BASISBOEK WISKUNDE

Jan van de Craats en Rob Bosch

Tweede editie

PEARSON
Education

ISBN: 978-90-430-1673-5
NUR: 123
Trefw: wiskunde, wiskundeonderwijs

Dit is een uitgave van Pearson Education Benelux bv,
Postbus 75598, 1070 AN Amsterdam
Website: www.pearsoneducation.nl – e-mail: amsterdam@pearson.com

Illustraties en LaTeX-opmaak: Jan van de Craats
Omslag: Inkahootz, Amsterdam

Prof. dr. J. van de Craats is hoogleraar in de wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam en de Open Universiteit, dr. R. Bosch is universitair hoofddocent wiskunde aan de Nederlandse Defensie Academie.

Dit boek is gedrukt op een papiersoort die niet met chloorhoudende chemicaliën is gebleekt. Hierdoor is de productie van dit boek minder belastend voor het milieu.

Leeswijzer

Dit is een oefenboek. Elk hoofdstuk begint op de linkerbladzijde met opgaven. Je kunt er direct mee aan de slag, want de eerste opgaven zijn altijd gemakkelijk. Geleidelijk worden ze moeilijker. Zodra je een opgave gemaakt hebt, kun je je antwoord achterin controleren.

Op de rechterbladzijden staat, heel beknopt, de theorie die je nodig hebt om de opgaven links te kunnen maken. Je kunt daar naar behoefte gebruik van maken. Kom je termen of begrippen tegen die daar niet verklaard worden, dan kun je via het trefwoordenregister dat achterin het boek staat, de plaats vinden waar die uitleg wél staat.

Belangrijke formules, definities en stellingen zijn op de rechterbladzijden in de kleur blauw gedrukt. De meeste ervan vind je ook weer terug in het formuleoverzicht op bladzijde **??** en verder.

In dit boek werken we met een decimale punt, en niet met een decimale komma, in overeenstemming met wat thans algemeen gebruikelijk is in de internationale wetenschappelijke en technische literatuur.

Het Griekse alfabet

α	A	alfa	ι	I	jota	ρ	P	rho
β	B	bèta	κ	K	kappa	σ	Σ	sigma
γ	Γ	gamma	λ	Λ	lambda	τ	T	tau
δ	Δ	delta	μ	M	mu	υ	Υ	upsilon
ϵ	E	epsilon	ν	N	nu	φ	Φ	phi
ζ	Z	zèta	ξ	Ξ	xi	χ	X	chi
η	H	èta	o	O	omicron	ψ	Ψ	psi
ϑ	Θ	thèta	π	Π	pi	ω	Ω	omega

Inhoudsopgave

Dankbetuiging

Veel lezers en gebruikers hebben in 2005 commentaar gegeven op voorlopige internetversies van dit boek en daarbij onduidelijkheden en fouten gesignaleerd. Met nadruk willen we in dit verband Frank Heierman bedanken, die de gehele tekst nauwkeurig heeft doorgelezen en tal van nuttige suggesties voor verbeteringen heeft gedaan. Daarnaast zijn we ook Henk Pfaltzgraff, Hans De Prez, Erica Mulder, Rinse Poortinga, Jaap de Jonge, Jantine Bloemhof, Wouter Berkelmans en Pia Pfluger erkentelijk voor hun commentaar. Chris Zaal, André Heck en Wybo Dekker hebben ons met raad en daad bijgestaan. Rosa Garcia Lopez en Eveline Korving van Pearson Education Benelux danken we voor de plezierige en stimulerende samenwerking.

Sinds enige jaren is Marc Appels onze uitgever bij Pearson. Het is een groot genoegen met hem samen te werken. Ook de verdere contacten met directie en medewerkers van Pearson verlopen altijd buitengewoon plezierig, efficiënt en professioneel. Namen noemen brengt het risico met zich mee dat we stille werkers vergeten. Daarom bij deze een collectief dankwoord voor allemaal!

De auteurs

Voorwoord

Dit boek bevat alle basiswiskunde die nodig is als ingangsniveau voor een universitaire of hogeschoolstudie op het gebied van de bètavakken, informatica, economie en verwante studierichtingen. Voor bètastudies zijn alle behandelde onderwerpen van belang, voor informatica en economische richtingen kunnen sommige stukken uit de hoofdstukken 17 (goniometrie), 22 (integratietechnieken) en 23 (toepassingen) terzijde gelaten worden. Met basiswiskunde bedoelen we algebra, getallenrijen, vergelijkingen, meetkunde, functies en calculus (dat wil zeggen differentiaal- en integraalrekening). Kansrekening en statistiek – aparte wiskundevakken met een eigen invalshoek – behandelen we niet.

In de hier gekozen didactische opzet staat oefenen centraal. Net als bij iedere vaardigheid, of het nu om voetballen, pianospelen of het leren van een vreemde taal gaat, is er ook maar één manier om wiskunde onder de knie te krijgen: veel oefenen. Bij voetballen moet je trainen, bij pianospelen studeren en bij het leren van een vreemde taal woordjes leren. Zonder basistechniek kom je nergens; bij wiskunde is het niet anders.

Waarom wiskunde leren? Natuurlijk gaat het de meeste gebruikers uiteindelijk om toepassingen in hun vak. Maar daarbij kun je wiskunde als taal en als instrument niet missen. Wie bijvoorbeeld een studieboek op het gebied van de exacte vakken openslaat, ziet vaak een stortvloed aan formules. Formules die wetmatigheden in het vak uitdrukken die met behulp van wiskundige technieken afgeleid zijn. Via wiskundige bewerkingen worden ze met andere formules gecombineerd om weer nieuwe wetmatigheden op het spoor te komen. Die manipulaties omvatten gewone algebraïsche omvormingen, maar ook het toepassen van logaritmen, exponentiële functies, goniometrie, differentiëren, integreren en nog veel meer. Dat zijn wiskundige technieken die de gebruiker moet leren hanteren. Het invullen van getalswaarden in formules om in een concreet geval een numeriek eindresultaat te verkrijgen, is daarbij slechts bijzaak; waar het om gaat, zijn de ideeën die erachter zitten, de wegen naar nieuwe formules en de nieuwe inzichten die je daardoor verwerft.

Het hoofddoel van wiskundeonderwijs dat voorbereidt op het hoger onderwijs moet dan ook het aanleren van die universele wiskundige vaardigheden zijn. Universeel, omdat dezelfde wiskundige technieken in de meest uiteenlopende vakgebieden toegepast worden. Formulevaardigheid verwerven, daar draait het vooral om. En vaardigheid in het omgaan met functies en hun grafieken. Gecijferdheid, het handig kunnen rekenen en het vlot kunnen werken met getallen, is bij dit alles slechts een klein onderdeel. De rol van een rekenmachine (al dan niet grafisch) is in dit boek dan ook uitermate bescheiden; we zullen er nauwelijks gebruik van maken. Waar zo'n apparaat bij het maken van de opgaven noodzakelijk is, hebben we dat expliciet aangegeven.

Voor wie is dit boek bedoeld?

Om te beginnen voor alle scholieren en studenten die zich bij wiskunde onzeker voelen omdat er gaten in hun basiskennis zitten. Zij kunnen hun wiskundige vaardigheden hiermee bijspijkeren. Maar het kan ook gebruikt worden als leerboek of als cursusboek. Door de doordachte, stapsgewijze opbouw van de stof met korte toelichtingen is het geschikt voor zelfstudie. Toch zal het altijd moeilijk blijven een vak als wiskunde helemaal door zelfstudie te leren: de waarde van een goede leraar als gids door de lastige materie kan moeilijk overschat worden.

Hoe zit dit boek in elkaar?

Alle hoofdstukken (op de laatste drie na) zijn op dezelfde manier opgebouwd: op de linkerbladzijden opgaven, op de rechterbladzijden de bijbehorende uitleg. De gebruiker wordt uitdrukkelijk uitgenodigd om eerst aan de opgaven links te beginnen. Wie vastloopt, onbekende begrippen of notaties tegenkomt of bepaalde details niet helemaal goed meer weet, raadpleegt de tekst rechts en indien nodig het trefwoordenregister. De opgaven zijn zorgvuldig uitgekozen: eenvoudig beginnen met veel soortgelijke sommen om de vaardigheden goed te oefenen. Met heel kleine stapjes wordt de moeilijkheid geleidelijk opgevoerd. Wie alle opgaven van een hoofdstuk gemaakt heeft, kan er zeker van zijn dat hij of zij de stof begrijpt en beheerst.

Bij onze uitleg gaan we niet op alle wiskundige finesses in. Wie meer over de wiskundige achtergronden wil weten, vindt achterin drie hoofdstukken zonder opgaven met verdere verklaringen. Ze staan niet voor niets achterin: alleen wie al behoorlijk wiskundig bedreven is, zal ze kunnen waarderen. En de lezer die er niet aan toe komt, heeft geen probleem: wat voor de toepassingen nodig is, staat in de eerdere hoofdstukken. Een formuleoverzicht, een trefwoordenregister en een volledige antwoordenlijst completeren het boek.

Bij de tweede editie

Wanneer een boek binnen vier jaar acht drukken bereikt, kun je gerust van een succes spreken. Dat stemt tot dankbaarheid. Van heel wat gebruikers hebben we positieve reacties ontvangen, soms met suggesties voor verbeteringen. Gesignaleerde fouten in de antwoordenlijst konden we telkens al in de volgende druk corrigeren. De eerste auteur houdt een erratalijst bij op zijn homepage (gemakkelijk te vinden via Google). Daarnaast konden we tussentijds enige kleine verbeteringen in de tekst doorvoeren. Zo ontstond een steeds beter product.

Maar volmaakt was het niet: gebruikers meldden ons dat we sommige onderwerpen te summier behandeld hadden en dat er in enkele gevallen ook behoefte was aan meer opgaven op elementair niveau. Een apart probleem was het gebrek aan rekenvaardigheid onder studenten: de vrucht van falend rekenonderwijs op de basisschool. Om dit te repareren, hebben we het *Basisboek rekenen* geschreven. Wie al in de eerste hoofdstukken van *Basisboek wiskunde* vastloopt op rekenproblemen, zou dat boek eerst door moeten werken, liefst van a tot z.

Met deze tweede editie van *Basisboek wiskunde* zijn we in de gelegenheid enige meer ingrijpende wijzigingen en uitbreidingen aan te brengen. Aan de opzet en de structuur van onze succesformule veranderen we echter niets: heldere opbouw, opgaven links, uitleg en theorie rechts. Er zijn ook geen nieuwe onderwerpen toegevoegd; de hoofdstukindeling is ongewijzigd gebleven.

De belangrijkste wijzigingen

De belangrijkste veranderingen zijn de volgende. De algebra-hoofdstukken 4 en 5 zijn beter gestructureerd. Hoofdstuk 8 (rijen en limieten) is uitgebreid. In de meetkunde-hoofdstukken 12 tot en met 15 zijn tekstverbeteringen aangebracht en enige minder geslaagde opgaven verwijderd.

In hoofdstuk 16 is in verband met de factorstelling een eenvoudig geval van de staartdeling voor polynomen toegevoegd, samen met een aantal nieuwe opgaven. Substantiële uitbreidingen zijn er in de hoofdstukken 17 (goniometrie) en 18 (exponentiële functies en logaritmen). Deze hoofdstukken zijn deels herschreven om beter aan te sluiten op de voorkennis van scholieren in het voortgezet onderwijs. Ook de calculus-hoofdstukken 20, 21 en 22 hebben we nog een keer onder handen genomen. Daarbij is tevens de opgavencollectie aangevuld.

Niet alle suggesties voor wijzigingen en verbeteringen die we de afgelopen jaren ontvingen, hebben we overgenomen. Wel hebben we ze allemaal zeer serieus in overweging genomen. Maar in een klein aantal gevallen hadden we andere ideeën over wat belangrijk is voor onze doelgroep en hoe je bepaalde stukken wiskunde voor hen zou moeten presenteren.

De vraag van enige gebruikers om ook aandacht te schenken aan onderwerpen als matrixrekening en complexe getallen, hebben we niet gehonoreerd. Daaraan wordt tegemoetgekomen in het *Vervolgboek wiskunde* van de eerste auteur dat eveneens in 2009 bij Pearson is verschenen.

Veel dank!

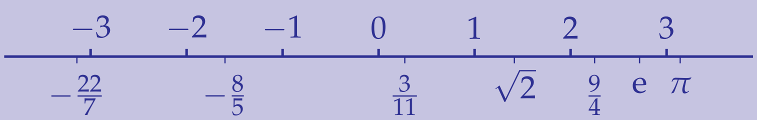
Zonder anderen tekort te willen doen, willen we in de eerste plaats Lia van Asselt, Henri Ruizenaar, Frank Arnouts, Doortje Goldbach, Abdelhak El Jazouli, Robbert van Aalst en René van Hassel bedanken. Hun commentaar heeft tot substantiële verbeteringen geleid. Ook de opmerkingen van Jan Essers, Jan Los, Wim Caspers, Adri van den Boom, C.E. van Wijk, G.J.J. Baas, Erik Beijeman, Hermien Beverdam, A. Dolfing, en Marjan van der Vegt heb-

ben we zeer op prijs gesteld. Daarnaast zijn we de gebruikers die fouten in de antwoordenlijst hebben gesignaleerd, zeer erkentelijk: Nabi Abudaldah, ing. A.S. Tigelaar, N.J. Schoonderbeek, Evert van de Vrie, Mathijs Schuts, Niël Dogger, Paul Bles, J. Bon, Max van den Aker, Evelien de Greef, Bas Bemelmans, Kevin de Berk, Veditam Bishoen, Loek Spitz en Robert van Eekhout. Een antwoordenlijst zonder fouten is ons doel; alle bijdragen die dat ideaal dichterbij brengen, zijn welkom!

We hopen dat ook de tweede editie van *Basisboek wiskunde* voor studenten en scholieren een betrouwbare gids in de wiskunde zal zijn.

Oosterhout en Breda, maart 2009,
Jan van de Craats en Rob Bosch

I Getallen



Dit deel gaat over het rekenen met getallen. Ze komen in allerlei soorten voor: positieve getallen, negatieve getallen, gehele getallen, rationale en irrationale getallen. De getallen $\sqrt{2}$, π en e zijn voorbeelden van irrationale getallen. In de hogere wiskunde wordt ook met imaginaire en complexe getallen gewerkt, maar in dit boek zullen we ons beperken tot de *reële getallen*, dat wil zeggen de getallen die je meetkundig voor kunt stellen als punten op een getallenlijn.

In de eerste twee hoofdstukken worden de rekenvaardigheden van de basisschool (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van gehele getallen en breuken) in kort bestek opgehaald. Wie hier moeite mee heeft, doet er verstandig aan om eerst ons *Basisboek rekenen* (Pearson Education, 2007) door te werken.

1 Rekenen met gehele getallen

Voer de volgende berekeningen uit:

1.1

a.
$$\begin{array}{rl} 873 & \\ 112 & \\ 1718 & \\ 157 & \\ 3461 & \\ \hline \ldots & + \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{rl} 1578 & \\ 9553 & \\ 7218 & \\ 212 & \\ 4139 & \\ \hline \ldots & + \end{array}$$

1.2

a.
$$\begin{array}{rl} 9134 & \\ 4319 & \\ \hline \ldots & - \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{rl} 4585 & \\ 3287 & \\ \hline \ldots & - \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{rl} 7033 & \\ 1398 & \\ \hline \ldots & - \end{array}$$

1.3 Bereken:

a. 34×89
b. 67×46
c. 61×93
d. 55×11
e. 78×38

1.4 Bereken:

a. 354×83
b. 67×546
c. 461×79
d. 655×102
e. 178×398

Bereken het quotiënt en de rest met behulp van een staartdeling:

1.5

a. $154 : 13$
b. $435 : 27$
c. $631 : 23$
d. $467 : 17$
e. $780 : 37$

1.6

a. $2334 : 53$
b. $6463 : 101$
c. $7682 : 59$
d. $6178 : 451$
e. $5811 : 67$

1.7

a. $15457 : 11$
b. $4534 : 97$
c. $63321 : 23$
d. $56467 : 179$
e. $78620 : 307$

1.8

a. $42334 : 41$
b. $13467 : 101$
c. $35641 : 99$
d. $16155 : 215$
e. $92183 : 83$

Optellen, aftrekken en vermenigvuldigen

De rij $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots$ is de rij van de *positieve gehele getallen*. Met deze rij leert ieder kind tellen. Optellen, aftrekken en vermenigvuldigen van zulke getallen zonder rekenmachine leer je op de basisschool. Hiernaast staan voorbeelden.

$$
\begin{array}{r}
341 \\
295 \\
718 \\
12 \\
1431 \\
\hline
2797
\end{array}
\;+
\qquad
\begin{array}{r}
8135 \\
3297 \\
\hline
4838
\end{array}
\;-
\qquad
\begin{array}{r}
431 \\
728 \\
\hline
3448 \\
862 \\
3017 \\
\hline
313768
\end{array}
\;\times
$$

Delen met rest

Delen zonder rekenmachine gaat met een *staartdeling*. Hiernaast zie je de staartdeling voor $83218 : 37$, dat wil zeggen 83218 gedeeld door 37. Het *quotiënt* 2249 vind je rechtsboven, en de *rest* 5 onderaan de staart. De staartdeling leert dat

$$83218 = 2249 \times 37 + 5$$

We kunnen dit ook schrijven als

$$\frac{83218}{37} = 2249 + \frac{5}{37}$$

Het rechterlid wordt meestal vereenvoudigd tot $2249\frac{5}{37}$, zodat we krijgen

$$\frac{83218}{37} = 2249\frac{5}{37}$$

$$
\begin{array}{llll}
37 & / & 83218 & \backslash \; 2249 \\
 & & 74 & \quad\;\; \uparrow \\
\cline{3-3}
 & & \;\;92 & \quad \text{quotiënt} \\
 & & \;\;74 & \\
\cline{3-3}
 & & \;\;181 & \\
 & & \;\;148 & \\
\cline{3-3}
 & & \;\;\;\;338 & \\
 & & \;\;\;\;333 & \\
\cline{3-3}
 & & \;\;\;\;\;\;\;5 & \leftarrow \text{rest}
\end{array}
$$

Ontbind de volgende getallen in priemfactoren:

1.9
a. 24
b. 72
c. 250
d. 96
e. 98

1.10
a. 288
b. 1024
c. 315
d. 396
e. 1875

1.11
a. 972
b. 676
c. 2025
d. 1122
e. 860

1.12
a. 255
b. 441
c. 722
d. 432
e. 985

1.13
a. 2000
b. 2001
c. 2002
d. 2003
e. 2004

1.14
a. je geboortejaar
b. je postcode
c. je pincode

Bepaal alle delers van de volgende getallen. Werk nauwkeurig en systematisch, want als je niet goed oplet, mis je er snel een paar. Het is handig om eerst de priemontbinding van zo'n getal op te schrijven.

