

Z DONUSUMU

TEORİ VE UYGULAMASI

NAZIM YILDIZ
nazimyildiz90@gmail.com

Bu calismada faz farkli sinus denkleminin Z donusumu bulunarak herhangi bir mikrodenetleyicide kosturulabilinmesi icin izlenmesi gereken yol haritasi verilmistir.

1 Z DONUSUMU TEORİ

Z donusumu dijital kontrol sistemlerinde kullanılan, islemcilerimizde elde ettigimiz denklemleri kosturabilmemiz icin kullandigimiz bir aractir. Ornegin zamana bagli herhangi bir fonksiyonu $\sin(w \times t + \phi)$, $\cos(w \times t + \phi)$, ... yada s-ortaminda transfer fonksiyonunu elde ettigimiz herhangi bir esitligi kolayca islemcilerde kosturabiliriz.

Z donusumu icin denklem-1'de verilen seri toplam esitligi kullanilir.

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n \times T_s) \times z^{-n} \quad (1)$$

$f(t) = V \times e^{-a \times t}$ olmak uzere, T_s periyodu ile ornekleme yapildiginda ayrik zaman denklemi $f(n \times T_s) = V \times e^{-a \times n \times T_s}$ seklinde yazilir. Bu esitlige geometrik seri acilim formulu uygulandiginda denklem-2 elde edilir.

$$F(z) = V \times \frac{1}{1 - e^{-a \times T_s} \times z^{-1}} \quad (2)$$

1.1 FAZ FARKLI SINUS Z DONUSUMU

Faz farki ϕ ve acisal frekansi w olan sinus denklemi $f(t) = \sin(w \times t + \phi)$ seklinde yazilacak olursa, bu ifadeyi ayrik zamandaki karsiligini $t = n \times T_s$ yazarak $f(n \times T_s) = \sin(w \times n \times T_s + \phi)$ seklinde elde ederiz.

$$\begin{aligned} e^{j \times w \times t} &= \cos(w \times t) + j \times \sin(w \times t) \\ e^{-j \times w \times t} &= \cos(w \times t) - j \times \sin(w \times t) \\ \sin(w \times t) &= \frac{e^{j \times w \times t} - e^{-j \times w \times t}}{2j} \end{aligned} \quad (3)$$

Elde edilen $f(n \times T_s)$ ¹ ayrik sinus denklemi, denklem-3'deki euler esitligi kullanilarak ayrik sinus denklemi ustel formda elde edilir ve denklem-2'deki formül kullanilarak Z donusumu bulunabilir.

$$f[n] = \frac{e^{j \times (w \times n \times T_s + \phi)} - e^{-j \times (w \times n \times T_s + \phi)}}{2j} \quad (4)$$

¹ $f(n \times t) = f[n]$ seklinde gosterilir.

Faz farkli sinus denkleminin dijital karsiligi adim adim asagidaki gibi elde edilir.

$$f[n] = \frac{1}{2j} \times (e^{j\phi} \times e^{j \times w \times n \times T_s} - e^{-j\phi} \times e^{-j \times w \times n \times T_s}) \quad (5)$$

Burada $e^{j \times \phi}$ ifadelerini katsayi gibi dusunebiliriz cunki bunlar n degiskenine bagli degiller. Diger n bagli 2 ustel ifadeyi ayri ayri Z donusumunu alip sonuca gidebiliriz.

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2j} \times \left(\frac{e^{j\phi}}{1 - e^{j \times w \times T_s} \times z^{-1}} - \frac{e^{-j\phi}}{1 - e^{-j \times w \times T_s} \times z^{-1}} \right) \\ F(z) &= \frac{1}{2j} \times \left(\frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi} + e^{j \times w \times T_s} \times e^{-j\phi} \times z^{-1} - e^{-j \times w \times T_s} \times e^{j\phi} \times z^{-1}}{1 - e^{-j \times w \times T_s} \times z^{-1} - e^{j \times w \times T_s} \times z^{-1} + z^{-2}} \right) \\ F(z) &= \frac{\sin(\phi) + \sin(w \times T_s - \phi) \times z^{-1}}{1 - 2 \times \cos(w \times T_s) \times z^{-1} + z^{-2}} \end{aligned} \quad (6)$$

Burada;

- w : Acisal frekansi, $2 \times \pi \times f$
- T_s : Ornekleme periyodu
- ϕ : Faz acisini

belirtmektedir.

1.2 FARK DENKLEMININ ELDE EDILMESI

Denklem-6'da faz farkli sinus icin Z donusumu elde edildi. Bu ifadeyi bu haliyle islemcide kodlanamaz tekrar ayrik zaman ortamina gecmemiz gerekir. Bu asamada tercih edebilecegimiz 3 yontem var ve ben bu yontemler arasindan direk gercekleme yontemini kullanacagim. Adim adim cozum asagidaki gibidir.

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{O(z)}{I(z)} \\ F(z) &= \frac{O(z)}{R(z)} \times \frac{R(z)}{I(z)} \\ O(z) &= R(z) \times \sin(\phi) + R(z) \times z^{-1} \times \sin(w \times T_s - \phi) \\ I(z) &= R(z) - R(z) \times z^{-1} \times 2\cos(w \times T_s) + R(z) \times z^{-2} \\ R(z) &= I(z) + R(z) \times z^{-1} \times 2\cos(w \times T_s) - R(z) \times z^{-2} \end{aligned} \quad (7)$$

Z degiskenine bagli olarak giris ve cikis arasindaki baginti yukaridaki gibi elde edildi. Burada $R(z)$ 'i giris ile cikis arasindaki baglanti noktasi olarak dusunebilirsiniz. Son adim olarak bu denklemlerin ayrik zamandaki karsiligini z^{-x} degerlerinin ornek geciktirme operatoru oldugu bilgisini kullanarak denklem-8'deki gibi elde ederiz.

$$\begin{aligned} o[n] &= r[n] \times \sin(\phi) + r[n-1] \times \sin(w \times T_s - \phi) \\ r[n] &= i[n] + r[n-1] \times 2\cos(w \times T_s) - r[n-2] \end{aligned} \quad (8)$$

Denklem-8 icin blok sema resim-1 de verilmistir.

2 UYGULAMA

Uygulama ciktilara buraya eklencek.

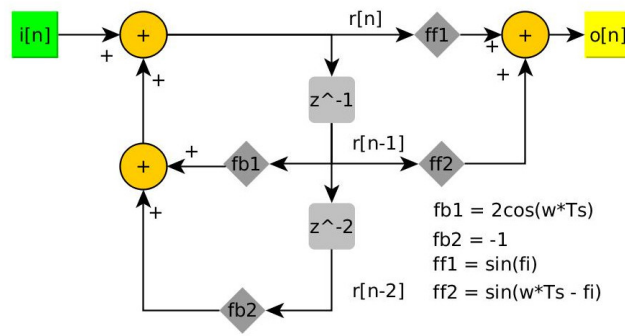


Figure 1: Faz farkli sinus fark denklemi blok semasi