2 \beta + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(-1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{-2 + 3\sqrt{2}}{12}$$

$$\text{Do đó } A = -\frac{2 + 3\sqrt{2}}{12} + \frac{-2 + 3\sqrt{2}}{12} = -\frac{1}{3}.$$

Câu 10: Chứng minh rằng với mọi góc lượng giác α làm cho biểu thức xác định thì

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha &= \frac{3}{4} + \frac{\cos 4\alpha}{4}; & \text{b) } \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha &= \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha; \\ \text{c) } \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} &= \cot^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right). \end{aligned}$$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha \\ &= 1 - \frac{1 - \cos 4\alpha}{4} = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4\alpha}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha &= (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) \\ &= \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{3}{8} (1 - \cos 4\alpha) \\ &= \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có } \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} \\ &= \frac{\left[\sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right]^2}{\left[\sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right]^2} = \frac{2 \cos^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)}{2 \sin^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)} = \cot^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Cách khác: } \cot^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \left(\frac{1}{\tan \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)} \right)^2 = \left(\frac{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \alpha}{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \alpha} \right)^2 = \left(\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} \right)^2 = \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}.$$

Câu 11: Cho $0 < \alpha < \pi, \alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha} = 2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right); \quad \text{b) } \frac{\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha}}{\sqrt{1 + \cos \alpha} - \sqrt{1 - \cos \alpha}} = \tan \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Lời giải:

$$\text{a) Do } 0 < \alpha < \pi \longrightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} \text{ nên } \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) > 0, \sin \alpha > 0$$

$$\text{Đẳng thức tương đương với } \left(\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha} \right)^2 = 4 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{1 + \cos \alpha} \sqrt{1 - \cos \alpha} = 2 \left[1 - \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) \right] \Leftrightarrow \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ (luôn đúng)} \Rightarrow \text{đ.p.c.m.}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } VT &= \frac{(\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha})^2}{(\sqrt{1 + \cos \alpha} - \sqrt{1 - \cos \alpha})(\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha})} \\ &= \frac{2 + 2\sqrt{1 + \cos \alpha} \sqrt{1 - \cos \alpha}}{2 \cos \alpha} = \frac{1 + \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{1 + |\sin \alpha|}{\cos \alpha}. \end{aligned}$$

Vì $0 < \alpha < \pi$ nên $\sin \alpha > 0$ do đó

$$\begin{aligned} VT &= \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2}{\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right)} \\ &= \frac{\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{2} \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{2} \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} = \tan \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = VP \Rightarrow \text{đ.p.c.m.} \end{aligned}$$

Câu 12: Chứng minh rằng:

a) $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$;

b) $\cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2} = 2$ với $\sin \alpha + \sin \beta = 3 \sin(\alpha + \beta), \alpha + \beta \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$;

c) $\frac{\sin \alpha + \sin \beta \cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha - \sin \beta \sin(\alpha + \beta)} = \tan(\alpha + \beta)$.

Lời giải:

a) Ta có $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = -\frac{1}{2} [\cos 2\alpha - \cos 2\beta]$

$$= -\frac{1}{2} [(1 - 2\sin^2 \alpha) - (1 - 2\sin^2 \beta)] = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

b) Từ giả thiết ta có $2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 6 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$

Do $\alpha + \beta \neq k2\pi \Rightarrow \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \neq 0$ suy ra $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 3 \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = 3 \left(\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \Leftrightarrow \cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2} = 2 \Rightarrow \text{đ.p.c.m.}$$

c) Ta có $VT = \frac{\sin \alpha + \frac{1}{2} [\sin(\alpha + 2\beta) + \sin(-\alpha)]}{\cos \alpha - \left(-\frac{1}{2} \right) [\cos(\alpha + 2\beta) - \cos(-\alpha)]} = \frac{\sin \alpha + \sin(\alpha + 2\beta)}{\cos \alpha + \cos(\alpha + 2\beta)}$

$$= \frac{2 \sin(\alpha + \beta) \cos(-\beta)}{2 \cos(\alpha + \beta) \cos(-\beta)} = \tan(\alpha + \beta) = VP \Rightarrow \text{đ.p.c.m.}$$

Câu 13: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x :

a) $A = \cos^2 \alpha + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right);$

b) $B = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \cdot \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos \left(\alpha + \frac{3\pi}{4} \right).$

Lời giải:

a) Ta có: $A = \cos^2 \alpha + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right)$
 $= \frac{1}{2} \left[3 + \cos 2\alpha + \cos \left(\frac{4\pi}{3} + 2\alpha \right) + \cos \left(\frac{4\pi}{3} - 2\alpha \right) \right]$
 $= \frac{1}{2} \left[3 + \cos 2\alpha + 2 \cos \frac{4\pi}{3} \cos 2\alpha \right] = \frac{3}{2}.$

b) Vì $\alpha + \frac{\pi}{6} = \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right)$

và $\cos \left(\alpha + \frac{3\pi}{4} \right) = -\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$ nên

$$B = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \cdot \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \cdot \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \cos \left[\left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) - \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right] = \cos \left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}.$$

Câu 14: Đơn giản biểu thức sau: (giả sử các biểu thức có nghĩa)

a) $A = \frac{\cos a + 2 \cos 2a + \cos 3a}{\sin a + \sin 2a + \sin 3a};$

b) $B = \frac{\cos \left(a + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(a - \frac{\pi}{3} \right)}{\cot a - \cot \frac{a}{2}};$

c) $C = \cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \dots + \cos(a+nb) \quad (n \in \mathbb{N}).$

Lời giải:

a) $A = \frac{(\cos a + \cos 3a) + 2 \cos 2a}{(\sin a + \sin 3a) + 2 \sin 2a} = \frac{2 \cos 2a \cos a + 2 \cos 2a}{2 \sin 2a \cos a + 2 \sin 2a} = \frac{2 \cos 2a (\cos a + 1)}{2 \sin 2a (\cos a + 1)} = \cot 2a$

b) Ta có $\cos \left(a + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(a - \frac{\pi}{3} \right) = 2 \cos a \cos \frac{\pi}{3} = \cos a$

và $\cot a - \cot \frac{a}{2} = \frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\cos \frac{a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} = \frac{\sin \frac{a}{2} \cos a - \cos \frac{a}{2} \sin a}{\sin a \sin \frac{a}{2}} = \frac{\sin \left(\frac{a}{2} - a \right)}{\sin a \sin \frac{a}{2}} = \frac{-\sin \frac{a}{2}}{\sin a \sin \frac{a}{2}} = -\frac{1}{\sin a}.$