1.15
a. 12
b. 20
c. 32
d. 108
e. 144

1.16
a. 72
b. 100
c. 1001
d. 561
e. 196

Delers en priemgetallen

Soms gaat een deling op, dat wil zeggen dat de rest nul is. Zo is bijvoorbeeld $238 : 17 = 14$. Dan geldt dus $238 = 14 \times 17$. De getallen 14 en 17 heten *delers* van 238 en de schrijfwijze $238 = 14 \times 17$ heet een *ontbinding in factoren* van 238. De woorden 'deler' en 'factor' zijn in dit verband synoniemen.

Van de beide delers is 14 zelf ook weer te ontbinden, namelijk als $14 = 2 \times 7$, maar verder kan de ontbinding van 238 niet worden voortgezet, want 2, 7 en 17 zijn alle drie *priemgetallen*, dat wil zeggen getallen die niet in kleinere factoren zijn te ontbinden. Daarmee is de *ontbinding in priemfactoren* van 238 gevonden: $238 = 2 \times 7 \times 17$.

Omdat $238 = 1 \times 238$ ook een ontbinding van 238 is, zijn 1 en 238 ook delers van 238. Elk getal heeft 1 en zichzelf als deler. De interessante, *echte* delers zijn echter de delers die groter dan 1 zijn en kleiner dan het getal zelf. De priemgetallen zijn de getallen die groter dan 1 zijn en geen echte delers hebben. De rij van alle priemgetallen begint als volgt:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, \ldots$$

Elk geheel getal dat groter dan 1 is, kan ontbonden worden in priemfactoren. Hiernaast staat in voorbeelden geïllustreerd hoe je zo'n *priemontbinding* vindt door systematisch naar steeds grotere priemdelers te zoeken. Telkens als je er een vindt, deel je die uit, en ga je met het quotiënt verder.

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 585 & 3 \\ 195 & 3 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3003 & 3 \\ 1001 & 7 \\ 143 & 11 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Je bent klaar als je op 1 bent uitgekomen. De priemfactoren staan rechts. Uit de drie ladderdiagrammen lezen we de priemontbindingen af:

$$\begin{aligned} 180 &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 &&= 2^2 \times 3^2 \times 5 \\ 585 &= 3 \times 3 \times 5 \times 13 &&= 3^2 \times 5 \times 13 \\ 3003 &= 3 \times 7 \times 11 \times 13 \end{aligned}$$

Je ziet dat het handig is om priemfactoren die vaker dan één keer voorkomen, samen te nemen als een macht: $2^2 = 2 \times 2$ en $3^2 = 3 \times 3$. Nog meer voorbeelden (maak zelf de ladderdiagrammen):

$$\begin{aligned} 120 &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 &&= 2^3 \times 3 \times 5 \\ 81 &= 3 \times 3 \times 3 \times 3 &&= 3^4 \\ 48 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 &&= 2^4 \times 3 \end{aligned}$$

Bepaal de grootste gemene deler (ggd) van:

1.17
- a. 12 en 30
- b. 24 en 84
- c. 27 en 45
- d. 32 en 56
- e. 34 en 85

1.18
- a. 45 en 225
- b. 144 en 216
- c. 90 en 196
- d. 243 en 135
- e. 288 en 168

1.19
- a. 1024 en 864
- b. 1122 en 1815
- c. 875 en 1125
- d. 1960 en 6370
- e. 1024 en 1152

1.20
- a. 1243 en 1244
- b. 1721 en 1726
- c. 875 en 900
- d. 1960 en 5880
- e. 1024 en 2024

Bepaal het kleinste gemene veelvoud (kgv) van:

1.21
- a. 12 en 30
- b. 27 en 45
- c. 18 en 63
- d. 16 en 40
- e. 33 en 121

1.22
- a. 52 en 39
- b. 64 en 80
- c. 144 en 240
- d. 169 en 130
- e. 68 en 51

1.23
- a. 250 en 125
- b. 144 en 216
- c. 520 en 390
- d. 888 en 185
- e. 124 en 341

1.24
- a. 240 en 180
- b. 276 en 414
- c. 588 en 504
- d. 315 en 189
- e. 403 en 221

Bepaal de ggd en het kgv van:

1.25
- a. 9, 12 en 30
- b. 24, 30 en 36
- c. 10, 15 en 35
- d. 18, 27 en 63
- e. 21, 24 en 27

1.26
- a. 28, 35 en 49
- b. 64, 80 en 112
- c. 39, 52 en 130
- d. 144, 168 en 252
- e. 189, 252 en 315

De ggd en het kgv

Twee getallen kunnen delers gemeen hebben. De *grootste gemene deler* (ggd) is, zoals de naam al zegt, hun grootste gemeenschappelijke deler. Wanneer de ontbinding in priemfactoren van beide getallen bekend is, kan de ggd hieruit direct worden afgelezen. Zo hebben we op bladzijde 9 de volgende priemontbindingen gevonden:

$$\begin{aligned} 180 &= 2^2 \times 3^2 \times 5 \\ 585 &= 3^2 \times 5 \times 13 \\ 3003 &= 3 \times 7 \times 11 \times 13 \end{aligned}$$

Hieruit zien we dat

$$\begin{aligned} \text{ggd}(180, 585) &= \text{ggd}(2^2 \times 3^2 \times 5\,,\, 3^2 \times 5 \times 13) = 3^2 \times 5 = 45 \\ \text{ggd}(180, 3003) &= \text{ggd}(2^2 \times 3^2 \times 5\,,\, 3 \times 7 \times 11 \times 13) = 3 \\ \text{ggd}(585, 3003) &= \text{ggd}(3^2 \times 5 \times 13\,,\, 3 \times 7 \times 11 \times 13) = 3 \times 13 = 39 \end{aligned}$$

Het *kleinste gemene veelvoud* (kgv) van twee getallen is het kleinste getal dat zowel een veelvoud van het ene getal, als van het andere getal is. Met andere woorden, het is het kleinste getal dat door allebei die getallen deelbaar is. Ook het kgv kan uit de priemontbindingen worden afgelezen. Zo is

$$\text{kgv}(180, 585) = \text{kgv}(2^2 \times 3^2 \times 5\,,\, 3^2 \times 5 \times 13) = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 13 = 2340$$

Een handige eigenschap van de ggd en het kgv van twee getallen is dat hun product gelijk is aan het product van de beide getallen. Zo is

$$\text{ggd}(180, 585) \times \text{kgv}(180, 585) = 45 \times 2340 = 105300 = 180 \times 585$$

Ook van meer dan twee getallen kun je de ggd en het kgv direct uit hun priemontbindingen aflezen. Zo is

$$\begin{aligned} \text{ggd}(180, 585, 3003) &= 3 \\ \text{kgv}(180, 585, 3003) &= 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \;=\; 180180 \end{aligned}$$

Een slim idee

Er is een methode om de ggd van twee getallen te bepalen waarbij priemontbindingen niet nodig zijn, en die vaak veel sneller werkt. Het basisidee is dat de ggd van twee getallen ook een deler moet zijn van het *verschil* van die twee getallen. Zie je ook waarom dit zo is?

Zo moet $\text{ggd}(4352, 4342)$ ook een deler zijn van $4352 - 4342 = 10$. Het getal 10 heeft alleen maar de priemdelers 2 en 5. Het is duidelijk dat 5 geen deler is van de beide getallen, maar 2 wel, en dus geldt $\text{ggd}(4352, 4342) = 2$. Wie slim is kan zich door dit idee te gebruiken veel rekenwerk besparen!

2 Rekenen met breuken

2.1 Vereenvoudig:

a. $\frac{15}{20}$

b. $\frac{18}{45}$

c. $\frac{21}{49}$

d. $\frac{27}{81}$

e. $\frac{24}{96}$

2.2 Vereenvoudig:

a. $\frac{60}{144}$

b. $\frac{144}{216}$

c. $\frac{135}{243}$

d. $\frac{864}{1024}$

e. $\frac{168}{288}$

2.3 Maak gelijknamig:

a. $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{4}$

b. $\frac{2}{5}$ en $\frac{3}{7}$

c. $\frac{4}{9}$ en $\frac{2}{5}$

d. $\frac{7}{11}$ en $\frac{3}{4}$

e. $\frac{2}{13}$ en $\frac{5}{12}$

2.4 Maak gelijknamig:

a. $\frac{1}{6}$ en $\frac{1}{9}$

b. $\frac{3}{10}$ en $\frac{2}{15}$

c. $\frac{3}{8}$ en $\frac{5}{6}$

d. $\frac{5}{9}$ en $\frac{7}{12}$

e. $\frac{3}{20}$ en $\frac{1}{8}$

2.5 Maak gelijknamig:

a. $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ en $\frac{1}{5}$

b. $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}$ en $\frac{2}{7}$

c. $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ en $\frac{1}{9}$

d. $\frac{2}{10}, \frac{1}{15}$ en $\frac{5}{6}$

e. $\frac{5}{12}, \frac{7}{18}$ en $\frac{3}{8}$

2.6 Maak gelijknamig:

a. $\frac{2}{27}, \frac{5}{36}$ en $\frac{5}{24}$

b. $\frac{7}{15}, \frac{3}{20}$ en $\frac{5}{6}$

c. $\frac{4}{21}, \frac{3}{14}$ en $\frac{7}{30}$

d. $\frac{4}{63}, \frac{5}{42}$ en $\frac{1}{56}$

e. $\frac{5}{78}, \frac{5}{39}$ en $\frac{3}{65}$

Bepaal telkens welke van de volgende twee breuken de grootste is door ze eerst gelijknamig te maken.

2.7

a. $\frac{5}{18}$ en $\frac{6}{19}$

b. $\frac{7}{15}$ en $\frac{5}{12}$

c. $\frac{9}{20}$ en $\frac{11}{18}$

d. $\frac{11}{36}$ en $\frac{9}{32}$

e. $\frac{20}{63}$ en $\frac{25}{72}$

2.8

a. $\frac{4}{7}$ en $\frac{2}{3}$

b. $\frac{14}{85}$ en $\frac{7}{51}$

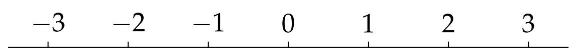
c. $\frac{26}{63}$ en $\frac{39}{84}$

d. $\frac{31}{90}$ en $\frac{23}{72}$

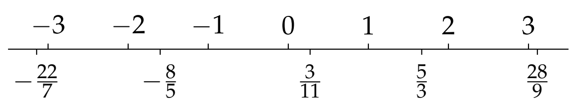
e. $\frac{37}{80}$ en $\frac{29}{60}$

Rationale getallen

De rij $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ is de rij van alle gehele getallen. Een meetkundig beeld ervan geeft de *getallenlijn* die hieronder is getekend.



Ook de *rationale getallen*, dat wil zeggen de getallen die als een breuk geschreven kunnen worden, liggen op de getallenlijn. Hieronder zijn enige rationale getallen op die lijn aangegeven.



In een breuk staan twee gehele getallen, de *teller* en de *noemer*, gescheiden door een horizontale of een schuine breukstreep. Zo is 28 de teller en 6 de noemer van de breuk $\frac{28}{6}$. De noemer van een breuk mag niet nul zijn. Een rationaal getal is een getal dat je als breuk kunt schrijven, maar die schrijfwijze ligt niet ondubbelzinnig vast: als je teller en noemer met hetzelfde gehele getal (ongelijk aan nul) vermenigvuldigt of door een gemeenschappelijke deler deelt, verandert de waarde ervan niet. Zo is

$$\frac{28}{6} = \frac{14}{3} = \frac{-14}{-3} = \frac{70}{15}$$

Breuken als $\frac{-5}{3}$ en $\frac{22}{-7}$ schrijven we meestal als $-\frac{5}{3}$, respectievelijk $-\frac{22}{7}$. Ook gehele getallen kun je als breuk schrijven, bijvoorbeeld $7 = \frac{7}{1}$, $-3 = -\frac{3}{1}$ en $0 = \frac{0}{1}$. De gehele getallen behoren dus ook tot de rationale getallen.

Delen van teller en noemer door dezelfde factor (groter dan 1) heet *vereenvoudigen*. Zo kun je $\frac{28}{6}$ vereenvoudigen tot $\frac{14}{3}$ door teller en noemer door 2 te delen. Een breuk is *onvereenvoudigbaar* als de grootste gemene deler (ggd) van teller en noemer 1 is. Zo is $\frac{14}{3}$ een onvereenvoudigbare breuk, maar $\frac{28}{6}$ niet. Je kunt van elke breuk een onvereenvoudigbare breuk maken door teller en noemer te delen door hun ggd.

Breuken heten *gelijknamig* als ze dezelfde noemer hebben. Twee breuken kun je altijd gelijknamig maken. Voorbeeld: $\frac{4}{15}$ en $\frac{5}{21}$ zijn niet gelijknamig. Je kunt ze gelijknamig maken door ze allebei als noemer $15 \times 21 = 315$ te geven: $\frac{4}{15} = \frac{84}{315}$ en $\frac{5}{21} = \frac{75}{315}$. Maar als je als gemeenschappelijke noemer het kgv van de oorspronkelijke noemers kiest, in dit geval dus $\text{kgv}(15, 21) = 105$, krijg je de eenvoudigste gelijknamige breuken, namelijk $\frac{28}{105}$ en $\frac{25}{105}$.

Bereken:

2.9

a. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

b. $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$

c. $\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$

d. $\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$

e. $\frac{1}{2}+\frac{1}{15}$

2.10

a. $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$

b. $\frac{3}{5}-\frac{4}{7}$

c. $\frac{2}{7}+\frac{3}{4}$

d. $\frac{4}{9}-\frac{3}{8}$

e. $\frac{5}{11}+\frac{4}{15}$

2.11

a. $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$

b. $\frac{1}{9}-\frac{2}{15}$

c. $\frac{3}{8}+\frac{1}{12}$

d. $\frac{1}{3}+\frac{5}{6}$

e. $\frac{4}{15}-\frac{3}{10}$

2.12

a. $\frac{2}{45}+\frac{1}{21}$

b. $\frac{5}{27}-\frac{1}{36}$

c. $\frac{5}{72}+\frac{7}{60}$

d. $\frac{3}{34}+\frac{1}{85}$

e. $\frac{7}{30}+\frac{8}{105}$

2.13

a. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$

b. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$

c. $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{9}$

d. $\frac{1}{2}-\frac{1}{7}-\frac{1}{3}$

e. $\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$

2.14

a. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

b. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$

c. $\frac{1}{12}+\frac{1}{8}-\frac{1}{2}$

d. $\frac{1}{9}-\frac{1}{12}+\frac{1}{18}$

e. $\frac{1}{10}-\frac{1}{15}+\frac{1}{6}$

2.15

a. $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

b. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}$

c. $\frac{1}{12}-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}$

d. $\frac{1}{9}-\frac{1}{12}-\frac{1}{18}$

e. $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{6}$

2.16

a. $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}$

b. $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}-\frac{2}{15}$

c. $\frac{1}{18}-\frac{7}{30}-\frac{3}{20}$

d. $\frac{3}{14}-\frac{1}{21}+\frac{5}{6}$

e. $\frac{2}{5}-\frac{3}{10}+\frac{4}{15}$

2.17

a. $\frac{2}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{10}$

b. $\frac{3}{2}+\frac{2}{3}-\frac{5}{6}$

c. $\frac{8}{21}-\frac{2}{7}+\frac{3}{4}$

d. $\frac{2}{11}-\frac{5}{13}+\frac{1}{2}$

e. $\frac{4}{17}-\frac{3}{10}+\frac{2}{5}$

Optellen en aftrekken van breuken

Optellen van twee gelijknamige breuken is eenvoudig: de noemer blijft hetzelfde en de tellers worden bij elkaar opgeteld. Hetzelfde geldt voor het aftrekken van gelijknamige breuken. Voorbeelden:

$$\frac{5}{13}+\frac{12}{13}=\frac{17}{13} \qquad \text{en} \qquad \frac{5}{13}-\frac{12}{13}=\frac{-7}{13}=-\frac{7}{13}$$

Zijn de breuken niet gelijknamig, dan moet je ze eerst gelijknamig maken. Het is weer het zuinigst om als gemeenschappelijke noemer het kgv van de afzonderlijke noemers te kiezen. Voorbeelden:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{5}+\frac{8}{3} &= \frac{6}{15}+\frac{40}{15} &&= \frac{46}{15}\\
-\frac{7}{12}+\frac{4}{15} &= -\frac{35}{60}+\frac{16}{60} &&= -\frac{19}{60}\\
-\frac{13}{7}-\frac{18}{5} &= -\frac{65}{35}-\frac{126}{35} &&= -\frac{191}{35}
\end{aligned}$$

Ook wanneer je meer dan twee breuken moet optellen of aftrekken, is het handig om ze eerst allemaal gelijknamig te maken. Het zuinigste is het om als noemer het kgv van de oorspronkelijke noemers te kiezen. Voorbeeld:

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{10}-\frac{2}{15}=\frac{20}{30}+\frac{9}{30}-\frac{4}{30}=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}$$

Je ziet dat je je antwoord soms nog kunt vereenvoudigen.

Breuken en rationale getallen

Een breuk is een *schrijfwijze* van een rationaal getal. Door teller en noemer met dezelfde factor te vermenigvuldigen, verander je wel de breuk, maar niet het rationale getal dat erdoor wordt voorgesteld. Je kunt ook zeggen dat de *waarde* van de breuk niet verandert als je teller en noemer met dezelfde factor vermenigvuldigt. De breuken $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{6}$ en $\frac{50}{20}$ hebben allemaal dezelfde waarde, en op de getallenlijn hebben ze ook allemaal dezelfde plaats, namelijk halverwege 2 en 3.
In de praktijk is men overigens meestal niet zo precies: vaak wordt 'breuk' gebruikt op plaatsen waar je strikt genomen 'waarde van de breuk' zou moeten zeggen. We doen dat trouwens ook wanneer we schrijven $\frac{5}{2}=\frac{15}{6}$ of wanneer we zeggen dat $\frac{5}{2}$ gelijk is aan $\frac{15}{6}$.

