

西安电子科技大学

学位论文创新性声明

秉承学校严谨的学风和优良的科学道德，本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果；也不包含为获得西安电子科技大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中做了明确的说明并表示了谢意。

申请学位论文与资料若有不实之处，本人承担一切的法律责任。

本人签名： 梁银 日期 2012.3.20

西安电子科技大学

关于论文使用授权的说明

本人完全了解西安电子科技大学有关保留和使用学位论文的规定，即：研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权单位属西安电子科技大学。学校有权保留送交论文的复印件，允许查阅和借阅论文；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以允许采用影印、缩印或其它复制手段保存论文。同时本人保证，毕业后结合学位论文研究课题再撰写的文章一律署各单位为西安电子科技大学。（保密的论文在解密后遵守此规定）

本学位论文属于保密，在___年解密后适用本授权书。

本人签名： 梁银 日期 2012.3.20

导师签名： 陈光世 日期 2012.3.20

摘要

两轮自平衡小车是一种非线性、多变量、强耦合、参数不确定的复杂系统,它体积小、结构简单、运动灵活,适合在狭小的空间内工作,是检验各种控制方法处理能力的一个理想装置,受到科学家的重视,成为具有挑战性的课题之一。

两轮自平衡小车系统是一种两轮左右并行布置的系统。像传统的倒立摆一样,其工作原理是依靠倾角传感器所检测的位姿和状态变化率结合控制算法来维持自身平衡。本文在总结和归纳国内外研究现状后,选用适当的控制器、执行电机和传感器,设计出了两轮自平衡小车的控制部分,选用的倾角传感器以实时获取小车的当前姿态,并将姿态信息经外围电路送给控制器,通过控制算法输出的控制信号来驱动电机,从而来实现小车的自平衡。借鉴国内外机器人系统的建模,根据运动学和牛顿力学对小车系统进行建模,对非线性模型进行了反馈线性化,并对线性化后的模型进行了系统的稳定性、可控性和可观性验证。在控制器的设计中,首先利用传统PID和LQR控制对简单模型进行可行性分析;接着根据变结构控制理论设计了基于指数趋近律的变结构控制器,并对小车系统加外部干扰进行仿真验证;最后采用线性二次型最优控制,分别改变 Q 、 R ,分析了系统的角度、控制电压的输出响应,可以看出控制器 Q 、 R 的选择对系统的暂态性能、稳定性、鲁棒性和可控范围有很大的影响,通过分析为实现两轮小车大范围稳定控制的线性控制器的设计提供了依据,并对小车系统外部干扰进行仿真验证。

仿真结果表明LQR控制比PID控制要好;小车系统在变结构控制器的作用下出现了比较大的抖振,但是它有较强鲁棒性;在最优控制器的作用下不仅大范围可控并且具有一定的鲁棒性。

关键词: 两轮自平衡小车 平衡控制 变结构控制 最优控制

Abstract

The self-balanced two-wheel vehicle is a kind of complex system featured by nonlinear, multivariable, strongly coupled and parameters-uncertain which is suitable for working in poky space because of its small size, simple structure and flexible movement. It is an ideal device to test the processing ability of various control methods, and has gained great attentions from scientists as one of the challenging issues.

The self-balanced two-wheel vehicle is a system with the collocation of the two wheels. As the traditional inverted pendulum, the vehicle system relies on a control algorithm employing orientation and rate of state-changing detected by the obliquity sensor to maintain the balance. In this thesis, the state of the art is summarized. The controller of a self-balanced two-wheel vehicle system is designed by properly choosing the controller, the administrable motor and the sensor. The current orientation information is obtained by the obliquity sensor and transferred to the controller by the external circuits, the motor is driven by the output control signals, and thus the vehicle system can maintain self-balanced. Reference to the modeling of robot systems, a vehicle system model is established based on kinematics and Newtonian mechanics. The model is linearized by the feedback linearity correction method, and the stability, controllability and observability of the model are verified. In the controller design, the feasibility of traditional PID and LQR control of a simple model is analyzed; then a variable structure controller which based on the exponential reaching law is designed according to the variable structure control theory, the effects of external interference on the vehicle are analyzed. A linear quadratic optimal control method is adopted and the system output responses of the angle and the control voltage are analyzed by using different values of the parameter Q and R . The analysis results provide basics for the design of a stable large-range controllable linear controller.

The simulations show that the LQR control method is fairly better than the PID control method. The vehicle system has comparatively great quiver under the variable structure controller, but still possesses strong robustness. Large-range control and certain robustness can be achieved under the optimal controller.

Keywords: **Two-wheel Self-balanced Vehicle** **Balance control**
 variable structure control **Optimal Controll**

目 录

第一章 绪论.....	1
1.1 两轮自平衡小车研究的意义.....	1
1.2 两轮自平衡小车的研究现状.....	2
1.2.1 国外研究现状.....	2
1.2.2 国内研究现状.....	4
1.2.3 国内外研究分析总结.....	5
1.3 论文的主要工作和论文结构.....	5
第二章 现有控制方法介绍.....	7
2.1 PID 控制理论.....	7
2.2 最优控制理论.....	8
2.2.1 状态反馈.....	8
2.2.2 极点配置.....	9
2.2.3 最优控制.....	9
2.3 变结构控制理论.....	11
2.3.1 变结构控制的研究意义.....	11
2.3.2 变结构控制系统.....	12
2.3.3 变结构控制系统的模型.....	14
2.4 本章小结.....	15
第三章 两轮自平衡小车的控制系统设计.....	17
3.1 两轮自平衡小车的基本原理.....	17
3.2 两轮自平衡小车系统结构介绍.....	17
3.3 两轮自平衡小车系统的硬件设计.....	18
3.3.1 控制系统.....	18
3.3.2 嵌入式控制芯片.....	19
3.3.3 电机驱动.....	22
3.3.4 传感器单元.....	23
3.3 控制系统的软件设计.....	24
3.3.1 两轮自平衡小车软件部分的主要功能.....	25
3.3.2 两轮自平衡小车软件系统的工作流程.....	25
3.4 本章小结.....	28
第四章 两轮自平衡小车的系统分析.....	29
4.1 建立数学模型.....	29
4.1.1 小车运动学分析.....	29
4.1.2 小车动力学建模.....	30

4.1.3 最大可控角的分析.....	36
4.1.4 非线性模型的线性化.....	37
4.2 小车的系统分析	41
4.2.1 开环系统的稳定性.....	41
4.2.2 系统的能控性分析.....	43
4.2.3 系统的能观性分析.....	44
4.3 本章小结	44
第五章 两轮自平衡小车控制器的设计与对比.....	45
5.1 利用简单模型进行可行性分析	45
5.1.1 PID 控制仿真	45
5.1.2 LQR 控制仿真.....	49
5.2 变结构控制器的设计	51
5.2.1 变结构控制器设计的一般步骤.....	51
5.2.2 基于指数趋近律的变结构控制器的设计.....	52
5.2.3 系统外部扰动对变结构控制器的影响.....	54
5.3 线性二次型最优控制器的设计	56
5.3.1 系统最优控制反馈阵的设计	57
5.3.2 线性二次型最优控制器的设计.....	62
5.3.3 系统外部扰动对最优控制的影响.....	64
5.4 本章小结	65
第六章 总结与展望.....	67
致谢.....	69
参考文献.....	71

第一章 绪论

本章开始简要介绍了两轮小车^[1]的研究意义,阐述了目前国内外的研究发展现状,并提出了本论文所要研究的主要内容。

1.1 两轮自平衡小车研究的意义

两轮自平衡小车的研究是在移动机器人研究的基础上发展起来^[2]的。移动机器人技术随着很多技术的进步而发展的,如计算机技术、微电子技术、软件技术等相关领域,机器人的发展水平可以说甚至代表着一个国家的综合实力^[3]。

两轮自平衡小车是移动机器人的一种。它是自动控制理论与技术和动力学理论相结合的一个研究性课题,可以感知动态决策的功能。两轮自平衡小车车身中心位于车轮轴的上方,能保持平衡且可行走。其结构特殊能适应地形的变化,运动灵活,能在一些复杂环境里的工作。相比之下,两轮自平衡小车的优点有^[4]:

1. 可以原地回转和任意转向,轨迹比之从前传统小车更灵活,也弥补了传统多轮布局等等缺点。
2. 简化车体结构,把机器人做的比之前更小更轻。
3. 减少占地面积,适用于在小面积或要求灵活的场合。
4. 驱动功率较小,使电池能长时间供电。

两轮自平衡小车关键是解决在完成自身平衡的同时,还能够适应各种环境下的控制任务。用外加各种传感器和防碰撞开关等,来实现小车各种复杂功能,其复杂性主要体现在以下三个方面:

- (1)复杂对象:实现对复杂对象(本质不稳定)进行控制;
- (2)复杂环境:应用于复杂未知的环境;
- (3)复杂任务:实现小车平衡控制同时完成路径规划、路径跟踪等任务。

两轮自平衡小车是一个不稳定机器人动力学系统,其动力学方程是一个多变量、时变的非线性高阶方程,加上其中的非完整约束,要求完成的任务具有多重性。通过以前学习倒立摆模型提出的想法,如图 1.1 所示。研究平面运动,若摆向左边运动,则摆的底部也跟随向左移来保持摆竖直平衡,向右边运动同左边。

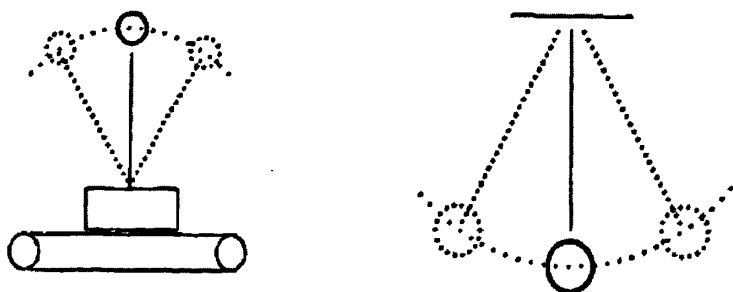


图 1.1 传统倒立摆运动图

两轮自平衡小车运动方式相类似于倒立摆，也需要运动以保持车架竖直平衡，通过控制小车电机的转速来实现。如图 1.2 所示。

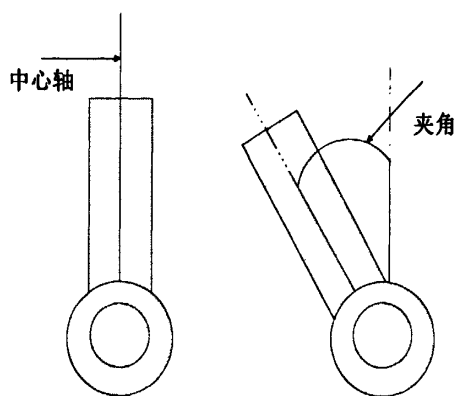


图 1.2 小车的两种状态

因此，两轮自平衡小车是一个实现起来相对简单的复杂系统，检验各种控制方法处理能力的典型装置，受到了世界各国科学家的重视。此实验系统可以运用多种方法控制，比如在本文要用到的经典控制，现代控制和智能控制，对各种控制方法提出挑战，系统具备了复杂系统的特点但其本身又不是很复杂，价格低廉且占地面积小，是一个很有潜力的实验工具。

1.2 两轮自平衡小车的研究现状

1.2.1 国外研究现状

近几年，两轮自平衡小车的研究在各国都得到了快速发展。已经有了实验用的原型机，同时也提出了多个可以控制平衡的方案，并验证了原型机的平衡性能和运动特性。改造后的两轮自平衡小车可以快速方便的应用到很多环境中，如承载，运输和代步等等。这里面也蕴含了巨大的商机，一些外国公司已经把这些作为商业化产品投放到市场。

国外研究的自平衡小车较为先进的有：

(1) 自平衡两轮车 JOE^[5,6]：

JOE 是基于倒立摆的自平衡小车, 由瑞士联邦技术学院工业电子实验室研究人员研究的, 其控制芯片是 DSP 芯片。在车架上放置重物可以模拟驾驶者。JOE 最大的运动速度可达 1.51m/s , 超过了人的行走速度, 并能在恶劣条件下运行, 如图 1.3 所示。在设计中可以通过陀螺仪加上光电编码器测量数据, 控制系统平衡利用的是状态反馈控制器。



图 1.3 JOE 机器人

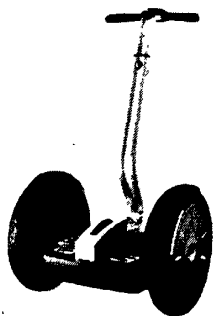


图 1.4 SEGWAY



图 1.5 自动平衡是动力轮椅 iBOT

(2) SEGWAY HT^[7,8].

SEGWAY HT 是一个更为实用且商业化版本的两轮机器人, 由美国发明家 Dean Kamen 研制, 如图 1.4 所示, 驾驶者站立在 Segway 小车上使之平衡前行且能在其身体摆动时也可以保持平衡, 在各种环境下都可使用, 其运动原理建立在动态稳定的基本原理(车子本身的平衡能力)上^[9]。整个系统有五个陀螺仪、两个倾角传感器和一个电机编码器, 车摆动时, 利用这些判断车子的位姿, 通过每秒 100 次频率检测车子重心以维持平衡前进。

Segway 是来源于美国的医疗器材生产商强生公司所开发的一种自动平衡式动力轮椅——iBOT, 如图 1.5 所示, 这个设计是为了照顾残疾人士, 通过它可以实现自由上下楼梯。值得注意的是 SEGWAY 踏板位置低于两轮轴心的连线, 系统有一定自稳定的特性, 从而控制的难度有明显的降低。其运动特点类似于荡秋千, 总是自然的向铅直的平衡位置回归。

Segway 给我们带来了全新的驾驶体验, 如图 1.6 所示。站在车上的驾驶者与车辆的总体纵轴作为参考线。当这条轴前倾时, Segway 的内置电机会产生往前的力量, 一方面平衡了人与车往前倾倒的扭矩, 一方面也产生让车辆前进的加速度, 相反, 当驾驶者的重心后倾时, 也会产生向后的力量以达到平衡效果。因此, 驾驶者只需改变自己身体的角度, 前倾或后倾, Segway 就会根据倾斜方向来前进或后退, 而速度与驾驶者的身体倾斜程度成正比。



图 1.6 Segway 带来的全新驾驶体验

1.2.2 国内研究现状

国内在自平衡小车的研究也获得很大成就。

(1) 2003 年,中国科学技术大学研究的两轮左右并行结构的自平衡两轮代步电动车^[11]。由嵌入式 CPU 控制,平衡传感器、速度和加速度传感器用来采集信息,通过一定控制算法,计算输出的 PWM 信号以控制伺服电机转矩,这样小车可以根据重心的偏移来前进、后退和转弯来保持平衡。

(2) 2004 年,台湾国立中央大学利用模糊控制实现了一个两轮小车的自动平衡控制^[10],如图 1.7 所示。

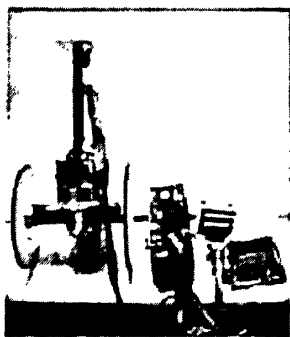


图 1.7 国立中央大学制作的小车

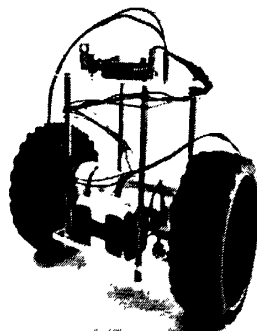


图 1.8 逢甲大学制作的小车

(3) 2004 年,河南科技大学研制的平衡双轮电动机样机,其控制器是 C8051F020 单片机,选取陀螺仪和倾角传感器检测转动角速率和倾角,通过控制算法得到的电压信号经 D/A 然后驱动电机^[12]。

(4) 2005 年,北京邮电大学制作了自平衡双轮移动机器人,车体重心是在电机轴线下,其机械结构是轮子上装有球形外壳,开始用遥控器控制运动车体会摆动。在控制系统升级后,用陀螺仪来监测小车姿态,经过控制算法来实现小车的自平衡。

(5) 2005 年,哈尔滨工程大学研制的类似双轮直立自平衡机器人,其控制核心选

用 Cygnal 公司的 C8051 单片机以及人机交互上位机作。选用 AD 公司的反射式红外线距离传感器和双轴加速度传感器来检测车体斜角度。通过 PWM 技术来控制直流电机转速。选用电超小超低功耗且高速无线收发 MODEM 来实现上位机与机器人的数据通信。人机交互选用液晶点阵、按键和方向摇杆。使用了其独特的控制算法来实现小车的平衡稳定控制^[13,14]。

(6) 2008 年,台湾逢甲大学自动工程系研制出了电动两轮平衡车^[15], 如图 1.8 所示。

1.2.3 国内外研究分析总结

通过上两节分别对国内和国外的研究分析可知,一般两轮自平衡小车的研究基础大多都是倒立摆模型,机器人有定质心及变质心两大分类,研究较多的是定质心的小车。

一般选取陀螺仪、倾角传感器和加速度计等通过数据融合得到其位姿信息。有控制系统灵魂的软件设计,且需要较好的控制算法来保障系统性能。两轮自平衡小车是具有非线性的倒立摆系统,当前对两轮自平衡机器人的控制方法,大致可分为:经典控制方法、现代控制方法和智能控制方法。而本文分别采用 PID 控制,最优控制和变结构控制来控制小车,主要是从改进线性化模型着手,分析了变结构控制和最优控制的控制结果。重点研究 Q、R 的改变对小车控制系统的影响,为较大的扩大自平衡小车的可控范围以及提高系统的动态性能。

1.3 论文的主要工作和论文结构

本文的研究对象是本质不稳定的两轮自平衡小车,其动力学系统具有非线性、多变量、时变、强耦合、参数不确定性等特性。

(1) 本文通过分析和借鉴国内外的两轮自平衡小车结构组成,提出了新的两轮自平衡小车构建方案,采用了适当的计算机控制单元、电机单元和传感器单元并设计了相应的外围电路将两轮自平衡小车系统硬件实现。

(2) 建立了系统的数学模型,并为了使模型更加接近实际模型考虑了电机反转力矩,以电机的控制电压作为输入量对小车进行了建模,利用反馈线性化方法对模型进行线性化,对线性模型进行系统的稳定性、可控性和能观性分析。

(3) 利用简单模型对 PID 控制和 LQR 控制进行了可行性分析,为了不失普遍性,文中改变小车的参数来验证其可行性,仿真发现两种控制都能成功控制理论模型,同时分析了角度控制效果和系统出力,对比分析出 LQR 控制更加理想。

(4) 对反馈线性化的模型设计了基于指数趋近律的变结构控制器,并对其加

入外部扰动。为了找出更适合的控制器,同时对于线性二次型最优控制,分析最优控制器的 Q 、 R 的改变对小车非线性控制系统的品质的影响,为实现两轮小车大范围镇定的线性控制器的设计提供参考。设计出一个最优控制器,对小车系统进行仿真验证,并对其加入外部干扰。

(5) 仿真发现变结构控制器对系统进行控制时虽然具有较强的鲁棒性,但同时使系统出现抖振。对于最优控制器的仿真发现该系统确实不仅可控,且具有一定的鲁棒性。

第二章 现有控制方法介绍

对于两轮自平衡小车位姿信息的获取,一般选择陀螺仪、加速度计和倾角传感器等传感器,通过数据的融合得到信息。软件是控制系统的“灵魂”,那么好的控制算法是系统性能的保障。通过向前人的学习可知控制算法有很多种,有基于PID控制,模糊控制,变结构控制,LQR控制及多种控制算法的融合,那么我在本文中选用几种控制算法来验证我们设计的小车的性能。在本章中会为控制器的设计提出几种控制算法。

2.1 PID 控制理论

经典控制理论中,控制器最常用的控制规律是PID。PID控制器已经有70多年历史,是最早且最实用化的控制器,现在仍广泛应用于工业控制。PID控制^[16]简单、易懂,使用的系统模型不需要很精确,因此应用广泛。

PID控制器共由三部分组成(比例单元(P)、积分单元(I)和微分单元(D))。其输入 $e(t)$ 与输出 $u(t)$ 的关系为:

$$u(t) = kp(e(t) + 1/Ti \int e(t)dt + Td * de(t)/dt) \quad (2-1)$$

式中积分的上下限分别是0和 t 。所以它的传递函数为:

$$G(s) = U(s)/E(s) = Kp(1 + 1/(Ti*s) + Td*s) \quad (2-2)$$

其中, kp 为比例系数(增大比例系数将加快系统的响应,它的作用输出值较快,但是不能很好稳定在一个理想的数值,不良的结果虽能有效的克服扰动的影响,但是有余差出现,过大的比例系数会使系统有较大超调,且产生震荡,使稳定性变坏)。

Ti 为积分时间常数(积分时间常数的作用是在比例的基础上消除系统的稳态误差。它能够对稳定后累积误差系统进行误差修整,以减小稳态误差。积分作用一般会使稳定性下降)。

Td 为微分时间常数(微分具有超前作用,对于具有容量滞后的控制,引入微分来参与控制,在微分项设置恰当的情况下,对于提高系统的动态性能指标有显著效果,它可以使其稳定性增加,动态误差减小。)

由于其应用范围广,实际中已经有系列化的产品。对于PID控制有:

1. 虽然有很多过程是非线性的或者是时变的,但将其简化为基本线性与动态特性不随着时间而变化的系统,PID就可控制了。

2. PID参数容易整定,使用时只需要设定三个参数(Kp , Ti 和 Td)即

可。有时不一定设定全部参数，可取其中的一或两个参数，不过比例控制是不可少的。如果其动态特性变化 PID 参数就可以重新整定，如可能会由负载变化引起其动态特性变化。

第三，PID 控制器在实践中不断的得到改进。

根据 PID 的相关特性，本文将使用 PD 控制器策略仿真。

2.2 最优控制理论

无论是经典控制理论还是现代控制理论，反馈控制都是基本控制方式。经典控制理论中，我们能利用的仅是输入输出信号，所以只能采用输入前馈或者输出反馈的方式发送系统的性能来达到控制的目的。但现代控制理论中，由于采用状态空间法描述系统，于是增加一种反馈的方式——状态反馈^[17]。

2.2.1 状态反馈

原系统的方程为：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2-3)$$

式中 $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $u(t)$ 分别是 n 、 m 、 r 维向量， A 、 C 、 B 为相应矩阵。其原理框图如图 2.1。图中的状态反馈是将系统状态反馈到其输入端，与控制输入共同作用到整个系统中。图中 K 是状态反馈阵， $v(t)$ 作为闭环系统的参考输入。