$$\text{Suy ra } B = \frac{\cos a}{-\frac{1}{\sin a}} = -\sin a \cos a = -\frac{\sin 2a}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có } C \cdot 2 \sin \frac{b}{2} &= 2 \sin \frac{b}{2} \cos a + 2 \sin \frac{b}{2} \cos(a+b) + 2 \sin \frac{b}{2} \cos(a+2b) + \dots + 2 \sin \frac{b}{2} \cos(a+nb) \\ &= \sin\left(\frac{b}{2} + a\right) + \sin\left(\frac{b}{2} - a\right) + \sin\left(\frac{3b}{2} + a\right) + \sin\left(-\frac{b}{2} - a\right) + \sin\left(\frac{5b}{2} + a\right) + \sin\left(-\frac{3b}{2} - a\right) \\ &\quad + \dots + \sin\left(\frac{(2n+1)b}{2} + a\right) + \sin\left(-\frac{(2n-1)b}{2} - a\right) \\ &= \sin\left(\frac{b}{2} - a\right) + \sin\left(\frac{(2n+1)b}{2} + a\right) = 2 \sin(n+1)b \cos\left(\frac{nb}{2} - a\right) \\ \text{Suy ra } C &= \frac{\sin(n+1)b \cos\left(\frac{nb}{2} - a\right)}{\sin \frac{b}{2}}. \end{aligned}$$

Câu 15: Cho $\sin(a+b) = 2 \cos(a-b)$. Chứng minh rằng biểu thức $M = \frac{1}{2 - \sin 2a} + \frac{1}{2 - \sin 2b}$ không phụ thuộc vào a, b .

Lời giải:

$$\text{Ta có } M = \frac{4 - (\sin 2a + \sin 2b)}{(2 - \sin 2a)(2 - \sin 2b)} = \frac{4 - (\sin 2a + \sin 2b)}{4 - 2(\sin 2a + \sin 2b) + \sin 2a \sin 2b}$$

$$\text{Ta có } \sin 2a + \sin 2b = 2 \sin(a+b) \cos(a-b)$$

$$\text{Mà } \sin(a+b) = 2 \cos(a-b) \Rightarrow \sin^2(a+b) = 4 \cos^2(a-b)$$

$$\text{nên } \cos 2(a+b) - \cos 2(a-b) = 1 - 2 \sin^2(a+b) - [2 \cos^2(a-b) - 1]$$

$$= 2 - 2[\sin^2(a+b) + \cos^2(a-b)] = 2 - 10 \cos^2(a-b)$$

$$\text{Suy ra } M = \frac{4 - 4 \cos^2(a-b)}{4 - 8 \cos^2(a-b) - \frac{1}{2} \cdot [2 - 10 \cos^2(a-b)]} = \frac{4 - 4 \cos^2(a-b)}{3 - 3 \cos^2(a-b)} = \frac{4}{3} \text{ (đ.p.c.m.)}$$

Câu 16: Chứng minh rằng với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ thì

a) $2 \cot^2 \alpha \geq 1 + \cos 2\alpha$;

b) $\cot \alpha \geq 1 + \cot 2\alpha$.

Lời giải:

a) Bất đẳng thức tương đương với

$$2 \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) \geq 2 \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \geq 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \sin^2 \alpha \geq 2 \Leftrightarrow \sin^4 \alpha - 2 \sin^2 \alpha + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 \alpha - 1)^2 \geq 0 \text{ (đúng) (đ.p.c.m.)}$$

Cách khác: Áp dụng BĐT Cauchy: $\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \sin^2 \alpha \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} \cdot \sin^2 \alpha} = 2$.

b) Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \geq \frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \Leftrightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \geq \frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} (*)$$

$$\text{Vì } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases} \text{ nên } (*) \Leftrightarrow 2 \cos^2 \alpha \geq \sin 2\alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \sin 2\alpha \text{ (đúng) (đ.p.c.m)}$$

Câu 17: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng: $\left(\sin \alpha + \frac{1}{2 \cos \alpha}\right) \left(\cos \alpha + \frac{1}{2 \sin \alpha}\right) \geq 2$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \left(\sin \alpha + \frac{1}{2 \cos \alpha}\right) \left(\cos \alpha + \frac{1}{2 \sin \alpha}\right) = \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{4 \sin \alpha \cos \alpha} + 1$$

$$\text{Vì } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ nên } \sin \alpha \cos \alpha > 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{4 \sin \alpha \cos \alpha} \geq 2\sqrt{\sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{1}{4 \sin \alpha \cos \alpha}} = 1$$

$$\text{Suy ra } \left(\sin \alpha + \frac{1}{2 \cos \alpha}\right) \left(\cos \alpha + \frac{1}{2 \sin \alpha}\right) \geq 2 \text{ (đ.p.c.m)}$$

Câu 18: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức sau:

a) $A = \sin x + \cos x$;

b) $B = \sin^4 x + \cos^4 x$.

Lời giải:

a) Ta có $A^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin 2x$

Vì $\sin 2x \leq 1$ nên $A^2 = 1 + \sin 2x \leq 1 + 1 = 2$ suy ra $-\sqrt{2} \leq A \leq \sqrt{2}$.

Khi $x = \frac{\pi}{4}$ thì $A = \sqrt{2}$, $x = -\frac{3\pi}{4}$ thì $A = -\sqrt{2}$

Do đó $\max A = \sqrt{2}$ và $\min A = -\sqrt{2}$.

b) Ta có $B = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x}{4} + \frac{1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x}{4}$
 $= \frac{2 + 2 \cos^2 2x}{4} = \frac{2 + 1 + \cos 4x}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$

Vì $-1 \leq \cos 4x \leq 1$ nên $\frac{1}{2} \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x \leq 1$ suy ra $\frac{1}{2} \leq B \leq 1$.

Vậy $\max B = 1$ khi $\cos 4x = 1$ và $\min B = \frac{1}{2}$ khi $\cos 4x = -1$.

Câu 19: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức $A = 2 - 2 \sin x - \cos 2x$

Lời giải:

Ta có $A = 2 - 2 \sin x - (1 - 2 \sin^2 x) = 2 \sin^2 x - 2 \sin x + 1$

Đặt $t = \sin x, \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow |t| \leq 1$

Khi đó biểu thức trở thành: $A = 2t^2 - 2t + 1$

Xét hàm số $y = 2t^2 - 2t + 1$ với $|t| \leq 1$.

Bảng biến thiên:

t	-1	$\frac{1}{2}$	1
y	5	$\frac{1}{2}$	1

Từ bảng biến thiên suy ra $\max A = 5$ khi $t = -1$ hay $\sin x = 1$.