Bereken:

2.18

a. $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7}$

b. $\frac{4}{9} \times \frac{2}{5}$

c. $\frac{2}{13} \times \frac{5}{7}$

d. $\frac{9}{13} \times \frac{7}{2}$

e. $\frac{1}{30} \times \frac{13}{10}$

2.19

a. $\frac{2}{3} \times \frac{9}{2}$

b. $\frac{8}{9} \times \frac{3}{4}$

c. $\frac{14}{15} \times \frac{10}{7}$

d. $\frac{25}{12} \times \frac{18}{35}$

e. $\frac{36}{21} \times \frac{28}{27}$

2.20

a. $\frac{63}{40} \times \frac{16}{27}$

b. $\frac{49}{25} \times \frac{30}{21}$

c. $\frac{99}{26} \times \frac{39}{44}$

d. $\frac{51}{36} \times \frac{45}{34}$

e. $\frac{46}{57} \times \frac{38}{69}$

2.21

a. $\frac{2}{3} \times \frac{6}{5} \times \frac{15}{4}$

b. $\frac{6}{35} \times \frac{15}{4} \times \frac{14}{9}$

c. $\frac{26}{33} \times \frac{22}{9} \times \frac{15}{39}$

d. $\frac{18}{49} \times \frac{35}{12} \times \frac{4}{21}$

e. $\frac{24}{15} \times \frac{4}{27} \times \frac{45}{16}$

2.22

a. $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$

b. $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$

c. $6 : \frac{1}{5}$

d. $\frac{6}{5} : \frac{10}{9}$

e. $\frac{4}{5} : \frac{5}{7}$

2.23

a. $\frac{2}{3} : \frac{4}{9}$

b. $\frac{7}{10} : \frac{21}{15}$

c. $10 : \frac{5}{3}$

d. $\frac{12}{25} : \frac{18}{35}$

e. $\frac{24}{49} : \frac{36}{49}$

2.24

a. $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}$

b. $\dfrac{\frac{6}{5}}{\frac{9}{10}}$

c. $\dfrac{\frac{12}{7}}{\frac{9}{14}}$

2.25

a. $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}}$

b. $\dfrac{\frac{5}{9} + \frac{3}{10}}{\frac{3}{4} - \frac{8}{9}}$

c. $\dfrac{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}}{\frac{2}{3} + \frac{3}{2}}$

2.26

a. $\dfrac{\frac{2}{7} + \frac{5}{6}}{\frac{1}{5} + \frac{3}{4}}$

b. $\dfrac{\frac{1}{6} - \frac{5}{3}}{\frac{2}{7} - \frac{2}{5}}$

c. $\dfrac{\frac{3}{5} - \frac{11}{12}}{\frac{6}{7} + \frac{3}{11}}$

Vermenigvuldigen en delen van breuken

Het *product* van twee breuken is de breuk die als teller het product van de tellers, en als noemer het product van de noemers heeft. Voorbeelden:

$$\frac{5}{13} \times \frac{12}{7} = \frac{5 \times 12}{13 \times 7} = \frac{60}{91} \qquad \text{en} \qquad \frac{8}{7} \times \frac{-5}{11} = \frac{8 \times (-5)}{7 \times 11} = -\frac{40}{77}$$

Voor delen van breuken geldt: *delen door een breuk is vermenigvuldigen met de omgekeerde breuk.* De omgekeerde breuk krijg je door teller en noemer te verwisselen. Voorbeelden:

$$\frac{5}{13} : \frac{12}{7} = \frac{5}{13} \times \frac{7}{12} = \frac{35}{156} \qquad \text{en} \qquad \frac{8}{7} : \frac{-5}{11} = \frac{8}{7} \times \frac{11}{-5} = -\frac{88}{35}$$

Soms gebruikt men ook een andere notatie voor het delen van breuken, namelijk met de horizontale breukstreep. Voorbeeld:

$$\frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{7}} \qquad \text{in plaats van} \qquad \frac{5}{13} : \frac{12}{7}$$

Er staat dan dus een 'breuk' met een breuk in de teller en een breuk in de noemer.

Andere notaties voor breuken

In plaats van een horizontale scheidingsstreep tussen teller en noemer wordt soms ook een schuine streep gebruikt: $1/2$ in plaats van $\frac{1}{2}$. Soms is het ook om typografische redenen handiger om de schuine-streepnotatie te gebruiken. De notaties worden ook wel samen gebruikt, vaak ook weer om de typografie overzichtelijker te maken, bijvoorbeeld

$$\frac{5/13}{12/7} \qquad \text{of} \qquad \frac{5}{13} \Big/ \frac{12}{7}$$

In sommige situaties kan het voordelen hebben om breuken in een *gemengde notatie* te schrijven, dat wil zeggen dat men het gehele deel ervan apart zet, bijvoorbeeld $2\frac{1}{2}$ in plaats van $\frac{5}{2}$. Bij vermenigvuldigen en delen is die notatie echter niet handig, vandaar dat we er in dit boek haast nooit gebruik van zullen maken.

3 Machten en wortels

Schrijf alle volgende uitdrukkingen als een geheel getal of als een onvereenvoudigbare breuk:

3.1
a. 2^3
b. 3^2
c. 4^5
d. 5^4
e. 2^8

3.2
a. $(-2)^3$
b. $(-3)^2$
c. $(-4)^5$
d. $(-5)^4$
e. $(-2)^6$

3.3
a. 2^{-3}
b. 4^{-2}
c. 3^{-4}
d. 7^{-1}
e. 2^{-7}

3.4
a. 2^0
b. 9^{-1}
c. 11^{-2}
d. 9^{-3}
e. 10^{-4}

3.5
a. $(-4)^3$
b. 3^{-5}
c. $(-3)^{-3}$
d. 2^4
e. $(-2)^{-4}$

3.6
a. $(-2)^0$
b. 0^2
c. 12^{-1}
d. $(-7)^2$
e. $(-2)^{-7}$

3.7
a. $(\frac{2}{3})^2$
b. $(\frac{1}{2})^4$
c. $(\frac{4}{5})^3$
d. $(\frac{2}{7})^2$

3.8
a. $(\frac{2}{3})^{-2}$
b. $(\frac{1}{2})^{-3}$
c. $(\frac{7}{9})^{-1}$
d. $(\frac{3}{2})^{-4}$

3.9
a. $(\frac{4}{3})^{-2}$
b. $(\frac{1}{2})^{-4}$
c. $(\frac{4}{5})^{-1}$
d. $(\frac{2}{3})^{-5}$

3.10
a. $(\frac{1}{4})^{-1}$
b. $(\frac{6}{5})^0$
c. $(\frac{4}{3})^3$
d. $(\frac{5}{2})^{-4}$

3.11
a. $(\frac{6}{7})^2$
b. $(\frac{8}{7})^0$
c. $(\frac{6}{7})^{-2}$
d. $(\frac{2}{7})^3$

3.12
a. $(\frac{4}{9})^3$
b. $(\frac{5}{3})^{-3}$
c. $(\frac{5}{11})^2$
d. $(\frac{3}{6})^{-5}$

Gehele machten

Voor ieder getal a ongelijk aan 0 en elk positief geheel getal k is

$$
\begin{aligned}
a^k &= \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{k \text{ maal}} \\
a^0 &= 1 \\
a^{-k} &= \frac{1}{a^k}
\end{aligned}
$$

Hiermee is a^n voor ieder geheel getal n gedefinieerd. Het getal a heet het *grondtal* en n heet de *exponent*. Voorbeelden:

$$
\begin{aligned}
7^4 &= 7 \times 7 \times 7 \times 7 &= 2401 \\
\left(-\frac{1}{3}\right)^0 &= 1 \\
\left(\frac{3}{8}\right)^{-1} &= \frac{1}{\frac{3}{8}} &= \frac{8}{3} \\
10^{-3} &= \frac{1}{10^3} &= \frac{1}{1000}
\end{aligned}
$$

Eigenschappen:

$$
\begin{aligned}
a^n \times a^m &= a^{n+m} \\
a^n : a^m &= a^{n-m} \\
(a^n)^m &= a^{n \times m} \\
(a \times b)^n &= a^n \times b^n \\
\left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n}
\end{aligned}
$$

Een bijzondere plaats neemt het grondtal 0 in. We hebben hierboven a ongelijk aan 0 genomen om te voorkomen dat er bij een negatieve gehele exponent n in de macht a^n een breuk met nul in de noemer verschijnt.

Voor positieve gehele n definieert men echter gewoon $0^n = 0$, en verder is het in de wiskunde ook gebruikelijk om $0^0 = 1$ te definiëren. Dat laatste is eenvoudig een *afspraak* die maakt dat bepaalde veel voorkomende formules ook voor 0 geldig blijven. Een voorbeeld is de formule $a^0 = 1$, die nu dus voor alle a, ook voor $a = 0$, geldt. Het blijft echter een afspraak; zoek hier verder niets diepzinnigs achter!

Schrijf alle volgende uitdrukkingen in standaardvorm, dat wil zeggen in de vorm $a\sqrt{b}$ waarin a een geheel getal en $\sqrt{b}$ een onvereenvoudigbare wortel is.

3.13
a. $\sqrt{36}$
b. $\sqrt{81}$
c. $\sqrt{121}$
d. $\sqrt{64}$
e. $\sqrt{169}$

3.14
a. $\sqrt{225}$
b. $\sqrt{16}$
c. $\sqrt{196}$
d. $\sqrt{256}$
e. $\sqrt{441}$

3.15
a. $\sqrt{8}$
b. $\sqrt{12}$
c. $\sqrt{18}$
d. $\sqrt{24}$
e. $\sqrt{50}$

3.16
a. $\sqrt{72}$
b. $\sqrt{32}$
c. $\sqrt{20}$
d. $\sqrt{98}$
e. $\sqrt{40}$

3.17
a. $\sqrt{54}$
b. $\sqrt{99}$
c. $\sqrt{80}$
d. $\sqrt{96}$
e. $\sqrt{200}$

3.18
a. $\sqrt{147}$
b. $\sqrt{242}$
c. $\sqrt{125}$
d. $\sqrt{216}$
e. $\sqrt{288}$

3.19
a. $\sqrt{675}$
b. $\sqrt{405}$
c. $\sqrt{512}$
d. $\sqrt{338}$
e. $\sqrt{588}$

3.20
a. $\sqrt{1331}$
b. $\sqrt{972}$
c. $\sqrt{2025}$
d. $\sqrt{722}$
e. $\sqrt{676}$

3.21
a. $\sqrt{6} \times \sqrt{3}$
b. $\sqrt{10} \times \sqrt{15}$
c. $2\sqrt{14} \times -3\sqrt{21}$
d. $-4\sqrt{22} \times 5\sqrt{33}$
e. $3\sqrt{30} \times 2\sqrt{42}$

3.22
a. $\sqrt{5} \times \sqrt{3}$
b. $-\sqrt{2} \times \sqrt{7}$
c. $\sqrt{3} \times \sqrt{5} \times \sqrt{2}$
d. $2\sqrt{14} \times 3\sqrt{6}$
e. $3\sqrt{5} \times -2\sqrt{6} \times 4\sqrt{10}$

3.23
a. $3\sqrt{6} \times 2\sqrt{15} \times 4\sqrt{10}$
b. $-5\sqrt{5} \times 10\sqrt{10} \times 2\sqrt{2}$
c. $2\sqrt{21} \times -\sqrt{14} \times -3\sqrt{10}$
d. $\sqrt{15} \times 2\sqrt{3} \times -3\sqrt{35}$
e. $-3\sqrt{30} \times 12\sqrt{14} \times -2\sqrt{21}$

Wortels van gehele getallen

De *wortel* van een getal $a \geq 0$ is het getal w waarvoor geldt dat $w \geq 0$ en $w^2 = a$ is. Notatie: $w = \sqrt{a}$.

Voorbeeld: $\sqrt{25} = 5$ want $5^2 = 25$. Merk op dat ook $(-5)^2 = 25$, dus ook -5 zou men misschien een 'wortel van 25' willen noemen. Zoals in de definitie staat, wordt onder $\sqrt{a}$ echter uitsluitend het *niet-negatieve* getal verstaan waarvan het kwadraat gelijk is aan a, dus $\sqrt{25} = +5$.

Het getal $\sqrt{20}$ is geen geheel getal want $4^2 = 16 < 20$ en $5^2 = 25 > 20$ dus $4 < \sqrt{20} < 5$. Is $\sqrt{20}$ misschien als een breuk te schrijven? Het antwoord is nee: de wortel van een positief geheel getal dat zelf geen kwadraat van een geheel getal is, is altijd *irrationaal*, dat wil zeggen dat men zo'n getal niet als een breuk kan schrijven. Toch kan $\sqrt{20}$ wel worden vereenvoudigd, want $20 = 2^2 \times 5$ dus $\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \times 5} = 2 \times \sqrt{5}$. Die laatste uitdrukking schrijven we meestal korter als $2\sqrt{5}$.

De wortel $\sqrt{a}$ van een positief geheel getal a heet *onvereenvoudigbaar* als a geen kwadraat van een geheel getal groter dan 1 als deler heeft. Zo zijn $\sqrt{21} = \sqrt{3 \times 7}$, $\sqrt{66} = \sqrt{2 \times 3 \times 11}$ en $\sqrt{91} = \sqrt{7 \times 13}$ onvereenvoudigbare wortels, maar $\sqrt{63}$ niet, want $\sqrt{63} = \sqrt{7 \times 9} = \sqrt{7 \times 3^2} = 3\sqrt{7}$.

Elke wortel van een positief geheel getal kan geschreven worden als een geheel getal of als het product van een geheel getal en een onvereenvoudigbare wortel. Deze schrijfwijze heet de *standaardvorm* van de wortel. Je vindt de standaardvorm door alle kwadraten 'buiten de wortel te halen'. Voorbeeld: $\sqrt{200} = \sqrt{10^2 \times 2} = 10\sqrt{2}$.

Waarom $\sqrt{20}$ irrationaal is

Om aan te tonen dat $\sqrt{20}$ irrationaal is, gebruiken we een *bewijs uit het ongerijmde*: stel dat $\sqrt{20}$ rationaal was. Dan zou je die wortel kunnen schrijven als een breuk p/q waarin p en q positieve gehele getallen zijn met $\text{ggd}(p, q) = 1$. Uit $\sqrt{20} = p/q$ volgt $20q^2 = p^2$ oftewel $2 \times 2 \times 5 \times q^2 = p^2$. Het linkerlid is deelbaar door 5, dus het rechterlid ook. In de priemontbinding van p moet dan minstens één priemfactor 5 zitten, en in de priemontbinding van p^2 zitten dus minstens *twee* factoren 5. Maar $\text{ggd}(p, q) = 1$, en dus bevat de priemontbinding van q géén factoren 5. De priemontbinding van $20q^2$ bevat dus precies één factor 5, terwijl we net hebben aangetoond dat die van p^2 er minstens twee heeft. Dit is in tegenspraak met $20q^2 = p^2$. Onze veronderstelling dat $\sqrt{20}$ rationaal is, heeft dus tot een tegenspraak geleid. Conclusie: het getal $\sqrt{20}$ is irrationaal. Zo'n zelfde irrationaliteitsbewijs kan gegeven worden voor de wortel van elk positief geheel getal dat geen kwadraat is.

Schrijf alle volgende uitdrukkingen in standaardvorm, dat wil zeggen in de vorm $a\sqrt{b}$ waarin a een geheel getal of een onvereenvoudigbare breuk, en $\sqrt{b}$ een onvereenvoudigbare wortel is.

3.24

a. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

b. $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2$

c. $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2$

d. $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3$

e. $\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^3$

3.25

a. $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)^3$

b. $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)^3$

c. $\left(\frac{-\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\right)^4$

d. $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3$

e. $\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^5$

3.26

a. $\sqrt{\frac{2}{3}}$

b. $\sqrt{\frac{3}{2}}$

c. $\sqrt{\frac{6}{5}}$

d. $\sqrt{\frac{7}{2}}$

e. $\sqrt{\frac{2}{7}}$

3.27

a. $\sqrt{\frac{5}{12}}$

b. $\sqrt{\frac{4}{27}}$

c. $\sqrt{\frac{9}{20}}$

d. $\sqrt{\frac{6}{15}}$

e. $\sqrt{\frac{7}{32}}$

3.28

a. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

b. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

c. $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{11}}$

d. $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{5}}$

e. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$

3.29

a. $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

b. $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$

c. $\frac{4\sqrt{12}}{\sqrt{20}}$

d. $\frac{-5\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$

e. $\frac{6\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}$

Wortels van breuken in standaardvorm

De wortel van een breuk met positieve teller en noemer is het quotiënt van de wortel van de teller en de wortel van de noemer. Zo is $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$. Ter controle: inderdaad is $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

De wortel van een positieve breuk kan altijd geschreven worden als een onvereenvoudigbare breuk of als het product van een onvereenvoudigbare breuk en een onvereenvoudigbare wortel. We noemen dit weer de *standaardvorm* van zo'n wortel. Voorbeelden:

$$\sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{4 \times 3}{3 \times 3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \qquad \text{en} \qquad \sqrt{\frac{11}{15}} = \sqrt{\frac{11 \times 15}{15 \times 15}} = \frac{1}{15}\sqrt{165}$$

Je bepaalt zo'n standaardvorm dus door eerst teller en noemer te vermenigvuldigen met een factor die ervoor zorgt dat de noemer een kwadraat van een geheel getal wordt, en dus kan worden getrokken. Wanneer de wortel van de teller dan nog niet in standaardvorm staat, kan die worden vereenvoudigd tot een product van een geheel getal en een onvereenvoudigbare wortel, waarmee dan de gezochte standaardvorm van de wortel van de breuk gevonden is. Op dezelfde manier kun je een wortel in de noemer van een breuk altijd wegwerken, en daarmee zo'n breuk weer in standaardvorm schrijven. Voorbeeld:

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{21}}{7} = \frac{2}{7}\sqrt{21}$$

Schrijf alle volgende uitdrukkingen in standaardvorm.