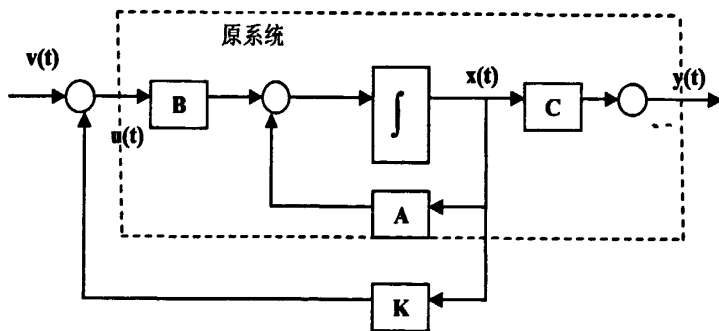


图 2.1 状态反馈原理框图

图中闭环系统是将控制信号 $u(t)$ 代入到开环系统的模型，经状态反馈矩阵 K 反馈，系统在闭环状态下的模型可写成：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Bv(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2-4)$$

对单输入的线性定常连续系统，状态反馈会保持其可控性^[18]。现代控制理论中的基于状态反馈法有两种算法：极点配置法与线性二次型最优控制。可对这两

种算法简单介绍。

2.2.2 极点配置

控制系统各种特性和品质在很大程度上都是由闭环零极点位置决定。通过对状态反馈阵的选择来解决极点配置问题,使得系统极点能配置到需要位置,以期符合一定性能指标要求,能控系统中极点配置是经过状态反馈来实现的。极点配置方法是现代控制中较为常用的一种控制方法。

对单输入单输出系统进行极点配置,对于开环状态的模型(A 、 B 、 C 、 D 阵),我们引入了系统的状态反馈 K ,状态反馈下的闭环系统,其状态方程写成($A-BK$ 、 B 、 C 、 D)。其特征方程是:

$$|sI - A + BK| = 0 \quad (2-5)$$

若系统完全可控,可用状态反馈来配置极点。如果闭环系统的期望极点位置是 $\mu_i, i=1, \dots, n$,那么闭环系统特征方程 $\alpha(s)$ 可表示为:

$$\alpha(s) = \prod_{i=1}^n (s - \mu_i) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n \quad (2-6)$$

确定反馈阵 K 利用的直接法是比较式(2-5)与式(2-6)中对应项的系数确定 K 阵。另外也可利用 Ackermann 公示求 K ,这里介绍一下 Ackermann 算法,利用这个算法可在 MATLAB 中方便计算出反馈阵 K 。

这种方法中状态反馈阵 K 可由下式得出:

$$K = -(0, 0, \dots, 0, 1) T_c^{-1} \alpha(A) \quad (2-7)$$

其中 $T_c = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ 是可控性判定阵, $\alpha(A)$ 为将 A 代入式(2-6)得出矩阵多项式的值,可由 polyvalm()函数求出。若系统是完全可控的,则 T_c 满秩,对于单变量系统, T_c^{-1} 存在就可设计极点配置器。

在 MATLAB 工具箱中有一个 acker()函数实现此算法:

$$K = \text{acker}(A, B, p) \quad (2-8)$$

其中(A, B)为状态方程的模型,向量 p 包含期望极点位置, K 为状态反馈向量。

2.2.3 最优控制

最优控制理论诞生于20世纪50年代。最优控制是现代控制理论一个主要分支,着重研究使控制系统性能指标以实现最优化的基本条件与综合方法。要解决的问题是:按照控制对象的动态特性,选择一个容许被控对象按照技术的要求运行,并使给定性能指标达到最优值。它以庞特里亚金最小值原理和贝尔曼动态规划为基础立足状态变量法,研究较为复杂的系统。最优控制问题是建立于受控运动过程的运动方程的描述,给出控制变量允许的取值范围,指定运动过程的初始和目标

状态,同时规定了一种可以评价运动过程品质的性能指标。其品质优劣和性能指标好坏取决于选择的控制函数与相应的运动状态。

对线性系统控制器的设计,如果系统性能指标指的是状态变量与控制变量二次型函数积分,那么讨论系统最优化的问题就是线性系统的二次型最优控制问题^[19],简称线性二次问题。其最优解可写成解析表达式和实现求解的规范化,并能导出一个简单地利用状态线性反馈控制律而构成闭环的最优控制系统,且能兼顾多项性能指标,所有被特别重视,在现代控制理论中发展较为成熟。线性二次型最优控制设计方法^[20]是60年代发展的一种应用较多的最优控制系统设计方法。其控制对象线性系统的目标函数是对象状态与控制输入的二次型函数^[21]。

二次型性能泛函形式如下:

$$J = \frac{1}{2} \int [x^T Q x + u^T R u + 2x^T N u] dt \quad (2-9)$$

其中 R 是正定的控制加权阵, Q 是半正定的状态加权阵, N 是加权误差和控制加权阵。目标函数中最重要是前两项,它的物理描述^[38]如下:

被积函数第一项 $L_x = x^T Q x$ 是误差平方,其中 x 表示误差。此处小车目标状态是 $[0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$,恰好各个状态变量均可看作误差。由于 Q 半正定,所以只要有误差, L_x 就是非负的,由此,这个代价函数是衡量误差大小的, x 越大其付出的代价就越大。 Q 阵是一个对角线常矩阵,对角线上元素 q_{ii} 是对状态 x_i 平方加权, q_{ii} 相对的增加意味着对 x_i 的有较严的要求,其于性能指标所占的比重比较大, x_i 偏差状态会减少。小车角度对其模型的影响最大,因此对应的权就应该是最大的。

被积函数第二项 $L_u = u^T R u$ 是动态过程中的控制约束。由于 R 为正定,所以只要有控制, L_u 就是正的。小车控制输入 u 是电压 $V a$,所以功率和 L_u 成正比, $\frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^T R u dt$ 则表示 $[0 \ t_f]$ 区间所消耗能量。由于 R 是对其控制量平方加权,所以当 R 很大时,控制费用的增加会使控制能量变小,反馈减弱,相应的,当 R 较小时,控制费用会较低、反馈增加、系统的动态响应较为迅速,所以,代价函数 L_u 用来衡量控制功率的大小。

被积函数第三项 $2x^T N u$ 是误差与控制的加权值,因为误差与控制作用变化较为复杂,所有使目标泛函的有效性也变的复杂,一般取 $N = 0$ 。

线性二次型最优控制要求出 J 最小时的控制量 $u(t)$ 以获得性能最优。实质上就是用小控制来保持较小误差,以达到能量与误差综合的最优目的。状态调节器的任务是:当系统的状态由于某些原因偏离平衡状态,可以在不消耗过多能量的情况下,保持系统状态的各分量仍然接近平衡状态。本文的自平衡小车,把非零状态矢量看作扰动,而把零状态看作平衡状态。

综上所述,加权矩阵 Q 和 R 的选取是考虑提高控制性能和降低控制能量消耗。如若重视提高其控制性能,则相应增加加权矩阵 Q 中的元素;相反,如若重视降

低其控制能量消耗,则需要增加加权矩阵 R 中的元素。 Q, R, N 阵取好就可寻求最优控制,使 $J \rightarrow \min$ 。根据极小值原理,引入了 n 维的状态矢量 λ ,构造出哈密尔顿函数,

$$H[x, u, \lambda] = \frac{1}{2} [x^T Q x + u^T R u] + \lambda^T [A x + B u] \quad (2-10)$$

最优控制应使得 H 取极值,得到:

$$u^* = -R^{-1} B^T \lambda = -K x \quad (2-11)$$

由正则方程可推出 x 和 λ 的关系: $\lambda = P x$

$$\text{得到:} \quad K = R^{-1} B^T P \quad (2-12)$$

$$\text{对于求解 } P, \text{ 由:} \quad \dot{x} = [A - B R^{-1} B^T P] x \quad (2-13)$$

代入正则方程整理,得到 Riccati 矩阵的微分方程:

$$\dot{P} = -P A - A^T P + P B Q^{-1} B^T P - Q \quad (2-14)$$

其中 P 是对称阵,可求出 P 进而求出反馈阵 K 。

MATLAB 控制系统工具箱中提供了线性二次型最优控制问题的命令和算法,其中 lqr 命令可求解出二次型调节器及相关 Riccati 方程。格式为:

$$[H, P, E] = lqr(A, B, Q, R)$$

其中, H 是反馈增益矩阵; P 是对应的 Riccati 方程唯一的正定解; E 为 $A - B K$ 的特征值^[45]。

线性二次型最优控制也是得到一个反馈阵,所以它和极点配置法都是基于状态反馈的控制设计。本文简称线性二次型最优调节器是最优控制器,相应系统也称作最优控制系统。

2.3 变结构控制理论

2.3.1 变结构控制的研究意义

变结构控制理论^[22,23]是一种控制系统的综合方法,这种方法比较容易实现。

变结构通过切换函数来实现,一个控制系统可设计成若干个切换函数。当系统状态向量所决定的切换函数值随着运动到达某个特定值(不失一般性取作零)时,系统中的一种结构转变为另一结构。重要的是需要切换面上存在着滑动模态区。

变结构控制的描述^[24]是将一个系统分为两个子系统。对于 n 阶的控制系统,取 m 个切换函数是: $s_i(x, t)$, $i = 1, 2, \dots, m$, 分解为两个系统,一个 m 阶,状态变量为 s_i , 另一个为 $n - m$ 维滑动模态方程。这些子系统还具有其独特性质,比如滑动模态的运动方程可解耦形成了独立的 $n - m$ 维的动力学系统,其和控制无

关。 m 阶状态为 s_i 的系统,视其是积结系统,我们不用解微分方程,所需的仅是确定控制: u_i ($i = 1, 2, \dots, m$),使 s 满足其到达条件($s\dot{s} < 0$),只需判定其符号而不用求解微分方程,看出变结构控制是把一个复杂高阶的系统分为两个低阶、较为简单的系统。

变结构控制具有优点是:其滑动模态对加入系统的干扰和摄动有自适应性。系统摄动可作广泛理解和处理,除去参数,非线性项与不确定项均可视做摄动。

变结构系统针对调节问题发展起来的,也会解决运动跟踪、自适应控制、模型跟踪、不确定系统的控制等更一般问题。变结构控制的解不唯一,不像最优控制与极点配置在一定前提下(选择指标、极点等)解是唯一的。变结构控制随控制结构、控制模式的不同和所用方法的不同,它的解是多样的。这种多样性积极来看,又为工程设计提供更多的可能性。

2.3.2 变结构控制系统

下面给出变结构控制系统的定义,对控制系统:

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad x \in R^n, u \in R^m, t \in R \quad (2-15)$$

需要确定其切换函数向量: $s(x)$, $s \in R^m$

其维数一般情况下同于控制维数,且寻求变结构控制:

$$u_i(x) = \begin{cases} u_i^+(x), & \text{当 } s_i(x) > 0, \\ u_i^-(x), & \text{当 } s_i(x) < 0 \end{cases} \quad (2-16)$$

这里的变结构体现在: $u^+(x) \neq u^-(x)$,使得:

- (1) 满足的到达条件:切换面 $s_i(x) = 0$ 以外相轨线在有限时间内到达切换面。
- (2) 切换面是滑动模态,并且滑动运动是渐近稳定的,动态品质较好。

这样设计的变结构控制会使闭环系统渐进稳定,且其态品质较好。因为利用的是滑动模型,所以称之为变结构滑动模态控制。

设 u 是标量控制,分析如下:

- (1) 到达条件:即系统 $\dot{x} = f(x, u^+(x), t)$ 的解($s(x) > 0$ 一侧)将趋近于 $s(x) = 0$ 切换面,且在有限时间达切换面, s 是一个标量函数。也就是,当初始条件是 (t_0, x_0) 时的解为:

$$x^+(t) = x^+(t, x_0, t_0), \quad s(x_0) > 0, \quad (2-17)$$

当 t 增大时,满足 $\dot{s}(x^+(t)) < 0$,且存在正数 τ ,使在 $t = \tau$ 时有:

$$\dot{s}(x^+(\tau, x_0, t_0)) = 0 \quad (2-18)$$

类似对于 $\dot{x} = f(x, u^-(x), t)$ 的解:

$$x^-(t) = x^-(t, x_0, t_0), \quad s(x_0) < 0 \quad (2-19)$$

有 $\dot{s}(x^-(t)) > 0$,且存在某一正数 τ' ,使得:

$$s(x^-(t', x_0, t_0)) = 0 \quad (2-20)$$

(2) 滑动模态渐进稳定及其动态品质。

为确定滑动模态的稳定性同时研究其动态品质，需要建立运动微分方程，对于非线性系统，是一个比较复杂的问题。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t), \\ s(x) &= 0 \end{aligned} \quad (2-21)$$

还有一种等效控制描述，对滑动运动来说，恒满足：

$$s(x(t)) = 0, \quad \dot{s}(x(t)) = 0$$

$$\text{展开后面的式子有: } \dot{s} = \frac{\partial}{\partial x} s(x) \cdot \dot{x} = \frac{\partial}{\partial x} s(x) \cdot f(x, u, t) = 0 \quad (2-22)$$

从上式中解出 $u(x)$ ，记作 $u_c(x)$ 。

变结构控制系统状态的过程由两部分组成的，即两个阶段运动，如图 4.3 所示。

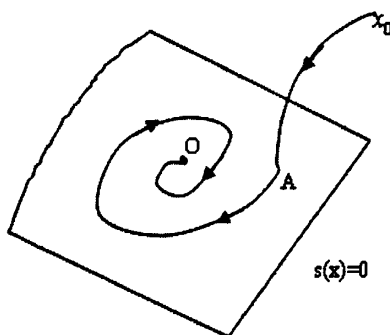


图 2.3 变结构控制的两个过程

第一阶段正常运动位于切换面之外，或是有限次穿过切换面，如图中 $x_0 A$ ，第二阶段是滑动模态位于切换面上滑动模态区内，如图中 AO 。沿切换面的运动就是滑动运动，这种运动异于系统的其他运动，称为滑动模态。切换线上每个引起滑动运动的点的集合称之为滑动模态区。

此外，每一段运动品质均与切换函数 $s(x)$ 和控制函数 $u^+(x)$ 、 $u^-(x)$ 有关。这是一个复杂问题，我们局部进行研究：选择 $u^+(x)$ 使其接近过程，即正常运动段品质有所提高，选择的 $s(x)$ 使滑动模态运动得到保证与改善。

正常运动段是趋向切换面一直到到达它的那段运动。能够靠近切换面并到达是由到达条件： $s\dot{s} < 0$ 决定，但此条件反映不出运动时如何接近切换面，而正常的运动品质要求这种趋近过程较为良好。由此提出趋近律以保证其正常运动品质，可以设计各种趋近律：指数趋近率，等速趋近率，幂次趋近率，一般趋近率。

重点介绍后面设计的指数趋近率：

$$\dot{s} = -\varepsilon \operatorname{sgn} s - ks, \quad \varepsilon > 0, k > 0 \quad (2-23)$$

式 $\dot{s} = -s - ks$, 当 $s > 0$ 时, 可以解得:

$$s(t) = \frac{\varepsilon}{k} + \left(s_0 - \frac{\varepsilon}{k} \right) e^{-kt} \quad (2-24)$$

可以看出 t 充分大时趋近比按指数规律。为减小抖振, 应该使减小到达 $s(x) = 0$ 时的速度 $\dot{s} = -\varepsilon$, 即是减小 ε 增大 k 可加速趋近过程。在求取控制时会表现的较复杂, 但却能改善趋近 $s(x) = 0$ 时的正常运动, 趋近过程变快引起的抖振可以大大削弱。

有两种到达条件:

- (1) 对趋近不加刻划的趋近到达条件: $s_i \dot{s}_i < 0, i = 1, 2, \dots, m$
- (2) 按规定趋近律的趋近到达条件: $\dot{s}_i = -\varepsilon_i \operatorname{sgn} s_i - f_i(s), i = 1, 2, \dots, m$

趋近律可以设计出各种趋近律。趋近律是为保证到达过程有良好品质而滑动模态品质是由超平面设计保证的。

2.3.3 变结构控制系统的模型

非线性系统不管从特性看还是从综合控制看, 都是复杂的。模型过于一般, 虽然它包括更多的非线性控制系统, 但研究困难较大, 也不易于得到深入结果, 如分析方法, 系统的特性, 综合方法等等。简单模型的特殊性比较大, 但作为补偿, 我们却能得到更多结果。

一般非线性控制系统的数学模型:

$$\dot{x} = f(x, u, t), y = g(x, t) \quad (2-25)$$

采用变结构控制表述系统特点, 还应有一个切换函数 $s(x)$, 或切换面组:

$$s(y) = 0 \quad (2-26)$$

在系统 (2-25) 与 (2-26) 中的变量: $u \in R^m, x \in R^n, y \in R^l, s \in R^m, t \in R^1$

如果是状态反馈, 则代替 (2-26) 有

$$s(x) = 0 \quad (2-27)$$

变结构系统的模型应该指出: 切换函数 $s(x)$ 的模型; 控制模式 (切换模式)。

切换函数可以分为以下几种模型:

- (1) 线性模型: 对象和切换函数均为线性, 表达式为:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ s &= c^T x \end{aligned}$$

其中, A 是 $n \times n$ 阵, b 和 c 是 n 维向量, 要求其中向量 c 和控制都是变结构的:

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x), & \text{当 } s(x) > 0, \\ u^-(x), & \text{当 } s(x) < 0 \end{cases} \quad \text{使得这个闭路系统是全局渐近稳定的。}$$

(2) 线性对象，二次型的切换函数的表达式为：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu, \\ s &= x_1 c^T x\end{aligned}$$

其中 $x_1 c^T x$ 是一个特殊的二次型。

(3) 非线性对象，线性切换函数，表达式为：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(x) + b(x)u, \\ s &= c^T x, x = [x_1, \dots, x_n]^T\end{aligned}$$

机器人和太空飞行器等都属于这类系统。正是这些复杂的控制对象，对变结构控制的发展起到了推动的作用。

2.4 本章小结

在本章中，对经典控制中的PID控制、现代控制中的LQR控制、以及智能控制中的变结构控制作了简要的理论介绍，介绍了这三种控制器的思想和基本原理，为它们在第五章两轮自平衡小车的控制中的应用作好了准备。

第三章 两轮自平衡小车的控制系统设计

本章将在阐述两轮自平衡小车系统的工作原理和机械结构后,详细说明小车的控制系统组成和硬件设计,其中还讨论了小车的最大可控角度。

3.1 两轮自平衡小车的基本原理

两轮自平衡小车的构架与倒立摆^[25,26,27,28]相似,其框架图如图3.1所示,以电机轴心线为中心转动。

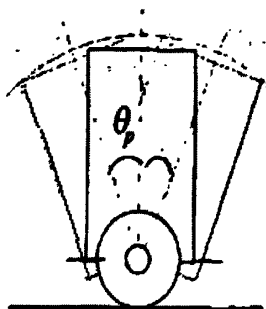


图 3.1 小车倾斜示意图

未做控制时,车身前倾或者后倾时左右轮都是处于静止状态,也就是说车身的前后摆动与车轮的转动是相互独立的。而当开始控制时,小车开始时竖直的,释放后小车将有三种运动方式,只有正确的控制小车才能保持平衡。这三种运动方式和控制描述如下^[29]:

(1)静止:当车身的重心在电机轴心线上方时小车是静止且平衡的状态,不需任何控制。

(2)前倾:当车身的重心靠前时车身会向前倾,那么需要驱动电机使车轮向前滚动,才能保持平衡状态。

(3)后退:当车身的重心靠后时车身会向后倾,那么需要驱动电机使车轮向后滚动,才能保持平衡状态。

由此,控制两轮自平衡小车是通过测量可得车身与竖直方向的角度与角速度,改变电机方向以及其控制力(力矩,电压)的大小以维持小车的自身动态平衡^[30]。

3.2 两轮自平衡小车系统结构介绍

两轮自平衡小车要实现自身的平衡,机械结构至关重要,其整体结构^[31]如图3.2所示。所有元件的放置保证了结构的对称和美观。总体可以看作由两个部分组

成：一是轮轴上方的车体部分，相当于倒立摆的摆，其余的部分为车。所有元件都将在有限的车身本体之中，倾角传感器位于下车体中心的对称轴线上，保证其能准确有效的测量。小车可以由电机带动其前进、后退和静止，摆可偏离垂直方向绕其轮轴摆动。

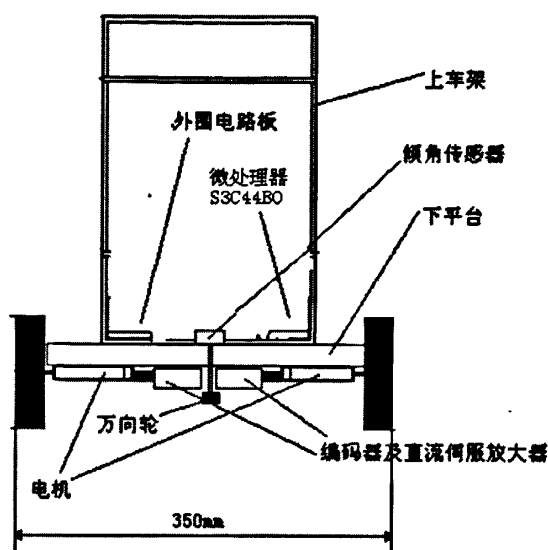


图 3.2 两轮自平衡小车结构示意图

3.3 两轮自平衡小车系统的硬件设计

3.3.1 控制系统

对于两轮自平衡小车的分析，其控制系统可分为三大部分：

- (1) 倾角传感器用以采集小车的运动状态信息。
- (2) 控制器用以处理之前传感器采集到的信息，经过计算输出信号以控制电机。
- (3) 执行机构是伺服电机用以控制小车。

两轮自平衡小车使用倾角传感器来取得小车的状态，其机械结构中的两个车轮由直流伺服电机来驱动的，通过控制单元按一定控制算法来控制小车的前进和后退，从而完成控制的目的。其控制原理框图如图3.3所示。