$\min A = \frac{1}{2}$ khi $t = \frac{1}{2}$ hay $\sin x = \frac{1}{2}$.

Câu 20: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

- $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$;
- $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$;
- $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$.

Lời giải:

$$a) VT = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{Mặt khác trong tam giác } ABC \text{ ta có } A+B+C=\pi \Rightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$$

$$\text{Suy ra } \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}, \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2}$$

$$\text{Vậy } VT = 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2} = 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right)$$

$$= 4 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = VP \Rightarrow \text{ĐPCM.}$$

$$b) VT = \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C = 2 - \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} - \cos^2 C$$

$$= 2 - \cos(A+B) \cos(A-B) - \cos^2 C$$

$$\text{Vì } A+B+C=\pi \Rightarrow \cos(A+B) = -\cos C$$

$$\text{nên } VT = 2 + \cos C \cos(A-B) + \cos C \cos(A+B)$$

$$= 2 + \cos C [\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

$$= 2 + \cos C \cdot 2 \cos A \cos B = 2(1 + \cos A \cos B \cos C) = VP \Rightarrow \text{đ.p.c.m.}$$

$$c) VT = 2 \sin(A+B) \cos(A-B) + 2 \sin C \cos C$$

$$\text{Vì } A+B+C=\pi \Rightarrow \cos C = -\cos(A+B), \sin(A+B) = \sin C \text{ nên}$$

$$VT = 2 \sin C \cos(A-B) - 2 \sin C \cos(A+B) = 2 \sin C [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$= 2 \sin C \cdot [-2 \sin A \sin(-B)] = 4 \sin A \sin B \sin C = VP \Rightarrow \text{đ.p.c.m.}$$

Câu 21: Chứng minh trong mọi tam giác ABC không vuông, ta đều có:

- $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$;
- $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$.

Lời giải:

a) Đẳng thức tương đương với $\tan A + \tan B = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C - \tan C$
 $\Leftrightarrow \tan A + \tan B = \tan C (\tan A \tan B - 1) \quad (*)$

Do tam giác ABC không vuông nên $A + B \neq \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \tan A \tan B - 1 = \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B} - 1 = \frac{\sin A \sin B - \cos A \cos B}{\cos A \cos B} = -\frac{\cos(A+B)}{\cos A \cos B} \neq 0$$

$$\text{Suy ra } (*) \Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{\tan A \tan B - 1} = \tan C \Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$$

$$\Leftrightarrow \tan(A+B) = -\tan C.$$

Đẳng thức cuối đúng vì $A+B+C=\pi \Rightarrow \text{đ.p.c.m.}$

b) Vì $A+B+C=\pi \Rightarrow \cot(A+B) = -\cot C$

Theo công thức cộng ta có:

$$\cot(A+B) = \frac{1}{\tan(A+B)} = \frac{1 - \tan A \tan B}{\tan A + \tan B} = \frac{1 - \frac{1}{\cot A \cot B}}{\frac{1}{\cot A} + \frac{1}{\cot B}} = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$$

$$\text{Suy ra } \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B} = -\cot C \Rightarrow \cot A \cot B - 1 = -\cot C (\cot A + \cot B)$$

Hay $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$. đ.p.c.m.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 22: Với a, b là các góc bất kì, đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$.

B. $\cos(a-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

C. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

D. $2 \cos a \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$.

Câu 23: Cho góc a bất kì, đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

B. $\sin 2x = \sin x \cos x$.

C. $\sin 2x = 2 \cos x$.

D. $\sin 2x = 2 \sin x$.

Câu 24: Cho góc a bất kì, đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$.

B. $\sin^2 3a + \cos^2 3a = 3$.

C. $\sin 4a = 2 \sin 2a \cos 2a$.

D. $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

Lời giải:

Đáp án **A, C** là công thức nhân đôi \Rightarrow đúng.

Đáp án **D** là công thức cộng \Rightarrow đúng.

Đáp án **B** sai vì $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \forall \alpha \Rightarrow \sin^2 3a + \cos^2 3a = 1$.

Câu 25: Cho góc a bất kì, đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$.

B. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.

C. $\cos 2a = 1 - 2 \cos^2 a$.

D. $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$.

Câu 26: Cho góc a bất kì, đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\cos 2a = 2 \cos a - 1$.

B. $2 \sin^2 a = 1 - \cos 2a$.

C. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

D. $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

Lời giải:

Ta có: $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ nên **A** sai.

Và: $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a \Leftrightarrow 2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$ nên B đúng.

Câu 27: Cho góc a bất kì, đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$.

B. $\cos 2a = 2\sin a \cos a$

C. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.

D. $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$.

Câu 28: Cho góc a bất kì, đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

B. $\cos 2a = 2\cos^2 a + 1$.

C. $\cos 2a = \cos^2 a + \sin^2 a$.

D. $\cos 2a = 2\sin^2 a - 1$.

Câu 29: Với a, b là các góc bất kì, đẳng thức nào sau đây **sai**? (giả sử các biểu thức lượng giác đều có nghĩa)

A. $\tan(a - \pi) = \tan \alpha$.

B. $\sin \alpha + \sin b = 2\sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$

C. $\sin \alpha = \tan \alpha \cos \alpha$.

D. $\cos(a - b) = \sin a \sin b + \cos a \cos b$.

Lời giải:

$$\sin \alpha + \sin b = 2\sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

Vậy chọn B.

Câu 30: Với a, b là các góc bất kì, đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$.

B. $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$.

C. $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) - \cos(a - b)]$

D. $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)]$.

Lời giải:

Áp dụng công thức biến đổi tích thành tổng thì $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$.

Câu 31: Với a, b là các góc bất kì, đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\sin(a + b) = \sin a \sin b - \cos a \cos b$.

B. $\sin(a + b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

C. $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

D. $\sin(a + b) = \sin a \sin b + \cos a \cos b$.

Lời giải:

Theo công thức cộng ta có $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Câu 32: Cho góc a bất kì, đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sin a - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos a$.

B. $\cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cos a - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a$

C. $\cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right) = \cos a + \frac{1}{2}$.

D. $\cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a - \frac{1}{2}\cos a$.

Lời giải:

Ta có: $\cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right) = \cos a \cos \frac{\pi}{3} - \sin a \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\cos a - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a$.

Câu 33: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} - \frac{\cos 4\alpha}{4}$.

B. $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4\alpha}{4}$

C. $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4\alpha}{2}$

D. $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{2} - \frac{\cos 4\alpha}{4}$

Lời giải:

Ta có: $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 4\alpha}{2} = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4\alpha}{4}$.

Câu 34: Cho góc x bất kì, đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$.