3.30
a. $\sqrt[3]{8}$
b. $\sqrt[4]{81}$
c. $\sqrt[3]{125}$
d. $\sqrt[5]{1024}$
e. $\sqrt[3]{216}$

3.31
a. $\sqrt[3]{-27}$
b. $\sqrt[4]{16}$
c. $\sqrt[5]{243}$
d. $\sqrt[7]{-128}$
e. $\sqrt[2]{144}$

3.32
a. $\sqrt[3]{16}$
b. $\sqrt[4]{243}$
c. $\sqrt[3]{375}$
d. $\sqrt[5]{96}$
e. $\sqrt[3]{54}$

3.33
a. $\sqrt[3]{-40}$
b. $\sqrt[4]{48}$
c. $\sqrt[5]{320}$
d. $\sqrt[3]{432}$
e. $\sqrt[6]{192}$

3.34
a. $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{7}$
b. $\sqrt[4]{4} \times \sqrt[4]{14}$
c. $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{4}$
d. $\sqrt[4]{18} \times \sqrt[4]{45}$
e. $\sqrt[5]{16} \times \sqrt[5]{12}$

3.35
a. $\sqrt[4]{24} \times \sqrt[4]{54}$
b. $\sqrt[3]{36} \times \sqrt[3]{12}$
c. $\sqrt[5]{81} \times \sqrt[5]{15}$
d. $\sqrt[6]{288} \times \sqrt[6]{324}$
e. $\sqrt[3]{200} \times \sqrt[3]{35}$

3.36
a. $\sqrt[3]{\frac{1}{343}}$
b. $\sqrt[4]{\frac{-16}{81}}$
c. $\sqrt[5]{\frac{32}{-243}}$
d. $\sqrt[2]{\frac{36}{121}}$
e. $\sqrt[4]{\frac{1296}{625}}$

3.37
a. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$
b. $\sqrt[4]{\frac{625}{16}}$
c. $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$
d. $\sqrt[3]{\frac{216}{1000}}$
e. $\sqrt[2]{\frac{144}{25}}$

3.38
a. $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$
b. $\sqrt[4]{\frac{2}{27}}$
c. $\sqrt[3]{\frac{3}{25}}$
d. $\sqrt[3]{\frac{5}{9}}$
e. $\sqrt[6]{\frac{3}{8}}$

3.39
a. $\sqrt[3]{\frac{5}{24}}$
b. $\sqrt[4]{\frac{7}{72}}$
c. $\sqrt[5]{\frac{5}{648}}$
d. $\sqrt[3]{\frac{9}{100}}$

3.40
a. $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$
b. $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{8}}$
c. $\frac{\sqrt[5]{1}}{\sqrt[5]{16}}$
d. $\frac{\sqrt[6]{6}}{\sqrt[6]{81}}$

3.41
a. $\frac{\sqrt[3]{-3}}{\sqrt[3]{2}}$
b. $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{4}}$
c. $\frac{\sqrt[5]{7}}{\sqrt[5]{-27}}$
d. $\frac{\sqrt[3]{35}}{\sqrt[3]{36}}$

Hogeremachtswortels in standaardvorm

De wortels uit de vorige paragraaf worden soms ook *tweedemachtswortels* of *vierkantswortels* genoemd om ze te onderscheiden van de hogeremachtswortels die op een soortgelijke manier worden gedefinieerd.

Zo is de *derdemachtswortel* van een getal a het getal w waarvoor $w^3 = a$. Notatie: $\sqrt[3]{a}$. Voorbeelden: $\sqrt[3]{27} = 3$ want $3^3 = 27$ en $\sqrt[3]{-8} = -2$ want $(-2)^3 = -8$. Merk op dat derdemachtswortels ook uit negatieve getallen kunnen worden getrokken, en dat er geen keuzemogelijkheid voor de wortel is: er is maar één getal waarvan de derdemacht gelijk is aan 27, namelijk 3, en er is ook maar één getal waarvan de derdemacht gelijk is aan -8, namelijk -2.

In het algemeen is de n-demachtswortel $\sqrt[n]{a}$ van a het getal w waarvoor geldt dat $w^n = a$. Wanneer n even is, moet $a \geq 0$ zijn. In dat geval geldt ook $w^n = (-w)^n$, en dus zijn er dan twee mogelijke kandidaat-wortels. Bij afspraak neemt men echter altijd de *niet-negatieve* w waarvoor $w^n = a$.

Er zijn veel overeenkomsten tussen n-demachtswortels en gewone wortels, dat wil zeggen tweedemachtswortels:

- De n-demachtswortel van een geheel getal a is irrationaal tenzij a zelf een n-demacht van een geheel getal is.
- De n-demachtswortel van een positief geheel getal a heet *onvereenvoudigbaar* wanneer a geen n-demacht behalve 1 als deler heeft.
- De n-demachtswortel van een breuk kan geschreven worden als een breuk of als het product van een breuk en een onvereenvoudigbare n-demachtswortel. Dit noemen we weer de *standaardvorm* van die wortel.

Voorbeelden voor derdemachtswortels: $\sqrt[3]{24}$ is vereenvoudigbaar, want $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \times 3} = 2\sqrt[3]{3}$, maar de wortels $\sqrt[3]{18}$, $\sqrt[3]{25}$ en $\sqrt[3]{450}$ zijn onvereenvoudigbaar. De standaardvorm van een derdemachtswortel van een breuk bepalen we door teller en noemer met een zodanige factor te vermenigvuldigen dat de noemer een derdemacht wordt. Voorbeeld:

$$\sqrt[3]{\frac{14}{75}} = \sqrt[3]{\frac{2 \times 7}{3 \times 5^2}} = \sqrt[3]{\frac{2 \times 7 \times 3^2 \times 5}{3^3 \times 5^3}} = \frac{1}{15}\sqrt[3]{630}$$

3.42 Schrijf als wortel:

a. $2^{\frac{1}{2}}$
b. $3^{\frac{3}{2}}$
c. $7^{\frac{2}{3}}$
d. $5^{\frac{5}{4}}$
e. $4^{\frac{4}{3}}$

3.43 Schrijf als wortel:

a. $3^{-\frac{1}{2}}$
b. $7^{-\frac{3}{2}}$
c. $4^{-\frac{1}{3}}$
d. $9^{-\frac{2}{5}}$
e. $2^{-\frac{1}{2}}$

3.44 Schrijf als macht:

a. $\sqrt[3]{5}$
b. $\sqrt[2]{7}$
c. $\sqrt[4]{2}$
d. $\sqrt[6]{12}$
e. $\sqrt[5]{5}$

3.45 Schrijf als macht:

a. $\dfrac{1}{\sqrt[2]{5}}$
b. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}}$
c. $\dfrac{1}{2\sqrt[4]{2}}$
d. $\dfrac{3}{\sqrt[2]{3}}$
e. $\dfrac{7}{\sqrt[5]{7}}$

3.46 Schrijf als macht van 2:

a. $\sqrt[3]{4}$
b. $\sqrt[2]{8}$
c. $\sqrt[4]{32}$
d. $\sqrt[6]{16}$
e. $\sqrt[3]{32}$

3.47 Schrijf als macht van 2:

a. $\dfrac{4}{\sqrt[2]{2}}$
b. $\dfrac{1}{2\sqrt[2]{2}}$
c. $\dfrac{8}{\sqrt[3]{4}}$
d. $\dfrac{2}{\sqrt[4]{8}}$
e. $\dfrac{1}{4\sqrt[3]{16}}$

Schrijf de volgende uitdrukkingen als wortel in standaardvorm.

3.48

a. $\sqrt[2]{2} \times \sqrt[3]{2}$
b. $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[2]{3}$
c. $\sqrt[4]{8} \times \sqrt[3]{16}$
d. $\sqrt[5]{27} \times \sqrt[3]{9}$
e. $\sqrt[3]{16} \times \sqrt[6]{16}$

3.49

a. $\sqrt[2]{7} \times \sqrt[3]{49}$
b. $\sqrt[3]{9} \times \sqrt[2]{3}$
c. $\sqrt[4]{25} \times \sqrt[3]{5}$
d. $\sqrt[5]{81} \times \sqrt[4]{27}$
e. $\sqrt[4]{49} \times \sqrt[2]{7}$

3.50

a. $\sqrt[2]{2} : \sqrt[3]{2}$
b. $\sqrt[3]{9} : \sqrt[2]{3}$
c. $\sqrt[4]{8} : \sqrt[2]{2}$
d. $\sqrt[3]{9} : \sqrt[5]{27}$
e. $\sqrt[2]{2} : \sqrt[3]{4}$

Gebroken machten

In deze paragraaf beperken we ons tot machten met een *positief* grondtal. Als $\frac{m}{n}$ een breuk is met $n > 1$ definiëren we

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

In het bijzonder is (neem $m = 1$)

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

dus

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}, \quad a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}, \quad a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a} \quad \text{enzovoort.}$$

Evenzo is (neem $m = -1$)

$$a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{a^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,, \quad a^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \quad \text{enzovoort.}$$

Verdere voorbeelden:

$$7^{\frac{3}{2}} = \sqrt{7^3} = 7\sqrt{7}, \quad 5^{-\frac{2}{7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{25}} \quad \text{en} \quad 2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5} = 2\sqrt[3]{4}$$

Het laatste voorbeeld kun je ook als volgt vinden via $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3}$.

$$2^{\frac{5}{3}} = 2^{1+\frac{2}{3}} = 2^1 \times 2^{\frac{2}{3}} = 2\sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{4}$$

Rekenregels voor machten:

$$\begin{aligned} a^r \times a^s &= a^{r+s} \\ a^r : a^s &= a^{r-s} \\ (a^r)^s &= a^{r\times s} \\ (a \times b)^r &= a^r \times b^r \\ \left(\frac{a}{b}\right)^r &= \frac{a^r}{b^r} \end{aligned}$$

Deze rekenregels zijn geldig voor alle rationale getallen r en s en alle positieve getallen a en b.

II Algebra

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

De algebra is de kunst van het rekenen met letters. Die letters stellen meestal getallen voor. In de eerste twee hoofdstukken van dit deel behandelen we de grondprincipes van de algebra: prioriteitsregels, haakjes uitwerken, termen buiten haakjes brengen, de *bananenformule* en de *merkwaardige producten*. Het laatste hoofdstuk gaat over het rekenen met breuken waarin letters voorkomen, met name over het vereenvoudigen, het onder één noemer brengen en het splitsen van zulke breuken.

4 Rekenen met letters

Bij de volgende opgaven gaat het er om de gegeven waarden in te vullen (te *substitueren*) in de gegeven algebraïsche uitdrukking en het resultaat te berekenen. Voorbeeld: als je $a = 5$ substitueert in de uitdrukking $3a^3 - 2a + 4$ krijg je $3 \times 5^3 - 2 \times 5 + 4 = 375 - 10 + 4 = 369$.

4.1 Substitueer $a = 3$ in

a. $2a^2$

b. $-a^2 + a$

c. $4a^3 - 2a$

d. $-3a^3 - 3a^2$

e. $a(2a - 3)$

4.2 Substitueer $a = -2$ in

a. $3a^2$

b. $-a^3 + a$

c. $3(a^2 - 2a)$

d. $-2a^2 + a$

e. $2a(-a + 3)$

4.3 Substitueer $a = 4$ in

a. $3a^2 - 2a$

b. $-a^3 + 2a^2$

c. $-2(a^2 - 2a)$

d. $(2a - 4)(-a + 2)$

e. $(3a - 4)^2$

4.4 Substitueer $a = -3$ in

a. $-a^2 + 2a$

b. $a^3 - 2a^2$

c. $-3(a^2 - 2a)$

d. $(2a - 1)(-3a + 2)$

e. $(2a + 1)^2$

4.5 Substitueer $a = 3$ en $b = 2$ in

a. $2a^2b$

b. $3a^2b^2 - 2ab$

c. $-3a^2b^3 + 2ab^2$

d. $2a^3b - 3ab^3$

e. $-5ab^2 - 2a^2 + 3b^3$

4.6 Substitueer $a = -2$ en $b = -3$ in

a. $3ab - a$

b. $2a^2b - 2ab$

c. $-3ab^2 + 3ab$

d. $a^2b^2 - 2a^2b + ab^2$

e. $-a^2 + b^2 + 4ab$

4.7 Substitueer $a = 5$ en $b = -2$ in

a. $3(ab)^2 - 2ab$

b. $a(a + b)^2 - (2a)^2$

c. $-3ab(a + 2b)^2$

d. $3a(a - 2b)(a^2 - 2ab)$

e. $(a^2b - 2ab^2)^2$

4.8 Substitueer $a = -2$ en $b = -1$ in

a. $-(a^2b)^3 - 2(ab^2)^2$

b. $-b(3a^2 - 2b)^2$

c. $(3a^2b - 2ab^2)(2a^2 - b^2)$

d. $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$

e. $\big((-a^2b + 2b)(ab^2 - 2a)\big)^2$

Prioriteitsregels

Letters in algebraïsche uitdrukkingen stellen in dit deel steeds getallen voor. Met die letters zijn dan ook gelijk rekenkundige bewerkingen gedefinieerd. Zo is $a+b$ de som van a en b, $a-b$ het verschil van a en b enzovoort.

Bij het vermenigvuldigen vervangen we het maalteken vaak door een punt, of we laten het helemaal weg. We schrijven dus vaak $a \cdot b$ of ab in plaats van $a \times b$. Vaak gebruiken we ook mengvormen van letters en getallen: $2ab$ betekent $2 \times a \times b$. Het is gebruikelijk om in zulke mengvormen het getal voorop te zetten, dus $2ab$ en niet $a2b$ of $ab2$.

Het is gebruikelijk om de volgende *prioriteitsregels* te hanteren:

a. Optellen en aftrekken geschieden in de volgorde waarin deze bewerkingen voorkomen, van links naar rechts.
b. Vermenigvuldigen en delen geschieden in de volgorde waarin deze bewerkingen voorkomen, van links naar rechts.
c. Vermenigvuldigen en delen hebben voorrang boven optellen en aftrekken.

We geven hieronder enige getallenvoorbeelden, waarbij we in het rechterlid eerst de volgorde van de bewerkingen met haakjes expliciet aangeven en vervolgens het antwoord berekenen.

$$\begin{array}{rcrcr} 5-7+8 & = & (5-7)+8 & = & 6 \\ 4-5\times 3 & = & 4-(5\times 3) & = & -11 \\ 9+14:7 & = & 9+(14:7) & = & 11 \\ 12:3\times 4 & = & (12:3)\times 4 & = & 16 \end{array}$$

Nu met letters. Het rechterlid geeft de uitrekenvolgorde met haakjes aan.

$$\begin{array}{lcl} a-b+c & = & (a-b)+c \\ a-bc & = & a-(b\times c) \\ a+b:c & = & a+(b:c) \\ a:b\times c & = & (a:b)\times c \end{array}$$

Let op: als je in het onderste voorbeeld het linkerlid noteert als $a : bc$ zullen velen dit opvatten als $a : (b \times c)$, en dat is echt iets anders dan $(a : b) \times c$. Neem bijvoorbeeld $a = 12$, $b = 3$ en $c = 4$, dan is $(12 : 3) \times 4 = 16$ maar $12 : (3 \times 4) = 1$. Schrijf dus niet $a : bc$ maar $a : (bc)$ wanneer je dat laatste bedoelt. Meer in het algemeen:

Gebruik haakjes in alle gevallen waarin misverstanden omtrent de volgorde van het uitvoeren van algebraïsche bewerkingen zouden kunnen ontstaan!

Vuistregel: beter te veel haakjes gebruiken dan te weinig!

Schrijf de volgende uitdrukkingen zo eenvoudig mogelijk als een macht of een product van machten.

4.9

a. $a^3 \cdot a^5$
b. $b^3 \cdot b^2$
c. $a^4 \cdot a^7$
d. $b \cdot b^3$
e. $a^7 \cdot a^7$

4.10

a. $(a^2)^3$
b. $(b^3)^4$
c. $(a^5)^5$
d. $(b^4)^2$
e. $(a^6)^9$

4.11

a. $(ab)^4$
b. $(a^2b^3)^2$
c. $(a^4b)^3$
d. $(a^2b^3)^4$
e. $(a^3b^4)^5$

4.12

a. $a^4 \cdot a^3 \cdot a$
b. $2a^5 \cdot 3a^5$
c. $4a^2 \cdot 3a^2 \cdot 5a^2$
d. $5a^3 \cdot 6a^4 \cdot 7a$
e. $a \cdot 2a^2 \cdot 3a^3$

4.13

a. $(2a^2)^3$
b. $(3a^3b^4)^4$
c. $(4a^2b^2)^2$
d. $(5a^5b^3)^3$
e. $(2ab^5)^4$

4.14

a. $3a^2b \cdot 5ab^4$
b. $6a^3b^4 \cdot 4a^6b^2$
c. $3a^2b^2 \cdot 2a^3b^3$
d. $7a^5b^3 \cdot 5a^7b^5$
e. $8a^2b^4 \cdot 3ab^2 \cdot 6a^5b^4$

4.15

a. $3a^2 \cdot -2a^3 \cdot -4a^5$
b. $-5a^3 \cdot 2a^2 \cdot -4a^3 \cdot 3a^2$
c. $4a^2 \cdot -2a^4 \cdot -5a^5$
d. $2a^4 \cdot -3a^5 \cdot -3a^6$
e. $-3a^2 \cdot -2a^4 \cdot -4a$

4.16

a. $(-2a^2)^3$
b. $(-3a^3)^2$
c. $(-5a^4)^4$
d. $(-a^2b^4)^5$
e. $(-2a^3b^5)^7$

4.17

a. $3a^2 \cdot (2a^3)^2$
b. $(-3a^3)^2 \cdot (2a^2)^3$
c. $(3a^4)^3 \cdot -5a^6$
d. $2a^2 \cdot (5a^3)^3 \cdot 3a^5$
e. $-2a^5 \cdot (-2a)^5 \cdot 5a^2$

4.18

a. $2a^3b^4(-3a^2b^3)^2$
b. $(-2a^2b^4)^3(-3a^2b^5)^2$
c. $2a^2b(-2a^2b)^2(-2a^2b)^3$
d. $3a^4b^2(-3a^2b^4)^3(-2a^3b^2)^2$
e. $(2a^3)^4(-3b^2)^2(2a^2b^3)^3$

4.19

a. $(3a^2b^3c^4)^2(2ab^2c^3)^3$
b. $(-2a^3c^4)^2(-a^2b^3)^3(2b^3c^2)^4$
c. $2a^2c^3(3a^3b^2c)^4(-5ab^2c^5)$
d. $(-2a^3c)^6(5a^3b^2)^2(-5b^3c^4)^4$
e. $-(-3a^2b^2c^2)^3(-2a^3b^3c^3)^2$

4.20

a. $\left((a^3)^4\right)^3$
b. $\left((-a^2)^3(2a^3)^2\right)^2$
c. $\left((2a^2b^3)^2(-3a^3b^2)^3\right)^2$
d. $\left(-2a(-a^3)^2\right)^5$
e. $\left(-2(-a^2)^3\right)^2\left(-3(-a^4)^2\right)^3$

Rekenen met machten

In het vorige hoofdstuk hebben we onder andere de volgende rekenregels voor machten behandeld:

$$\begin{aligned} a^n \times a^m &= a^{n+m} \\ (a^n)^m &= a^{n \times m} \\ (a \times b)^n &= a^n \times b^n \end{aligned}$$

We hebben toen alleen maar met concrete getallenvoorbeelden gerekend, maar nu kunnen we het ook met letters. In deze paragraaf zullen de exponenten wel steeds gegeven gehele getallen zijn, maar voor de grondtallen nemen we nu letters. Met de rekenregels kunnen we dan ingewikkelde algebraïsche uitdrukkingen met machten vereenvoudigen.

