# Cálculo Lambda I

Paradigmas de Lenguajes de Programación

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

11 de Septiembre de 2018

# Objetivo de la clase

$(\lambda x\colon \mathrm{Bool}.\ \lambda y : \mathrm{Bool} \to \mathrm{Bool}.\ y\ (y\ x))\ ((\lambda z\colon \mathrm{Bool}.\ \mathit{true})\ \mathit{false})\ (\lambda w\colon \mathrm{Bool}.\ w)$

¿Qué significa esto? ¿Significa algo? ¿Es válido? ¿Es un valor? ¿Cómo nos damos cuenta?

# Objetivo de la clase

$(\lambda x\colon \mathrm{Bool}.\ \lambda y : \mathrm{Bool} \to \mathrm{Bool}.\ y\ (y\ x))\ ((\lambda z\colon \mathrm{Bool}.\ \mathit{true})\ \mathit{false})\ (\lambda w\colon \mathrm{Bool}.\ w)$

¿Qué significa esto? ¿Significa algo? ¿Es válido? ¿Es un valor? ¿Cómo nos damos cuenta?

## Mapa del tema

| | |
|---|---|
| Sintaxis | M, $\sigma$ |
| Reglas de Tipado | $\Gamma \vdash M : \sigma$ |
| Valores | V |
| Reglas de Evaluación | M $\to$ M' |

# Sintaxis

Ejercicio: ¿cuáles son expresiones sintácticamente válidas? Dibujar el árbol sintáctico y marcar las ocurrencias libres de variables.

1. $\lambda x : \mathsf{Bool} \to \mathsf{Bool}.x\ \mathit{true}$
2. $(\lambda x : \mathsf{Bool} \to \mathsf{Nat}.x\ \mathit{true})\,(\lambda y : \mathsf{Bool}.x)$
3. $\lambda x : \mathsf{Nat}$
4. $\lambda x.\ x$
5. $\text{if } x \text{ then } y \text{ else } \lambda z : \mathsf{Bool}.z$
6. $x\ (\lambda y : \mathsf{Bool}.y)$
7. $\mathit{true}\ \ \mathit{false}$
8. $\text{succ}(M)$
9. $\text{succ}\ \mathit{true}$
10. $\text{if } \text{succ}(\mathit{true}) \text{ then } \lambda x : \mathsf{Bool}.x$

# Chequeo de tipos

Ejercicio: demostrar (o explicar por qué no es posible) los siguientes juicios de tipado:

1. $\emptyset \vdash (\lambda x : \mathsf{Bool}.\ \lambda y : \mathsf{Bool}.\ \mathit{if}\ x\ \mathit{then}\ \mathit{true}\ \mathit{else}\ y)\ \mathit{false} : \mathsf{Bool} \to \mathsf{Bool}$

# Chequeo de tipos

Ejercicio: demostrar (o explicar por qué no es posible) los siguientes juicios de tipado:

1. $\emptyset \;\vdash\; (\lambda x : \mathsf{Bool}.\ \lambda y : \mathsf{Bool}.\ \mathit{if}\ x\ \mathit{then}\ \mathit{true}\ \mathit{else}\ y)\ \mathit{false} : \mathsf{Bool} \to \mathsf{Bool}$
2. $\{x : \mathsf{Bool}\} \;\vdash\; \mathsf{succ}(0) : \mathsf{Nat}$

# Chequeo de tipos

Ejercicio: demostrar (o explicar por qué no es posible) los siguientes juicios de tipado:

1. $\emptyset \vdash (\lambda x : \mathsf{Bool}.\ \lambda y : \mathsf{Bool}.\ \mathit{if}\ x\ \mathit{then}\ \mathit{true}\ \mathit{else}\ y)\ \mathit{false} : \mathsf{Bool} \to \mathsf{Bool}$
2. $\{x : \mathsf{Bool}\} \vdash \mathsf{succ}(0) : \mathsf{Nat}$
3. ¿Existen $\Gamma$ y $\sigma$ tal que $\Gamma \vdash x\,x : \sigma$?

# Chequeo de tipos

Ejercicio: demostrar (o explicar por qué no es posible) los siguientes juicios de tipado:

1. $\emptyset \vdash (\lambda x : \text{Bool}.\ \lambda y : \text{Bool}.\ \mathit{if}\ x\ \mathit{then}\ \mathit{true}\ \mathit{else}\ y)\ \mathit{false} : \text{Bool} \to \text{Bool}$
2. $\{x : \text{Bool}\} \vdash \text{succ}(0) : \text{Nat}$
3. ¿Existen $\Gamma$ y $\sigma$ tal que $\Gamma \vdash x\,x : \sigma$?