B. $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{4} \cos 4x$.

C. $\sin^4 x - \cos^4 x = -\cos 2x$.

D. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cos 4x$.

Lời giải:

Ta có: $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} = 1 - \frac{1 - \cos 4x}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$.

Câu 35: Tính giá trị của biểu thức $P = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$, biết $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$.

A. $\frac{1}{3}$.

B. 1.

C. $\frac{9}{7}$.

D. $\frac{7}{9}$.

Lời giải:

Ta có: $P = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.

Câu 36: Biểu thức $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right)$ được viết lại thành

A. $\sin a + \frac{1}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin a + \frac{1}{2} \cos a$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin a - \frac{1}{2} \cos a$.

D. $\frac{1}{2} \sin a - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos a$.

Lời giải:

Ta có $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \sin a \cos \frac{\pi}{6} + \cos a \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a + \frac{1}{2} \cos a$.

Câu 37: Biểu thức $\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b}$.

B. $\frac{\sin a - \sin b}{\sin a + \sin b}$.

C. $\frac{\tan a + \tan b}{\tan a - \tan b}$.

D. $\frac{\cot a + \cot b}{\cot a - \cot b}$.

Lời giải:

Ta có: $\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\sin a \cos b - \cos a \sin b} \xrightarrow{(*)} \frac{\tan a + \tan b}{\tan a - \tan b}$

Lưu ý: Bước (*), chia cả tử và mẫu cho $\cos a \cos b$

Câu 38: Giá trị biểu thức $\frac{\sin \frac{\pi}{15} \cdot \cos \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi}{15}}{\cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15} \cdot \sin \frac{\pi}{5}}$ bằng

A. 1.

B. -1.

C. $-\frac{3}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải:

$$\frac{\sin \frac{\pi}{15} \cdot \cos \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi}{15}}{\cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15} \cdot \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{10} \right)}{\cos \left(\frac{2\pi}{15} + \frac{\pi}{5} \right)} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{6} \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{3} \right)} = 1.$$

Câu 39: Cho $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. Tính $\cos 2\alpha$.

- A. $\frac{1}{8}$. B. $\frac{\sqrt{7}}{4}$. C. $-\frac{\sqrt{7}}{4}$. **D. $-\frac{1}{8}$.**

Lời giải:

Ta có $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \frac{9}{16} = -\frac{1}{8}$.

Câu 40: Cho góc lượng giác α thỏa mãn $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$, và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\sin 2\alpha$.

- A. $\frac{7}{9}$. **B. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$.** C. $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$. D. $-\frac{2}{3}$.

Lời giải:

Ta có: $\sin \alpha = -\frac{1}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Theo giả thiết: $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Vậy $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{9}$.

Câu 41: Cho $\cos x = -\frac{3}{5}$. Tính $\cos 2x$.

- A. $-\frac{7}{25}$.** B. $-\frac{3}{10}$. C. $-\frac{8}{9}$. D. $\frac{7}{25}$.

Lời giải:

Ta có $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{25}$.

Câu 42: Tính giá trị biểu thức $P = (1 - 3\cos 2\alpha)(2 + 3\cos 2\alpha)$, biết $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

- A. $\frac{49}{27}$. B. $\frac{50}{27}$. C. $\frac{48}{27}$. **D. $\frac{42}{27}$.**

Lời giải:

Ta có: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2(\alpha) = 1 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

Khi đó: $P = (1 - 3\cos 2\alpha)(2 + 3\cos 2\alpha) = \left(1 - 3 \cdot \frac{1}{9}\right) \left(2 + 3 \cdot \frac{1}{9}\right) = \frac{14}{9} = \frac{14 \cdot 3}{9 \cdot 3} = \frac{42}{27}$.

Câu 43: Cho biết $\sin x + \cos x = -\frac{1}{2}$. Tính $\sin 2x$.

A. $-\frac{3}{4}$.

B. $\frac{3}{4}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. -1 .

Lời giải:

$$\sin x + \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin 2x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{3}{4}.$$

Câu 44: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\sin \alpha + 2\cos \alpha = -1$. Tính giá trị $\sin 2\alpha$.

A. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

B. $\frac{24}{25}$.

C. $-\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

D. $-\frac{24}{25}$.

Lời giải:

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha < 0$.

Từ giả thiết ta có: $\sin \alpha + 2\cos \alpha = -1 \Leftrightarrow \sin \alpha = -2\cos \alpha - 1$ (1).

Mặt khác: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \forall \alpha$ (2).

Thế (1) vào (2), ta được: $(-2\cos \alpha - 1)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$$\Leftrightarrow 5\cos^2 \alpha + 4\cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 (\text{loại}) \\ \cos \alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}.$$

Với $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ ta có $\sin \alpha = -2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - 1 = \frac{3}{5}$.

Vậy $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$.

Câu 45: Cho góc α thỏa mãn $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $P = \frac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$.

A. $P = -\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

B. $P = \frac{3}{2}$.

C. $P = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

D. $P = -\frac{3}{2}$.

Lời giải:

Ta có $P = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha + 2\cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{2\cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 2\cos \alpha$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên ta chọn $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \rightarrow P = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Câu 46: Cho $\tan \alpha = 2$. Giá trị $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. 1 .

D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải:

Ta có $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\alpha - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\alpha \tan\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}$.

Câu 47: Cho α và β là hai góc nhọn mà $\tan\alpha = \frac{1}{7}$ và $\tan\beta = \frac{3}{4}$. Góc $\alpha + \beta$ có giá trị bằng

A. $\frac{\pi}{6}$.

B. $\frac{\pi}{4}$.

C. $\frac{\pi}{3}$.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta} = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}.$$

Câu 48: Nếu $\tan\alpha + \cot\alpha = 2$, $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ thì $\sin 2\alpha$ bằng

A. $\frac{\pi}{2}$.

B. 1.

C. $-\frac{1}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \tan\alpha + \cot\alpha = 2 \Leftrightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha \cos\alpha} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin\alpha \cos\alpha} = 2 \Leftrightarrow 2\sin\alpha \cos\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = 1.$$

Câu 49: Biết $\sin a = -\frac{4}{5}$, $\cos b = \frac{3}{5}$ $\left(\pi < a < \frac{3\pi}{2}, 0 < b < \frac{\pi}{2}\right)$, tính $\cos(a-b)$.

A. $\frac{7}{25}$.

B. 0.

C. -1.

D. $-\frac{33}{65}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \cos a = -\sqrt{1 - \sin^2 a} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5} \text{ do } \pi < a < \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{và } \sin b = \sqrt{1 - \cos^2 b} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \text{ do } 0 < b < \frac{\pi}{2}.$$

$$\Rightarrow \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b = -\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{4}{5} = -1.$$

Câu 50: Cho hai góc α, β thỏa mãn $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$ và $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$. Tính giá trị đúng của $\cos(\alpha - \beta)$.