We geven een aantal voorbeelden. Eerst vier eenvoudige gevallen.

$$\begin{aligned} &a^4 \cdot a^5 = a^{4+5} = a^9 \\ &(a^2)^4 = a^{2\times 4} = a^8 \\ &(ab)^5 = a^5 \times b^5 = a^5 b^5 \\ &(a^2b^4)^3 = (a^2)^3(b^4)^3 = a^6 b^{12} \end{aligned}$$

Nu met getallen erbij:

$$\begin{aligned} &2a^3 \cdot 5a^7 = (2 \times 5)\, a^{3+7} = 10\, a^{10} \\ &(2a)^4 \cdot (5a)^3 = (2^4 \times 5^3)\, a^{4+3} = 2000\, a^7 \\ &(-2a)^7 = (-2)^7\, a^7 = -128\, a^7 \\ &(4a^2)^3 \cdot (-5a)^2 = 64 \cdot 25\, (a^2)^3 \cdot a^2 = 1600\, a^8 \end{aligned}$$

Maak nu alle opgaven op de tegenoverliggende bladzijde. Let daarbij ook op de mintekens, als die er zijn. Bedenk:

Een negatief getal tot een even *macht geeft een positief getal.*
Een negatief getal tot een oneven *macht geeft een negatief getal.*

Werk bij de volgende opgaven de haakjes uit.

4.21
a. $3(2a+5)$
b. $8(5a-2)$
c. $-5(3a-2)$
d. $12(-5a+1)$
e. $-7(7a+6)$

4.22
a. $2a(a-5)$
b. $7a(2a+12)$
c. $-13a(9a-5)$
d. $8a(8a-15)$
e. $-21a(3a+9)$

4.23
a. $2a(a^2+9)$
b. $3a^2(4a-7)$
c. $-5a^2(2a^2+4)$
d. $9a^2(a^2+2a)$
e. $-3a(a^2-4a)$

4.24
a. $4a^2(3a^2+2a+3)$
b. $-3a^2(2a^3+5a^2-a)$
c. $7a^3(2a^2+3a-6)$
d. $12a^2(-6a^3-2a^2+a-1)$
e. $-5a^2(3a^4+a^2-2)$

4.25
a. $2(3a+4b)$
b. $-5(2a-5b)$
c. $2a(a+2b)$
d. $16a(-4a+6b)$
e. $-22a(8a-11b)$

4.26
a. $3a(9a+5b-12)$
b. $2a^2(7a-6b)$
c. $-8a^2(7a+4b-1)$
d. $6a^2(-2a+2b+2)$
e. $-13a^2(13a+12b-14)$

4.27
a. $2a^2(3a^2+2b-3)$
b. $-5a^3(2a^2+a-2b)$
c. $2b^2(3a^2+2b^2)$
d. $4a^3(-2a^2+5b^2-2b)$
e. $-14b^3(14a^2+2a-5b^2)$

4.28
a. $2a^2(a^2+3ab)$
b. $-5a^2(3a^2+2ab-3b^2)$
c. $2a^3(3a^3+2a^2b^2-b^2)$
d. $-3a^4(2a^3+2a^2b^2+2ab^2)$
e. $7a^3(-7a^3+3a^2b-4ab^2)$

4.29
a. $2ab(a^2+2ab-b^2)$
b. $-5ab(-3a^2b+2ab^2-6b)$
c. $6ab^2(2a^2b-5ab-b^2)$
d. $-12a^2b^2(-12a^2b^2+6ab-12)$
e. $6ab^2(2a^2b+9ab-ab^2)$

4.30
a. $a^3b^2(-5a^2b^3+2a^2b^2-ab^3)$
b. $-a^2b^3(-a^3b^2-a^2b-14)$
c. $15a^4b^3(-a^3b^4-6a^2b^3+ab^4)$
d. $-a^5b^4(13a^4b^5-12a^2b^3+9ab^5)$
e. $7a^2b^2(-7a^3-7ab^2-1)$

4.31
a. $2a(a+6)-4(a+2)$
b. $-4a(3a+6)+2(a-3)$
c. $7a(-2a-1)-2a(-7a+1)$
d. $-8a(a-8)-2(-a+5)$
e. $5a(2a-5)+5(2a-1)$
f. $-2a(a+1)-(a-1)$

4.32
a. $3a(a+2b)-b(-2a+2)$
b. $-a(a-b)+b(-a+1)$
c. $2a(2a+b)-2b(-a+b)-2(a-b)$
d. $-b(-a+2b)+3(2a-b)-a(2a+b)$

Haakjes uitwerken

De *distributieve wetten* luiden:

$$\begin{aligned} a(b+c) &= ab+ac \\ (a+b)c &= ac+bc \end{aligned}$$

Ze zijn algemeen geldig, welke getallen je ook invult voor a, b en c.
Voorbeelden: $15(3+8) = 15 \times 3 + 15 \times 8 = 45 + 120 = 165$,
$(3-8)(-11) = 3 \times (-11) + (-8) \times (-11) = -33 + 88 = 55$.

Met de distributieve wetten kun je 'haakjes uitwerken'. Voorbeelden:

$$\begin{aligned} 5a^2(4b-2c) &= 20a^2b - 10a^2c \\ 3ab(c+2b) &= 3abc + 6ab^2 \\ (5a-2b)3c^2 &= 15ac^2 - 6bc^2 \end{aligned}$$

Let erop dat de distributieve wetten in hun meest eenvoudige, 'kale' vorm zijn geformuleerd, maar dat we bij de voorbeelden voor a, b en c allerlei algebraische uitdrukkingen hebben gesubstitueerd. Het is juist deze mogelijkheid om met formules te manipuleren die de algebra tot zo'n nuttig instrument maakt. Bedenk ook dat het maalteken in al deze voorbeelden weggelaten is. Mét maaltekens luidt het eerste voorbeeld

$$5 \times a^2 \times (4 \times b - 2 \times c) = 20 \times a^2 \times b - 10 \times a^2 \times c$$

waarmee zo'n formule weliswaar omslachtiger, maar voor de beginner wel begrijpelijker wordt.

We kunnen het bovenstaande ook toepassen in samenstellingen en combinaties. Voorbeelden:

$$\begin{aligned} &3a(4b-2c) + 2b(a-3c) = 12ab - 6ac + 2ab - 6bc = 14ab - 6ac - 6bc \\ &4a(b+c) - 5a(2b-3c) = 4ab + 4ac - 10ab + 15ac = -6ab + 19ac \\ &-2a(b-3c) - 5c(a+2b) = -2ab + 6ac - 5ac - 10bc = -2ab + ac - 10bc \end{aligned}$$

Let in de laatste twee voorbeelden vooral op de tekens. Bedenk dat bij vermenigvuldigen geldt:

Plus maal plus is plus	*Min maal plus is min*
Plus maal min is min	*Min maal min is plus*

Breng bij de volgende opgaven zo veel mogelijk factoren buiten haakjes.

4.33

a. $6a + 12$
b. $12a + 16$
c. $9a - 12$
d. $15a - 10$
e. $27a + 81$

4.34

a. $3a - 6b + 9$
b. $12a + 8b - 16$
c. $9a + 12b + 3$
d. $30a - 24b + 60$
e. $24a + 60b - 36$

4.35

a. $-6a + 9b - 15$
b. $-14a + 35b - 21$
c. $-18a - 24b - 12c$
d. $-28a - 70b + 42c$
e. $-45a + 27b - 63c - 18$

4.36

a. $a^2 + a$
b. $a^3 - a^2$
c. $a^3 - a^2 + a$
d. $a^4 + a^3 - a^2$
e. $a^6 - a^4 + a^3$

4.37

a. $3a^2 + 6a$
b. $9a^3 + 6a^2 - 3a$
c. $15a^4 - 10a^3 + 25a^2$
d. $27a^6 - 18a^4 - 36a^2$
e. $48a^4 - 24a^3 + 36a^2 + 60a$

4.38

a. $3a^2b + 6ab$
b. $9a^2b - 9ab^2$
c. $12ab^2 - 4ab$
d. $14a^2b^2 - 21ab^2$
e. $18a^2b^2 - 15a^2b$

4.39

a. $3a^3b^2 + 6a^2b$
b. $6a^4b^3 - 9a^3b^2 + 12a^2b$
c. $10a^3b^2c^2 - 5a^2bc^2 - 15abc$
d. $8a^6b^5c^4 - 12a^4b^4c^3 + 20a^3b^4c^3$
e. $a^3b^3c^3 + a^3b^3c^2 + a^3b^3c$

4.40

a. $-4a^2b^3c^2 + 2a^2b^2c^2 - 6a^2bc^2$
b. $a^6b^5c^4 - a^4b^6c^4 - a^3b^7c^3$
c. $-2a^3c^4 + 2a^2b^2c^3 - 4a^2bc^2$
d. $-a^7b^6 + a^6b^7 - a^5b^6$
e. $-a^8b^7c^6 - a^7b^6c^7 + a^6b^6c^6$

4.41

a. $a(b + 3) + 3(b + 3)$
b. $a(b - 1) - 2(b - 1)$
c. $2a(b + 4) + 7(b + 4)$
d. $a^2(2b - 1) + 2(2b - 1)$
e. $a(b - 2) - (b - 2)$

4.42

a. $a^2(b + 1) - a(b + 1)$
b. $6a(2b + 1) + 12(2b + 1)$
c. $-2a(b - 1) + 4(b - 1)$
d. $a^3(4b + 3) - a^2(4b + 3)$
e. $-6a^2(2b + 3) - 9a(2b + 3)$

4.43

a. $(a + 1)(b + 1) + 3(b + 1)$
b. $(2a - 1)(b + 1) + (2a - 1)(b - 1)$
c. $(a + 3)(2b - 1) + (2a - 1)(2b - 1)$
d. $(a - 1)(a + 3) + (a + 2)(a + 3)$
e. $(a + 1)^2 + (a + 1)$

4.44

a. $2(a + 3)^2 + 4(a + 3)$
b. $(a + 3)^2(b + 1) - 2(a + 3)(b + 1)$
c. $(a - 1)^2(a + 2) - (a - 1)(a + 2)^2$
d. $3(a + 2)^2(a - 2) + 9(a + 2)(a - 2)^2$
e. $-2(a + 4)^3 + 6(a + 4)^2(a + 2)$

Factoren buiten haakjes brengen

De distributieve wetten kun je ook andersom lezen:

$$\begin{aligned} ab + ac &= a(b + c) \\ ac + bc &= (a + b)c \end{aligned}$$

en ze op die manier gebruiken om een factor *buiten haakjes te brengen*. We geven weer een aantal voorbeelden. Eerst brengen we alleen maar gehele getallen buiten haakjes:

$$\begin{aligned} 3a + 12 &= 3(a + 4) \\ 27a + 45b - 9 &= 9(3a + 5b - 1) \end{aligned}$$

Maar het kan ook met letters of combinaties van letters en getallen:

$$\begin{aligned} a^4 - a &= a(a^3 - 1) \\ 15a^2b + 5ab^3 &= 5ab(3a + b^2) \end{aligned}$$

Of zelfs met hele algebraïsche uitdrukkingen:

$$\begin{aligned} (a + 1)b - 3(a + 1) &= (a + 1)(b - 3) \\ 7a^2(b^2 - 3) - 35(b^2 - 3) &= 7(a^2 - 5)(b^2 - 3) \end{aligned}$$

Werk de haakjes uit.

4.45

a. $(a+3)(a+1)$

b. $(2a+3)(a+3)$

c. $(a-6)(3a+1)$

d. $(4a-5)(5a+4)$

e. $(3a+9)(2a-5)$

f. $(6a-12)(4a+10)$

4.46

a. $(-3a+8)(8a-3)$

b. $(7a+12)(8a-11)$

c. $(17a+1)(a-17)$

d. $(-2a+6)(-3a-6)$

e. $(a+3)(b-5)$

f. $(2a+8)(3b+5)$

4.47

a. $(-4a+1)(b-1)$

b. $(3a-1)(-b+3)$

c. $(13a+12)(12b-13)$

d. $(a^2+4)(a-4)$

e. $(a-1)(a^2+7)$

f. $(a^2+3)(a^2+9)$

4.48

a. $(2a^2-7)(a+7)$

b. $(-3a^2+2)(-2a^2+3)$

c. $(a^2+2a)(2a^2-a)$

d. $(3a^2-4a)(-2a^2+5a)$

e. $(-6a^2+5)(a^2+a)$

f. $(9a^2+7a)(2a^2-7a)$

4.49

a. $(-8a^2-3a)(3a^2-8a)$

b. $(2a^3-a)(-5a^2+4)$

c. $(-a^3+a^2)(a^2+a)$

d. $(9a^4-5a^2)(6a^3+2a^2)$

e. $(7a^3-1)(8a^3-5a)$

f. $(-6a^5-5a^4)(-4a^3-3a^2)$

4.50

a. $(2ab+a)(3ab-b)$

b. $(3a^2b+ab)(2ab^2-3ab)$

c. $(-2a^2b^2+3a^2b)(2ab^2-2ab)$

d. $(8a^3b^2-6ab^3)(-4a^2b^3-2ab^2)$

e. $(-a^5b^3+a^3b^5)(a^3b^5-ab^7)$

f. $(2a+3)(a^2+2a-2)$

4.51

a. $(-3a+2)(4a^2-a+1)$

b. $(2a+b)(a+b+4)$

c. $(-3a+3b)(3a-3b-3)$

d. $(9a+2)(2a-9b+1)$

e. $(a^2+a)(a^2-a+1)$

f. $(2a^2+2a-1)(3a+2)$

4.52

a. $(-2a-1)(-a^2-3a-4)$

b. $(a-b-1)(a+b)$

c. $(a^2+ab+b^2)(a^2-b^2)$

d. $(a+1)(a+2)(a+3)$

e. $(a-1)(a+2)(a-3)$

f. $(2a+1)(a-1)(2a+3)$

4.53

a. $(2a+b)(a-b)(2a-b)$

b. $(5a-4b)(4a-3b)(3a-2b)$

c. $-3a(a^2+3)(a-2)$

d. $(-3a+1)(a+3)(-a+1)$

e. $2a^2(a^2-1)(a^2+2)$

f. $(a^2b-ab)(ab^2+ab)(a+b)$

4.54

a. $3a^2b(a^2-b^2)(2a+2b)$

b. $(a+1)(a^3+a^2-a+2)$

c. $(a^2+2a+1)(a^2-a+2)$

d. $(-2a^2+3a+1)(3a^2-2a-1)$

e. $3a(a^2+1)(a^2-2a+4)$

f. $(2a+b-5)(5a-2b+2)$

De bananenformule

Voor het product van twee sommen van twee termen geldt de formule

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

die, zoals de boogjes al aangeven, ontstaat door twee maal een distributieve wet toe te passen:

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

De boogjes vormen een handig geheugensteuntje; vanwege de vorm van de boogjes wordt deze formule soms de *bananenformule* genoemd. Ook deze formule kan weer in allerlei gecompliceerdere situaties gebruikt worden. Voorbeeld:

$$(3a^2 + 7bc)(5ab - 2c) = 15a^3b - 6a^2c + 35ab^2c - 14bc^2$$

In sommige gevallen kunnen na uitwerken van de haakjes met behulp van de bananenformule nog termen worden samengenomen. Voorbeeld:

$$(5a + 3b)(2a - 7b) = 10a^2 - 35ab + 6ab - 21b^2 = 10a^2 - 29ab - 21b^2$$

Wanneer er meer dan twee termen tussen haakjes staan, gaat het uitwerken volgens hetzelfde principe als bij de bananenformule. Voorbeeld:

$$\begin{aligned}(3a+2b)(2c-d+8e) &= 3a(2c-d+8e) + 2b(2c-d+8e)\\ &= 6ac - 3ad + 24ae + 4bc - 2bd + 16be\end{aligned}$$

Producten met meer dan twee factoren werk je stap voor stap uit. Voorbeeld:

$$\begin{aligned}(3a+2b)(a-4b)(2a+c) &= (3a^2 - 12ab + 2ab - 8b^2)(2a+c)\\ &= (3a^2 - 10ab - 8b^2)(2a+c)\\ &= 6a^3 + 3a^2c - 20a^2b - 10abc - 16ab^2 - 8b^2c\end{aligned}$$

5 Merkwaardige producten

Werk de haakjes uit:

5.1

a. $(a+6)^2$
b. $(a-2)^2$
c. $(a+11)^2$
d. $(a-9)^2$
e. $(a+1)^2$

5.2

a. $(b+5)^2$
b. $(b-12)^2$
c. $(b+13)^2$
d. $(b-7)^2$
e. $(b+8)^2$

5.3

a. $(a+14)^2$
b. $(-b+5)^2$
c. $(a-15)^2$
d. $(-b-2)^2$
e. $(-a+10)^2$

5.4

a. $(2a+5)^2$
b. $(3a-6)^2$
c. $(11a+2)^2$
d. $(4a-9)^2$
e. $(13a+14)^2$

5.5

a. $(5b+2)^2$
b. $(2a-3)^2$
c. $(9b+7)^2$
d. $(4a-3)^2$
e. $(8b+1)^2$

5.6

a. $(2a+5b)^2$
b. $(3a-13b)^2$
c. $(a+2b)^2$
d. $(2a-b)^2$
e. $(6a+7b)^2$

5.7

a. $(12a-5b)^2$
b. $(-2a+b)^2$
c. $(7a-5b)^2$
d. $(-14a+3)^2$
e. $(a+11b)^2$

5.8

a. $(a^2+5)^2$
b. $(a^2-3)^2$
c. $(b^2-1)^2$
d. $(a^3+2)^2$
e. $(b^4-7)^2$

5.9

a. $(2a+7b)^2$
b. $(3a+8b)^2$
c. $(5a-9b)^2$
d. $(7a-8b)^2$
e. $(6a-11b)^2$

5.10

a. $(a^2+3)^2$
b. $(b^2-4)^2$
c. $(2a^3-13)^2$
d. $(5b^2+14)^2$
e. $(-12a^3-5)^2$

5.11

a. $(2a^2-3b)^2$
b. $(3a^2+2b)^2$
c. $(9a^2-5b^2)^2$
d. $(12a^3+2b^2)^2$
e. $(20a^2-6b^3)^2$

5.12

a. $(2a+3)^2+(a-1)^2$
b. $(a-5)^2-(a+4)^2$
c. $(3a-1)^2-(2a-3)^2$
d. $(2a+b)^2+(a+2b)^2$
e. $(-7a^2+9b^2)^2-(9a^2-7b^2)^2$

Het kwadraat van een som of een verschil

Enige bijzondere gevallen van de bananenformule worden zo vaak gebruikt dat ze een eigen naam gekregen hebben. Ze heten *merkwaardige producten*.