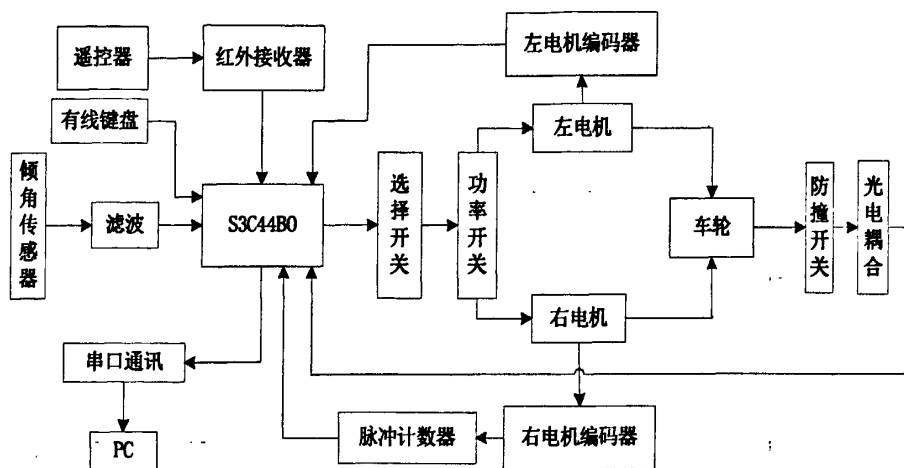


图 3.3 两轮自平衡小车工作原理框图

3.3.2 嵌入式控制芯片

两轮自平衡小车的主控制芯片其选用 ARM7 系列微处理器 S3C44B0。该型号的微处理器具有以下显著优点：具有嵌入式 ICE-RT 逻辑，调试开发比较方便；极低的功耗，适合对功耗要求较高的产品；能够提供 0.9MIPS/MHz 的三级流水线结构；程序代码密度高并兼容 16 位的 Thumb 指令集；对操作系统的支持广泛，包括 Windows CE、Linux、Palm OS 等；指令系统与 ARM9 系列、ARM9E 系列和 ARM10E 系列兼容，便于用户的产品升级换代；主频最高可达 130MIPS，高速的运算处理能力能胜任绝大多数的复杂应用。

S3C44B0 控制芯片集成的片上功能^[32]主要有：外部储存功能；I²C 总线接口；2 路 URAT；2 路 SPI；4 路 DMA 控制器（有外部请求引脚）；2 路 USB 主机控制/1 路 USB 期间控制；4 路 PWM 定时器/1 路内部定时器/看门狗定时器；8 路 10 位 ADC 和触摸屏接口；130 个通用 I/O，30 个外部中断源；电源控制：正常，慢速，空闲，睡眠模式；带 PLL 的片上时钟发生器

主控芯片的管脚电路图如图 3.4 所示：

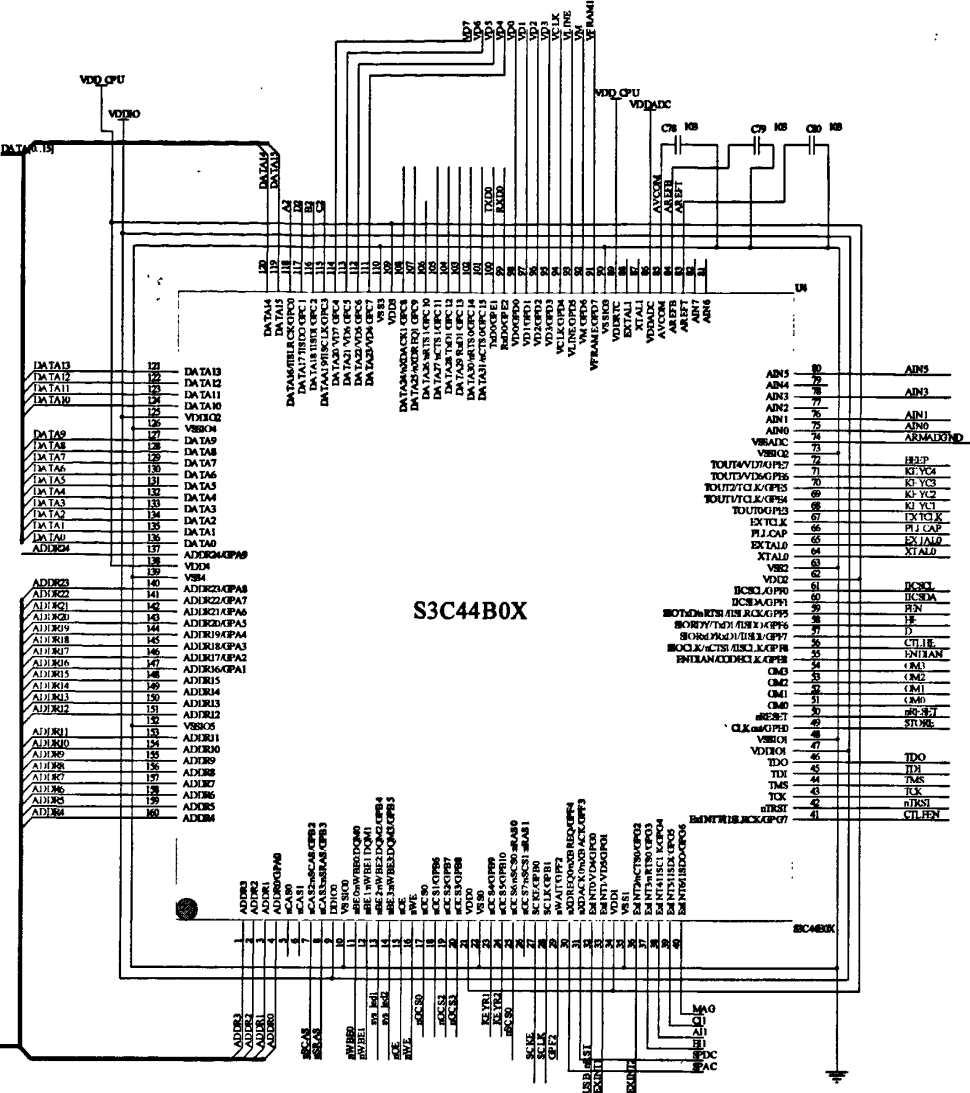


图 3.4 S3C44B0 管脚图

在本文中要使用到的控制器重要模块：

- (1) 中断控制器：其主要功能有：
 - 1) 30 个中断源（1 个看门狗定时器中断，6 个定时器中断，6 个 UART 中断，8 个外部中断，4 个 DMA 中断，2 个 RTC 中断，1 个 ADC 中断，1 个 IIC 中断，1 个 SIO 中断）；
 - 2) 矢量 IRQ 中断模式减少中断响应周期；
 - 3) 外部中断源的电平 / 边沿模式；
 - 4) 可编程的电平 / 边沿极性；
 - 5) 支持紧急中断请求的 FIQ（快速中断请求）；
- (2) A/D 转换控制器：

本文用到的S3C44B0X的1位A/D 转换器包含一个8路模拟输入混合器,自动归0比较器,时钟发生器,10位连续近似寄存器和一个输出寄存器，特征如下：

- 1) 最大转换速率:100KSPS ;
- 2) 输入电压范围:0-2.5V ;
- 3) 低的电源消耗;

控制芯片外接的 A/D 转换器如图 3.5 所示:

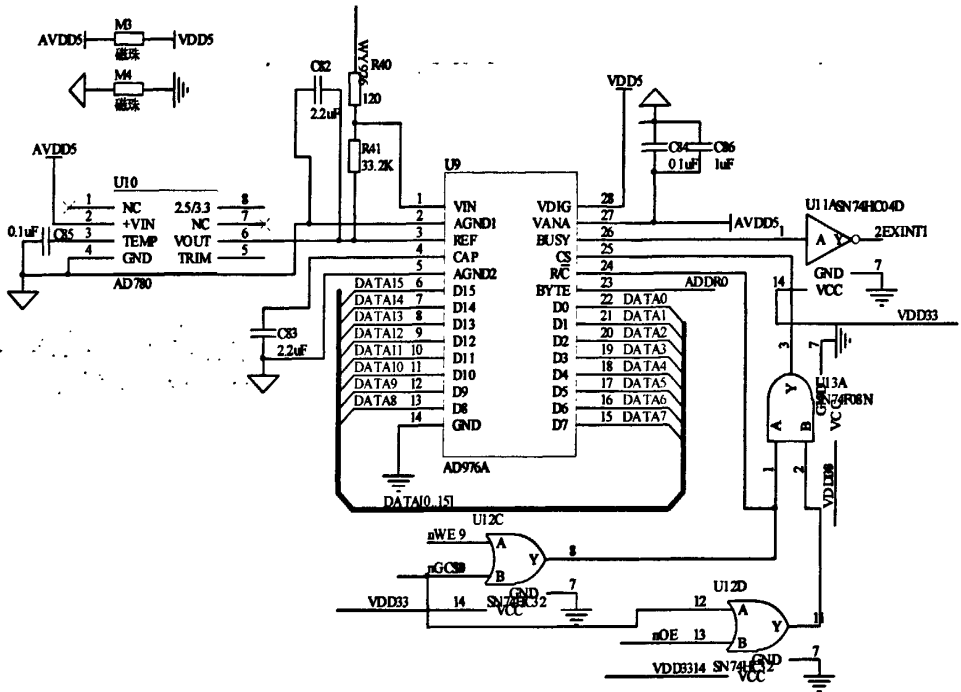


图 3.5 A/D 转换电路

(3) 看门狗定时器:

对于干扰或是系统错误而造成程序运行错乱时使用S3C44B0看门狗定时器可以恢复正常。

(4) DMA 控制器:

S3C44B0X有4路DMA控制器，其中两路称为ZDMA（General DMA）被连到SSB(Samsung System Bus)总线上，另外两路称为BDMA（Bridge DMA）是SSB和SPB(Samsung Peripheral Bus)之间的接口层，相当于一个桥，因此称为桥DMA。

(5) 时钟和电源管理模式^[33]

文中使用了S3C44B0X的5种电源管理模式: Normal mode; Slow mod; Idle mode; Stop mode; SL Idle mode

主控芯片的功能模块逻辑示图如图 3.6 所示:

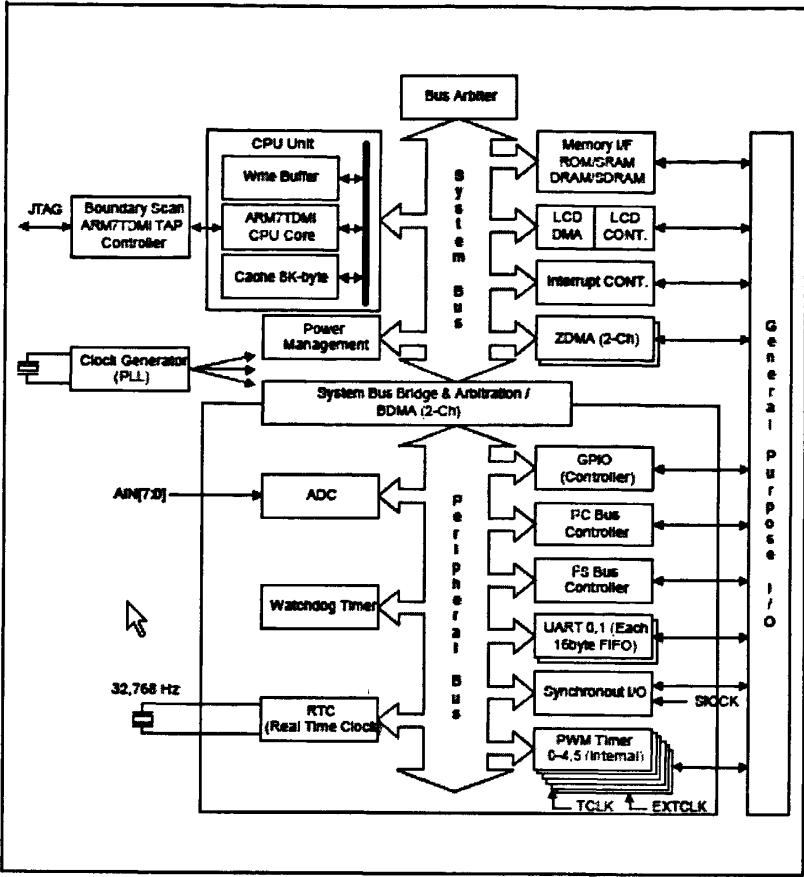


图 3.6 主控芯片的功能模块逻辑示意图

3.2.3 电机驱动

两轮自平衡小车选用瑞士MAXON直流伺服电机，用它来驱动车轮。直流伺服电机有以下优点：

- (1)输出转矩较大，克服了传动装置的摩擦和负载转矩。
- (2)调速范围较宽，且其运行速度较平稳。
- (3)响应速度比较快，可以适应速度的变化。
- (4)电机负载特性较硬，有比较大的过载能力以确保运行速度不受负载冲击的影响。

并且其线性性能比较好，有较好的机械特性与调节特性，且当控制电压的大小与极性改变时，电机转速和方向也能随之迅速改变，可以在大范围内简单平滑地调速。

瑞士MAXON直流伺服电动机^[34]，其标称率为90W、额定电压30v、空载转速7220rpm、堵转转矩949mNm、最大效率为84%、最大输入功率175W、机械时常数5ms等等。MAXON直流伺服电机是一种高质量驱动元件，它具有体积小、性能高、

惯量驱动低等技术。如果借助精密的齿轮箱，可以获得更宽的速度与转矩范围。

与其搭配的数字编码器采用MAXON公司生产的HEDL55（含线驱动器RS 422），高分辨率的模拟、数字编码器为控制提供了保证。用编码器来采集两轮自平衡小车的位置同速度信息，通过对编码器产生的脉冲信号采样而得到电机的速度，作为了车轮的速度反馈，并对脉冲信号经过运算获得了小车的位置。其外观如图3.7所示。减速箱采用MAXON公司生产的GP32C行星轮减速箱，其减速比为33: 1、精确减速比为529/16。

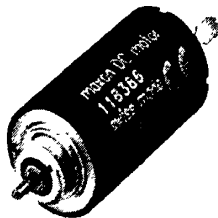


图3.7 maxon motor

控制单元发出控制信号，由两台 4Q-DC 伺服直流放大器 ADS 来担任对两个驱动轮电机的控制，如图 3.8 所示。

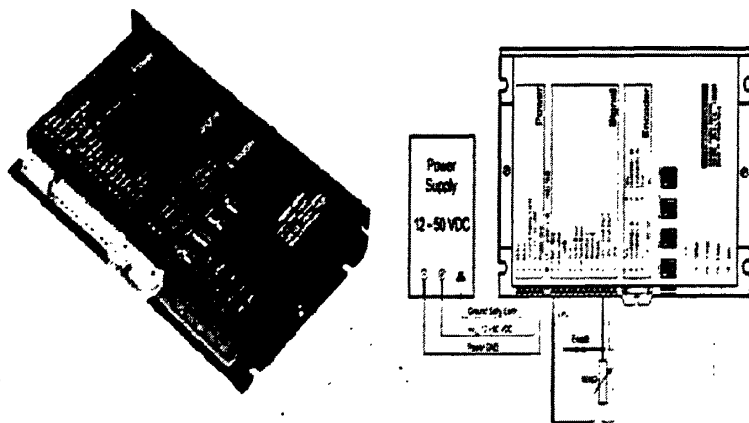


图 3.8 伺服直流放大器 ADS

3.2.4 传感器单元

两轮自平衡小车设计中选用了 CyWee 公司开发的九轴混合感测传感器。CyWee 公司分别研究了重力传感器、磁传感器和陀螺仪传感器的特点，采用九轴混合感测算法将这三者传感器的优点进行了融合，产生出基于该融合算法的九轴混合传感器。

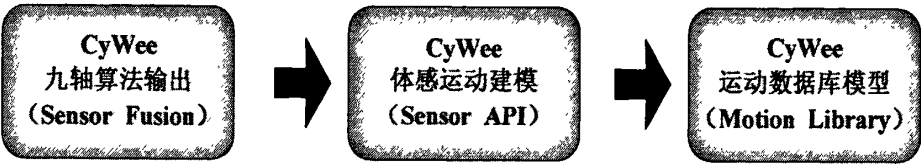
这里所谓的九轴指的是可测量空间中三轴向之重力传感器、可测量三轴向之磁力传感器、以及可测量三轴向之陀螺仪，此算法可克服传统上仅使用个别单一

传感器的缺点，进而能精确感知小车的倾角程度。

文中对九轴传感器的原始数据输出进行了采样，采样参数的内容如下所示：

- (1) Orientation: Roll、Yaw、Pitch 角度的提供，该参数具有实时性；
- (2) 旋转矩阵: 空间中 3D 物体旋转量；
- (3) 四元素输出: 空间中 3D 物体旋转量的补偿参数值；
- (4) 重力变化: 物体感受空间三轴向重力变化；
- (5) 角加速度: 物体感受空间三轴向角加速度变化；
- (6) 多维运动判断: 360 度，3D 空间全向角度变化动作识别；

得到上述 6 个采样参数后调用 CyWee 公司提供的体感动作分析模拟开源 API 进行动作建模处理，继而与 CyWee 提供的动作数据库建立连接，从而在数据库中找到与目前小车角度状态最为匹配接近的数据库成员，具体流程如下图所示：



为减少倾角传感器的高频干扰，在传感器的输出加上一个二阶低通滤波器来滤除高频杂波，再将其输出信号接入控制芯片。其滤波电路^[35]如图 3.9 所示。

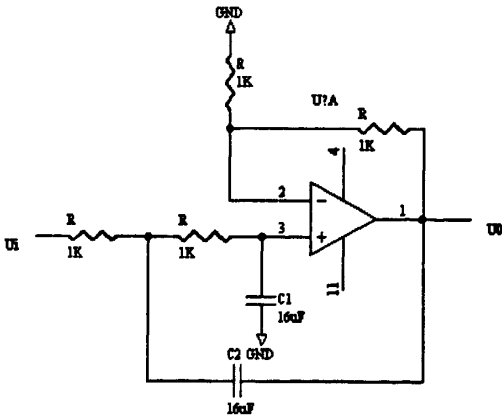


图 3.9 二阶低通滤波电路

3.3 控制系统的软件设计

如果说硬件部分是控制系统的“躯体”，是执行单元，那么软件部分则是系统“大脑”，是系统的灵魂。设计的硬件控制和控制算法最终都通过软件实现。两轮自平衡小车的控制程序是模块化编写，通过调用主程序，各部分模块会协同工作以实现小车的平衡控制。

3.3.1 两轮自平衡小车软件部分的主要功能

两轮自平衡小车软件部分的主要功能为:

1. 软件运行环境的系统初始化功能模块: 初始化单板的控制寄存器; 初步建立各个功能模块之间衔接通信功能。
2. 系统运行状况的数据日志管理模块: 记录系统重要的事件信息到系统文件; 记录生成的告警信息到系统文件; 将定期的试评估结果到系统文件。
3. 系统的设置管理功能模块: 系统中断管理; 按键子程序管理; 系统定时器管理; USB 数据采集端口管理
4. 系统状态管理功能模块: 设备状态管理; 监控管理; 系统复位管理; 异常保护管理
5. 主控调度功能模块: 启动守护进程, 调度各个子线程

3.3.2 两轮自平衡小车软件系统的工作流程

平衡小车软件系统启动后的工作流程为:

1. 初始化应用程序

初始化内容主要包括: 置设备状态为: `ST_INITIALIZE`, 设置全局结构体 `LoginSetSaveBuf`, 初始化全局互斥体和定时器队列、消息队列、临时消息队列。

2. 启动监听线程

线程启动后会置设备状态为 `ST_MONITOR_SOCKET_OK`, 并等待其它模块的连接, 然后接受查询或配置。

3. 启动定时器扫描线程

该线程将不停的扫描内核时钟, 修改系统定时器基准值, 并检索定时器消息队列。

4. 检测配置状态

读取配置文件 `/home/fixed/config.xml` 如果字段 `flag` 被置为 `yes` 表明已经被配置过, `no` 表示未被配置。

5. 启动与主控调度模块的通信线程

若被配置过则以 `MTS_FLAG_DIRECT` 的状态启动和主控调度模块通信的线程, 未被配置则略过此步。线程启动后将展开与主控调度模块的通信过程, 首先是建立尝试连接, 连接成功后设置设备状态为 `ST_MCS_CLIENT_SOCKET_OK` 并将设备状态设置为 `ST_MCS_SERVER_SOCKET_OK`。

6. 开始轮询消息队列

检索所有 `MsgClass` 类型为 `LOCAL_DEF` 的消息并加以处理。

ARM7 提供了丰富的指令系统, 可以进行 C 语言与汇编程序的单独编程与混合编程。在集成编译环境下控制程序的编写、编译、调试、下载与固化也比较方便。要用到的 A/D 转换器寄存器和 A/D 转换器控制寄存器的主要控制位的设置如下所示:

- 1) ADCCON 0x01D40000 R/W A/D转换器控制寄存器初始值 0x20 ;
- 2) 0x01D40002(Bi/HW) ;
- 3) 0x01D40003(Bi/B) ;
- 4) FLAG [6] A/D转换状态标志(只读) ;
- 5) 0 = A/D conversion in process ;
- 6) 1 = End of A/D conversion ;
- 7) ENABLE_START [0] A/D转换由允许来启动;
- 8) 如果 READ_START被允许该位无效;
- 9) PRESCALER [7:0] 预定标器的值 (0-255) ;
- 10) Division factor = 2 (prescaler_value+1);
- 11) Total clocks for ADC conversion = 2*(Prescaler_value+1)*16;

其中采用的看门狗定时器时钟频率:

$t_watchdog = 1 / (MCLK / (Prescaler_value + 1) / Division_factor)$; 看门狗定时器控制寄存器的初始设置位如下所示:

- 1) WTCN 0x01D30000 R/W 看门狗定时器控制寄存器初始值 0x8021 ;
- 2) Prescaler value [15:8] 预分频值 (0 to (2⁸ -1) ;
- 3) Reserved [7:6] 保留.0 ;
- 4) 0 = Disable watchdog timer ;
- 5) 1 = Enable watchdog timer ;
- 6) Clock select [4:3] 这两位确定时钟除因子;
- 7) 0 = Disable interrupt generation ;
- 8) 1 = Enable interrupt generation ;

看门狗定时器数据寄存器做如下初始设置: WTDAT 0x01D30004 R/W 看门狗定时器数据寄存器初始值 0x8000 , WTDAT规定看门狗定时器超时周期。WTDAT的内容在初始操作时, 不能自动加载进定时器计数寄存器。可是定时器计数寄存器在使用初始值0X8000第一次超时出现以后, WTDAT的值将自动加载进WTCNT。

得到九轴算法输出的参数后开始调用体感运动库的 API 接口进行编程, 下面以一个小车向上 30 度爬坡的运动详细说明调用 API 建模的过程:

第一步: 深度数据的定制: 深度数据提供了一种结构, 在该结构中每个深度参数的高 13 位表示在深度传感器的视野内小车离特定的 XY 坐标上的物体最近的距离 (单位: 毫米)。在本设计中选择了两种深度数据流:

Frame size of 320X240

Frame size of 80X60

第二步：调用 NuiSkeletonGetNextFrame 系统 API 来获取小车在连续两个时间点上的三轴向位移偏量。

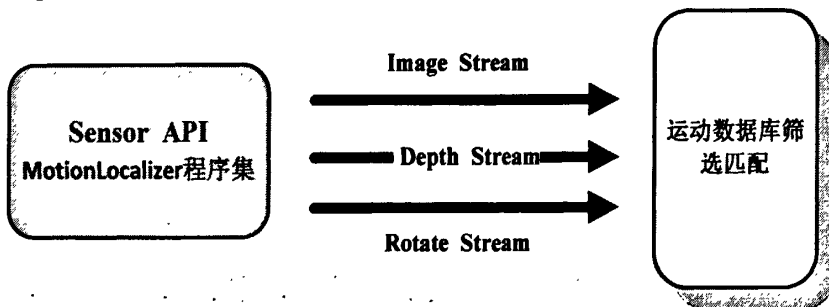
在本设计的程序中做了如下设定：

如果小车预先要进行一段倾角小于 30 度的爬坡运动，那么程序将切换到轮询调用 NuiSkeletonGetNextFrame 函数的设置中。这也是读取三轴向位移偏量最简单的方式，在单次轮询代码中设定等待下一次读取的时间。当新数据准备好或是超出等待时间，那么就让系统的 NuiSkeletonGetNextFrame 函数返回。

如果小车预先要进行一段倾角大于 30 度的爬坡运动，那么程序将切换到事件调用。在此方式下，采样到的数据量大于设定值时将传递一个事件句柄给 NuiSkeletonTrackingEnable 系统 API，该函数将会以出发事件的形式调用 NuiSkeletonGetNextFrame 函数。

第三步：调用 MotionLocalizer 系统 API 程序集对 NuiSkeletonGetNextFrame 函数的返回值进行读取并判断建模。

第四步：MotionLocalizer 系统 API 程序集将得到小车运动模型，并以 Image、Depth 和 Rotate 三个主要参数向运动数据库提供索引和筛选依据，如下图所示：



第五步：上层应用程序对运动数据库返回对象的处理。

主程序流程图如图 3.10 所示

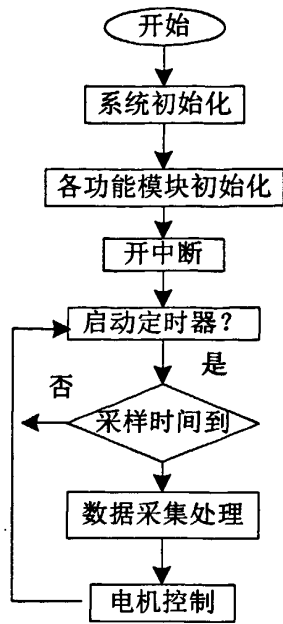


图 3.10 主程序流程图

3.4 本章小结

本章完成了两轮自平衡小车的系统设计。通过借鉴众多国内外两轮自平衡小车的设计方案，并结合自身条件，设计了两轮自平衡小车的软硬件。本章主要内容有：

- (1) 对小车的工作原理做了说明，小车整体上可以看成是一倒立摆，由车和摆两部分组成。小车位于平衡状态时是车体垂直即小车静止的；当车体前后倾斜时应通过电机驱动小车使之沿直线前后运动以使小车平衡。
- (2) 简单描述了小车控制系统硬件部分：控制系统嵌入式处理器、驱动电机和传感器。对于电源部分应该需要转换电路，传感器输出信号要滤波，采用二阶低通滤波器。
- (3) 控制系统软件模块的设计，简单的描述了各个功能模块的作用以及主程序流程图。

第四章 两轮自平衡小车的系统分析

要对系统进行有效的分析研究必须建立系统的数学模型，借助模型可以对系统进行定性定量分析。因此，系统的模型是解决问题的工具。本章将建立两轮自平衡小车系统的非线性模型，并在此模型的基础上运用反馈线性化方法得到系统的线性化模型，并根据得到的数学模型，对系统进行了稳定性、可控性和能观性分析，为后面控制器的设计打下了基础。

4.1 建立数学模型

研究自平衡小车的数学模型应该从运动学和动力学两个方面进行分析。这两个方面的分析是设计两轮自平衡小车系统的基础。运动学分析主要把系统相对于固定坐标的运动作为时间函数进行解析，不需要考虑引起这些相关运动的力和力矩，即是把系统空间位移表示成时间的函数。动力学分析主要研究的是系统运动学方程的建立，为系统计算机仿真分析提供了理论帮助。

4.1.1 小车运动学分析

上一章中介绍了两轮自平衡小车的机械结构。小车运动轨迹取决于两个驱动轮，其运动学示意图如图 4.1 所示。

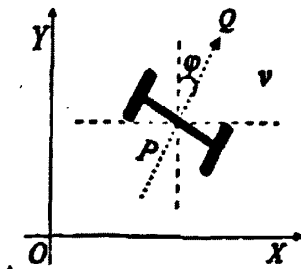


图 4.1 运动学示意图

其中参数的物理意义如下：

θ_{RL} 左车轮的转角	M_p 小车车体的重量
θ_{RR} 右车轮的转角	x 小车车轮的水平位移
$2d$ 两轮之间的距离	\dot{x} 小车车轮水平方向的速度
$2l$ 车体距离轮轴的高度	\ddot{x} 小车车轮水平方向的加速度
φ 为车体偏离 X 轴的角度	M_r 小车车轮的重量
θ_p 车体偏离垂直方向的角度	R 小车车轮的半径

系统的运动模型刻画的是系统位置与速度之间的运动关系,是研究平面移动机器人的方法之一。根据物理学的质点运动分析方法,容易得到系统的非完整约束条件:

$$\begin{cases} \dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi + d \dot{\varphi} - R \dot{\theta}_{RR} = 0 \\ \dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi - d \dot{\varphi} - R \dot{\theta}_{RL} = 0 \\ -\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi = 0 \end{cases} \quad (4-1)$$

由非完整约束方程可得小车的运动学方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \frac{R}{2} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \cos \varphi \\ \sin \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{1}{d} & \frac{1}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{RL} \\ \dot{\theta}_{RR} \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

因此只要控制小车的左、右两个轮子的角速度就可控制小车的运动轨迹。

当 φ 为常数时,即 $\dot{\varphi}=0$ 时,两轮自平衡小车系统进行直线运动,反应在运动学方程上,化简之后有:

$$\frac{R}{2d}(\dot{\theta}_{RR} - \dot{\theta}_{RL}) = 0 \quad (4-3)$$

可以看出,只有自平衡小车两轮的转角速度和方向均相同的时候,小车会实现直线运动。

假如小车做圆弧运动,回转半径为 r , 速度为 v , 有如下关系:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos \varphi \\ v \sin \varphi \\ -\frac{v}{r} \end{bmatrix} \quad (4-4)$$

可得到, $\dot{\varphi} = -\frac{v}{r}$ 所以由式 (4-2) 可化简为:

$$\frac{\dot{\theta}_{RL}}{\dot{\theta}_{RR}} = \frac{r+d}{r-d} \quad (4-5)$$

可得,当两轮转角速度满足上式是小车会实现回转运动。本文中只讨论小车做直线运动的状态。

4.1.2 小车动力学建模

两轮自平衡小车系统的动力学较复杂。如果简单的把两轮自平衡小车系统简化为经典的倒立摆模型,系统在受到电机 u 的作用下两轮自平衡小车的位移为 x , 摆杆随时间摆动的角度设为 θ_p , 如图 4.2 所示:

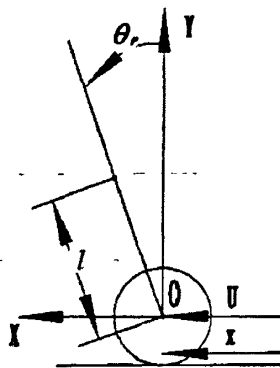


图 4.2 小车分析示意图

通过图 4.2 的分析, 由水平方向的合力^[36]: $\sum F_x = Ma$

摆杆质心水平方向的位移为: $x + l \sin \theta_p$

小车系统水平方向上的受力情况为:

$$U = 2M_r \ddot{x} - M_p (x + l \sin \theta_p)'' \quad (4-6)$$

化简后为:

$$U = (M_p + 2M_r) \ddot{x} + M_p l \ddot{\theta}_p \cos \theta_p - M_p l \dot{\theta}_p^2 \sin \theta_p \quad (4-7)$$

小车系统垂直方向上的受力情况为:

$$M_p g \sin \theta_p = M_p l \ddot{\theta}_p + M_r \ddot{x} \cos \theta_p \quad (4-8)$$

推出系统的非线性方程为:

$$\begin{cases} M_p g \sin \theta_p = M_p l \ddot{\theta}_p + M_r \ddot{x} \cos \theta_p \\ U = (M_p + 2M_r) \ddot{x} + M_p l \ddot{\theta}_p \cos \theta_p - M_p l \dot{\theta}_p^2 \sin \theta_p \end{cases} \quad (4-9)$$

当小车的倾角为零时是系统的平衡点。对系统的分析时, 首先对系统的非线性模型在平衡点邻域内线性化, 进而分析系统的开环性能以验证本质不稳定的特性。

当 θ_p 远小于 1, 即有下列情况: $\sin \theta_p \approx \theta_p$, $\cos \theta_p \approx 1$, 于是有:

$$\begin{cases} M_p g = M_p l \ddot{\theta}_p + M_r \ddot{x} \\ U = (M_p + 2M_r) \ddot{x} + \frac{1}{2} l M_p \ddot{\theta}_p \end{cases} \quad (4-10)$$

I 为摆杆围绕其重心的转动惯量, 且 $I = \frac{1}{12} M_p l^2$ 可推出下式:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_p = \frac{(2M_r + M_p) M_p g l}{(2M_r + M_p l) I + 2M_r M_p l^2} \theta_p - \frac{M_p l}{(2M_r + M_p l) I + 2M_r M_p l^2} U \\ \ddot{x} = \frac{M_p^2 g l^2}{(2M_r + M_p l) I + 2M_r M_p l^2} \theta_p - \frac{I + M_p l^2}{(2M_r + M_p l) I + 2M_r M_p l^2} U \end{cases} \quad (4-11)$$

状态方程形式为:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M_p^2 g l^2}{(2M_r + M_p I)I + 2M_r M_p l^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(2M_r + M_p)M_p g l}{(2M_r + M_p I)I + 2M_r M_p l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta_p \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I + M_p l^2}{(2M_r + M_p I)I + 2M_r M_p l^2} \\ 0 \\ \frac{M_p l}{(2M_r + M_p I)I + 2M_r M_p l^2} \end{bmatrix} U$$

(4-12)

这是一个比较简单的模型，可以先对其进行分析小车系统的可行性。

如果我们希望使得模型与现实模型接近，可以对车轮和摆分开建模，再结合导出两轮自平衡小车系统的非线性模型。首先对小车系统的左右车轮进行受力分析，如图4.3所示，车体分析示意图如图4.4。

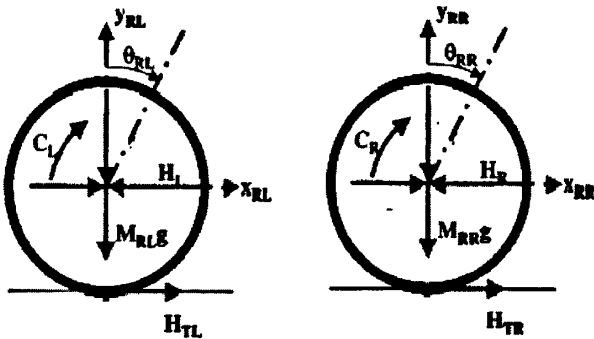


图 4.3 车轮受力示意图

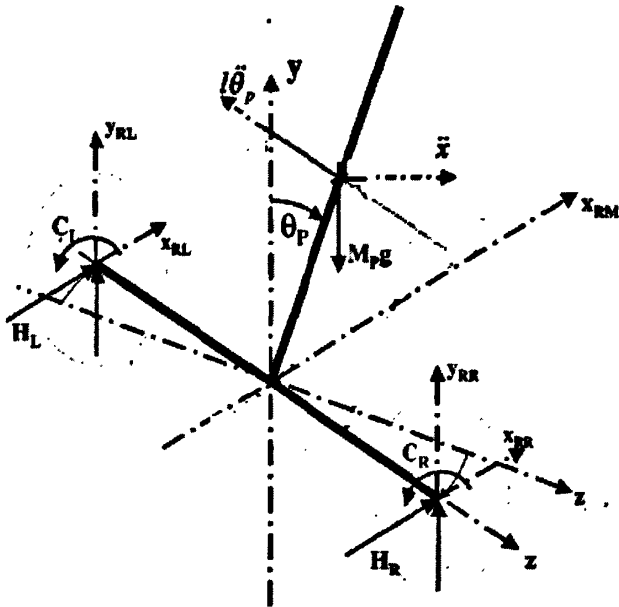


图 4.4 车体分析示意图

对于上图简单示意图中使用到的参数的物理意义如下：

θ_{RL} 左车轮的转角	M_p 小车车体的重量
θ_{RR} 右车轮的转角	φ 为车体偏离 X 轴的角度
θ 直线运动时车轮的转角	τ_m 电机的转矩
H_L 小车左轮与车体底盘水平方向的作用力	τ_a 输出的转矩
H_{TL} 小车左轮与地面的作用力	R_r 电机的电阻
H_R 小车右轮与车体底盘水平方向的作用力	k_f 电机的减速比
H_{TR} 小车右轮与地面的作用力	V_a 输入的电压
P_R 小车右轮与车体底盘垂直方向的作用力	L_r 电机的电感
P_L 小车左轮与车体底盘垂直方向的作用力	i 通过的电枢电流
C_R 小车右轮的转矩	K_f 摩擦力常数
C_L 小车左轮的转矩	β 电机的旋转轴角度
M_r 小车车轮的重量	V_m 反电动势
θ_p 车体偏离垂直方向的角度	ω 轴角的速度
K_m 电机转矩常数	K_e 反电动势常数
	I_r 车轮的转动惯量
	θ 轴角的位移
	I_p 车体的转动惯量
	J 转子惯量

同前面简单模型分析相同,通过图 4.3 的分析,由水平方向的合力,对左右车轮建立方程:

$$\text{左轮: } M_r \ddot{x} = H_{TL} - H_L \quad (4-13)$$

$$\text{右轮: } M_r \ddot{x} = H_{TR} - H_R \quad (4-14)$$

绕左轮轴心的转动力矩为: $\sum M_0 = I_a$, 可以得到:

$$I_r \ddot{\theta}_r = C_L - H_{TL} R \quad (4-15)$$

同样,绕右轮轴心的转动力矩为:

$$I_r \ddot{\theta}_r = C_R - H_{TR} R \quad (4-16)$$

两轮分析后得到:

$$2(M_r + \frac{I_r}{R^2})\ddot{x} = \frac{C_R + C_L}{R} - (H_R + H_L) \quad (4-17)$$

通过对小车车体图 4.4 的分析,车体重心相对于地面的位移为: $x_p = x + l \sin \theta_p$

利用牛顿第二定律: $\sum F_x = M_p \ddot{x}$

得到小车车体水平方向合力为:

$$M_p (x + l \sin \theta_p)'' = (H_L + H_R) \quad (4-18)$$

$$\text{化简为: } M_p \ddot{x} + M_p l \cos \theta_p \ddot{\theta}_p + M_p l \dot{\theta}_p^2 \sin \theta_p = H_L + H_R \quad (4-19)$$

沿车架垂直方向的合力为:

$$M_p(x+l\sin\theta_p)''\cos\theta_p = M_pg\sin\theta_p + (H_L + H_R)\cos\theta_p - (P_L + P_R)\sin\theta_p - M_pl\ddot{\theta}_p \quad (4-20)$$

$$\begin{aligned} M_p\ddot{x} - M_pl\dot{\theta}_p^2\sin\theta_p + M_pl\cos\theta_p\ddot{\theta}_p - M_pg\sin\theta_p + M_pl\ddot{\theta}_p \\ = (H_L + H_R)\cos\theta_p - (P_L + P_R)\sin\theta_p \end{aligned} \quad (4-21)$$

合外力矩为:

$$\sum M_0 = I_p\ddot{\theta}_p = (P_L + P_R)\sin\theta_p - (H_L + H_R)\cos\theta_p \quad (4-22)$$

由此, (4-19)和 (4-22)结合可推算出系统的非线性方程为:

$$\begin{cases} (M_p + 2M_r + \frac{2I_r}{R^2})\ddot{x} = \frac{C_R + C_L}{R} - M_pl\cos\theta_p\ddot{\theta}_p \\ M_pl\ddot{x} + (I_p + M_pl^2\cos\theta_p + M_pl^2)\ddot{\theta}_p = M_pl^2\sin\theta_p\ddot{\theta}_p^2 + M_pg l\sin\theta_p \end{cases} \quad (4-23)$$

上述模型是将车轮转矩作为其控制信号而并未考虑电机的反转力矩。为使模型与实际更加接近, 应该考虑到电机反转力矩。

考虑电机的减速比 k_j , 则小车的车轮转过角度与电机转角 β 的关系为:

$$\beta = k_j\theta_r \quad (4-24)$$

本文仅考虑小车直线运动时的情况。所以, 小车车轮转过的角度 α 与小车的位移 x 之间的关系可表示为:

$$\theta_r = \frac{x}{R} \quad (4-25)$$

根据式(4-24)与式(4-25)可得:

$$\dot{\beta} = \frac{k_j\dot{x}}{R}, \ddot{\beta} = \frac{k_j\ddot{x}}{R} \quad (4-26)$$

对于电机的分析可知电机输出到车轮上的转矩为:

$$C = J\frac{d\omega}{dt} = -\frac{k_mk_e}{R_r}\dot{\beta} + \frac{k_m}{R_r}V_a \quad (4-27)$$

对于左轮可将式(4-16)化为:

$$I_r\ddot{\theta}_r = -\frac{k_mk_e}{R_r}\dot{\beta} + \frac{k_m}{R_r}V_a - H_{\pi}R \quad (4-28)$$

可得:

$$H_{\pi} = -\frac{k_mk_e}{R_rR}\dot{\beta} + \frac{k_m}{R_rR}V_a - \frac{I_r}{R}\ddot{\theta}_r \quad (4-29)$$

将上式代入到式(4-14)中有:

$$Mr\ddot{x} = -\frac{k_mk_e}{R_rR}\dot{\beta} + \frac{k_m}{R_rR}V_a - \frac{I_r}{R}\ddot{\theta}_r - H_L \quad (4-30)$$

同样, 对于右轮有:

$$Mr\ddot{x} = -\frac{k_m k_e}{R_r R} \dot{\beta} + \frac{k_m}{R_r R} V_a - \frac{I_r}{R} \ddot{\theta}_r - H_R \quad (4-31)$$

将式(4-26)代入式(4-30)和式(4-31)得到:

对于左轮:

$$Mr\ddot{x} = -\frac{k_m k_e k_j}{R_r R^2} \dot{x} + \frac{k_m}{R_r R} V - \frac{I_r}{R^2} \ddot{x} - H_L \quad (4-32)$$

对于右轮:

$$Mr\ddot{x} = -\frac{k_m k_e k_j}{R_r R^2} \dot{x} + \frac{k_m}{R_r R} V - \frac{I_r}{R^2} \ddot{x} - H_R \quad (4-33)$$

将式(4-27)与式(4-33)整理可得:

$$2\left(M_r + \frac{I_r}{R^2}\right)\ddot{x} = -\frac{2k_m k_e k_j \dot{x}}{R_r R^2} + \frac{2k_m V_a}{R_r R} - (H_R + H_L) \quad (4-34)$$

将(4-31)与(4-16)合并后得:

$$2\left(M_r + \frac{I_r}{R^2}\right)\ddot{x} = -\frac{2k_m k_e k_j \dot{x}}{R_r R^2} + \frac{2k_m V_a}{R_r R} - M_p \ddot{x} - M_p l \ddot{\theta}_p \cos \theta_p - M_p l \dot{\theta}_p^2 \sin \theta \quad (4-35)$$

考虑电机的反向转矩时, 分析车体支架所受到的转矩时有:

$$-(H_R + H_L)l \cos \theta_p + (P_R + P_L)l \sin \theta_p - (C_L + C_R) = I_p \ddot{\theta}_p \quad (4-36)$$

经过分析线性变换后加在倒立摆上的力矩为:

$$C_R + C_L = -\frac{2k_m k_e k_j}{R_r R} \dot{x} + \frac{2k_m}{R_r} V_a \quad (4-37)$$

代入式(4-36)有:

$$-(H_R + H_L)l \cos \theta_p + (P_R + P_L)l \sin \theta_p = I_p \ddot{\theta}_p - \frac{2k_m k_e k_j}{R_r R} \dot{x} + \frac{2k_m}{R_r} V_a \quad (4-38)$$

由式(4-35)和式(4-38)整理得到非线性方程:

$$\begin{cases} (I_p + M_p l^2) \ddot{\theta}_p - \frac{2k_m k_e k_j}{R_r R} \dot{x} + \frac{2k_m}{R_r} V_a - M_p l g \sin \theta_p = -M_p l \ddot{x} \cos \theta_p \\ \left[2\left(M_r + \frac{I_r}{R^2}\right) + M_p \right] \ddot{x} = -\frac{2k_m k_e k_j}{R_r R^2} \dot{x} + \frac{2k_m}{R_r R} V_a - M_p l \dot{\theta}_p^2 \sin \theta_p - M_p l \ddot{\theta}_p \cos \theta_p \end{cases} \quad (4-39)$$

为了简化式子, 可令:

$$2\left(M_r + \frac{I_r}{R^2}\right) + M_p = a, \quad M_p l = c, \quad I_p + M_p l^2 = d$$