4. $\emptyset \vdash \mathit{if}\ x\ \mathit{then}\ x\ \mathit{else}\ z : \text{Bool}$
5. $\{x : \text{Bool}\} \vdash \mathit{if}\ x\ \mathit{then}\ x\ \mathit{else}\ 0 : \text{Nat}$

# Chequeo de tipos

Ejercicio: demostrar (o explicar por qué no es posible) los siguientes juicios de tipado:

1. $\emptyset \vdash (\lambda x : \text{Bool}.\ \lambda y : \text{Bool}.\ \mathit{if}\ x\ \mathit{then}\ \mathit{true}\ \mathit{else}\ y)\ \mathit{false} : \text{Bool} \to \text{Bool}$
2. $\{x : \text{Bool}\} \vdash \text{succ}(0) : \text{Nat}$
3. ¿Existen $\Gamma$ y $\sigma$ tal que $\Gamma \vdash x\,x : \sigma$?
4. $\emptyset \vdash \mathit{if}\ x\ \mathit{then}\ x\ \mathit{else}\ z : \text{Bool}$
5. $\{x : \text{Bool}\} \vdash \mathit{if}\ x\ \mathit{then}\ x\ \mathit{else}\ 0 : \text{Nat}$

# Valores

Ejercicio: ¿cuáles de estos términos son valores?

1. if *true* then $(\lambda x : \text{Bool}.\ x)$ else $(\lambda x : \text{Bool}.\ \mathit{false})$
2. $\lambda x : \text{Bool}.\ \mathit{false}$
3. $(\lambda x : \text{Bool}.\ x)\ \mathit{false}$
4. $\text{succ}(0)$
5. $\text{succ}(\text{succ}(0))$
6. $\text{succ}(x)$
7. $\lambda x : \text{Bool}.\ (\lambda y : \text{Bool}.x)\ \mathit{false}$
8. $\lambda x : \text{Bool} \to \text{Bool}.\ x\ \mathit{true}$

# Semántica Operacional

Ejercicio: ¿cuál es el resultado de evaluar las siguientes expresiones? ¿El resultado es siempre un valor?

1. $(\lambda x : Bool.\ \lambda y : Bool.\ if\ \ x\ \ then\ true\ else\ y)\ false$

# Semántica Operacional

Ejercicio: ¿cuál es el resultado de evaluar las siguientes expresiones? ¿El resultado es siempre un valor?

1. $(\lambda x : Bool.\ \lambda y : Bool.\ if\ \ x\ then\,true\,else\,y)\ false$
2. $if(\lambda b : Bool.\ true)\ false\ then\ (\lambda x : Bool.\ x)true\ else\ (\lambda y : Bool.\ y)false$

# Semántica Operacional

Ejercicio: ¿cuál es el resultado de evaluar las siguientes expresiones? ¿El resultado es siempre un valor?

1. $(\lambda x : Bool.\ \lambda y : Bool.\ if\ \ x\ \ then\, true\, else\, y)\, false$
2. $if\,(\lambda b : Bool.\ true)\ false\ then\ (\lambda x : Bool.\ x) true\ else\ (\lambda y : Bool.\ y) false$

3. $(\lambda x : \text{Bool}.\ \lambda y : \text{Bool} \to \text{Bool}.\ y\ (y\ x))\ ((\lambda z : \text{Bool}.\ \mathit{true})\ \mathit{false})\ (\lambda w : \text{Bool}.\ w)$

# Simplificando la escritura

Podemos definir macros para expresiones que vayamos a utilizar con frecuencia. Por ejemplo:

- $Id_{\mathsf{Bool}} \stackrel{def}{=} \lambda x : \mathsf{Bool}.x$
- and $\stackrel{def}{=}$

# Simplificando la escritura

Podemos definir macros para expresiones que vayamos a utilizar con frecuencia. Por ejemplo:

- $Id_{\text{Bool}} \stackrel{def}{=} \lambda x : \text{Bool}.x$
- $\text{and} \stackrel{def}{=} \lambda x : \text{Bool}.\lambda y : \text{Bool}.\text{if } x \text{ then } y \text{ else } false$

# Primera extensión

## Extensión con **pares**

- $M, N ::= \ldots \mid < M, N > \mid \pi_1(M) \mid \pi_2(M)$
- $\sigma, \tau ::= \ldots \mid \sigma \times \tau$
- Enunciar las nuevas reglas de tipado.
- Extender el conjunto de valores y determinar las nuevas reglas de semántica.