A. $\frac{16}{65}$.

B. $-\frac{18}{65}$.

C. $\frac{18}{65}$.

D. $-\frac{16}{65}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{12}{13} \text{ (Do } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi)$$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Rightarrow \sin^2 \beta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \beta = \frac{4}{5} \text{ (Do } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{)}$$

$$\text{Suy ra: } \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = -\frac{16}{65}.$$

Câu 51: Giá trị của $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ bằng bao nhiêu khi $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$?

- A. $\frac{48+25\sqrt{3}}{11}$. B. $\frac{8-5\sqrt{3}}{11}$. C. $\frac{8-\sqrt{3}}{11}$. **D. $\frac{48-25\sqrt{3}}{11}$.**

Lời giải:

$$\text{Mà } \sin \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm \frac{4}{5}$$

$$\text{Vì } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ nên } \cos \alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Suy ra: } \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan \alpha + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \tan \alpha} = \frac{-\frac{3}{4} + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{-3 + 4\sqrt{3}}{4 + 3\sqrt{3}} = \frac{48 - 25\sqrt{3}}{11}.$$

Câu 52: Rút gọn biểu thức $M = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ ta được

- A. $M = \sqrt{3} \sin x$. B. $M = -\sqrt{3} \cos x$. C. $M = -\sqrt{3} \sin x$. **D. $M = \sqrt{3} \cos x$.**

Lời giải:

$$\text{Ta có: } M = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 2 \sin \frac{\pi}{3} \cos x = \sqrt{3} \cos x.$$

Câu 53: Cho $\tan \alpha = 2$. Tính $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $\frac{1}{3}$.** B. $-\frac{1}{3}$. C. 1. D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan \alpha - 1}{1 + \tan \alpha} = \frac{1}{3}.$$

Câu 54: Cho $\sin a = \frac{4}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Tính $\tan\left(\frac{\pi}{6} - a\right)$.

- A. $\frac{-48+25\sqrt{3}}{11}$. B. $\frac{-48+25\sqrt{3}}{39}$. **C. $\frac{48+25\sqrt{3}}{11}$.** D. $\frac{48+25\sqrt{3}}{39}$.

Lời giải:

$$\text{Vì } \frac{\pi}{2} < a < \pi \text{ nên } \cos a < 0.$$

$$\text{Kết hợp từ } \sin^2 a + \cos^2 a = 1 \text{ suy ra } \cos a = -\sqrt{1 - \sin^2 a} = -\frac{3}{5}.$$

Ta có $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = -\frac{4}{3}$.

Vậy $\tan\left(\frac{\pi}{6} - a\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{6} - \tan a}{1 + \tan \frac{\pi}{6} \tan a} = \frac{48 + 25\sqrt{3}}{11}$.

Câu 55: Cho biết $\tan x = \frac{5}{7}$. Tính giá trị của biểu thức $P = 5 \sin 2x + 7 \cos 2x$.

A. $P = 13$.

B. $P = 7$.

C. $P = 2$.

D. $P = 9$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} P &= 5 \sin 2x + 7 \cos 2x = 10 \sin x \cos x + 14 \cos^2 x - 7 = \cos^2 x \left(10 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + 14 \right) - 7 \\ &= \left(\frac{1}{1 + \tan^2 x} \right) (10 \tan x + 14) - 7 = \left(\frac{1}{1 + \frac{25}{49}} \right) \left(10 \cdot \frac{5}{7} + 14 \right) - 7 = 7 \end{aligned}$$

Câu 56: Biết $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Tính $P = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ theo m .

A. $\frac{m}{\sqrt{2}}$.

B. $\frac{m}{2}$.

C. $2m$.

D. $m\sqrt{2}$.

Lời giải:

Ta có $P = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} + \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \alpha + \cos \alpha) = \frac{m}{\sqrt{2}}$.

Câu 57: Biết $\sin a = \frac{5}{13}$, $\cos b = -\frac{3}{5}$ với $0 < a < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < b < \pi$. Tính $\cos(a+b)$.

A. $-\frac{63}{65}$.

B. $\frac{21}{65}$.

C. $-\frac{16}{65}$.

D. $-\frac{56}{65}$.

Lời giải:

Ta có: $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} \rightarrow \cos a = \pm \frac{12}{13}$.

Vì $0 < a < \frac{\pi}{2}$ nên suy ra $\cos a > 0$, ta chọn $\cos a = \frac{12}{13}$.

Ta có: $\sin^2 b = 1 - \cos^2 b = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \rightarrow \sin b = \pm \frac{4}{5}$.

Vì $\frac{\pi}{2} < b < \pi$ nên suy ra $\sin b > 0$, ta chọn $\sin b = \frac{4}{5}$.

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \frac{12}{13} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) - \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{56}{65}$.

Câu 58: Cho các góc α, β thỏa $\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \pi$, $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \beta = -\frac{2}{3}$. Tính $\sin(\alpha + \beta)$.

A. $\frac{\sqrt{5} + 4\sqrt{2}}{9}$.

B. $\frac{\sqrt{5} - 4\sqrt{2}}{9}$.

C. $\frac{2\sqrt{10} - 2}{9}$.

D. $-\frac{2 + 2\sqrt{10}}{9}$.

Lời giải:

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \pi$ nên suy ra $\begin{cases} \cos \alpha < 0 \\ \sin \beta > 0 \end{cases}$

Ta có: $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Suy ra $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = -\frac{2 + 2\sqrt{10}}{9}$.

Câu 59: Cho $\tan(2a + b + 1) = 2$; $\tan(b - 3a + 2024) = 10$. Giá trị của $\tan(2023 - 5a)$ bằng:

A. $-\frac{8}{21}$.

B. $\frac{7}{15}$.

C. $\frac{8}{21}$.

D. $-\frac{7}{15}$.

Lời giải:

Ta có: $\tan(2023 - 5a) = \tan[(b - 3a + 2024) - (2a + b + 1)]$
 $= \frac{\tan(b - 3a + 2024) - \tan(2a + b + 1)}{1 + \tan(b - 3a + 2024)\tan(2a + b + 1)} = \frac{8}{21}$.

Câu 60: Cho $\triangle ABC$ nếu có quan hệ $\sin A(\cos B + \cos C) = \sin B + \sin C$ thì đó là tam giác gì?