式(4-39)可简化为:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{2k_m k_e k_j (d + cR \cos \theta_p)}{R_r R^2 (ad - c^2 \cos^2 \theta_p)} \dot{x} - \frac{c^2 g \sin \theta_p \cos \theta_p + cd \dot{\theta}_p^2 \sin \theta_p}{ad - c^2 \cos^2 \theta_p} + \frac{2k_m (d + cR \cos \theta_p)}{R_r R (ad - c^2 \cos^2 \theta_p)} V_a \\ \ddot{\theta}_p = \frac{2k_m k_e k_j (aR + c \cos \theta_p)}{R_r R^2 (ad - c^2 \cos^2 \theta_p)} \dot{x} + \frac{acg \sin \theta_p}{ad - c^2 \cos^2 \theta_p} + \frac{c^2 \sin \theta_p \cos \theta_p}{ad - c^2 \cos^2 \theta_p} \dot{\theta}_p^2 - \frac{2k_m (aR + c \cos \theta_p)}{R_r R (ad - c^2 \cos^2 \theta_p)} V_a \end{cases} \quad (4-40)$$

取 $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta_p \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix}$ 为系统状态变量, 电机的输入电压 V_a 为系统的输入, 可以得

到系统的非线性状态方程:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-2k_m k_e k_j (d + cR \cos x_3) x_2 - R_r R^2 (c^2 g \sin x_3 \cos x_3 + cd \sin x_3 x_4^2)}{R_r R^2 (ad - c^2 \cos^2 x_3)} + \frac{2k_m (d + cR \cos x_3)}{R_r R (ad - c^2 \cos^2 x_3)} V_a \\ x_4 \\ \frac{2k_m k_e k_j (aR + c \cos x_3) x_2 + R_r R^2 (c^2 \sin x_3 \cos x_3 x_4^2 + acg \sin x_3)}{R_r R^2 (ad - c^2 \cos^2 x_3)} - \frac{2k_m (aR + c \cos x_3)}{R_r R (ad - c^2 \cos^2 x_3)} V_a \end{bmatrix} \quad (4-41)$$

由于此非线性模型比较复杂, 我们可以用反馈线性化方法来对其进行线性化。方法将在后面进行详细讨论。

4.1.3 最大可控角分析

对小车的控制通过实现车轮的运动来获取系统平衡, 当驱动车轮的电机和减速机确定后, 我们首先要算出小车在任何控制策略下, 理论上能达到的可控角范围。根据对电机、减速器等的选型, 能够确定小车在理论上的最大可控角度。

对于小车的整体分析, 如图4.4所示, 我们从整体角度理解, 小车的动力依靠地面摩擦力提供, 电机驱动小车底盘在水平方向产生加速度通过相对运动原理, 如果等效车体质心位置, 相当于产生的加速度, 该加速度垂直于车架方向的分量, 等于重力在其方向分量 $g \sin \theta$, 小车的倾角就不会发生任何变化, 这是一种临界的状态, 可以帮助分析最大的控制角度。

这些分析可有如下平衡关系:

$$g \sin \theta = \frac{k \tau_{\max}}{RM} \cos \theta \quad (4-42)$$

选取的参数: 重力加速度 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, 小车的总质量 $M = 10 \text{ kg}$, 车轮的半径

$R = 0.05 \text{ m}$, 电机的最大转矩 $\tau_{\max} = 92.4 \text{ mNm}$, 减速比为 $k = 33$, 将这些参数带入式

(4-42)可得到: $\theta_{\max} = \arctan(0.6914) = 34.6^\circ$

以上讨论是基于地面摩擦力能完全反作用于电机动力, 车轮没有任何打滑情况, 在地面上有摩擦的情况下实现的可控角会偏小。

4.1.4 非线性模型的线性化

反馈线性化方法^[37]是近年来以微分几何作为主要工具发展的精确线性化方法, 为解决非线性控制系统的分析与综合问题提供强有力的手段。通过适当的状态及反馈变换, 非线性控制系统可实现状态或输入/输出的精确线性化, 将复杂的非线性系统的综合问题转化为线性系统的综合问题。反馈线性化在一定条件下可实现系统全局精确线性化, 没有忽略高阶非线性项, 所以本节将该方法应用到了自平衡小车的研究中, 以期获得精确小车的线性化模型^[38]。

考虑到非线性系统: $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ (4-43)

如果存在函数 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 使下式成立:

$$\dot{x} = Ax + B\beta^{-1}(x)(u - \alpha(x)) \quad (4-44)$$

其中 $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times p}$, 函数 $\alpha \in R^{n \times n}$, $\beta \in R^{n \times p}$, $\alpha: D_x \rightarrow R^p$, $\beta: D_x \rightarrow R^{p \times p}$, $D_x \subseteq R^n$ 都包含原点, 并且对任意 $x \in D_x$, $\beta(x)$ 非奇异, $\beta^{-1}(x)$ 代表的是矩阵 $\beta(x)$ 的逆。那么其状态反馈为: $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ (4-45)

通过上式将非线性的状态方程化成一个可以控制的线性的状态方程:

$$\dot{x} = Ax + Bv \quad (4-46)$$

利用线性系统的控制, 对于式(4-46)中的系统设计一个镇定控制器, 如果依据线性二次型最优控制来配置极点, 可设计 $v = Kx$ 配置 $A + BK$ 的特征根到复平面的左半部 (即期望位置), 则式(4-43)的镇定控制器是:

$$u = \alpha(x) + \beta(x)Kx \quad (4-47)$$

通过上面分析, 对式(4-45)的镇定控制器的设计是通过一种方法。该方法不同于近似线性化, 其实质是经过状态反馈, 将非线性系统化成可以控制的线性化系统, 然后按照控制理论来先设计线性系统控制器得到了非线性系统的控制器。所以, 这种方法称为反馈线性化^[39]。

实施反馈线性化方法与系统结构有关联, 而这些系统结构的特征可以用数学中微分几何的些许概念来描述^[40,41]。

1. 微分几何工具

(1) 向量场^[42]

对于单输入-单输出的非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}, \text{ 其中 } x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in D (D \subset R^n), f, g \text{ 是定义}$$

在开集 D 上 R^n 值映射, h 是定义在 D 上的实值函数。

微分几何中, 上述的映射 $f: D \rightarrow R^n$ 和 $g: D \rightarrow R^n$ 被称为在 D 上的向量场。如果一个向量场中所有的元素都有任意阶的连续偏导数 x_1, x_2, \dots, x_n 的实值函数, 称之为光滑向量场。一个向量场可表示成一个列向量:

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

也可表示成下式:

$$f = f_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2(x) \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + f_n(x) \frac{\partial}{\partial x_n}$$

(2) 李导数

一个实值函数 $h: D \rightarrow R$ 与一个光滑向量场 $f: D \rightarrow R^n$ 结合可定义一个新的光滑实值函数, 在 D 上的每个点 x 处的值就是内积:

$$\langle dh(x), f(x) \rangle = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i(x)$$

该函数被称为 h 对 f 的李导数, 记作 $L_f h(x)$ 。所以在 D 上的每个点 x 处 h 对 f 的李导数定义为:

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i(x)$$

这种运算可被重复使用。若先取实值函数 h 对向量场 f 的导数, 再取对向量场 $g: D \rightarrow R^n$ 的导数, 这样可以定义新函数:

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial (L_f h)}{\partial x} g(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial h}{\partial x} f \right) g(x)$$

若将 h 对向量场 f k 次微分, 那么, 用符号 $L_f^k h(x)$ 可表示所得函数, 函数

$$L_f^k h(x) \text{ 会满足递归式: } L_f^k h(x) = \frac{\partial (L_f^{k-1} h)}{\partial x} f(x), \quad L_f^0 h(x) = h(x)$$

(3) 相对阶

$$\text{对非线性系统: } \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

如果在 $D_0 \subset D$ 域上有:

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, i = 1, 2, \dots, r-1, L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0, \forall x \in D_0$$

则系统在区域 D_0 上有相对阶 r , 其中:

$$L_f^k h(x) = L_f [L_f^{k-1} h(x)], L_f^0 h(x) = h(x)$$

有以下两个定理:

定理 1: n 阶 SISO 系统, 当系统相对阶为 n 阶时, 其就能精确的反馈线性化 [32]。

定理 2: 一般, 若对于 $x \in U$, $i = 0, 1, \dots, r-2$ 时, 其中, r 为系统的阶数。

有 $L_g L_f^i h(x) \equiv 0$, 而 $L_g L_f^{r-1} h(x)$ 有界并且不等于零, 则状态反馈为:

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{-1} \Phi(x)} [-L_f h(x) + v] \quad (4-48)$$

2. 小车模型进行反馈线性化

引入前面得到的非线性模型式(4-41)。

$$\text{令: } f_1 = x_2, \quad f_3 = x_4, \quad g_1 = g_3 = 0,$$

$$f_2 = \frac{-2k_m k_e k_f (d + cr \cos x_3) x_2 - R_r R^2 (c^2 g \sin x_3 \cos x_3 + cd \sin x_3 x_4^2)}{R_r R^2 (ad - c^2 \cos^2 x_3)}$$

$$f_4 = \frac{2k_m k_e k_f (ar + c \cos x_3) x_2 + R_r R^2 (c^2 \sin x_3 \cos x_3 x_4^2 + acg \sin x_3)}{R_r R^2 (ad - c^2 \cos^2 x_3)} \quad (4-49)$$

$$g_2 = \frac{2k_m (d + cr \cos x_3)}{R_r R (ad - c^2 \cos^2 x_3)}, \quad g_4 = -\frac{2k_m (ar + c \cos x_3)}{R_r R (ad - c^2 \cos^2 x_3)}$$

将上式代入可简化系统的非线性状态方程式(4-39)为:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2(x_2, x_3, x_4) \\ f_3 \\ f_4(x_2, x_3, x_4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2(x_3) \\ g_3 \\ g_4(x_3) \end{bmatrix} V_a = \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2(x_2, x_3, x_4) \\ x_4 \\ f_4(x_2, x_3, x_4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g_2(x_3) \\ 0 \\ g_4(x_3) \end{bmatrix} V_a \quad (4-50)$$

首先通过求小车模型的相对阶来判断该模型是否能反馈线性化。设 $h(x)$ 是 x 的光滑标量函数。

$$\text{令 } K=0, \text{ 由于: } g_1(x) = g_3(x) = 0$$

$$\text{所以有: } L_g L_f^0 h(x) = L_g h(x) = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} g_i(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x_2} g_2(x) + \frac{\partial h(x)}{\partial x_4} g_4(x)$$

如果 $h(x)$ 不是 x_2, x_4 的函数, 不论 $h(x)$ 为何值, 上式都恒为零。

$$\text{令 } K=1, \text{ 由于 } h(x) \text{ 不是 } x_2, x_4 \text{ 的函数, 有:}$$

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} f_i(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x_1} f_1(x) + \frac{\partial h(x)}{\partial x_3} f_3(x)$$

将 $f_1 = x_2, f_3 = x_4$ 代入有:

$$\frac{\partial \left[\sum_{i=1}^4 \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} f_i(x) \right]}{\partial x_2} g_2(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x_1} g_2(x)$$

可得到:

$$L_g L_f^1 h(x) = L_g [L_f h(x)] = L_g \left[\sum_{i=1}^4 \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} f_i(x) \right]$$

$$= \frac{\partial \left[\sum_{i=1}^4 \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} f_i(x) \right]}{\partial x_2} g_2(x) + \frac{\partial \left[\sum_{i=1}^4 \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} f_i(x) \right]}{\partial x_4} g_4(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x_1} g_2(x) + \frac{\partial h(x)}{\partial x_3} g_4(x)$$

无论 $h(x)$ 是 x_1 或是 x_3 的函数, 上式都不为零。

由定理 2 可得本文自平衡小车系统是 2 阶 (小于 4), 由此两轮自平衡小车系统不能完全反馈线性化, 只能进行局部反馈线性化。

接着由定理 2 可知, 两轮自平衡小车系统的状态反馈控制律, 为:

$$V_a = \frac{1}{L_g L_f h(x)} [-L_f^2 h(x) + v] \quad (4-51)$$

设 $h(x) = x_1$, 代入式(4-10)可得自平衡小车系统的状态反馈控制器为:

$$\begin{aligned} V_a &= \frac{1}{L_g L_f h(x)} (-L_f^2 h(x) + v) = \frac{\left(L_f \left[\sum_{i=1}^4 \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} f_i(x) \right] + v \right)}{\sum_{i=1}^4 \frac{\partial \left[\sum_{i=1}^4 \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} f_i(x) \right]}{\partial x_i} g_i(x)} \\ &= \frac{\left(L_f \left[\sum_{i=1}^4 \frac{\partial x_1}{\partial x_i} f_i(x) \right] + v \right)}{\sum_{i=1}^4 \frac{\partial \left[\sum_{i=1}^4 \frac{\partial x_1}{\partial x_i} f_i(x) \right]}{\partial x_i} g_i(x)} = \frac{1}{g_2(x)} (-f_2(x) + v) \end{aligned} \quad (4-52)$$

根据所求得的状态反馈表达式可将该非线性系统进行线性化。

将式(4-49)式代入式(4-52), 并令 $v = v_0 + x_3$ 可得非线性状态反馈控制器:

$$\begin{aligned} V_a &= -\frac{f_2(x_3, x_4)}{g_2(x_3)} + \frac{1}{g_2(x_3)} v \\ &= \frac{k_e k_j x_2}{R} + \frac{R_r R (c^2 g \sin x_3 \cos x_3 + c d \sin x_3 x_4^2)}{2k_m (d + cR \cos x_3)} + \frac{R_r R (ad - c^2 \cos^2 x_3)}{2k_m (d + cR \cos x_3)} (v_0 + x_3) \end{aligned} \quad (4-53)$$

将式(4-53)代入式(4-50)系统方程化简为:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_2) \\ f_2(x_2, x_3, x_4) \\ f_3(x_4) \\ f_4(x_2, x_3, x_4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g_2(x_3) \\ 0 \\ g_4(x_3) \end{bmatrix} \left(\frac{1}{g_2(x)} (-f_2(x) + v) \right) \\ &= \begin{bmatrix} f_1(x_2) \\ 0 \\ f_3(x_4) \\ f_4(x_2, x_3, x_4) - \frac{g_4(x_3)}{g_2(x_3)} f_2(x_2, x_3, x_4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{g_4(x_3)}{g_2(x_3)} \end{bmatrix} v \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} f_1(x_2) \\ x_3 \\ f_3(x_4) \\ f_4(x_2, x_3, x_4) - \frac{g_4(x_3)}{g_2(x_3)} f_2(x_2, x_3, x_4) + \frac{g_4(x_3)}{g_2(x_3)} x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{g_4(x_3)}{g_2(x_3)} \end{bmatrix} v_0 \quad (4-54)$$

因为部分反馈线性化的系统中仍会存在非线性项, 可以在平衡点 ($\sin x_3 \approx x_3$ $\cos x_3 \approx 1$ $x_4 \approx 0$) 附近进行线性化, 则式(4-54)可化简为:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \frac{cg - aR - c}{d + cl} x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-(aR + c)}{d + cl} \end{bmatrix} v_0 \quad (4-55)$$

其中:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{cg - aR - c}{d + cR} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-aR - c}{d + cR} \end{bmatrix}$$

则可以得出小车的局部线性化模型为:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + Bv_0 \\ y &= CX = [0 \ 0 \ 1 \ 0]X \end{aligned} \quad (4-56)$$

4.2 小车的系统分析

4.2.1 开环系统的稳定性

稳定是系统能正常工作的首要条件。稳定性是控制系统能正常工作的前提基础。只有在系统是稳定的, 讨论它的可控可观性才有意义。处于一个平衡状态的系统在输入或干扰作用下会偏离原平衡状态, 当外干扰消失后经过长时间又能准确地恢复到平衡状态的性能称为稳定性。

对于任意物理系统, 都存在运动的稳定性。所谓的运动稳定性理论, 是研究某些确定的或随机的干扰作用对于运动状态的影响, 来判别运动态是稳定的、渐进稳定的或是不稳定的^[44]。

系统稳定性的三种状态描述:

- ①系统稳定: 在外作用消失后系统能恢复到平衡状态, 则系统是稳定的。
- ②系统临界稳定: 在外作用消失后系统的处于临界状态, 即稍加一个干扰系统就会变的不稳定, 则系统是临界稳定。

③系统不稳定：在外作用消失后系统不能恢复到平衡状态，则系统是不稳定。

经典控制中的稳定性理论是依据控制系统特征方程式的根都分布在复平面的左半平面。由微分方程时域中的解来判定系统稳定性的是李亚普诺夫第一法。现代控制理论中则使用李亚普诺夫第二法来判断的，在不求方程解的情况下，借助一个李雅普诺夫函数 $V(x)$ 和由微分方程所计算出来的导数 $\frac{dV(x)}{dt}$ 的符号，就能直接推断出解的稳定性，因此又称为直接法。

线性定常系统齐次微分方程的一般形式：

$$a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) = 0 \text{ 或 } \sum_{i=n}^0 a_i \frac{d^i c(t)}{dt^i} = 0$$

其线性定常系统特征方程式为：

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \text{ 或 } \sum_{i=n}^0 a_i s^i = 0 \quad (4-57)$$

如果该系统无重根，切有 q 个实根 s_i ($i=1, 2, \dots, q$)、 γ 对共轭复根 $\sigma_k \pm j\omega_k$ ($k=1, 2, \dots, \gamma$)，其中 $q+2\gamma=n$ 。可以利用求解微分方程的方法或求取特征根的方法以得到系统的零输入响应：

$$c(t) = \sum_{i=1}^q A_i e^{s_i t} + \sum_{k=1}^{\gamma} D_k e^{\sigma_k t} (B_k \cos \omega_k t + C_k \sin \omega_k t) \quad (4-58)$$

由于系统的输入量为零，所以它的平衡点是原点。系统稳定时， $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$ ，式子成立的前提条件是特征方程的根都在复平面的左半面。如果至少有一个正实根或者一对实部是正数的共轭根，则其对应的零输入响应中有：

$$e^{s_i t} (i=1, 2, \dots, q) \rightarrow \infty \text{ 或 } e^{\sigma_k t} (k=1, 2, \dots, \gamma) \rightarrow \infty \text{ 此时 } c(t) \rightarrow \infty$$

系统就不能到达平衡位置，或称为系统输出是发散的并趋于无穷大，即系统是不稳定的。小车的具体参数值如下：

$$M r=0.5 ; I p=0.03759 ; I r=0.00036 ; g=9.8 ; R=0.06 ; k m=0.0389 ; k j=33 ; R r=1.2 ;$$

$$k e=0.0041 ; J=0.0000655 ; M p=10 ; I=0.25 . \text { 这里所有参数值均是采用的标准单位。}$$

将上述参数值代入式(4-56)后会得到小车的反馈线性化模型为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 26.2986 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3.8519 \end{bmatrix} v_0 \quad (4-59)$$

以下根据系统零输入响应来分析两轮小车系统的稳定性。

利用MATLAB仿真系统的初始响应，如图4.4所示。在开环系统中加入的一个初始条件： $x_0 = [0 \ 0 \ 0.1 \ 0]$ ，没有控制作用加入，即是零输入响应。物理意义可以解释为给加小车一个倾角扰动，扰动的大小为0.1弧度。从图中可以看出这个初始条件将导致车体的位置，速度，倾斜角度和角速度无限增大。从图中的零输入响应曲线可以看出，两轮自平衡小车是一个本质不稳定的系统。

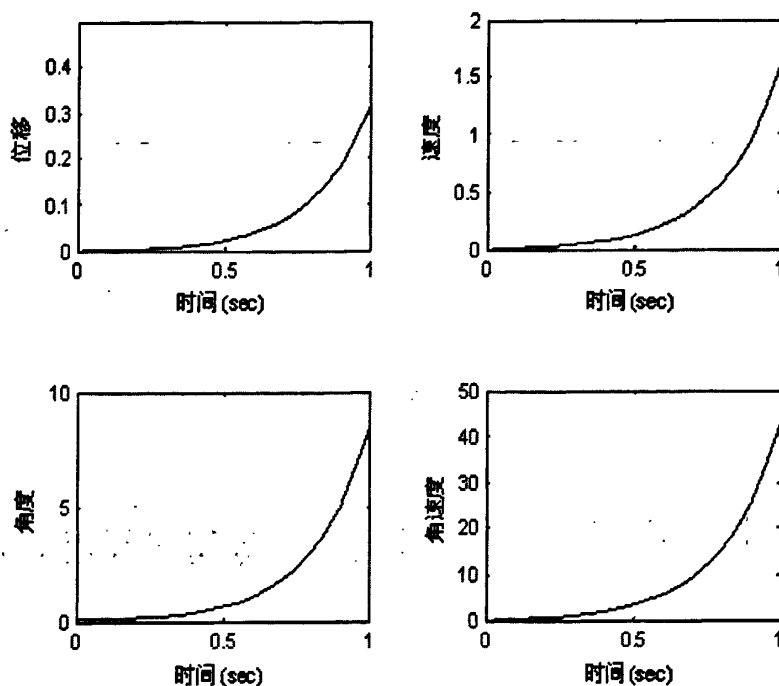


图4.4 状态变量的初始响应

4.2.2 系统的能控性分析

系统能控性的概念是R.E.卡尔曼在1960年首先提出的,很快的成为现代控制理论中基础的一个概念,在解决最优控制的问题中起到了很重要的作用。系统的能控性指的是控制作用在控制被控系统的状态和输出时的一些可能性。如果系统内部的状态变量从任何时刻开始的运动状态都是由输入影响的,并能够在有限时间再回到系统的原点,那么系统是能控的。否则,系统不完全能控^[45]。

对于线性连续定常系统: $\dot{x} = Ax + Bu$, 其能控的充分必要条件是由A, B构成的能控性矩阵为: $M = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$,

当 $\text{rank } M < n$ 时, 系统为不可控的。否则, 当 $\text{rank } M = n$ 时, 能控性矩阵为满秩, 该系统状态能控。

根据上节求得系统的线性化模型(4-59)分析其可控性, 在实验中取三组实验数据(为了不失一般性, 改变 M_p , M_r , R) 讨论系统的可控性。

依据三组数据, 通过 $M = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$, 可以调用Matlab函数库中的rank函数, 计算出 $\text{rank}(M) = 4$ 可知, M满秩, 所以系统是可控的。

由此可以说明两轮自平衡下车系统是可控的。

4.2.3 系统的能观性分析

控制系统大多都是采用反馈控制的形式。在控制系统中, 反馈控制的信息都是由系统的输出或者是状态变量组合而来的。而并非所有系统的状态变量在物理上是能观测到的, 于是是否能否通过对输出的测量获得全部状态变量信息, 就是系统的能观测问题^[45]。