# Primera extensión

## Extensión con **pares**

- $M, N ::= \ldots \mid < M, N > \mid \pi_1(M) \mid \pi_2(M)$
- $\sigma, \tau ::= \ldots \mid \sigma \times \tau$
- Enunciar las nuevas reglas de tipado.
- Extender el conjunto de valores y determinar las nuevas reglas de semántica.
- ¿Qué problema introduce agregar la siguiente regla? ¿Y reemplazar otras por esta?

$$\pi_1(< M, N >) \rightsquigarrow M$$

# Primera extensión

## Extensión con **pares**

- $M, N ::= \ldots \mid < M, N > \mid \pi_1(M) \mid \pi_2(M)$
- $\sigma, \tau ::= \ldots \mid \sigma \times \tau$
- Enunciar las nuevas reglas de tipado.
- Extender el conjunto de valores y determinar las nuevas reglas de semántica.
- ¿Qué problema introduce agregar la siguiente regla? ¿Y reemplazar otras por esta?

$$\pi_1(< M, N >) \rightsquigarrow M$$

## Verificar el siguiente juicio de tipado

- $\emptyset \triangleright \pi_1((\lambda x : Nat. < x, \mathrm{True} >)\ 0) : Nat$

## Reducir el término a un valor

- $\pi_1((\lambda x : Nat. < x, \mathrm{True} >)\ 0)$

# Cambiando reglas semánticas

Al agregar la siguiente regla para las abstracciones:

$$\frac{M \to M'}{\lambda x\colon \tau.\ M \to \lambda x\colon \tau.\ M'}\ E-ABS$$

## Ejercicio

1. Repensar el conjunto de valores para respetar esta modificación, pensar por ejemplo si $(\lambda x\colon \mathrm{Bool}.\ Id_{\mathrm{Bool}}\ true)$ es o no un valor.

# Cambiando reglas semánticas

Al agregar la siguiente regla para las abstracciones:

$$\frac{M \to M'}{\lambda x\colon \tau.\ M \to \lambda x\colon \tau.\ M'}\ E-ABS$$

## Ejercicio

1. Repensar el conjunto de valores para respetar esta modificación, pensar por ejemplo si ($\lambda x\colon \mathrm{Bool}.\ Id_{\mathrm{Bool}}\ true$) es o no un valor.¿Y ($\lambda x\colon \mathrm{Bool}.\ x$)?

# Cambiando reglas semánticas

Al agregar la siguiente regla para las abstracciones:

$$\frac{M \to M'}{\lambda x\colon \tau.\ M \to \lambda x\colon \tau.\ M'}\ E-ABS$$

## Ejercicio

1. Repensar el conjunto de valores para respetar esta modificación, pensar por ejemplo si $(\lambda x\colon \text{Bool}.\ Id_{\text{Bool}}\ true)$ es o no un valor.¿Y $(\lambda x\colon \text{Bool}.\ x)$?
2. ¿Qué reglas deberían modificarse para no perder el determinismo?

# Cambiando reglas semánticas

Al agregar la siguiente regla para las abstracciones:

$$\frac{M \to M'}{\lambda x\colon \tau.\ M \to \lambda x\colon \tau.\ M'}\ E-ABS$$

## Ejercicio

1. Repensar el conjunto de valores para respetar esta modificación, pensar por ejemplo si $(\lambda x\colon \text{Bool}.\ Id_{\text{Bool}}\ true)$ es o no un valor.¿Y $(\lambda x\colon \text{Bool}.\ x)$?
2. ¿Qué reglas deberían modificarse para no perder el determinismo?
3. Utilizando la nueva regla y los valores definidos, reducir la expresión: $(\lambda z\colon \text{Bool}.\ (\lambda x\colon \text{Nat} \to \text{Nat}.\ y\ \underline{23})\ (\lambda x\colon \text{Nat}.\ 0))$ ¿Qué se puede concluir entonces? ¿Es seguro o no agregar esta regla?

# Continuará...

¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿?