A. Tam giác đều.

B. Tam giác cân.

C. Tam giác vuông cân.

D. Tam giác vuông.

Lời giải:

Ta có: $\sin A(\cos B + \cos C) = \sin B + \sin C \Leftrightarrow \sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$

$$\Leftrightarrow \sin A = \frac{2\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}; \quad \begin{cases} \cos\left(\frac{B+C}{2}\right) \neq 0 \\ \cos\left(\frac{B-C}{2}\right) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} \Leftrightarrow \sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2}; \quad \left(\cos\frac{A}{2} \neq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \Rightarrow A = \frac{\pi}{2}.$$

Câu 61: Rút gọn biểu thức $M = \cos(115^\circ) \cdot \cos(-365^\circ) + \sin(115^\circ) \cdot \sin(-365^\circ)$.

A. $M = \cos(-245^\circ)$.

B. $M = \sin(480^\circ)$.

C. $M = \sin(-245^\circ)$.

D. $M = \cos(480^\circ)$.

Lời giải:

Ta có công thức: $\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$.

$$\Rightarrow M = \cos(115^\circ) \cdot \cos(-365^\circ) + \sin(115^\circ) \cdot \sin(-365^\circ) = \cos[115^\circ - (-365^\circ)] = \cos(480^\circ).$$

Câu 62: Rút gọn biểu thức $A = \sin(x - y)\cos y + \cos(x - y)\sin y$.

A. $A = \cos x$.

B. $A = \sin x$.

C. $A = \sin x \cdot \cos 2y$.

D. $A = \cos x \cdot \cos 2y$.

Lời giải:

Ta có $A = (\sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y)\cos y + (\cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y)\sin y$

$$= \sin x \cdot \cos^2 y - \cos x \cdot \sin y \cdot \cos y + \cos x \cdot \cos y \cdot \sin y + \sin x \cdot \sin^2 y = \sin x \cdot (\cos^2 y + \sin^2 y) = \sin x$$

Vậy $A = \sin x$.

Câu 63: Nếu $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ thì $\sin 2x$ bằng

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{3}{8}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D. $-\frac{3}{4}$.**

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \sin x + \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\sin x \cos x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 + \sin 2x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{3}{4}.$$

Câu 64: Chọn đẳng thức đúng.

- A. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \sin a}{2}$.** B. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \sin a}{2}$.
C. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \cos a}{2}$. D. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \cos a}{2}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)}{2} = \frac{1 + \sin(-a)}{2} = \frac{1 - \sin a}{2}.$$

Câu 65: Biểu thức $2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ bằng

- A. $\sin 2\alpha$. **B. $\cos 2\alpha$.** C. $\sin \alpha$. D. $\cos \alpha$.

Lời giải:

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \left[\cos 2\alpha - \cos \frac{\pi}{2} \right] = \cos 2\alpha.$$

Câu 66: Biểu thức $4\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$ bằng

- A. $-3 + 4\sin^2 \alpha$. B. $4 + 3\sin^2 \alpha$. **C. $3 - 4\sin^2 \alpha$.** D. $\sin^2 \alpha$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) &= 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha + \frac{\pi}{6} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha - \frac{\pi}{6} + \alpha\right) \right] \\ &= 2 \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) + \sin \frac{\pi}{6} \right] = 2 \left[\cos 2\alpha + \frac{1}{2} \right] = 3 - 4\sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Câu 67: Cho $\cos 2\alpha = m$. Tính theo m giá trị của biểu thức $A = 2\sin^2 \alpha + 4\cos^2 \alpha$.

- A. $A = 3 + m$.** B. $A = 4 + 2m$. C. $A = 4 + m$. D. $A = 3 - m$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{1+m}{2} \\ \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1-m}{2} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } A = 2\sin^2 \alpha + 4\cos^2 \alpha = 2 \cdot \frac{1-m}{2} + 4 \cdot \frac{1+m}{2} = 3+m.$$

Câu 68: Cho tam giác ABC thỏa mãn $2\sin A \cdot \sin B = 1 + \cos C$, khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** Tam giác ABC vuông tại C . **B.** Tam giác ABC vuông tại A .
C. Tam giác ABC cân tại C . **D.** Tam giác ABC cân tại A .

Lời giải:

$$\text{Ta có: } 2\sin A \cdot \sin B = 1 + \cos C \Leftrightarrow \cos(A-B) - \cos(A+B) = 1 + \cos C$$

$$\Leftrightarrow \cos(A-B) + \cos C = 1 + \cos C \Leftrightarrow \cos(A-B) = 1 \quad (1)$$

Do A, B, C là các góc của tam giác nên từ (1) suy ra: $A-B=0 \Leftrightarrow A=B$.

Câu 69: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin A = 2\sin B \cos C$ và $A = 50^\circ$, khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $B = 60^\circ$. **B.** $C = 75^\circ$. **C.** $B = 65^\circ$. **D.** $C = 55^\circ$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \sin A = 2\sin B \cos C \Leftrightarrow \sin A = \sin(B-C) + \sin(B+C)$$

$$\Leftrightarrow \sin A = \sin(B-C) + \sin A \Leftrightarrow \sin(B-C) = 0 \Rightarrow B-C=0 \Leftrightarrow B=C$$

$$\text{Do } A = 50^\circ \Rightarrow B = C = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ.$$

Câu 70: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$, tính giá trị biểu thức $P = 2\tan \alpha + \tan 2\alpha$.

- A.** $P = \frac{8}{3}$. **B.** $P = \frac{2}{3}$. **C.** $P = \frac{4}{3}$. **D.** $P = 2$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } P = 2\tan \alpha + \tan 2\alpha = 2\tan \alpha + \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{8}{3}.$$

Câu 71: Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$, khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $\sin 2\alpha = \frac{3}{8}$. **B.** $\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$. **C.** $\sin 2\alpha = \frac{3}{4}$. **D.** $\sin 2\alpha = -\frac{3}{8}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 + \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2\alpha = -\frac{3}{4}.$$

Câu 72: Tính giá trị $A = \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{5\pi}{12}$.

- A.** $A = \frac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $A = \frac{1}{2}$. **C.** $A = \frac{1}{4}$. **D.** $A = \sqrt{3}$.

Lời giải:

$$A = \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{5\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) = \cos \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}.$$

Câu 73: Cho biết $\sin^4 x = a + b \cdot \cos 2x + c \cdot \cos 4x$ với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Tính tổng $S = a + b + c$.

A. $S = 1$.

B. $S = -1$.

C. $S = 4$.

D. $S = 0$.

Lời giải:

$$\begin{aligned}\sin^4 x &= (\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\end{aligned}$$

Suy ra $a = \frac{3}{8}, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{8}$. Vậy $S = a + b + c = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 0$.