De eerste twee merkwaardige producten die we hier behandelen verschillen alleen in het teken. Eigenlijk zou het tweede product niet apart vermeld hoeven te worden, want het ontstaat uit het eerste door b te vervangen door $-b$. Toch is het handig om de beide gevallen paraat te hebben.

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

Men leidt ze als volgt uit de bananenformule af:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

Als vermakelijke, maar op zichzelf natuurlijk niet erg belangrijke toepassing berekenen we 2003^2 en 1998^2 uit het hoofd:

$$\begin{aligned} 2003^2 &= (2000+3)^2 = 2000^2 + 2 \times 2000 \times 3 + 3^2 \\ &= 4\,000\,000 + 12\,000 + 9 = 4\,012\,009 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} 1998^2 &= (2000-2)^2 = 2000^2 - 2 \times 2000 \times 2 + 2^2 \\ &= 4\,000\,000 - 8\,000 + 4 = 3\,992\,004 \end{aligned}$$

Belangrijker zijn natuurlijk de algebraïsche toepassingen, dat wil zeggen toepassingen waarbij formules in een andere vorm worden geschreven. Hier zijn enige voorbeelden:

$$\begin{aligned} &(a+4)^2 = a^2 + 8a + 16 \\ &(a-2b)^2 = a^2 - 4ab + 4b^2 \\ &(2a+3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2 \end{aligned}$$

Ontbind de volgende uitdrukkingen in factoren:

5.13
a. $a^2 - 16$
b. $a^2 - 1$
c. $a^2 - 144$
d. $a^2 - 81$
e. $a^2 - 121$

5.14
a. $a^2 - 36$
b. $a^2 - 4$
c. $a^2 - 169$
d. $a^2 - 256$
e. $a^2 - 1024$

5.15
a. $4a^2 - 9$
b. $9a^2 - 1$
c. $16a^2 - 25$
d. $25a^2 - 81$
e. $144a^2 - 169$

5.16
a. $36a^2 - 49$
b. $64a^2 - 121$
c. $400a^2 - 441$
d. $196a^2 - 225$
e. $144a^2 - 49$

5.17
a. $a^2 - b^2$
b. $4a^2 - 25b^2$
c. $9a^2 - b^2$
d. $16a^2 - 81b^2$
e. $196a^2 - 169b^2$

5.18
a. $a^2b^2 - 4$
b. $a^2b^2 - 625$
c. $9a^2b^2 - 25c^2$
d. $25a^2 - 16b^2c^2$
e. $100a^2b^2 - 9c^2$

5.19
a. $a^4 - b^2$
b. $25a^4 - 16b^2$
c. $16a^4 - b^4$
d. $81a^4 - 16b^4$
e. $256a^4 - 625b^4$

5.20
a. $a^4b^2 - 1$
b. $a^2b^4 - c^2$
c. $a^4 - 81b^4c^4$
d. $a^8 - b^8$
e. $256a^8 - b^8$

5.21
a. $a^3 - a$
b. $8a^2 - 50$
c. $27a^2 - 12b^2$
d. $125a^3 - 45a$
e. $600a^5 - 24a^3$

5.22
a. $3a^2b^3 - 27b$
b. $128a^3b^3 - 18ab$
c. $a^6b^3 - a^2b$
d. $-5a^3b^3c + 125abc$
e. $3a^2b - 3b$

5.23
a. $a^5 - a$
b. $2a^5 - 32a$
c. $a^5b^5 - 81ab$
d. $-a^7 + 625a$
e. $a^9b - 256ab^9$

5.24
a. $(a+3)^2 - (a+2)^2$
b. $(2a-1)^2 - (a+2)^2$
c. $(a+5)^2 - (2a+3)^2$
d. $(a+1)^2 - (3a-1)^2$
e. $(2a+1)^2 - (3a+2)^2$

Werk de haakjes uit:

5.25
a. $(a-2)(a+2)$
b. $(a+7)(a-7)$
c. $(a-3)(a+3)$
d. $(a+12)(a-12)$
e. $(a-11)(a+11)$

5.26
a. $(2a-5)(2a+5)$
b. $(3a-1)(3a+1)$
c. $(4a+3)(4a-3)$
d. $(9a-12)(9a+12)$
e. $(13a+14)(13a-14)$

Het verschil van twee kwadraten

Het volgende merkwaardige product gaat over het verschil van twee kwadraten:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Ook dit product kan direct uit de bananenformule worden afgeleid:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Als vermakelijke toepassing berekenen we uit het hoofd:

$$1997 \times 2003 = 2000^2 - 3^2 = 4\,000\,000 - 9 = 3\,999\,991$$

Ook hier gaat het natuurlijk weer vooral om de algebraïsche toepassingen, dat wil zeggen toepassingen waarbij formules in een andere vorm worden geschreven. Hier zijn enige voorbeelden:

$a^2 - 25 = (a+5)(a-5)$
$4a^2b^2 - 1 = (2ab+1)(2ab-1)$
$a^6 - 9b^6 = (a^3+3b^3)(a^3-3b^3)$

In deze gevallen wordt het linkerlid, dat telkens het verschil is van twee kwadraten, *ontbonden in twee factoren*. Maar je kunt dit merkwaardige product natuurlijk ook de andere kant op gebruiken, en zo'n product van twee factoren die alleen een minteken schelen, dus schrijven als het verschil van twee kwadraten. Ook dat wordt in de dagelijkse wiskundepraktijk heel vaak gebruikt. Voorbeelden:

$(a+2b)(a-2b) = a^2 - 4b^2$
$(3a+5)(3a-5) = 9a^2 - 25$
$(a^2-b^2)(a^2+b^2) = a^4 - b^4$

Op de bladzijde hiertegenover en op de volgende bladzijde staan opgaven waarmee je dit alles kunt oefenen.

Werk de haakjes uit:

5.27

a. $(6a-9)(6a+9)$
b. $(15a-1)(15a+1)$
c. $(7a-8)(7a+8)$
d. $(16a+5)(16a-5)$
e. $(21a+25)(21a-25)$

5.28

a. $(a^2-5)(a^2+5)$
b. $(a^2+9)(a^2-9)$
c. $(2a^2-3)(2a^2+3)$
d. $(6a^2-5)(6a^2+5)$
e. $(9a^2-11)(9a^2+11)$

5.29

a. $(a^3-4)(a^3+4)$
b. $(a^5+10)(a^5-10)$
c. $(9a^2+2)(9a^2-2)$
d. $(11a^4-3)(11a^4+3)$
e. $(12a^6+13)(12a^6-13)$

5.30

a. $(2a+3b)(2a-3b)$
b. $(6a-10b)(6a+10b)$
c. $(9a+2b)(9a-2b)$
d. $(7a-5b)(7a+5b)$
e. $(a-20b)(a+20b)$

5.31

a. $(a^2+b)(a^2-b)$
b. $(2a^2+3b)(2a^2-3b)$
c. $(5a^2-3b^2)(5a^2+3b^2)$
d. $(6a^2-11b^2)(6a^2+11b^2)$
e. $(13a^2+15b^2)(13a^2-15b^2)$

5.32

a. $(a^3+2b^2)(a^3-2b^2)$
b. $(2a^2+9b^3)(2a^2-9b^3)$
c. $(5a^4+3b^3)(5a^4-3b^3)$
d. $(7a^2-19b^4)(7a^2+19b^4)$
e. $(15a^5-8b^4)(15a^5+8b^4)$

5.33

a. $(2ab+c)(2ab-c)$
b. $(3a^2b+2c)(3a^2b-2c)$
c. $(5ab^2+c^2)(5ab^2-c^2)$
d. $(9a^2b^2-4c^2)(9a^2b^2+4c^2)$
e. $(18a^3b^2-7c^3)(18a^3b^2+7c^3)$

5.34

a. $(2a^2-3bc^2)(2a^2+3bc^2)$
b. $(7a^3b-8c^3)(7a^3b+8c^3)$
c. $(13a^5b^3+14c^5)(13a^5b^3-14c^5)$
d. $(5abc+1)(5abc-1)$
e. $(9a^2bc^3+7)(9a^2bc^3-7)$

Gemengde opgaven: werk steeds de haakjes uit

5.35

a. $(a+4)^2$
b. $(a+4)(a-4)$
c. $(a+4)(a+3)$
d. $4(a+3)$
e. $(a-4)(a+3)$

5.36

a. $(a-7)(a+6)$
b. $(a+7)^2$
c. $(a-6)(a+6)$
d. $(a-6)^2$
e. $(2a+6)(a-6)$

5.37
- a. $(a+13)^2$
- b. $(a-14)^2$
- c. $(a+13)(a-14)$
- d. $(a-13)(3a+13)$
- e. $(13a-14)(14a+13)$

5.38
- a. $(2a+8)^2$
- b. $(a-8)(a-2)$
- c. $2a(a-8)+a(a-2)$
- d. $(2a-8)(2a+8)$
- e. $(2a+4)(a+2)$

5.39
- a. $(a-17)(a+4)$
- b. $(a-17)^2$
- c. $(a+17)(a-4)$
- d. $(4a-17)(4a+17)$
- e. $(4a+17)(17a-4)$

5.40
- a. $(a+21)^2$
- b. $(a+21)(a-12)$
- c. $(21a-12)(21a+12)$
- d. $(a-12)^2$
- e. $(12a-21)(a+12)$

5.41
- a. $(a^2-4)(a^2+2a+1)$
- b. $(a-2)(a+2)(a+1)^2$
- c. $((a-1)(a+1))^2$
- d. $(4a^2+24a+9)(a^2-1)$
- e. $(a-1)(a+1)(2a+3)^2$

5.42
- a. $(a^2+2a+1)(a^2-2a+1)$
- b. $(a+1)^2(a-1)^2$
- c. $(a^2-1)^2$
- d. $(2a+3)^2(2a-3)^2$
- e. $(a+1)^4$

5.43
- a. $(a^2+1)(a-1)(a+1)$
- b. $2a(2a+3)(2a-3)$
- c. $(a-2)(a^2+4)(a+2)$
- d. $6a^2(3a^2+2)(3a^2-2)$
- e. $2a(a-5)(a^2+25)(a+5)$

5.44 Bereken uit het hoofd:
- a. $17 \cdot 23$
- b. $45 \cdot 55$
- c. $69 \cdot 71$
- d. $93 \cdot 87$
- e. $66 \cdot 74$

5.45
- a. $(a+1)^2+(a+5)^2$
- b. $(a+5)(a-5)+(a-1)^2$
- c. $(a+1)(a+5)-(a-1)(a-5)$
- d. $(5a+1)(a-1)+(a-5)(a+1)$
- e. $(5a-1)(5a+1)-(5a-1)^2$

5.46
- a. $(3a-7)(3a+7)-(3a-7)^2$
- b. $3a(3a+7)-7a(3a+7)$
- c. $(9a+2)^2-(a^2-2)(a^2+2)$
- d. $(a^2+2)(a^2+3)-(a^2-2)^2$
- e. $(a^2-1)(a^2+1)+(a^2+1)^2$

5.47
- a. $(a-1)(a+1)(a+2)(a-2)$
- b. $(a+5)(a-4)(a-5)(a+4)$
- c. $(a^2+1)(a^2-1)(a^2+2)(a^2-2)$
- d. $(a+2)(a+1)^2$
- e. $(a+2)^3$

5.48
- a. $2a(a+1)^2-3a(a+3)^2$
- b. $-a(a+2)(a-2)+a(a+2)^2$
- c. $2a(a+2)(a+3)-3a(a-2)(a-3)$
- d. $5a(a-5)^2+25(a+5)(a-5)$
- e. $a^2(a+3)(a-1)-(a^2+1)(a^2-3)$

6 Breuken met letters

Splits in breuken met slechts één term in de teller (zie het eerste voorbeeld op de volgende bladzijde).

6.1

a. $\dfrac{a+3}{a-3}$

b. $\dfrac{2a+3b}{a-b}$

c. $\dfrac{a^2+3a+1}{a^2-3}$

d. $\dfrac{2a-b+3}{ab-3}$

e. $\dfrac{2-5a}{b-a^3}$

6.2

a. $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

b. $\dfrac{ab+bc-ca}{a-2b}$

c. $\dfrac{b^2-1}{a^2-1}$

d. $\dfrac{4abc+5}{c-ab}$

e. $\dfrac{5ab^2-abc}{ab-c}$

Breng onder één noemer. Werk daarna in het eindresultaat alle haakjes uit.

6.3

a. $\dfrac{1}{a-3}-\dfrac{1}{a+3}$

b. $\dfrac{1}{a-3}+\dfrac{1}{a+3}$

c. $\dfrac{2}{a-3}-\dfrac{1}{a+3}$

d. $\dfrac{1}{a-3}+\dfrac{a}{a+3}$

e. $\dfrac{a}{a-3}-\dfrac{a}{a+3}$

6.4

a. $\dfrac{a+1}{a-2}-\dfrac{a-1}{a+3}$

b. $\dfrac{a+1}{a-1}+\dfrac{a-1}{a+1}$

c. $\dfrac{a}{a+4}-\dfrac{a}{a+3}$

d. $\dfrac{3a-5}{a-1}+\dfrac{2a+3}{a-2}$

e. $\dfrac{4-a}{4+a}-\dfrac{2+a}{2-a}$

6.5

a. $\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a-2b}$

b. $\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{a+b}$

c. $\dfrac{2}{a-b}-\dfrac{2a}{a-2}$

d. $\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{a}{2a+3b}$

e. $\dfrac{a+b}{a-3}-\dfrac{a-b}{a+3}$

6.6

a. $\dfrac{a+b}{a-c}-\dfrac{a-b}{a+c}$

b. $\dfrac{2a+1}{a-b}+\dfrac{a-2}{a+b}$

c. $\dfrac{4-a}{a+4b}-\dfrac{ab}{4a+b}$

d. $\dfrac{a-5c}{b-c}+\dfrac{2b+3}{a-b}$

e. $\dfrac{a}{4+a+b}-\dfrac{2+a}{4-a+b}$

Splitsen en onder één noemer brengen

Ook in breuken kunnen letters voorkomen. Voorbeelden:

$$\frac{a+3b}{2a-5c}, \quad \frac{b}{a^2-1}, \quad \frac{a+b}{1+a^2+b^2}$$

Het worden gewone breuken zodra je getallen voor de letters invult. Het enige waar je bij dat invullen voor op moet passen, is dat de noemer niet nul mag worden. Zo mag je in de eerste breuk bijvoorbeeld niet $a = 5$ en $c = 2$ invullen, en in de tweede breuk niet $a = 1$ of $a = -1$. In het vervolg zullen we dergelijke voorwaarden meestal niet expliciet vermelden. We gaan er dan stilzwijgend van uit dat de getalswaarden van de letters, als ze gekozen worden, buiten deze 'verboden' gebieden blijven.

Het rekenen met breuken waarin letters voorkomen, gaat in principe op dezelfde manier als het rekenen met gewone breuken. Wat veel voorkomt, is het splitsen van breuken of het onder één noemer brengen als tussenstap bij het optellen of aftrekken. We geven een paar voorbeelden. Eerst een voorbeeld van splitsen:

$$\frac{a+3b}{2a-5c} = \frac{a}{2a-5c} + \frac{3b}{2a-5c}$$

Als je voor de letters getallen invult, klopt het altijd (natuurlijk mits de noemer niet nul wordt). Neem je bijvoorbeeld $a = 4$, $b = 3$, $c = 1$, dan krijg je

$$\frac{4+3\times 3}{2\times 4-5\times 1} = \frac{4}{2\times 4-5\times 1} + \frac{3\times 3}{2\times 4-5\times 1}$$

en dat klopt want $\frac{13}{3} = \frac{4}{3} + \frac{9}{3}$. Bij de volgende voorbeelden worden de breuken eerst onder één noemer gebracht en vervolgens samengevoegd. Ook dat kun je weer aan de hand van getallenvoorbeelden controleren.

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a^2}{ab} - \frac{b^2}{ab} = \frac{a^2-b^2}{ab}$$

$$\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1} = \frac{a+1}{(a-1)(a+1)} - \frac{a-1}{(a-1)(a+1)} = \frac{2}{a^2-1}$$

$$\begin{aligned}\frac{a+3b}{2a-5} + \frac{b}{a^2-1} &= \frac{(a+3b)(a^2-1)}{(2a-5)(a^2-1)} + \frac{b(2a-5)}{(a^2-1)(2a-5)}\\ &= \frac{(a+3b)(a^2-1)+b(2a-5)}{(2a-5)(a^2-1)}\end{aligned}$$

Indien gewenst kun je in het laatste voorbeeld in de teller en de noemer van het eindresultaat nog de haakjes uitwerken.

Vereenvoudig de volgende breuken zo veel mogelijk.

6.7

a. $\dfrac{3a+18}{9b-6}$

b. $\dfrac{a^2+a}{a+1}$

c. $\dfrac{4a-2}{2a^2-a}$

d. $\dfrac{a+2b}{a^2-4b^2}$

e. $\dfrac{ab+b^3}{b^2-3b}$

6.8

a. $\dfrac{a^2b+ab^2}{3abc}$

b. $\dfrac{a^2-4a}{a+2a^2}$

c. $\dfrac{4ab-3ab^2}{a^2-abc}$

d. $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$

e. $\dfrac{a^4-b^2}{a^2-b}$

Breng onder één noemer en vereenvoudig zo mogelijk.