能观性是由能直接测量的输入输出的量测值来确定系统内部动态特性状态的可能性。

系统的能观性矩阵为: $N = [C \quad CA \dots CA^{n-1}]^T$

当 $\text{rank } N < n$ 时, 系统不可观。否则, 当 $\text{rank } N = n$ 时, 能观性矩阵为满秩, 该系统状态能观。

同能控性分析一样, 对线性化模型(4-59)分析其能观性, 对于两轮自平衡小车系统, 若只考虑倾角传感器时, $C = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$, 根据三组数据, 通过 $N = [C \quad CA \dots CA^{n-1}]^T$, 同样调用Matlab函数库中的rank函数, 计算出 $\text{rank}(N) = 2$, 可知该系统有两个变量是能观测的。

若同时考虑倾角传感器与位移传感器, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 根据三组数据,

通过 $N = [C \quad CA \dots CA^{n-1}]^T$, 同样调用 Matlab 函数库中的 rank 函数, 计算出 $\text{rank}(N) = 4$, N 满秩, 所以系统是可观的。

说明平衡点线性化模型是可观的。

4.3 本章小结

本章分析了小车系统的运动学和动力学模型。根据系统运动学原理, 分析并建立了小车的运动学模型, 讨论了小车系统几种基本运动形式的实现条件。

把小车简化成经典倒立摆模型, 建立了小车简单的动力学模型。由驱动轮控制车体保持平衡的两轮自平衡小车来研究, 建立两轮自平衡小车的非线性模型, 为了使模型更接近实物, 充分考虑了电机的反向转矩, 并且以电机的输入电压为控制信号, 得出比较精确的非线性模型。使用反馈线性化方法对非线性模型进行了线性化, 并对其状态方程进行了稳定性, 可控性和能观性分析讨论, 为控制器的设计打下了基础。本章所讨论的小车模型为理论仿真的基础。

第五章 两轮自平衡小车控制器的设计与对比

本章我们将按照以下思路进行研究:

首先,我们首先利用第三章求得的简单模型对 PID 控制和 LQR 控制下的系统进行可行性分析。

其次,对于反馈线性化模型,根据前一章提到的变结构控制理论为小车系统设计了基于指数趋近率的变结构控制器,并对小车系统加入外部干扰进行仿真验证。

再次,设计了线性二次型最优控制,分析最优控制器的 Q 和 R 的改变对小车非线性控制系统品质的影响,为实现两轮小车大范围镇定控制的线性控制器的设计提供参考和评判依据。设计出了一个最优控制器,并对小车系统加入外部干扰进行仿真验证。

最后对仿真结果进行对比。

5.1 利用简单模型进行可行性分析

为了不失普遍性,我们用PID控制和LQR控制对三种不同状态下的系统进行了控制仿真。

MATLAB是美国Math Works公司推出的,是一种面向科学和工程的高级语言。它集自动控制、科学计算、信号处理于一体,编程效率很高。MATLAB有强大的矩阵计算和仿真能力^[46,47,48],能够对动态系统建模和仿真,是科研工作者手中好的语言、好的工具和环境。它为控制系统的辅助分析设计带来全新手段。图形交互模型输入计算机仿真环境Simulink是MATLAB的应用推广有进一步的推动作用。如今, MATLAB已经成为控制系统CAD领域最为普及的软件之一。Simulink是基于MATLAB框图设计,是MATLAB仿真中功能较强大的一种软件,可用来对各种动态环境建模和仿真分析。它可以对各种能用数学描述的系统进行建模,能从理论上对系统进行仿真分析,对系统进行适当实时修改或是按照仿真最佳效果来调试控制系统参数,以提高系统的性能,减少了设计过程中的反复修改时间,实现高效率的开发系统。

5.1.1 PID 控制仿真

PID控制是工业控制中应用最广泛的一种。其控制结构简单,综合反映了过去的积分,现在的比例和将来的微分等三方面的信息,鲁棒性强且易于操作。

根据PID控制器的相关特性,理论期望速度不要发生快速的波动,以使稳态速度误差达最小值。两轮自平衡小车系统的最初理论仿真首先采用了PD控制器作为控制策略进行仿真。

PD控制系统结构框图如图5.1所示:

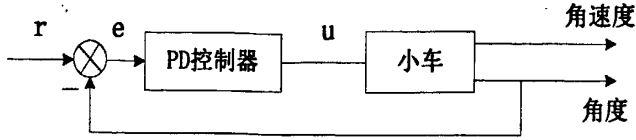


图5.1 PD控制策略系统结构框图

两轮自平衡小车是基于角度控制的控制策略,轨迹规划并没有涉及,在模型(4-12)只考虑角度时的状态方程为:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_p \\ \ddot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{(2M_r + M_p)M_p g l}{(2M_r + M_p)I + 2M_r M_p l^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_p \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{M_p l}{(2M_r + M_p)I + 2M_r M_p l^2} \end{bmatrix} U \\ y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \theta_p \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5-1)$$

小车是一个本质不稳定系统,当它从平衡点稍微受一点力,就会迅速倒地。此次控制设计目的就是让小车能稳定在平衡状态,为了更加确定其可行性,因此在小车参数变化时来研究系统性能。

本节分析考虑了小车的部分参数改变对系统的影响。主要改变车体重量以及小车质心来进行分析,其他的参数保持不变。

当 $M_r=5\text{kg}$, $M_p=10\text{kg}$, $l=0.25$ 时,代入后状态方程为:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_p \\ \ddot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 71.0038 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_p \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3623 \end{bmatrix} U \\ y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \theta_p \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5-2)$$

当 $M_r=5\text{kg}$, $M_p=15\text{kg}$, $l=0.4$ 时,代入后状态方程为:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_p \\ \ddot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 54.0441 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_p \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2206 \end{bmatrix} U \\ y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \theta_p \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5-3)$$

当 $M_r=5\text{kg}$, $M_p=20\text{kg}$, $l=0.8$ 时, 代入后状态方程为:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_p \\ \ddot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 30.2055 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_p \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1027 \end{bmatrix} U \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_p \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5-4)$$

PID 控制中 K_p (比例系数)、 T_i (积分时间常数)、 T_d (微分时间常数) 是通过经验法来确定的。经过多次的试验仿真^[49,50], 做出比较, 如下表 5.1 所示。

表 5-1 数据列表

K_p	T_d	调整时间 (s)	最大偏值 (rad)
500	30	0.8	0.15
500	40	1.4	0.05
500	50	1.4	0.01

表 5-1 表明: 当比例常数不变, 增大微分常数时, 系统的最大偏值减小, 同时系统的调整时间增加。

表 5-2 数据列表

K_p	T_d	调整时间 (s)	最大偏值 (rad)
700	50	0.5	0.098
800	50	0.4	0.18
1000	50	0.5	0.2

表 5-2 表明: 当微分常数不变时, 增大比例常数, 系统的调整时间减小, 同时最大偏值增加。

最后确定 $K_p=700$, $T_i=0$, $T_d=50$ 。图 5.2 是当 $M_r=5\text{kg}$, $M_p=10\text{kg}$, $l=0.25$ 时, 初始条件为 -1, 两轮自平衡小车的角度控制曲线。从图中可以看出, 系统的调整时间为 0.6s, 最大偏值为 0.098, 经过调整, 系统稳定, 控制有效。

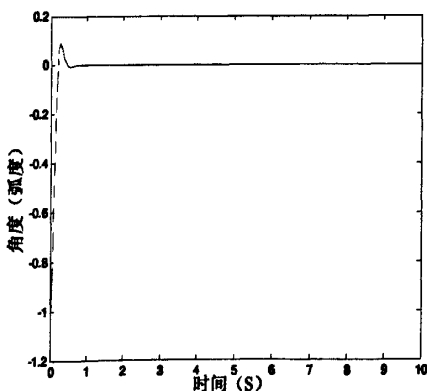


图5.2 角度的控制曲线

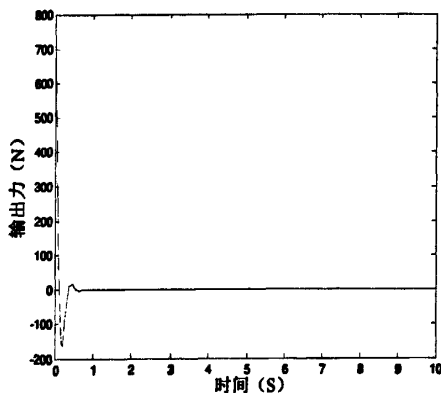


图5.3 输出力的控制曲线

图5.3是 $M_r=5\text{kg}$, $M_p=10\text{kg}$, $l=0.25$ 时两轮自平衡小车的力控制曲线, 从图中可以看出, 系统的最大输出为780, 最大偏置值为-180,在0.6s之后系统输出力为0。

图5.4是当 $M_r=5\text{kg}$, $M_p=15\text{kg}$, $l=0.4$ 时, 两轮自平衡小车的角度控制曲线。从图中可以看出, 系统的调整时间为0.8s, 无最大偏置, 控制效果较好。

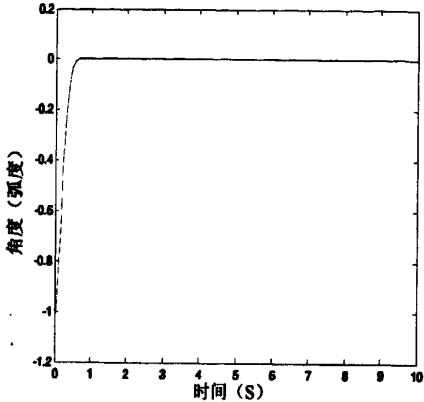


图5.4 角度的控制曲线

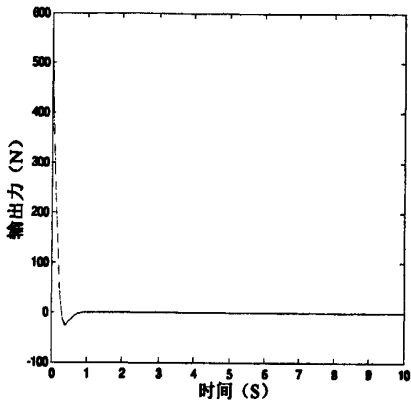


图5.5 输出力的控制曲线

图5.5是 $M_r=5\text{kg}$, $M_p=15\text{kg}$, $l=0.4$ 时两轮自平衡小车的力控制曲线, 从图中可以看出, 系统的最大输出为550, 最大偏置值为-40。

图5.6是当 $M_r=5\text{kg}$, $M_p=20\text{kg}$, $l=0.8$ 时, 两轮自平衡小车的角度控制曲线。从图中可以看出, 系统的调整时间为1.4s, 最大偏值为0.15, 控制效果一般。

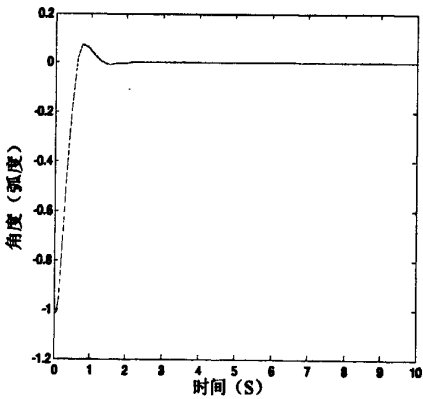


图5.6 角度的控制曲线

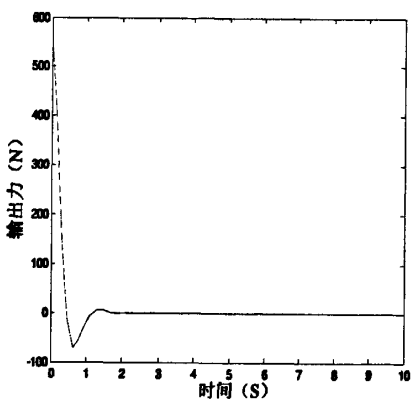


图5.7 输出力的控制曲线

图5.7是 $M_r=5\text{kg}$, $M_p=20\text{kg}$, $l=0.8$ 时两轮自平衡小车的力控制曲线, 从图中可以看出, 系统的最大输出为540, 最大偏置值为-80。

通过前面几个角度曲线图可以得出以下结论: 相同的比例、微分、积分参数在不同情况下所得出的控制效果是不同。当 M_p 和 l 的值不断增大, 系统的调整时间增加, 最大偏值减小。通过前面几个输出力的控制曲线可以得到一下结论: 相同的比例、微分和积分参数在不同情况下最大输出力变化不大, 稳定在600左右。当 M_p 和 l 的值增大时, 系统的最大偏值减小。

5.1.2 LQR 控制仿真

LQR控制理论的任务在于系统由于任何原因而偏离平衡状态时,在不消耗过多能量的情况下使系统的各个分量达到平衡。

从2.2.2节分析可知对于加权阵 Q , R 的选择决定了系统的最优性,但是对于怎么选这两个矩阵到现在并没有正确的解析法,所以最优控制实际上是人为的,我们先定性的选择这两个矩阵。本节选择:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, R = 1$$

当 $M_r = 5\text{kg}$, $M_p = 10\text{kg}$, $l = 0.25$ 时,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.8845 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 71.0762 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0981 \\ 0 \\ 0.3623 \end{bmatrix}$$

借助 Matlab 工具中 LQR(A, B, Q, R)函数,

直接求出状态反馈系数: $K = [0 \ 0 \ 392.39 \ 46.54]$

当 $M_r = 5\text{kg}$, $M_p = 15\text{kg}$, $l = 0.4$ 时

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12.9838 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 54.0993 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0956 \\ 0 \\ 0.2206 \end{bmatrix}$$

求出状态反馈系数: $K = [0 \ 0 \ 490.50 \ 66.70]$

当 $M_r = 5\text{kg}$, $M_p = 20\text{kg}$, $l = 0.8$ 时

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16.1260 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 30.2363 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0890 \\ 0 \\ 0.1027 \end{bmatrix}$$

求出状态反馈系数: $K = [0 \ 0 \ 590.10 \ 80.6]$

表 5-3 是不同质量的情况下 θ_p , θ_r 对应的 K 值。

表 5-3 数据列表

$M_p \backslash K$	θ_p	$\dot{\theta}_p$
10kg	392.4	46.5
15kg	490.5	66.7
20kg	590.1	80.6

通过仿真^[51]分析，图 5.8 是 $M_r=5\text{kg}$, $M_p=10\text{kg}$, $l=0.25$ 时，选择 $K=(600,50)$ 两轮自平衡小车的角度控制曲线。从图中可以看出，系统的调整时间为 0.4s，最大偏值为 0.05。

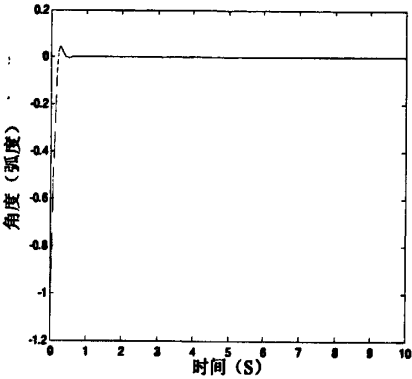


图5.8 角度的控制曲线

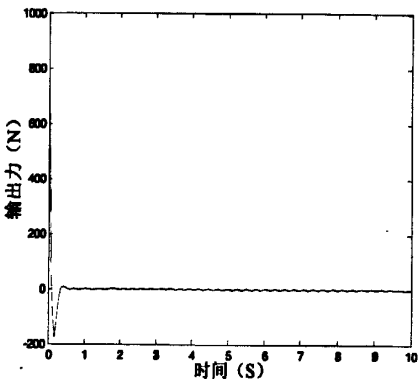


图5.9 输出力的控制曲线

图5.9是 $M_r=5\text{kg}$, $M_p=10\text{kg}$, $l=0.25$ 时两轮自平衡小车的力控制曲线，从图中可以看出，系统的最大输出为820，最大偏置值为-190。

图5.10是当 $M_r=5\text{kg}$, $M_p=15\text{kg}$, $l=0.4$ 时，选择 $K=(600,50)$ ，两轮自平衡小车的角度控制曲线。从图中可以看出，系统的调整时间为0.7s，最大偏置较小。

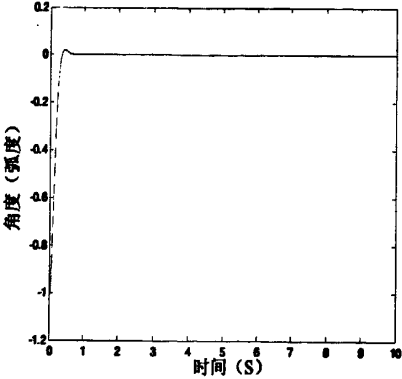


图5.10 角度的控制曲线

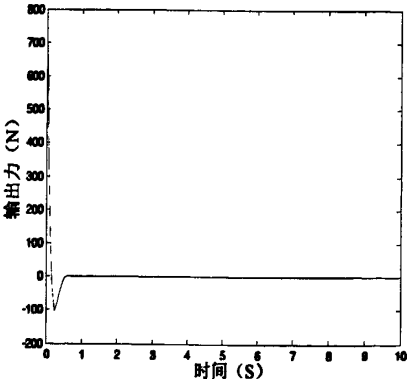


图5.11 输出力的控制曲线

图5.11是 $M_r=5\text{kg}$, $M_p=15\text{kg}$, $l=0.4$ 时两轮自平衡小车的力控制曲线，从图中可以看出，系统的最大输出为780，最大偏置值为-100。

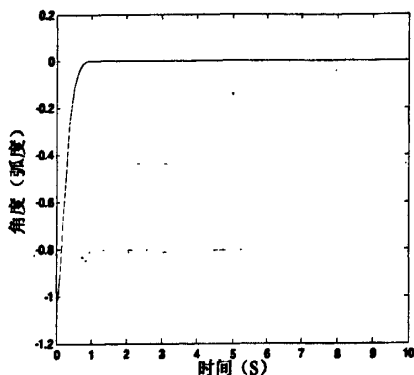


图5.12 角度的控制曲线

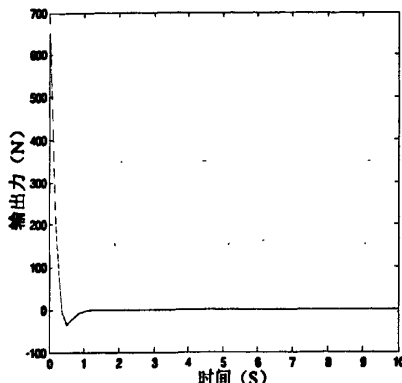


图5.13 输出力的控制曲线

图5.12是当 $M_r=5\text{kg}$, $M_p=20\text{kg}$, $l=0.8$ 时, 选择 $K=(600,50)$, 两轮自平衡小车的角度控制曲线。从图中可以看出, 系统的调整时间为 0.8s , 最大偏置较小。

图5.13是 $M_r=5\text{kg}$, $M_p=20\text{kg}$, $l=0.8$ 时两轮自平衡小车的力控制曲线, 从图中可以看出, 系统的最大输出为 650 , 最大偏置值较小, 控制效果比较好。

从前面几幅角度控制曲线可以看出, LQR控制策略可以很好的控制两轮自平衡小车。响应的速度快, 最大偏值较小。

从前面几幅系统力的输出曲线可以看出, 系统的力输出稳定, 最大偏值也较小。通过仿真分析可以看出PID控制和LQR控制都有较好的控制效果。PID控制较为简单常用, 利用率较高。仿真结果表明, 相同的比例系数、微分系数和积分系数相对于不同状态下的系统时, PID控制策略表现出的适应性较差。LQR控制需要求解Riccati方程, 算法稍微复杂。仿真结果表明, 相同的 K 值对于不同状态下的系统表现出了较好的控制力, 同时系统的输出力并没有太大的变化。

5.2 变结构控制器的设计

为了便于掌握变结构控制器的设计, 可以提出一个方案, 使用这个方案的过程中有需要时可以做某些修改, 特别是学习理解变结构控制的分析和综合时, 可以作为一条主线。

5.2.1 变结构控制器设计的一般步骤

设计变结构控制器时的基本要求包括:

- (1) 存在滑动模态区, 即在 $S_i, S_j, \dots, S_0 = \ker C$ 上存在滑动模态, 至少在切换面 S_0 上存在滑动模态, 否则虽然系统的结构是变的, 但并非我们定义的;
- (2) 所有的相轨线要在有限时间内到达切换面;
- (3) 滑动运动渐进稳定并具有良好的动态品质。

这三条是最基本的要求, 否则就不会完成变结构控制。这三个要求在设计中是有先后顺序的: 首先保证存在滑动模态而且每个运动最终都会到达它, 再者有滑动运动要趋向原点, 只有这样才能完成变结构控制。

对于线性的时不变系统:

$$\dot{X} = AX + Bu, \quad X \in R^n, u \in R^m \quad (5-5)$$

对上面的系统设计变结构控制器:

$$u = u^+(x), \quad \text{当 } s(x) > 0 \text{ 或 } s(x) < 0$$

设计的过程可以分为以下步骤:

(1) 需要确定 $s(x)$ 及 $u^+(x)$ 的结构: 要确定这两个结构取决于问题的研究, 一般取 $s(x) = CX$, 此时切换面的设计是超平面, 而 $u^+(x)$ 是不加限制的, 不需要设定特定的结构; 而对于跟踪系统, $s(x)$ 和取 $u^+(x)$ 都取特殊结构。

(2) 需要确定 C 阵以保证其滑动模态是稳定的。

(3) 为了求切换函数 C 阵, 并保证其滑动模态是稳定的, 最值得利用的方法就是对于系统开始的运动将其分解成两个运动的子系统, 滑动模态和趋近运动。

(4) 设计变结构控制利用趋近律法有很多的优点。目前为止用它来求解多输入系统变结构控制是比较好的。

设计变结构控制系统需要解决两个主要问题:

(1) 设计切换函数 $s(x)$;

(2) 确定系统控制量 $u(x)$ 。

切换函数和系统的控制量的值参照4.3节来确定。

最后, 对于参数 C 的选择是为了保证滑动模态是稳定的, 要判断它的渐进稳定性需要依据赫尔维兹判据, 还有其它方法能够保证其品质良好, 比如最优控制盒极点配置等方法。发现控制在不受限制时整个相空间都是原点吸引区, 也就说明高增益的正确性。

5.2.2 基于指数趋近律的变结构控制器的设计

根据前面提到的变结构理论, 对于此基于常值切换面的变结构控制, 控制率是 $-M_0 \operatorname{sgn} s$, 其中 M_0 越大其抗扰动能力就会越好即其鲁棒性好。对于常值切换的控制改进就是指数趋近率, 其选取切换面仅取决于系统的各种状态, 与系统输入无关。这里控制器的设计是参考前面求取的反馈线性化后的模型式(4-59)。