Câu 74: Cho góc α thỏa mãn $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ mà $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Tính $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$

A. $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{10}$.

B. $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{15} - 2\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{\sqrt{15} - 2\sqrt{5}}{10}$.

Lời giải:

Biến đổi: $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \cos \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha$ (1)

Ta có: $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} & (\text{loại}) \\ \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5} & (\text{nhận do } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi) \end{cases}$

Thay vào (1) ta được: $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{\sqrt{15} - 2\sqrt{5}}{10}$.

Câu 75: Biết $\cos \alpha = \frac{1}{3}, \cos \beta = \frac{1}{4}$. Tính $\cos(\alpha - \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta)$.

A. $\frac{25}{144}$.

B. $\frac{-19}{144}$.

C. $\frac{5}{144}$.

D. $\frac{-119}{144}$.

Lời giải:

Ta có: $\cos(\alpha - \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) = \frac{1}{2}(2\cos^2 \alpha - 1 + 2\cos^2 \beta - 1)$
 $= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 1 = \frac{-119}{144}$.

Câu 76: Đơn giản biểu thức $A = \frac{2\cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x}$ ta được kết quả nào sau đây ?

A. $A = \sin x - \cos x$.

B. $A = \cos x + \sin x$.

C. $A = -\sin x - \cos x$.

D. $A = \cos x - \sin x$.

Lời giải:

$A = \frac{2\cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x} = \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} = \cos x - \sin x$.

Câu 77: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin x + \sin 3x}{2\cos x}$.

A. $A = \sin 4x$.

B. $A = \sin x$.

C. $A = \sin 2x$.

D. $A = \cos 2x$.

Lời giải:

$A = \frac{\sin x + \sin 3x}{2\cos x} = \frac{\sin 3x + \sin x}{2\cos x} = \frac{2\sin 2x \cos x}{2\cos x} = \sin 2x$.

Câu 78: Rút gọn biểu thức $\frac{4 \sin 2x \cos 2x}{\cos 3x + \cos x}$ (với điều kiện biểu thức có nghĩa), ta được biểu thức có dạng $\frac{a \sin 2x}{b \cos x}$ với $a, b \in \mathbb{Z}, \frac{a}{b}$ tối giản. Giá trị của $a^2 + b$ bằng

- A. 2. B. -5. **C. 5.** D. 3.

Lời giải:

Ta có $\frac{4 \sin 2x \cos 2x}{\cos 3x + \cos x} = \frac{4 \sin 2x \cos 2x}{2 \cos 2x \cos x} = \frac{2 \sin 2x}{\cos x}$ (với điều kiện biểu thức có nghĩa).

Do đó $a = 2, b = 1 \Rightarrow a^2 + b = 5$.

Câu 79: Rút gọn biểu thức $P = \frac{\cos a - \cos 5a}{\sin 4a + \sin 2a}$ (với $\sin 4a + \sin 2a \neq 0$) ta được:

- A. $P = 2 \cot a$. B. $P = 2 \cos a$. C. $P = 2 \tan a$. **D. $P = 2 \sin a$.**

Lời giải:

Ta có: $P = \frac{\cos a - \cos 5a}{\sin 4a + \sin 2a} = \frac{2 \sin 3a \cdot \sin 2a}{2 \sin 3a \cdot \cos a} = \frac{\sin 2a}{\cos a} = \frac{2 \sin a \cdot \cos a}{\cos a} = 2 \sin a$.

Câu 80: Rút gọn biểu thức: $\frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha}$ bằng:

- A. $\tan^2 \alpha$.** B. $-\tan^2 \alpha$. C. $\tan^2 2\alpha$. D. $\cot^2 \alpha$.

Lời giải:

$\frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha - 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2 \sin 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha (1 - \cos 2\alpha)}{2 \sin 2\alpha (1 + \cos 2\alpha)} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha$

Câu 81: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin x + \sin 3x}{2 \cos x}$.

- A. $A = \sin 4x$. B. $A = \sin x$. **C. $A = \sin 2x$.** D. $A = \cos 2x$.

Lời giải:

Ta có: $A = \frac{\sin 3x + \sin x}{2 \cos x} = \frac{2 \sin 2x \cos x}{2 \cos x} = \sin 2x$.

Câu 82: Biến đổi thành tích biểu thức $\frac{\sin 7\alpha - \sin 5\alpha}{\sin 7\alpha + \sin 5\alpha}$ ta được

- A. $\tan 5\alpha \cdot \tan \alpha$. B. $\cos \alpha \cdot \sin \alpha$. C. $\cos 2\alpha \cdot \sin 3\alpha$. **D. $\cot 6\alpha \cdot \tan \alpha$.**

Lời giải:

Ta có $\frac{\sin 7\alpha - \sin 5\alpha}{\sin 7\alpha + \sin 5\alpha} = \frac{2 \cos 6\alpha \cdot \sin \alpha}{2 \sin 6\alpha \cdot \cos \alpha} = \cot 6\alpha \cdot \tan \alpha$.

Câu 83: Biết $\tan x = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $I = \frac{\cos 5x + \cos 3x}{\sin 5x - \sin 3x}$.

- A. $I = \frac{1}{3}$.** B. $I = -\frac{1}{3}$. C. $I = 3$. D. $I = -3$.

Lời giải:

Ta có $I = \frac{2 \cos 4x \cos x}{2 \cos 4x \sin x} = \cot x = \frac{1}{\tan x} = 3$.

Câu 84: Giả sử biểu thức $M = \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}$ có nghĩa, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $M = \tan 2\alpha$.** B. $M = \cot 2\alpha$. C. $M = -\tan 2\alpha$. D. $M = -\cot 2\alpha$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } M &= \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \frac{(\sin \alpha + \sin 3\alpha) + \sin 2\alpha}{(\cos \alpha + \cos 3\alpha) + \cos 2\alpha} \\ &= \frac{2 \sin 2\alpha \cos \alpha + \sin 2\alpha}{2 \cos 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha (2 \cos \alpha + 1)}{\cos 2\alpha (2 \cos \alpha + 1)} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \tan 2\alpha. \end{aligned}$$

Câu 85: Biểu thức $\frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha}$ có kết quả rút gọn bằng

- A. $\cos 2\alpha$. B. $\cot 2\alpha$. **C. $\tan 2\alpha$.** D. $\sin 2\alpha$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha} = \frac{1 + 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha - 1 + 2 \sin^2 2\alpha}{1 + 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha + 2 \cos^2 2\alpha - 1} = \frac{2 \sin 2\alpha (\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)}{2 \cos 2\alpha (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)} = \tan 2\alpha .$$

Câu 86: Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sin 2x - \sin x}{1 - \cos x + \cos 2x}$ (với điều kiện biểu thức có nghĩa) ta được kết quả

- A. $P = \cot x$. **B. $P = \tan x$.** C. $P = \cos x$. D. $P = \sin x$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } P = \frac{2 \sin x \cos x - \sin x}{2 \cos^2 x - \cos x} = \frac{\sin x (2 \cos x - 1)}{\cos x (2 \cos x - 1)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x .$$

Câu 87: Biểu thức thu gọn của biểu thức $B = \left(\frac{1}{\cos 2x} + 1 \right) \cdot \tan x$ là

- A. $\tan 2x$.** B. $\cot 2x$. C. $\cos 2x$. D. $\sin x$.