6.9

a. $\dfrac{1}{a-3}-\dfrac{1}{a^2-9}$

b. $\dfrac{1}{a-3}-\dfrac{a}{a^2-9}$

c. $\dfrac{a^2+1}{a-3}-\dfrac{a^2-1}{a+3}$

d. $\dfrac{b}{a-b}+\dfrac{a}{b-a}$

e. $\dfrac{a^2-1}{a-1}-\dfrac{a^2+1}{a+1}$

6.10

a. $\dfrac{a+b}{a-2b}-\dfrac{a-2b}{a+b}$

b. $\dfrac{a^2+ab}{a^2-b^2}+a-1$

c. $\dfrac{a}{a^2-4}-\dfrac{2}{4-a^2}$

d. $\dfrac{3a-2b}{a-b}+\dfrac{2a+3b}{3a}$

e. $\dfrac{4-a}{a}-\dfrac{4+a}{2a}$

Breuken vereenvoudigen

Net zoals bij gewone breuken, kun je ook bij breuken met letters soms vereenvoudigingen aanbrengen door teller en noemer door hetzelfde getal te delen:

$$\frac{3a+9b^2}{6a-3} = \frac{a+3b^2}{2a-1}$$

Teller en noemer zijn hier door 3 gedeeld. Ook delen door een letter is soms mogelijk:

$$\frac{7b}{b+2b^3} = \frac{7}{1+2b^2}$$

Er zit hier echter een addertje onder het gras: we hebben teller en noemer door b gedeeld, maar dat mag alleen als $b \neq 0$ is. Het linkerlid is voor $b = 0$ namelijk niet gedefinieerd (want dan staat er $\frac{0}{0}$), terwijl het rechterlid voor $b = 0$ gewoon het getal 7 als uitkomst levert. Wanneer we precies zijn, moeten we dus eigenlijk zeggen

$$\frac{7b}{b+2b^3} = \frac{7}{1+2b^2} \quad \text{als} \quad b \neq 0$$

Nog een voorbeeld:

$$\frac{a^2-4}{a-2} = \frac{(a-2)(a+2)}{a-2} = a+2 \quad \text{als} \quad a \neq 2$$

Hierin is de teller eerst via het merkwaardige product $a^2 - 4 = (a-2)(a+2)$ in twee factoren gesplitst, waarna een van beide factoren weggedeeld kon worden, met natuurlijk als voorwaarde dat die factor niet nul mag zijn, vandaar $a \neq 2$.

In het volgende voorbeeld is de voorwaarde iets ingewikkelder omdat er twee letters in voorkomen:

$$\frac{a^2-b^2}{a+b} = \frac{(a-b)(a+b)}{a+b} = a-b \quad \text{als} \quad a+b \neq 0$$

Hierin levert de voorwaarde $a + b \neq 0$ dus oneindig veel combinaties van a en b op waarbij het linkerlid $\frac{0}{0}$ geeft en dus niet gedefinieerd is, maar het rechterlid gewoon een getalswaarde voorstelt. Neem bijvoorbeeld $a = 1$ en $b = -1$, dan is het linkerlid $\frac{0}{0}$, maar het rechterlid is 2. Of neem $a = -137$ en $b = 137$, waardoor het rechterlid -274 wordt terwijl het linkerlid weer $\frac{0}{0}$ geeft.

III Getallenrijen

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \cdots \;=\; \frac{1}{3}$$

Als je de formule $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ wilt generaliseren tot formules voor $(a+b)^3$, $(a+b)^4, \ldots$, ontdek je al snel regelmatige patronen. Je kunt ze rangschikken in de *driehoek van Pascal*. De getallen in die driehoek zijn de *binomiaalcoëfficiënten*. We zullen laten zien hoe je ze snel kunt berekenen. Het *binomium van Newton* geeft een algemene uitdrukking voor de formule voor $(a+b)^n$ in termen van de binomiaalcoëfficiënten. We introduceren daarbij de ook elders in de wiskunde veel gebruikte *sigma-notatie* voor sommen van getallenrijen. In een volgend hoofdstuk stappen we over op rekenkundige en meetkundige getallenrijen en hun somformules. Ten slotte leggen we uit wat we in het algemeen verstaan onder de *limiet* van een getallenrij.

7 Faculteiten en binomiaalcoëfficiënten

Werk met behulp van de formules op de volgende bladzijde de haakjes uit en vereenvoudig indien mogelijk:

7.1
- a. $(a+1)^3$
- b. $(a-1)^3$
- c. $(2a-1)^3$
- d. $(a+2)^3$
- e. $(2a-3)^3$

7.2
- a. $(1-a^2)^3$
- b. $(ab+1)^3$
- c. $(a+2b)^3$
- d. $(a^2-b^2)^3$
- e. $(2a-5b)^3$

7.3
- a. $(2a-1)^3+(a-2)^3$
- b. $(a-2b)^3$
- c. $(a+3b)^3$
- d. $(5a+2)^3$
- e. $(a-7)^3+(a+7)^3$

7.4
- a. $(a^2-b)^3$
- b. $(a^4+2b^2)^3$
- c. $(a+2b)^3+(a-2b)^3$
- d. $(a+2b)^3-(a-2b)^3$
- e. $(a+2b)^3-(2a+b)^3$

7.5
- a. $(a+1)^4$
- b. $(a-1)^4$
- c. $(2a-1)^4$
- d. $(a+2)^4$
- e. $(2a-3)^4$

7.6
- a. $(1-a^2)^4$
- b. $(ab+1)^4$
- c. $(a+2b)^4$
- d. $(a^2-b^2)^4$
- e. $(a-b)^4+(a+b)^4$

De formules voor $(a+b)^3$ en $(a+b)^4$

Het merkwaardige product $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ vormt het uitgangspunt voor de afleiding van formules voor $(a+b)^n$ voor grotere waarden van n dan 2. We beginnen met het geval $n = 3$.

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 \\
&= (a+b)(a^2+2ab+b^2) \quad \text{(merkwaardig product)} \\
&= a(a^2+2ab+b^2) + b(a^2+2ab+b^2) \\
&= a^3 + 2a^2b + \ \ ab^2 \\
&\qquad + \ \ a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{aligned}$$

Je ziet hoe we gebruik hebben gemaakt van het merkwaardig product voor $(a+b)^2$ en vervolgens stap voor stap de haakjes hebben uitgewerkt. In de vierde en vijfde regel hebben we gelijksoortige termen onder elkaar gezet, waardoor we ze in de zesde regel gemakkelijk konden optellen. Het resultaat is de formule

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Gewapend met deze formule kunnen we nu op dezelfde manier het geval $n = 4$ aanpakken:

$$\begin{aligned}
(a+b)^4 &= (a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) \quad \text{(formule voor } (a+b)^3\text{)} \\
&= a(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) + b(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) \\
&= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + \ \ ab^3 \\
&\qquad + \ \ a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \\
&= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4
\end{aligned}$$

met als resultaat de formule

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Opgaven over de driehoek van Pascal

7.7 Vul de driehoek van Pascal op de bladzijde hiertegenover aan met de rijen voor $n = 8$, $n = 9$ en $n = 10$.

7.8 Werk met behulp van de vorige opgave de haakjes uit in $(a+1)^8$, $(a-1)^9$ en $(a-b)^{10}$.

7.9 Als je in de driehoek van Pascal de getallen op de n-de rij bij elkaar optelt, krijg je als uitkomst 2^n. Controleer dit voor $n = 1$ tot en met $n = 10$, en geef vervolgens een verklaring door in de uitdrukking voor $(a+b)^n$ de getallen $a = 1$ en $b = 1$ te substitueren.

7.10 Als je in de driehoek van Pascal de getallen op de n-de rij, afwisselend voorzien van plus- en mintekens, bij elkaar optelt, krijg je als uitkomst 0. Controleer dit voor $n = 1$ tot en met $n = 10$, en geef vervolgens een verklaring door in de uitdrukking voor $(a+b)^n$ de getallen $a = 1$ en $b = -1$ te substitueren.

7.11 Vervang in de driehoek van Pascal elk even getal door een 0 en elk oneven getal door een 1. Teken de eerste 20 rijen van de 'binaire driehoek van Pascal' die je dan krijgt, en verklaar het patroon dat je ziet ontstaan. Een mooie variant krijg je als je alle nullen door open plaatsen vervangt en alle enen door sterretjes.

Binomiaalcoëfficiënten en de driehoek van Pascal

Tot nu toe hebben we de volgende formules afgeleid:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\ (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\ (a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\end{aligned}$$

We hebben de termen systematisch gerangschikt naar dalende machten van a en stijgende machten van b. Elke keer gaat de macht van a een stapje omlaag, en die van b een stapje omhoog. De gehele getallen die ervoor staan, heten *binomiaalcoëfficiënten*. Voor $n=2$ zijn het de getallen 1, 2 en 1, voor $n=3$ zijn het 1, 3, 3 en 1, en voor $n=4$ zijn het 1, 4, 6, 4 en 1. Overigens, de coëfficiënten 1 zie je natuurlijk niet terug in de formules: we schrijven a^2 in plaats van $1a^2$ enzovoort. Maar je vindt ze wel terug in de *driehoek van Pascal*, waaruit je alle binomiaalcoëfficiënten kunt aflezen:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&1&&&&&&& \quad\leftarrow\ n=0\\
&&&&&&1&&1&&&&&& \quad\leftarrow\ n=1\\
&&&&&1&&2&&1&&&&& \quad\leftarrow\ n=2\\
&&&&1&&3&&3&&1&&&& \quad\leftarrow\ n=3\\
&&&1&&4&&6&&4&&1&&& \quad\leftarrow\ n=4\\
&&1&&5&&10&&10&&5&&1&& \quad\leftarrow\ n=5\\
&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1& \quad\leftarrow\ n=6\\
1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1 \quad\leftarrow\ n=7\\
&&&&&&&\ldots&&&&&&& \quad\ldots
\end{array}$$

De driehoek van Pascal

Hieruit zie je bijvoorbeeld dat

$$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

Bovenin hebben we ook de gevallen $n=0$ en $n=1$ opgenomen, in overeenstemming met $(a+b)^0=1$ en $(a+b)^1=a+b$. De driehoek van Pascal is geconstrueerd volgens de volgende regel:

> *Langs de linker- en de rechterrand staan enen en verder is elk getal de som van zijn linker- en rechterbovenbuur.*

Als je de afleidingen op bladzijde 53 voor $n=3$ en $n=4$ hebt gevolgd, zul je begrijpen waarom deze regel algemeen opgaat. Met deze regel kun je de driehoek van Pascal zo ver voortzetten als je wilt.

Bereken de volgende binomiaalcoëfficiënten $\binom{n}{k}$ met behulp van de formule van de bladzijde hiertegenover. Pas daarbij telkens eerst de onder die formule beschreven vereenvoudiging toe en deel daarna ook nog alle overblijvende factoren uit de noemer tegen factoren in de teller weg alvorens de berekening daadwerkelijk uit te voeren. (Dat kan altijd, want er moet een geheel getal uitkomen!) Controleer voor $n \leq 10$ je uitkomsten met behulp van de driehoek van Pascal.

7.12
a. $\binom{4}{2}$
b. $\binom{5}{0}$
c. $\binom{4}{4}$
d. $\binom{5}{3}$
e. $\binom{6}{3}$

7.13
a. $\binom{7}{1}$
b. $\binom{6}{4}$
c. $\binom{7}{5}$
d. $\binom{7}{2}$
e. $\binom{7}{7}$

7.14
a. $\binom{8}{2}$
b. $\binom{9}{3}$
c. $\binom{9}{8}$
d. $\binom{8}{4}$
e. $\binom{8}{5}$

7.15
a. $\binom{8}{3}$
b. $\binom{9}{4}$
c. $\binom{9}{7}$
d. $\binom{7}{3}$
e. $\binom{9}{6}$

7.16
a. $\binom{12}{0}$
b. $\binom{15}{14}$
c. $\binom{13}{5}$
d. $\binom{21}{2}$
e. $\binom{18}{14}$

7.17
a. $\binom{12}{7}$
b. $\binom{11}{5}$
c. $\binom{48}{2}$
d. $\binom{49}{3}$
e. $\binom{50}{48}$

7.18
a. $\binom{17}{3}$
b. $\binom{51}{50}$
c. $\binom{12}{9}$

7.19
a. $\binom{42}{3}$
b. $\binom{13}{6}$
c. $\binom{27}{5}$

7.20
a. $\binom{78}{75}$
b. $\binom{14}{5}$
c. $\binom{28}{4}$

Het berekenen van binomiaalcoëfficiënten

Met behulp van de driehoek van Pascal kun je alle binomiaalcoëfficiënten berekenen. Voor grote waarden van n is dat echter nogal bewerkelijk. Omdat die binomiaalcoëfficiënten bij veel toepassingen een rol spelen (onder andere in de kansrekening), is het goed om ook een formule te hebben om ze direct te berekenen. Alvorens die te geven, maken we enige notatieafspraken.

Op de horizontale rij bij $n = 2$ van de driehoek van Pascal vind je drie coëfficiënten: 1, 2 en 1. In het algemeen vind je op de n-de rij $n + 1$ coëfficiënten. We nummeren ze van links naar rechts van 0 tot en met n. De k-de coëfficiënt op de n-de rij noteren we als $\binom{n}{k}$, uitgesproken als 'n boven k'. Voorbeelden:

$$\binom{3}{0} = 1, \quad \binom{3}{1} = 3, \quad \binom{4}{2} = 6, \quad \binom{6}{6} = 1 \quad \text{en} \quad \binom{7}{4} = 35$$

Een andere notatie die we vaak zullen gebruiken is die van $k!$, uitgesproken als '*k-faculteit*'. We definiëren:

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ k! &= 1 \times \cdots \times k \quad \text{voor elk positief geheel getal } k \end{aligned}$$

Voorbeelden: $1! = 1$, $2! = 1 \times 2 = 2$, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ en $7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$.

Met deze notatieafspraken geldt de volgende formule:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Let echter op: Bij het daadwerkelijk berekenen van binomiaalcoëfficiënten moet je *nooit* die drie faculteiten afzonderlijk berekenen. In de breuk in het rechterlid kun je altijd de grootste van de twee faculteiten uit de noemer wegdelen tegen het beginstuk van $n!$. Omdat k-faculteit zeer snel groeit met k is het zelfs bij berekeningen met een rekenmachine of computer lonend om deze vereenvoudiging toe te passen. Voorbeeld:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{1 \times 2 \times \cdots \times 7}{(1 \times 2 \times 3) \times (1 \times 2 \times 3 \times 4)} = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} = 35$$

Dit is heel makkelijk te onthouden: in teller en noemer staan evenveel factoren (drie in dit geval), in de noemer staat een faculteit (hier 3!) en in de teller staan net zo veel factoren, aftellend vanaf n, dus in dit geval $7 \times 6 \times 5$.
Leer de volgende bijzondere gevallen uit je hoofd:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \quad \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{1}{2}n(n-1)$$

Schrijf met behulp van het binomium van Newton in de sigma-notatie:

7.21

a. $(a+1)^7$
b. $(a-1)^{12}$
c. $(a+10)^{12}$
d. $(2a-1)^9$
e. $(2a+b)^{10}$

7.22

a. $(a+5)^7$
b. $(1-a)^5$
c. $(ab+1)^{18}$
d. $(a+2b)^9$
e. $(a-b)^8$

Bereken de volgende sommen met behulp van het binomium van Newton; kies daartoe telkens geschikte waarden voor a en b. Voorbeeld:

$$\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} = \binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \cdots + \binom{5}{5} = (1+1)^5 = 2^5 = 32$$

Hier hebben we het binomium $(a+b)^5$ genomen met $a=b=1$.

7.23

a. $\displaystyle\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k}$
b. $\displaystyle\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k}(-1)^k$
c. $\displaystyle\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k}2^k$

7.24

a. $\displaystyle\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k}(-2)^k$
b. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
c. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k$

De volgende opgaven zijn bedoeld als verdere oefening met de sigma-notatie. De opdracht luidt telkens: bereken de gegeven som.

7.25

a. $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} k^2$
b. $\displaystyle\sum_{k=-4}^{4} k^3$
c. $\displaystyle\sum_{k=3}^{7} (2k+4)$

7.26

a. $\displaystyle\sum_{j=-1}^{4} (j^2-1)$
b. $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} (j+\frac{1}{j})$
c. $\displaystyle\sum_{j=2}^{5} j^4$

Het binomium van Newton en de sigma-notatie

Op de n-de rij van de driehoek van Pascal staan de binomiaalcoëfficiënten $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, ..., $\binom{n}{n}$, en dus geldt

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Deze formule staat bekend als het *binomium van Newton*.

Letterlijk betekent binomium *tweeterm*. Dat slaat op de twee termen a en b tussen de haakjes van het linkerlid. De binomiaalcoëfficiënten kunnen berekend worden met behulp van de driehoek van Pascal of met de formule van bladzijde 57.

De $n+1$ termen in het rechterlid van de bovenstaande formule hebben allemaal dezelfde vorm, namelijk een product van een binomiaalcoëfficiënt $\binom{n}{k}$, een macht van a en een macht van b. Zelfs de eerste term $\binom{n}{0}a^n$ en de laatste term $\binom{n}{n}b^n$ zijn van die vorm, want daar zijn de 'ontbrekende' machten van respectievelijk b en a te schrijven als b^0 en a^0.

Alle termen zijn dus van de vorm $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$, waarbij k loopt van 0 tot en met n. In zo'n situatie, waarbij een aantal gelijksoortige termen bij elkaar opgeteld moeten worden, en waarbij alleen een 'index' k van term tot term verandert, wordt vaak een notatie met behulp van de Griekse hoofdletter Σ (sigma) gebruikt. In deze notatie wordt de formule voor het binomium van Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$$

waarbij dus rechts van de sigma de algemene uitdrukking met een letter k (de zogenaamde *sommatie-index*) erin staat, en onder en boven de sigma de begin- en eindwaarde van de sommatie-index k. In plaats van de letter k kan natuurlijk ook elke andere letter als sommatie-index gebruikt worden.