取指数趋近律是:

$$\dot{s} = -M_0 \operatorname{sgn} s - ks \quad (5-6)$$

其中 $M_0 > 0$ 且 $k > 0$

$$\text{设计的切换面为: } s = CX = h_1 x_1 + h_2 x_2 + h_3 x_3 + h_4 x_4 \quad (5-7)$$

式(5-7)求导并将式(3-56)代入得到:

$$\dot{s} = C\dot{X} = C(AX + Bv_0) \quad (5-8)$$

整理式(5-8)和式(3-53)得到:

$$v_0 = (CB)^{-1}(-M_0 \operatorname{sgn} s - ks - CAX) \quad (5-9)$$

式(5-9)代入式(3-53)中得到的变结构控制器为:

$$\begin{aligned} v_a = & \frac{k_e k_f x_2}{r} + \frac{R_r R (c^2 g \sin x_3 \cos x_3 + cd \sin x_3 x_4^2)}{2k_m (d + cr \cos x_3)} \\ & + \frac{R_r R (ad - c^2 \cos^2 x_3)}{2k_m (d + cr \cos x_3)} ((CB)^{-1}(-M_0 \operatorname{sgn} s - kCX - CAX) + x_3) \end{aligned} \quad (5-10)$$

经过多次的仿真比较, 选择 $M_0 = 25$, $k = 10$, $\Delta = 0.25$, 仿真的参数取 4.2.1 节中参数, 系统的初始状态取 $X = [0 \ 0 \ 0.1 \ 0]^T$, 则系统小车在变结构控制器的作用下, 在 10 秒内状态响应的曲线 (即位置, 速度, 角度和角速度的响应曲线) 以及控制量 v_a 的响应曲线如图 5.14、图 5.15 所示。

从图 5.14 中可以看到, 四个状态变量均在 5s 内回到了零状态。同时拉开响应曲线, 可以看到抖振现象。图 5.15 也明显看出在变结构控制器的作用下控制电压 V_a 也出现了较大的抖振。

设计的变结构控制器是建立在线性化模型上, 也是对于线性系统进行仿真的, 经过多次仿真可知设计控制器时只要能保证系统的渐进稳定性, 不管有多大冲击都能控。但是对控制器分析结果出现抖振, 对于系统研究和电机是不利的。以后应该在设计变结构控制器时有所改进来压制抖振情况。

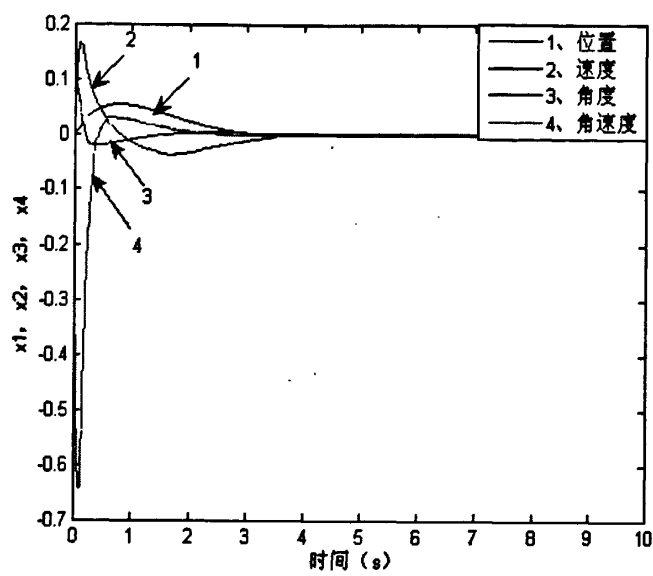


图 5.14 状态变量

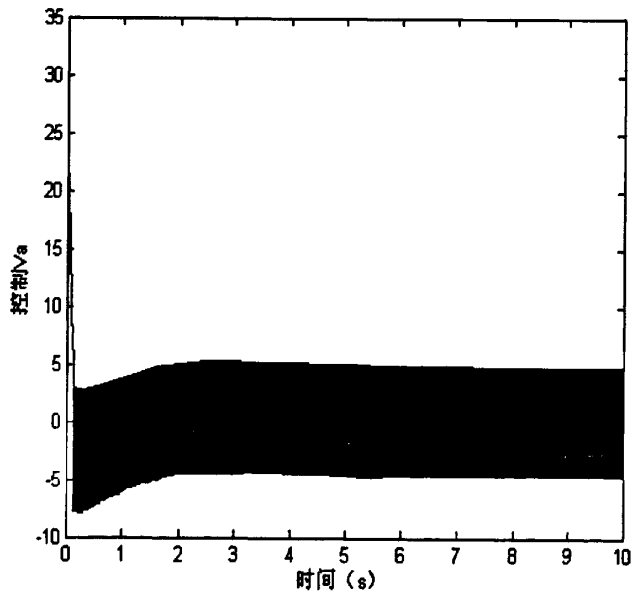


图 5.15 控制 V_a

5.2.3 系统外部扰动对变结构控制器的影响

在加入外部扰动来分析对变结构控制器的影响，需要通过对比，在没有扰动时，初始状态为 $X=[0 \ 0 \ 0.1 \ 0]^T$ ，系统在变结构控制器的作用下 10 秒内系统的角度和位置响应曲线如图 5.16 和图 5.17 所示：

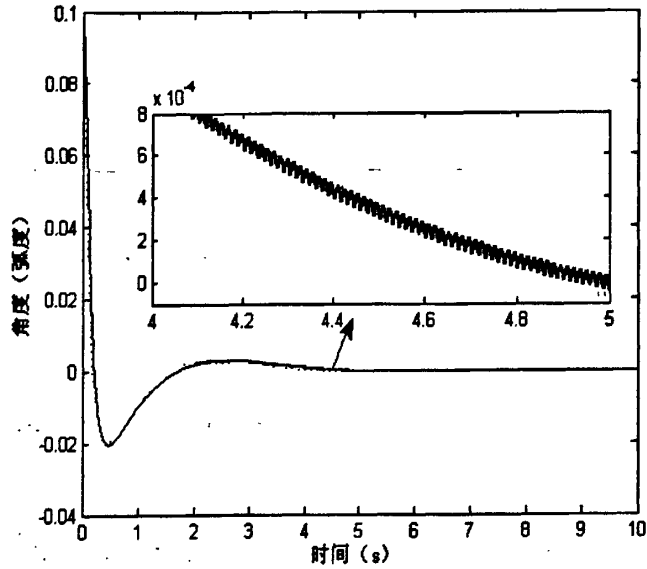


图 5.16 无干扰时角度曲线

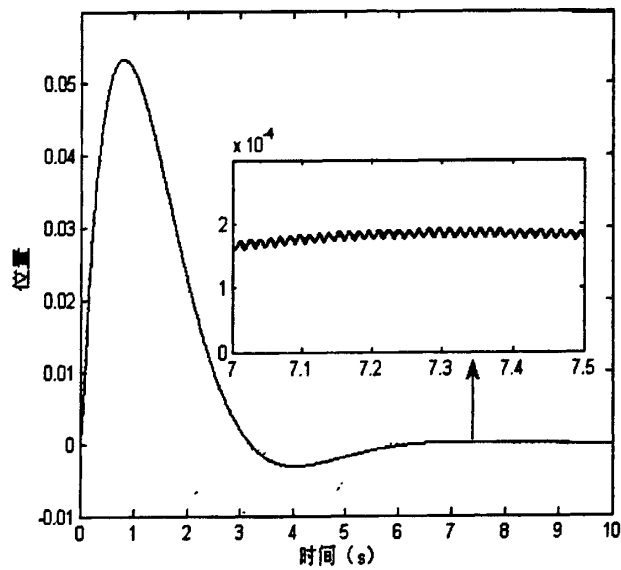


图 5.17 无干扰时位置曲线

由上面两幅图可知，系统在变结构器作用下位置和角度出现较大的震荡。

分析系统存在干扰时，给系统控制输入端 v_a 上加一个 5V 的随机干扰，初始状态同样取 $X = [0 \ 0 \ 0.1 \ 0]^T$ ，系统在变结构控制器的作用下 10 秒内的位置和角度响应曲线如图 5.18 及图 5.19 所示。

由两面两幅图可知，当系统存在外部干扰时，在变结构控制器作用下，角度和位置响应曲线受干扰影响不大，其他仿真表明速度和角速度的响应曲线受干扰影响也不大。

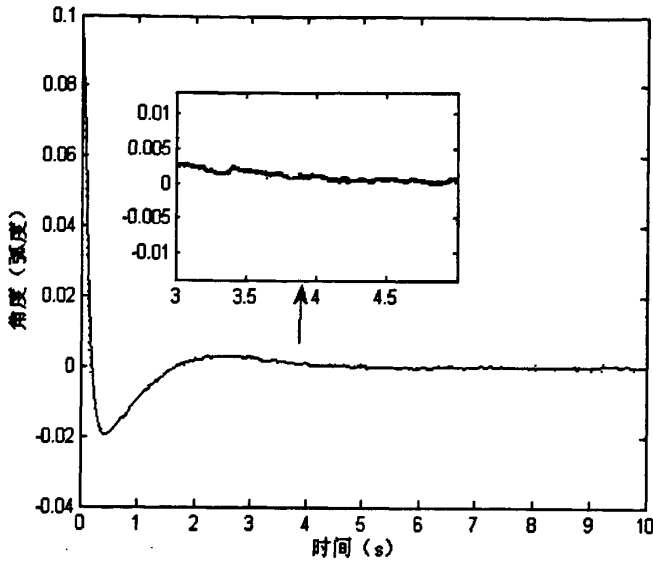


图 5.18 有干扰时角度曲线

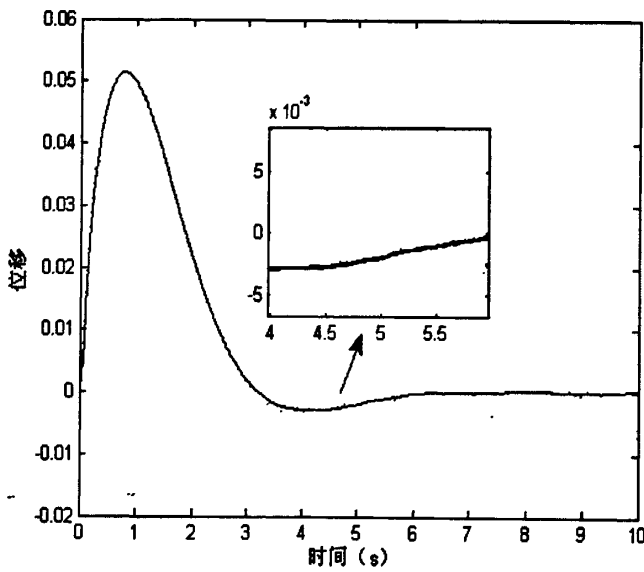


图 5.19 有干扰时位置曲线

通过上面的分析，可以看出虽然系统在变结构控制器的作用下出现了比较大的抖振，但是它有较强的抗干扰能力，即鲁棒性。对实际的工程系统，我们关心的问题之一也是一个控制系统在模型参数发生变化或结构发生变化时能否仍保持渐近稳定。鲁棒性正是我们比较看重的一个系统性能。

5.3 线性二次型最优控制器的设计

对于两轮自平衡小车系统控制的目的是：使得系统稳定，并且要使系统瞬态与稳态性能良好，特别需要强调的是：

1. 要快速的调节系统切振荡不能过大;
2. 在稳态时小车的摆动能够很好的改善。

通过前面分析, 小车系统本质不稳定, 但系统状态却是可控可观的。按照线性系统的控制理论, 对于这个系统可通过选择适当的状态反馈阵, 使得系统极点可以依据性能指标来任意配置, 系统经过状态反馈得到了闭环系统, 这个系统是稳定的。其中需要的状态变量都可以通过设计状态观测器得到。具体的控制方案选择时所需思想是: 设计控制器时应该尽量简单, 且容易实现, 且应该使其鲁棒性较好。

根据系统的性能指标确定的极点, 以及设计的状态反馈控制器对小车的倾角的能控范围相当小, 而且也不一定是最优系统, 所以, 本节控制器的设计中所用的状态反馈阵通过线性二次型最优控制器所得, 通过此方法确定了状态反馈律, 使系统线性二次型的性能指标极小。

5.3.1 系统最优控制反馈阵的设计

在 4.2 节中分析了最优控制理论的原理, 两轮自平衡小车系统是一个较为复杂的系统, 它有很多非线性因素, 比如各个运动之间的摩擦, 模型在简化时会忽略了高次项, 电机的饱和和特性以及其它的干扰。仿真对于线性模型的, 非线性因素会影响仿真结果使其有别于实际的动态响应, 甚至会使系统不稳定, 所以采用最优控制时要使得系统稳定关键是要寻求合适的加权阵 Q 和 R 。系统是非线性的, 所以不能只是片面的考虑其线性行为, 采用线性模型设计的控制器应该能克服其非线性并且要适应其参数变化, 且需要具有一定的鲁棒性。

分析可知其最优性完全取决于加权阵 Q, R 的选择, 而这两个矩阵如何选择并无解析方法, 只能定性地选择, 所以“最优”控制事实上是人为的。我们通过改变 Q, R 的值观察它们对最优控制器的影响, 进而选择可控范围较大的对小车进行控制。根据线性二次型最优反馈原理, 基于系统的线性化模型及加权阵 Q, R , 调用 Matlab 中的函数: $[K, S, E] = lqr(A, B, Q, R)$, 经过运行可得最优反馈增益阵 K 及此时闭环系统特征值 E 。

1. R 值变动对小车系统品质的影响

设置系统的初始条件相同, 给个初始角度 0.1 弧度, 其它的状态量都为 0。只考虑改变 R 值时的情况, 使得 Q 值固定, 令 $Q = [10\ 0\ 0\ 0; 0\ 5\ 0\ 0; 0\ 0\ 100\ 0; 0\ 0\ 0\ 10]$, 改变情况见表 5-4。经过计算可以看出, 状态反馈向量 K 值随着 R 的增大, 二范数会变小, 这就表示反馈在减弱, 相应的对控制能量的需求就少。

表 5-4 不同 R 值的状态反馈向量 K

Q	R		K
$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$	R1	0.01	-31.6228, -45.8706, -205.3565, -45.6141
	R2	0.1	-10, -14.7313, -72.1914, -15.6357
	R3	1	-3.1623, -4.9638, -31.1340, -6.3952
	R4	5	-1.4142, -2.5180, -21.6070, -4.2725

分析改变 R 值对各个状态变量的影响：

1)、对控制电压的对比：

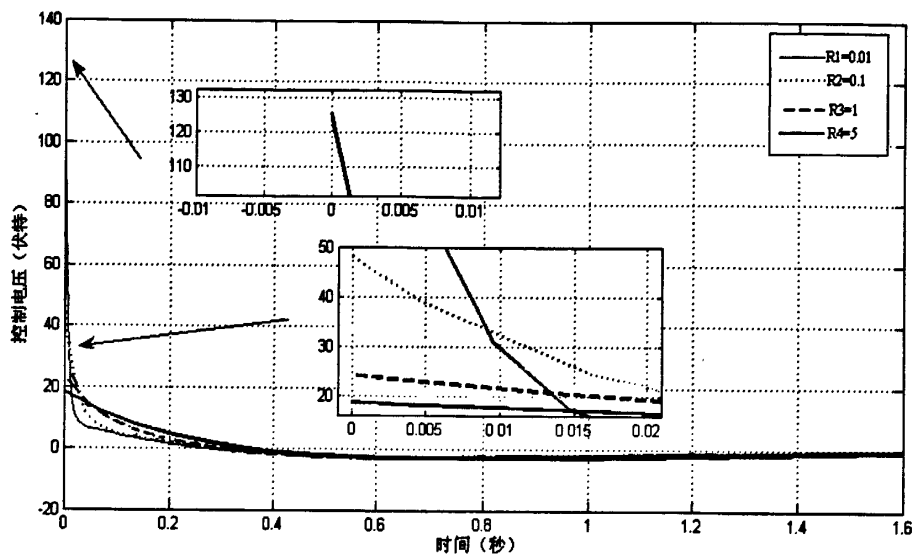


图 5.20 不同 R 值的控制电压

从图 5.20 看出，R 值增大时，小车的控制电压的最大值明显的减小。这是由于 R 值在最优指标中对控制电压的约束，R 值越大，约束就会越大，相应会减小最大控制电压。

2)、对最大可控角的影响：

很明显可以看出，R 值增大时，控制电压的约束就会越严格，控制电压的最大值会相应减小，最大可控角度就会随着变大。根据下面列出的数据也能证明这个推论。

表 5-5 不同 R 值对应的最大可控角

R	R1	R2	R3	R4
	0.01	0.1	1	5
控制在受限时的 $\theta_{max}(\text{rad})$	0.025	0.064	0.128	0.158

对于电压的约束增大时角度的可控范围也增大，这应该分析状态输出的变化。可以看出系统的非线性主要体现在速度与角速度上，其中此时角度的非线性会变得不是很明显，其非线性越是不明显，就越接近于线性模型，此时针对的线性化模型所设计的控制器，其可控的范围明显就会增大。所以，控制电压的约束力越

严格系统角度的可控范围就会越大。

综上所述， R 值越小时对其控制电压的约束就越小，即系统暂态性能就越好，但是可控角会变小；相对的， R 值越大时对控制电压的约束也就越大，系统的反应就会变慢，但是可控角会变大。

3)、对极点的变化分析

具体的值列于表 5-6 中。

表 5-6 极点表

Q	R		极点	
$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$	R1	0.01	$-1.44 \pm 0.73i$,	-2.94, -124.01
	R2	0.1	$-1.4186 \pm 0.7338i$,	-2.9787, -36.6798
	R3	1	$-1.2510 \pm 0.7312i$,	-3.2668, -13.9009
	R4	5	$-0.9526 \pm 0.6769i$,	-3.7848, -8.2491

可以看出 R 值增大时主导极点会趋近虚轴，其虚部位于 0.7 左右的小范围内变动，这就说明系统稳定裕度降低。离主导极点最近的非主导极点则渐渐远离了虚轴。而另外的非主导极点会靠近虚轴。分析闭环根的整体位置可以得出： R 值增大时主导极点的位置会越靠近向坐标轴。

2.Q 值变动对最优控制系统的影响：

同样设置系统的初始角度为 0.1 弧度，其它的状态量为 0。只考虑改变 Q 值时的情况，使得 R 值固定，令 $R=0.5$ ，改变情况见表 5-7：

表 5-7 不同 Q 值的状态反馈向量 K

R	Q		K
0.5	Q1	[10 0 0 0;0 5 0 0;0 0 10 0;0 0 0 10]	-4.4721 -6.4733 -34.7476 -7.8541
	Q2	[10 0 0 0;0 5 0 0;0 0 100 0;0 0 0 10]	-4.4721 -6.8187 -38.7675 -8.1105
	Q3	[10 0 0 0;0 5 0 0;0 0 1000 0;0 0 0 10]	-4.4721 -8.6293 -63.2429 -9.5141
	Q4	[10 0 0 0;0 5 0 0;0 0 1000 0;0 0 0 100]	-4.4721 -9.2954 -73.6920 -17.8513

分析改变 Q 值对各个状态变量的影响：

1)、输出角度的分析

如图 5.21，从图可看出增加 $Q1$ 到 $Q3$ 的角度加权时角度摆动的幅值会减小，且会加快调节时间，而 $Q4$ 是在对于 $Q3$ 增大了角速度加权，其角度摆动的幅值会增加且减慢了调节时间。分析得出增加角度的加权时输出的角度会快速平稳，但随着角速度的加权增加时则会减慢角度反应。

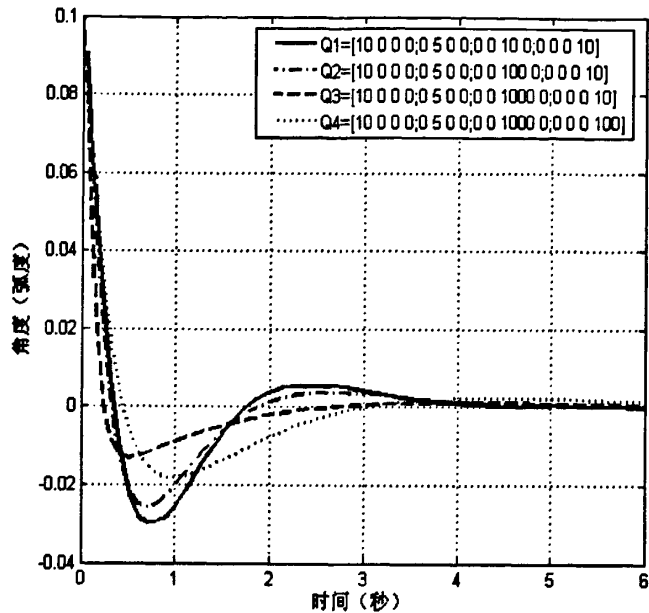


图 5.21 不同 Q 值时的系统角度

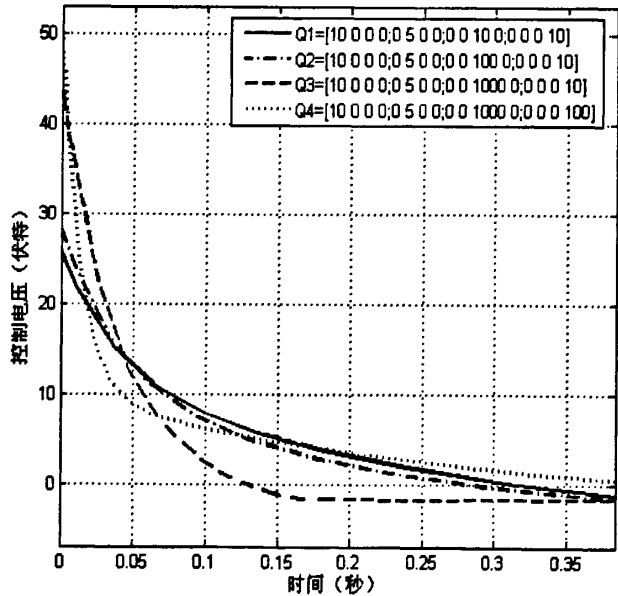


图 5.22 不同 Q 值时的控制电压的输出

2)、控制电压的分析

如图 5.22, 从图中分析可看出, 增大角度加权时其控制电压也会增大, 再增大角速度的加权同时控制电压会进一步的增大, 且幅度的增大也比较明显。

3)、最大可控角的分析

控制在受限时角度或角速度加权增大时, 系统相应的最大可控角会随之减小。

表 5-8 不同 Q 值对应的最大可控角

	Q1	Q2	Q3	Q4
控制在受限时的 θ_{\max} (rad)	0.113	0.106	0.078	0.053

综上所述，电压受限时，角度的输出随角度加权增大会更为快速平稳，且其控制电压会变大，系统的可控范围会减小；随着角速度加权的增加时角度反应会变慢，并且控制电压会增大，最大可控角会减小。