Lời giải:

$$B = \left(\frac{1}{\cos 2x} + 1 \right) \cdot \tan x = \frac{1 + \cos 2x}{\cos 2x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2 \cos^2 x}{\cos 2x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2 \cos x \cdot \sin x}{\cos 2x} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \tan 2x .$$

Câu 88: Rút gọn biểu thức $\frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1}$ bằng

- A. $-2 \cos \alpha$. B. $\cos \alpha$. **C. $2 \cos \alpha$.** D. $2 \sin \alpha$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1} &= \frac{2 \cos^2 \alpha + 2 \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos \alpha}{\cos 2\alpha + \cos \alpha} = \frac{2 \cos \alpha (\cos \alpha + \cos 2\alpha)}{\cos 2\alpha + \cos \alpha} \\ &= 2 \cos \alpha . \end{aligned}$$

Câu 89: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin 2a + \sin 5a - \sin 3a}{1 + \cos a - 2 \sin^2 2a}$.

- A. $\cos a$. B. $\sin a$. C. $2 \cos a$. **D. $2 \sin a$.**

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \frac{\sin 2a + (\sin 5a - \sin 3a)}{\cos a + (1 - 2 \sin^2 2a)} = \frac{2 \sin a \cos a + 2 \cos 4a \sin a}{\cos a + \cos 4a} = \frac{2 \sin a (\cos a + \cos 4a)}{\cos a + \cos 4a} \\ &= 2 \sin a . \end{aligned}$$

Câu 90: Với điều kiện xác định, hãy rút gọn biểu thức $A = \frac{(\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2}{\cot x - \tan x}$.

A. $A = \frac{2}{\cot 2x}$.

B. $A = 4$.

C. $A = \frac{4}{\cot 2x}$.

D. $A = \frac{8}{\cot 2x}$.

Lời giải:

Ta có: $A = \frac{(\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2}{\cot x - \tan x}$
 $= \frac{\tan^2 x + 2 \tan x \cot x + \cot^2 x - \tan^2 x + 2 \tan x \cot x - \cot^2 x}{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{4}{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x}} = \frac{4}{2 \cot 2x} = \frac{2}{\cot 2x}$.

Câu 91: Cho góc nhọn α thỏa mãn $\cos \alpha = 2 \sin \alpha$, khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\tan \alpha = \frac{1}{2}$.

B. $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

C. $\cot \alpha = 2$.

D. $\sin 2\alpha = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải:

Với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases}$. Ta có: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow (2 \sin \alpha)^2 + \sin^2 \alpha = 1$

$\Leftrightarrow 5 \sin^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{4}{5} \\ \sin^2 \alpha = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{4}{5}$. Vậy D sai.

Câu 92: Nếu α, β, γ là ba góc nhọn và thỏa mãn $\tan(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = \cos \gamma$ thì

A. $\alpha + \beta + \gamma = 45^\circ$.

B. $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$.

C. $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$.

D. $\alpha + \beta + \gamma = 120^\circ$.

Lời giải:

$\tan(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = \cos \gamma \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos \gamma$.

$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos \gamma - \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = 0 \Rightarrow \cos(\alpha + \beta + \gamma) = 0$.

$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ (do α, β, γ nhọn).

Câu 93: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \sin \alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)$.

A. 2.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. 1.

Lời giải:

Ta có: $M = \sin \alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{3} = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow -1 \leq M \leq 1$, vậy $M_{\max} = 1$.

Câu 94: Giá trị lớn nhất của biểu thức $\sin^4 x + \cos^7 x$ là

A. 2.

B. $\sqrt{2}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 1.

Lời giải:

Ta có $\begin{cases} \sin^4 x \leq \sin^2 x \\ \cos^7 x \leq \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow \sin^4 x + \cos^7 x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} \sin x = \pm 1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ hoặc $\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Rightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 95: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha$.

- A. 2. B. $-1 - \sqrt{3}$. **C. -2.** D. 0.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha = 2 \left(\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha \right) = 2 \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right).$$

Do $-2 \leq 2 \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \leq 2$ nên giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha$ bằng -2 .

Câu 96: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$.

- A. $M + 4m = 0$. **B. $M + 4m = 2$.** C. $M + 4m = 4$. D. $M + 4m = 1$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) \\ &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha. \end{aligned}$$

Do $0 \leq \sin^2 2\alpha \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq -\frac{3}{4} \sin^2 2\alpha \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq P \leq 1$. Do đó $M = 1, m = \frac{1}{4} \Rightarrow M + 4m = 2$.

Câu 97: Cho $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sin^4 x + \cos^4 x$.

- A. 1. **B. $\frac{1}{2}$.** C. $\frac{1}{4}$. D. 0.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } P = \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x.$$

$$\text{Do } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq 2x \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq \sin 2x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \sin^2 2x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2} \sin^2 2x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq P \leq 1.$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \frac{1}{2}.$$

Câu 98: Cho tam giác ABC . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2 \cos A + 2 \cos B + 2\sqrt{3} \cos C$.

- A. $2\sqrt{3}$. **B. $\frac{7\sqrt{3}}{3}$.** C. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải:

$$P = 2 \cos A + 2 \cos B + 2\sqrt{3} \cos C = 4 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2\sqrt{3} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} \right)$$

$$\leq -4\sqrt{3} \sin^2 \frac{C}{2} + 4 \sin \frac{C}{2} + 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Đặt } t = \sin \frac{C}{2}; t \in (0; 1), \text{ ta có hàm số } f(t) = -4\sqrt{3}t^2 + 4t + 2\sqrt{3}.$$

$$\max_{(0;1)} f(t) = \frac{7\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = \frac{7\sqrt{3}}{3}, \text{ dấu bằng xảy ra khi: } \begin{cases} \cos \frac{A-B}{2} = 1 \\ \sin \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ \sin \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \end{cases}.$$