$(\lambda x : \mathit{Clase}.\ \mathit{fin}\ x)\ (\mathit{Cálculo\ Lambda\ I})$

# Machete: Tipos y Términos

Las expresiones de tipos (o simplemente tipos) son

$$\sigma \quad ::= \quad \mathit{Bool} \mid \mathit{Nat} \mid \sigma \to \rho$$

Sea $\mathcal{X}$ un conjunto infinito enumerable de variables y $x \in \mathcal{X}$. Los términos están dados por

$$\begin{array}{rcl}
M & ::= & x \\
 & \mid & \mathit{true} \\
 & \mid & \mathit{false} \\
 & \mid & \text{if } M \text{ then } M \text{ else } M \\
 & \mid & \lambda x : \sigma.\ M \\
 & \mid & M\ M \\
 & \mid & 0 \\
 & \mid & \text{succ}(M) \\
 & \mid & \text{pred}(M) \\
 & \mid & \text{iszero}(M)
\end{array}$$

# Machete: Axiomas y reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathit{true} : \mathit{Bool}}\ (\text{T-True}) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathit{false} : \mathit{Bool}}\ (\text{T-False})$$

$$\frac{x : \sigma \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \sigma}\ (\text{T-Var})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \mathit{Bool} \quad \Gamma \vdash P : \sigma \quad \Gamma \vdash Q : \sigma}{\Gamma \vdash \mathit{if}\ M\ \mathit{then}\ P\ \mathit{else}\ Q : \sigma}\ (\text{T-If})$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x : \sigma.\ M : \sigma \to \tau}\ (\text{T-Abs}) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M\,N : \tau}\ (\text{T-App})$$

# Machete: Axiomas y reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \;\vdash\; 0 : \mathit{Nat}}\;(\textsc{T-Zero})$$

$$\frac{\Gamma \;\vdash\; M : \mathit{Nat}}{\Gamma \;\vdash\; \mathsf{succ}(M) : \mathit{Nat}}\;(\textsc{T-Succ}) \qquad \frac{\Gamma \;\vdash\; M : \mathit{Nat}}{\Gamma \;\vdash\; \mathsf{pred}(M) : \mathit{Nat}}\;(\textsc{T-Pred})$$

$$\frac{\Gamma \;\vdash\; M : \mathit{Nat}}{\Gamma \;\vdash\; \mathsf{iszero}(M) : \mathit{Bool}}\;(\textsc{T-IsZero})$$

# Machete: Semántica operacional

$$V \quad ::= \quad \mathit{true} \mid \mathit{false} \mid \lambda x : \sigma.\ M \mid \underline{n}$$

donde $\underline{n}$ abrevia $\mathsf{succ}^n(0)$.

## Reglas de Evaluación en un paso

$$\frac{M_1 \to M_1'}{M_1\ M_2 \to M_1'\ M_2} \text{(E-App1 o } \mu\text{)}$$

$$\frac{M_2 \to M_2'}{V_1\ M_2 \to V_1\ M_2'} \text{(E-App2 o } \nu\text{)}$$

$$\frac{}{(\lambda x : \sigma.\ M)\ V \to M\{x \leftarrow V\}} \text{(E-AppAbs o } \beta\text{)}$$

# Machete: Semántica operacional

$$V \quad ::= \quad \mathit{true} \mid \mathit{false} \mid \lambda x:\sigma.\ M \mid \underline{n}$$

donde $\underline{n}$ abrevia $\mathsf{succ}^n(0)$.

## Reglas de Evaluación en un paso

$$\frac{}{\text{if } \mathit{true} \text{ then } M_2 \text{ else } M_3 \to M_2}\ (\textsc{E-IfTrue})$$

$$\frac{}{\text{if } \mathit{false} \text{ then } M_2 \text{ else } M_3 \to M_3}\ (\textsc{E-IfFalse})$$

$$\frac{M_1 \to M_1'}{\text{if } M_1 \text{ then } M_2 \text{ else } M_3 \to \text{if } M_1' \text{ then } M_2 \text{ else } M_3}\ (\textsc{E-If})$$

# Machete: Semántica operacional

## Reglas de Evaluación en un paso

$$\frac{M_1 \to M_1'}{\mathsf{succ}(M_1) \to \mathsf{succ}(M_1')}\ (\textsc{E-Succ})$$

$$\frac{}{\mathsf{pred}(0) \to 0}\ (\textsc{E-PredZero}) \qquad \frac{}{\mathsf{pred}(\mathsf{succ}(\underline{n})) \to \underline{n}}\ (\textsc{E-PredSucc})$$

$$\frac{M_1 \to M_1'}{\mathsf{pred}(M_1) \to \mathsf{pred}(M_1')}\ (\textsc{E-Pred})$$

$$\frac{}{\mathsf{iszero}(0) \to \mathit{true}}\ (\textsc{E-IsZeroZero}) \qquad \frac{}{\mathsf{iszero}(\mathsf{succ}(\underline{n})) \to \mathit{false}}\ (\textsc{E-IsZeroSucc})$$

$$\frac{M_1 \to M_1'}{\mathsf{iszero}(M_1) \to \mathsf{iszero}(M_1')}\ (\textsc{E-IsZero})$$