4)、极点变化的分析

具体的值列于表 5-9 中。

表 5-9 极点值

R	Q	极点
0.5	Q1	$-1.7389 \pm 1.3659i, -1.4639, -18.8383$
	Q2	$-1.3321 \pm 0.7346i, -3.1277, -18.6303$
	Q3	$-0.6822 \pm 0.5496i, -11.9475, -14.7061$
	Q4	$-0.6772 \pm 0.5640i, -3.1591, -54.9524$

从图中极点变化可以看出：Q1 时其主导极点处于实轴位置，Q2 到 Q4 其主导极点则均为共轭复数

共轭复数的极点在 Q 值加权增大时，其实部会向虚轴靠近而其虚部则会靠近实轴。离主导极点比较近的非主导极点会远离虚轴，另外的非主导极点则会靠近虚轴。同时角速度加权增大时其主导极点的实部向虚轴更加靠近，而虚部会远离实轴，离主导极点较近的一个非主导极点会靠近虚轴，同时另一个非主导极点会靠近实轴。对于三个零点，其中有两个是位于原点，另一个则位于实轴且同极点相距较远。

综上所述， Q 值选取的太小，对于角度的输出，其暂态性能会变差，但可控范围较大；而当 Q 值选取的太大，虽然其暂态性能会变好，但可控范围会减小。所以，在 Q 的选取上，应该要综合考虑上述问题。

从上面的分析可知，角度可控范围和系统品质之间的矛盾性，其可控范围增大时系统的品质会变差，可控范围减小时系统的品质会变好。因此，在设计中应好好处理这两个问题。

所以在选取 Q 、 R 时从以下几条结论考虑：

- 1) 由于我们使用的是线性模型，为了使设计的实际模型能够有效工作，应该使各种状态都尽量工作在线性范围，这就需要 x_3 ， x_4 的偏差不能太大。
- 2) 对于闭环系统分析，其主导极点应该有极点是共轭复数，会利于克服小车系统的一些非线性摩擦，但是系统主导极点的模值不能过大，会使系

统的频带会过宽, 这样对噪声会过于敏感, 会导致系统不能正常工作。

- 3) 加权矩阵 R 值减小会使控制量过大, 所以需要注意控制量 V_a 的大小, 不能超过系统执行机构的能力, 而应该让放大器处于饱和状态。

5.3.2 线性二次型最优控制器的设计

根据线性二次型最优反馈的原理, 对于系统模型(4-41)式, 对任一 Q 值, 我们都能得到对应于 Q 的反馈控制。对于前面的小车系统, 在调节过程中二次型的性能指标该使得小车系统不偏离其控制区域, 且应该尽可能的在线性范围, 所以对于系统状态中小车摆角最应该被重视, 其次是小车的位移。因为模型中存在微分, 在系统中比较容易引入高频噪声, 所以微分项的加权系数应该尽量小, 若要在性能指标上反映出这些要求, 则应该使得 x_3^2 加权 q_{33} 最大, 而 x_1^2 加权 q_{11} 最小, q_{22} 和 q_{44} 均取为0。由前面的分析可知: 在 R 值的选取上, R 值小时角度的暂态响应好, 但其可控范围会较小; R 值大时则角度的暂态响应变差, 但其可控范围会变大。

通过多次的仿真在本节设计控制器时的加权阵 Q 、 R 值取值为

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = 0.1$$

同样调用函数 $[K, S, E] = lqr(A, B, Q, R)$, 经过 Matlab 运行可以得到最优反馈增益阵 K 值为: $K = [-10 \quad -10.8338 \quad -52.7630 \quad -7.9163]$

此时, 闭环系统的特征值为: $E = -8.6899 \pm 7.0285i, -1.1396 \pm 1.0560i$

线性系统状态反馈控制为: $V_0 = -KX$ (5-11)

将式(5-11)代入式(4-53)可以得到基于反馈线性化模型的最优控制器为:

$$V_a = \frac{k_e k_f x_2}{R} + \frac{R_r R (c^2 g \sin x_3 \cos x_3 + c d \sin x_3 x_4^2)}{2k_m (d + c r \cos x_3)} + \frac{R_r R (ad - c^2 \cos^2 x_3)}{2k_m (d + c r \cos x_3)} (-KX + x_3) \quad (5-12)$$

仿真中的参数取 4.2.1 节中的系统参数, 设置系统的初始状态为:

$X = [0 \quad 0 \quad 0.1 \quad 0]^T$, 系统在最优控制器的作用下在 10 秒内的状态响应曲线和控制电压 V_a 的响应曲线如图 5.23、图 5.24 所示^[52,53]。

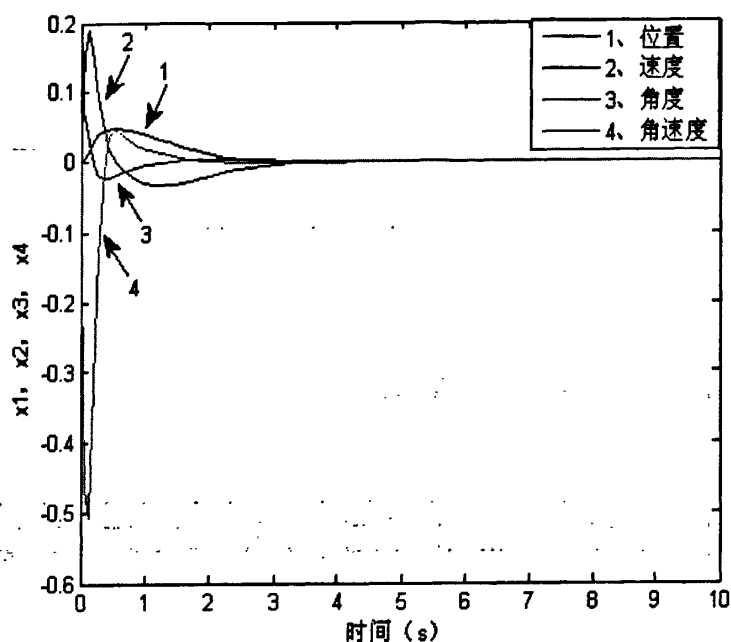
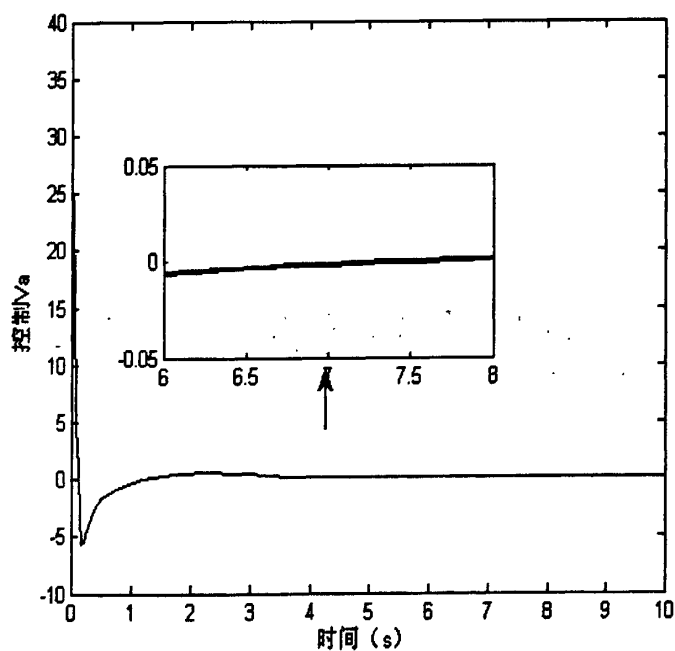


图 5.23 状态变量图

5.24 控制 V_a

从图 5.23 及图 5.24 中可以看出，四个状态变量都在 5s 内回到了零状态。拉开响应曲线可以看出最优控制能很好地控制系统，通过仿真可知最优控制能使原非线性系统稳定并且控制输入 V_a 的响应曲线会较平滑。

5.3.3 系统外部扰动对最优控制的影响

因为我们更关注的是角度的大范围可控，在可控的前提下才关注系统的其他性能。 R 值大时可控范围会变大。所以重新选取加权阵 Q, R

$$\text{令, } Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$R = 5$$

同样调用函数 $[K,S,E]=lqr(A,B,Q,R)$ ，经过 Matlab 运行可以得到最优反馈增益阵 K 值为： $K=[-1.4142 \ -2.5180 \ -21.6070 \ -4.2725]$ 。系统的最大可控角为 0.163 弧度。

在小车角加速度信号上分别加入干扰信号，用来模拟现实中作用于车摆上的作用力。给系统一个 0.1 弧度的初始角度，其它状态量为 0。此时系统初始角度可控。

给角加速度信号中加入脉冲信号。

当 $t=1s$ 时，给角加速度信号上加入一脉冲干扰信号（如图 5.25 上图所示），相当于突然给小车摆上突然加一个作用力，系统的状态变量（如图 5.25 中图所示）和控制电压（如图 5.25 下图所示）。

从图中可以看出，当摆上突然加一个干扰作用力，控制电压快速作出了响应，要使小车加速向前移动来稳定小车。系统在在 5 秒钟内又回到了平衡状态。而且其电压值都控制在额定范围内。由此可知系统完全有能力将恢复到平衡状态。

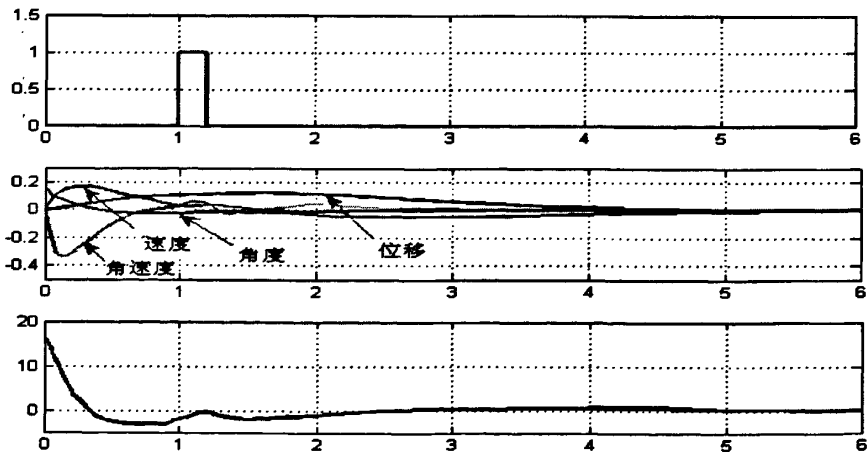


图 5.25 角加速度信号上加入脉冲信号后系统的状态变量和控制电压

由上面的分析可知在小车加速度上加入干扰信号后，最优控制系统都能调整到稳定状态。系统对于外部干扰具有一定的鲁棒性。

5.4 本章小结

本章首先从理论仿真着手,用 PID 算法和 LQR 算法分别对简单模型进行控制。用两种算法进行了相关的控制实验,成功控制理论模型,同时分析了角度控制效果和系统出力,对比两种控制算法的不同优点,分析出 LQR 控制更加理想。

接着对于智能控制中的变结构控制器,设计的是基于指数趋近律的控制器,分析其控制效果,发现在该控制器的作用下系统的输出有较大抖振,且系统暂态性较差,但其具有较强的抗干扰能力。

最后设计了线性二次型最优控制器,对该控制器的分析,同样寻找角度大范围可控时的控制器 Q 、 R 选择对系统的影响,分析可知角度的可控范围是同系统的暂态性能是互为矛盾的,所以 Q 、 R 值的选取也须在可控范围、暂态性能之间做出权衡。通过加入外部扰动进行仿真实验,验证了小车最优控制系统具有一定的鲁棒性。

第六章 总结与展望

两轮自平衡小车类似于倒立摆,是一种非线性、多变量、强耦合、参数不确定的复杂系统,它体积小、结构简单、运动灵活,适合在狭小的空间内工作,因此是检验各种控制方法处理能力的一个理想装置。本文通过对小车系统同电机特性的分析,对系统建模得到非线性模型,然后对其线性化。对线性化的模型来设计各种控制器以控制系统,期望大范围角度可控。在控制器的设计中,分别运用经典控制理论、现代控制理论、智能控制理论设计了对应的控制器,形成了鲜明对比。

具体取得的主要成果有以下几点:

第一,通过分析和借鉴国内外两轮自平衡小车的结构组成,给出了两轮自平衡小车软硬件的简单设计。

第二,通过分析两轮自平衡小车系统,根据动力学分析,开始以电机的输出力为输入量,对小车进行了简单的建模,后来为了使得到的模型与现实模型更接近,充分考虑到电机的反向力矩的作用,以电机的控制电压作为输入量对小车进行了建模,得到了小车的非线性模型。

第三,应用反馈线性化方法对非线性模型进行了线性化,在线性化模型的基础上分析了系统的稳定性,可控性和可观性。

第四,利用简单模型对 PID 控制和 LQR 控制进行了可行性分析,仿真发现两种控制都能成功控制理论模型,同时分析了角度控制效果和系统出力,对比分析出 LQR 控制更加理想。

第五,对于反馈线性化模型设计了基于指数趋近律的变结构控制器,仿真发现变结构控制器对系统进行控制时虽然具有较强的鲁棒性,但同时使系统出现抖动。

第六,设计了线性二次型最优控制,最优控制器的 Q 、 R 的改变对小车非线性控制系统的品质的影响,从而为实现两轮小车大范围镇定控制的线性控制器的设计提供参考和评判依据。设计出一个最优控制器,对小车系统进行仿真验证。再加入外部干扰进行仿真,结果显示该系统确实不仅可控,且具有一定的鲁棒性。

本文虽然取得了一定的成果,但由于时间和精力关系,设计具有一定的局限性,还有些内容需要补充和完善,具体有以下几点:

1. 本文所有的控制器的设计和比较,都是基于 `simulink` 仿真而做的,并未应用到实际系统中进行调试控制。同时对于软硬件部分应用于实际小车中的可靠性没有进行分析。

2. 本文在对小车系统建模时是将小车系统的运动视为了直线运动, 并没有考虑到小车左右旋转情况。在对电机模型分析时将电机轴上的摩擦力等并未计入。

3. 简单的变结构控制往往在小范围内控制的比较好, 借鉴以往的研究成果可知在大范围内模糊控制的效果会比较好, 所以以后可以考虑将小范围内的变结构控制与大范围的模糊控制相结合, 而这两种控制策略在各自的区域内都有很强的鲁棒性。

4. 线性二次最优控制中 Q 阵是对角阵, 忽略了四个状态变量相互关联, 以后可增加以对模型分析, 找出四个状态变量之间关联, 更合理选取 Q 阵。

由于没有在实际系统中调试, 各种控制器应用到实际系统时还可以进一步的修正, 以使控制效果达到更好。

致谢

光阴似箭，转眼间两年半的硕士生涯即将结束。在攻读硕士学位期间，我得到了许多亲人、老师和同学的帮助，使我能顺利的完成学业。

论文完成之际，我首先向我尊敬的导师陈光达教授致以深深的谢意！陈老师知识渊博，治学态度严谨，经验丰富，对学生高度负责，以及对新兴科学技术的敏锐洞察力使我受益匪浅，是我终生宝贵的财富。导师对事业孜孜不倦的忘我工作和奉献精神，令我备受崇敬和钦佩。在这两年半时间中，陈老师在各方面都给了我亲切关怀和悉心指导悉心。为我提供了大量的学习和实践机会，使我的视野丰富，知识水平和个人的综合能力得到了提高。

感谢已经毕业的师兄师姐，他们在我研究生期间给了很多的帮助、关心和鼓舞，使我收益颇丰。感谢我的同学和室友，谢谢他们在论文期间提出的建议和给予的帮助！

感谢我的家人，我的每一份收获和成绩都是在他们无微不至的关心、鼓励和帮助下的得到的。希望我今天的成绩可以给他们带来一些慰藉。在此谨向他们致以最深的敬意！

感谢所有关心和帮助过我的人们！

最后，衷心的感谢在百忙中抽出时间参加论文评审和答辩的各位专家、教授和老师！

参考文献

- [1] 孙立宁. 机器人技术发展状况. <http://www.cctv.com/lm/131/61/79555.html>.
- [2] 徐国华、谭民. 移动机器人的发展现状及其趋势[J]. 机器人技术与应用. 2001, 14(3): 7-14.
- [3] 李人厚. 自主移动机器人导论. 西安交通大学出版社, 2006年9月.
- [4] 王凯. 两轮自平衡小车软硬件研发与基于模糊线性化模型的变结构控制研究. 西安电子科技大学. 硕士学位论文. 2009.
- [5] Felix Grasser, Aldo D'Arrigo, Silvio Colombi, Alfred C. JOE: A Mobile, Inverted Pendulum. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2002, 49(1): 107-114.
- [6] H. Tirmant, M. Baloh, L. Vermeiren. B2, An Alternative Two Wheeled Vehicle for an Automated Urban Transport. IEEE. 2002.
- [7] Segway Human Transporter[Online]. 2004. Available: <http://www.segway.com>.
- [8] Danna Voth. Segway to the future. IEEE Intelligent Systems. 2005, 20(3): 5-8.
- [9] <http://www.segway.com>.
- [10] 郑钧元. 两轮自平衡机器人之平衡控制. 台湾国立中央大学硕士论文. 2002.
- [11] <http://218.22.224.162/chkj/imges/2010/04/20/702186161299.doc>.
- [12] 秦宏宇. 两轮平行电动车的数学模型建立和总体结构设计. 硕士论文. 2004.
- [13] 高林. 两轮自平衡机器人的建模与仿真. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学硕士硕士学位论文. 2005.
- [14] 李威. 两轮自平衡机器人控制系统研制. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学硕士硕士学位论文. 2005.
- [15] <http://wenku.baidu.com/view/357790116c175f0e7cd137ff.html>.
- [16] 胡寿松. 自动控制原理. 科学出版社, 2001.
- [17] 周雪琴, 张洪才. 控制工程导论(修订版). 西北工业大学出版社, 2002年3月第2版.
- [18] 何衍庆等. 控制系统分析、设计和应用——MATLAB语言的应用. 北京: 化学工业出版社, 2002.12.
- [19] 武卫霞. 平衡机器人运动平衡控制方法的研究. 北京: 北京工业大学. 硕士论文. 2010.
- [20] 胡寿松, 胡维礼. 最优控制理论与系统. 北京: 科学出版社, 2006.
- [21] Fuzzy Logic Toolbox(MATLAB).

- [22] 高为炳. 变结构控制理论基础. 北京: 中国科学技术出版社, 1990.
- [23] 姚琼荟, 黄继起, 吴汉松. 变结构控制系统. 重庆: 重庆大学出版社, 1997.
- [24] 王磊. 3-RRRT 并联机器人动力学及控制研究. 天津理工大学. 学位论文. 2006.
- [25] F.Grasser,A.D.Arrigo,S.Colombi.JOE:a Mobile Inverted Pendulum.IEEE Trans.Industrial Electronics,1994,39(1).107-114.
- [26] 刘骞. 倒立摆系统的稳定控制研究. 合肥: 合肥工业大学硕士学位论文. 2008.
- [27] 张龙. 直线二级倒立摆的稳定控制研究. 硕士学位论文. 2008.
- [28] 段旭东, 魏恒华, 陈星. 基于 DSP 的两轮小车-倒立摆系统. 控制工程. 第 11 卷第 6 期.
- [29] Thomas Braunl,Jie Pan. Balancing a Two-Wheeled Autonomous Robot. The University of Western Australia School of Mechanical Engineering Final Year Thesis 2003.1—10, 2343.
- [30] [美]迈克. 普瑞德科. 机器人控制器与程序设计. 北京: 科学出版社, 2004.
- [31] 刘学超. 两轮自平衡小车的设计与变结构控制研究. 硕士论文. 2008.
- [32] 陈灿. 基于 ARM 的交通事故道路数据采集系统设计. 学位论文. 2010.
- [33] 李振宇. 嵌入式教学实验系统的应用与研究. 学位论文. 2005.
- [34] <http://www.Maxonmotor.com>.
- [35] 李炎昭. 两轮不稳定小车灵敏度分析及控制算法比较研究. 西安电子科技大学. 2010.
- [36] 赵勇. 两轮不稳定机器人载体运动学及动力学变结构控制研究. 硕士学位论文. 西安电子科技大学. 2007. 3.
- [37] Hassan K. Khalil 著, 朱义胜等译. 非线性系统. 北京: 电子工业出版社, 2005.
- [38] 王一帆. 两轮自平衡小车平衡控制系统的品质研究. 西安电子科技大学. 硕士学位论文. 2011.
- [39] Sastry,Nonlinear systems: Analysis,Stability,and Control,New York:Springer, 1999.
- [40] Jean-Jacques E.Slotine & Weiping Li.Applied Nonlinear Control.China Machine Press.2006.4.
- [41] Riccardo Marino & Patrizio Tomei.Nonlinear Control Design-Geometric, Adaptive and Robust.Publishing House of Electronics Industry.2006. 8.
- [42] 张跃宝. 两轮不稳定小车的建模与变结构控制研究. 西安: 西安电子科技大学. 硕士论文. 2007.
- [43] Bortoff S A. Approximation state-feedback linearization using spline functions [J]. Automatica, 1998, 33(8):1449-1458.

- [44] 王划一. 自动控制原理. 北京: 国防工业出版社, 2003.
- [45] 刘豹. 现代控制理论. 机械工业出版社, 2000 年 5 月第 2 版.
- [46] 楼顺天等. MATLAB 程序设计语言. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2002.
- [47] 李海涛, 邓樱. MATLAB 程序设计教程. 北京: 高等教育出版社, 2002.
- [48] 马兴义. MATLAB 6 应用开发指南. 北京: 机械工业出版社, 2001.
- [49] 蔡自兴. 应用非线性控制. 北京: 国防工业出版社, 1992.
- [50] 王沫然. MATLAB 与科学计算 (第二版). 北京: 电子工业出版社, 2004.
- [51] 肖田元, 张燕云, 陈加栋. 系统仿真导论. 北京: 清华大学出版社, 2000.
- [52] 黄忠霖. 控制系统 MATLAB 计算及仿真. 国防工业出版社, 2004.9.
- [53] 王洪元. MATLAB 语言及其在电子信息工程中的应用. 北京: 清华大学出版社, 2004.12.