We geven nog twee voorbeelden van de sigma-notatie voor een som:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{5} k^2 &= 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 \\ \sum_{j=-2}^{2} 3^j &= 3^{-2}+3^{-1}+3^0+3^1+3^2 \end{aligned}$$

8 Rijen en limieten

8.1 Bereken de som van de volgende rijen getallen.

a. Alle positieve gehele getallen van 1 tot en met 2003.
b. Alle positieve gehele getallen van drie cijfers.
c. Alle oneven getallen tussen 1000 en 2000.
d. Alle positieve gehele getallen van hoogstens drie cijfers die op het cijfer 3 eindigen.
e. Alle positieve gehele getallen van vier cijfers die eindigen op het cijfer 2 of het cijfer 7.
f. Alle positieve gehele getallen van vier cijfers die eindigen op het cijfer 6 of het cijfer 7.

8.2 Bereken de volgende sommen:

a. $\sum_{k=1}^{20} (3k+2)$

b. $\sum_{k=10}^{70} (7k-2)$

c. $\sum_{k=3}^{30} (8k+7)$

d. $\sum_{k=0}^{14} (5k+3)$

e. $\sum_{k=-2}^{22} (100k+10)$

8.3 De deelnemers aan een hardloopwedstrijd dragen de startnummers 1 tot en met 97. Een van de lopers merkt op dat de som van alle even startnummers gelijk is aan de som van alle oneven startnummers. Daarbij telt hij zijn eigen startnummer niet mee. Wat is zijn startnummer? (Nederlandse Wiskunde Olympiade, eerste ronde, 1997.)

Rekenkundige rijen

Een *rekenkundige rij* is een rij getallen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ waarvoor geldt dat het verschil $a_{k+1} - a_k$ tussen twee opvolgende termen van de rij constant is. Het eenvoudigste voorbeeld is de rij $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ van alle positieve gehele getallen. Het verschil is dan telkens gelijk aan 1. Een ander voorbeeld is de rij $3, 8, 13, 18, 23, 28, \ldots$. Hierbij is het constante verschil telkens 5.

Het verhaal gaat dat de grote wiskundige Gauss als schooljongen in de rekenles aan het werk gezet werd. Hij moest alle getallen van 1 tot en met 100 bij elkaar optellen. Tot verbazing van de meester gaf hij vrijwel onmiddellijk uit het hoofd het antwoord: 5050. Zijn idee was: schrijf die som in gedachten tweemaal op, eenmaal van 1 tot en met 100, en daaronder nog een keer, maar dan in de omgekeerde volgorde, dus van 100 tot en met 1. Verticaal krijg je dan telkens twee getallen die samen 101 zijn:

$$\begin{array}{rcrcccrcr} 1 & + & 2 & + & \cdots & + & 99 & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 & + & 101 \end{array}$$

Er zijn 100 termen in de rij, dus je krijgt $100 \times 101 = 10100$. Maar dat is twee maal de gewenste som, dus de gevraagde uitkomst is hiervan de helft, dat wil zeggen 5050. Algemeen leid je op dezelfde manier af dat $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

De truc van Gauss kun je bij alle rekenkundige rijen toepassen. Als je de som $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ van de eerste n termen van zo'n rij wilt berekenen, schrijf je die som tweemaal onder elkaar op, eenmaal gewoon en eenmaal omgekeerd. Verticaal opgeteld krijg je dan steeds hetzelfde getal, namelijk $a_1 + a_n$, en de gevraagde som is dus $\frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$.

Met behulp van de sigma-notatie (zie bladzijde 59) kunnen we dit als volgt samenvatten:

Als $a_1, a_2, a_3, \ldots$ een rekenkundige rij is, dan geldt

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\,n(a_1 + a_n)$$

Dit is de *somformule voor een rekenkundige rij*.

8.4 Bereken de som van de volgende meetkundige rijen.

a. $2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 256$
b. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{256}$
c. $2 + 6 + 18 + 54 + \cdots + 1458$
d. $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \cdots + \frac{64}{729}$
e. $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \cdots + \frac{3}{10\,000\,000}$

8.5 Bereken de som van de volgende oneindige meetkundige rijen.

a. $4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$
b. $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \cdots$
c. $1 - \frac{7}{8} + \frac{49}{64} - \frac{343}{512} + \cdots$
d. $7 + \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \cdots$
e. $1 - \frac{9}{10} + \frac{81}{100} - \frac{729}{1000} + \cdots$

8.6 Bereken de som van de volgende oneindige meetkundige rijen. Geef ook telkens aan wat de reden r is.

a. $0.1 - 0.01 + 0.001 - 0.0001 + \cdots$
b. $0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \cdots$
c. $0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \cdots$
d. $0.12 + 0.0012 + 0.000012 + \cdots$
e. $0.98 - 0.0098 + 0.000098 - \cdots$

8.7 Toon met behulp van de vorige opgave aan dat

a. $0.3333\ldots = \frac{1}{3}$
b. $0.9999\ldots = 1$
c. $0.12121212\ldots = \frac{4}{33}$
d. $0.0012121212\ldots = \frac{4}{3300}$ (*Hint:* $0.0012121212\ldots = \frac{1}{100} \times 0.12121212\ldots$)
e. $10.3333\ldots = \frac{31}{3}$ (*Hint:* $10.33333\ldots = 10 + 0.33333\ldots$)

8.8 Bereken voor de volgende waarden van r met behulp van een rekenmachine of een computer benaderingen van de getallen r^{100} en r^{1000}. Schrijf je antwoorden in de vorm $m \times 10^k$ met $0.1 \leq m < 1$ en k geheel. Rond m af op vijf decimalen.

a. $r = 0.2$
b. $r = 0.5$
c. $r = 0.7$
d. $r = 0.9$
e. $r = 0.99$

Meetkundige rijen

Soms is het handig om de nummering van de termen van een getallenrij niet met 1 te laten beginnen, maar bijvoorbeeld met 0 omdat daardoor bepaalde formules eenvoudiger worden. We zullen dat bij de meetkundige rijen doen.

Een rij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ heet een *meetkundige rij* met *reden* r als voor elke n geldt dat $a_{n+1} = a_n r$. Elke term ontstaat dus uit zijn voorganger door die met r te vermenigvuldigen. Een voorbeeld is de rij $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$, waarbij elke term twee maal zo groot is als zijn voorganger. In dat geval is dus $r = 2$.

Als we de beginterm a_0 kortweg a noemen, geldt $a_1 = ar$, $a_2 = a_1 r = ar^2$ enzovoort. In het algemeen geldt voor elke n dat $a_n = ar^n$. Iedere meetkundige rij kan dus geschreven worden in de vorm

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots$$

Ook voor een meetkundige rij bestaat er een eenvoudige formule voor de som $s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$ van de eerste n termen. Om die te vinden, merken we op dat $rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n$ zodat $s_n - rs_n = a - ar^n$ (alle tussentermen vallen tegen elkaar weg). Wanneer $r \neq 1$ kunnen we hieruit s_n oplossen: $s_n = a(1 - r^n)/(1 - r)$.

Met behulp van de sigma-notatie geeft dit de *somformule voor de (eindige) meetkundige rij*:

$$\sum_{k=0}^{n-1} ar^k = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \text{mits } r \neq 1$$

Stel nu dat voor de reden r geldt dat $-1 < r < 1$. Dan nadert, als n steeds groter wordt, het getal r^n steeds dichter tot nul. Voorbeeld: als $r = 0.95$ dan is $r^{100} \approx 0.0059205$ en $r^{1000} \approx 0.52918 \times 10^{-22}$. We schrijven symbolisch $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$, in woorden: *de limiet van r^n voor n naar oneindig is* 0. Als je dit toepast op de bovenstaande somformule voor de meetkundige rij, krijg je de *somformule voor de oneindige meetkundige rij*:

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r} \quad \text{mits } -1 < r < 1$$

Let hierbij op het symbool ∞ ('oneindig') boven het somteken.
Voorbeeld: neem $a = \frac{1}{2}$ en $r = -\frac{1}{2}$, dan is

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

oftewel, in uitgeschreven vorm:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \cdots = \frac{1}{3}$$

Schrijf bij de volgende opgaven het gegeven repeterende decimale getal als een onvereenvoudigbare breuk. Neem daarbij aan dat de getoonde regelmaat zich onbeperkt voortzet: alle decimale getallen zijn vanaf het begin of vanaf een zekere decimaal periodiek.

8.9

a. $0.222222222222\ldots$

b. $0.313131313131\ldots$

c. $1.999999999999\ldots$

d. $0.123123123123\ldots$

e. $0.123333333333\ldots$

8.10

a. $0.101010101010\ldots$

b. $0.330330330330\ldots$

c. $1.211211211211\ldots$

d. $0.000111111111\ldots$

e. $3.091919191919\ldots$

8.11

a. $22.24444444444\ldots$

b. $0.700700700700\ldots$

c. $0.699699699699\ldots$

d. $8.124444444444\ldots$

e. $1.131313131313\ldots$

8.12

a. $0.111109999999\ldots$

b. $0.365656565656\ldots$

c. $3.141514151415\ldots$

d. $2.718281828182\ldots$

e. $0.090909090909\ldots$

8.13 Bereken voor de volgende waarden van r met behulp van een rekenmachine of een computer benaderingen van de getallen r^{101} en r^{1001}. Schrijf je antwoorden in de vorm $\pm\, m \times 10^k$ met $0.1 \leq m < 1$ en k geheel. Rond m af op vijf decimalen.

a. $r = 1.02$

b. $r = -2$

c. $r = 10.1$

d. $r = -0.999$

e. $r = 9.99$

Bereken met behulp van een rekenmachine of een computer voor de volgende rijen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ benaderingen van de getallen a_{100} en a_{1000}. Schrijf je antwoorden in de vorm $m \times 10^k$ met $0.1 \leq m < 1$ en k geheel. Rond m af op vijf decimalen. Van elke rij is de algemene term a_n door een formule gegeven.

8.14

a. $a_n = n^2$

b. $a_n = n^{-3}$

c. $a_n = n^{-1.1}$

d. $a_n = n^{1000.1}$

e. $a_n = \sqrt{n}$

8.15

a. $a_n = n^{-0.333}$

b. $a_n = \sqrt[n]{10}$

c. $a_n = \sqrt[n]{1000}$

d. $a_n = \sqrt[n]{0.01}$

e. $a_n = \sqrt[n]{0.9}$

Repeterende decimale getallen

Op bladzijde 62 zagen we dat repeterende decimale getallen zoals 0.333333... of 0.12121212... opgevat kunnen worden als som van een oneindige meetkundige rij. Als je zo'n som uitrekent, krijg je een breuk, in de gegeven voorbeelden respectievelijk $\frac{1}{3}$ en $\frac{4}{33}$. Ook wanneer zo'n decimaal getal pas vanaf een bepaald moment repeterend is, stelt het een breuk voor. *Irrationale getallen*, dat wil zeggen getallen die niet als een breuk geschreven kunnen worden zoals $\sqrt{2}$ of π, hebben daarom een decimale schrijfwijze die *nooit* repeterend wordt.

Speciale limieten

Bij veel rijen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ is het belangrijk te weten wat er op den duur met de termen gebeurt, dat wil zeggen wat er gebeurt met a_n als n naar oneindig gaat. Bij de meetkundige rij $1, r, r^2, r^3, \ldots$ met $-1 < r < 1$ weten we al dat $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$. Hieronder vind je een volledig overzicht van het gedrag van r^n als $n \to \infty$ zoals dat afhangt van r.

$$\begin{array}{ll}
\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \infty & \text{als } r > 1 \\
r^n = 1 & \text{als } r = 1 \\
\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0 & \text{als } -1 < r < 1 \\
r^n = (-1)^n = \pm 1 & \text{als } r = -1 \\
\lim\limits_{n\to\infty} |r|^n = \infty & \text{als } r < -1
\end{array}$$

Hier zijn nog een paar typen rijen met een limietwaarde die je moet kennen.

De rij $1, 4, 9, 16, 25\ldots$ met als n-de term $a_n = n^2$ heeft limiet oneindig. In formule: $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$. In het algemeen geldt

$$\lim_{n\to\infty} n^p = \infty \quad \text{voor elk getal } p > 0$$

De rij $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}\ldots$ met als n-de term $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ heeft limiet 0. In formule: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$. In het algemeen geldt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad \text{voor elk getal } p > 0$$

De rij $2, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[5]{2}, \ldots$ met als algemene term $a_n = \sqrt[n]{2}$ heeft limiet 1. In formule: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$. In het algemeen geldt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1 \quad \text{voor elk getal } p > 0$$

8.16

a. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n}$

b. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n+12}$

c. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$

d. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n+5}{3n^2-2}$

e. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^3+3n^2}{3n^4+4}$

f. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n^4-6n^2}{5n^4+4}$

8.17

a. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n+\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}}$

b. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{10n+4}{n^2+4}$

c. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n^5}{4n^4+5n^2-3}$

d. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{8n^3+4n+7}{8n^3-4n-7}$

e. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n+\frac{1}{n}}{n-\frac{2}{n}}$

f. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3n^3-5n^2}{n^4+n^2-2}$

8.18

a. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^3-1}{n^3+n^2}$

b. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n^2}{n\sqrt{n+2}}$

c. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{4n^2+5n+n\sqrt{n}}{3n^2-2n-1}$

d. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n\sqrt{n^2+n}}$

e. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{4n^4+1}{5n^4+1000n^3}$

8.19

a. $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{8}{9}\right)^n$

b. $\lim_{n\to\infty} \left(-\dfrac{9}{8}\right)^n$

c. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{8}{9}}$

d. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{9}{8}}$

e. $\lim_{n\to\infty} 1.0001^n$

8.20

a. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{3^n}$

b. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n^2}{1+2^n}$ (*Hint:* deel teller en noemer door 2^n)

c. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{3^n}$

d. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{n!}$

e. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{n^n+n!}$ (*Hint:* deel teller en noemer door n^n)

Limieten van quotiënten

Bij het berekenen van limieten van uitdrukkingen die de vorm hebben van een breuk waarin teller en noemer beide naar oneindig gaan, is het vaak handig om teller en noemer eerst te delen door een 'dominante term' in de noemer (bijvoorbeeld de hoogste macht). Voorbeeld:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 3n + 4}{3n^2 + 4n + 9} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}}{3 + \frac{4}{n} + \frac{9}{n^2}}$$

Omdat $\frac{3}{n} \to 0$, $\frac{4}{n^2} \to 0$, $\frac{4}{n} \to 0$ en $\frac{9}{n^2} \to 0$ zien we nu onmiddellijk dat de gevraagde limiet gelijk is aan $\frac{2}{3}$.

In zulke gevallen is het makkelijk om de dominante term te bepalen: neem gewoon de hoogste macht. Maar het kan ook dat er naast machten ook andere termen in voorkomen, zoals $n!$ of 2^n. Wat is dan de dominante term? Wie wint het als n naar oneindig gaat? Daarover gaat de volgende paragraaf.

Snelle stijgers

We vergelijken de volgende rijen:

a. $1, 2^{100}, 3^{100}, 4^{100}, 5^{100}, \ldots$ met als algemene term $a_n = n^{100}$

b. $100, 100^2, 100^3, 100^4, 100^5, \ldots$ met als algemene term $b_n = 100^n$

c. $1, 2, 6, 24, 120, \ldots$ met als algemene term $c_n = n!$

d. $1, 2^2, 3^3, 4^4, 5^5, \ldots$ met als algemene term $d_n = n^n$

Allemaal hebben ze oneindig als limiet, maar welke rij stijgt op den duur het snelst? Voor $n = 100$ zijn a_n, b_n en d_n onderling gelijk, namelijk $100^{100} = 10^{200}$, een 1 gevolgd door 200 nullen, terwijl $c_n = 100! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 100$ duidelijk veel kleiner is (het is een getal van 'slechts' 158 cijfers). Maar voor $n = 1000$ is het beeld heel anders: $a_n = 10^{300}$, $b_n = 10^{2000}$, $c_n \approx 0.40 \times 10^{2568}$, $d_n = 10^{3000}$. Dit patroon blijft behouden: b_n stijgt op den duur veel sneller dan a_n, c_n stijgt op den duur veel sneller dan b_n, en d_n stijgt op den duur veel sneller dan c_n. In het algemeen geldt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0 \text{ als } a > 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Hierboven hebben we die limieten toegelicht voor $p = 100$ en $a = 100$. Overigens, zie je zelf waarom de eerste limiet vanzelfsprekend is als $p \leq 0$ is? Voor $p > 0$ is dat niet zo: de teller n^p en de noemer a^n gaan dan allebei naar oneindig. De noemer wint het echter op den duur.

Bereken de volgende limieten. Ook bij de limieten op deze bladzijde is het vaak mogelijk teller en noemer te delen door een geschikt gekozen 'dominante term' van de noemer, waarna de oplossing volgt door een van de drie standaardlimieten op de vorige bladzijde toe te passen. Voorbeeld:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2^n}{n^2-2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2/2^n)+1}{(n^2/2^n)-1} = -1$$

want $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$ volgens de eerste standaardlimiet (met $p = a = 2$).

8.21

a. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+1}{3^n+1}$

b. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-2^{-n}}{2^n-1}$

c. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+1}{2^n+1}$

d. $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$

e. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{3n}-1}{2^{3n}+3^{2n}}$

8.22

a. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-3^n}{n^3+3^n}$

b. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n+2^{-n}}$

c. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n!}{3^n-n!}$

d. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n+3n!}{n^n+(3n)!}$

e. $\lim_{n\to\infty} \frac{n!+3n^9-7}{n^n+3n^9+7}$

8.23

a. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+\sqrt[3]{n}}{3^n}$

b. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+1000}{n^{1000}}$

c. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+4^n}{3^n}$

d. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^n+2^n}$

e. $\lim_{n\to\infty} \frac{1.002^n}{n^{1000}+1.001^n}$

8.24

a. $\lim_{n\to\infty} n^{10}\, 0.9999^n$

b. $\lim_{n\to\infty} (n^2+3n-7)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c. $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)!}{n!+2^n}$

d. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{1+(n+1)!}$

e. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+(n+1)!}{3^n+n!}$

Wat is precies de limiet van een rij?

Op de vorige bladzijden hebben we al met limieten van rijen kennisgemaakt. We zullen nu precies omschrijven wat we in het algemeen bij een getallenrij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ onder een limiet verstaan. We geven ook telkens twee notaties, een notatie met de letters 'lim', en een 'pijlennotatie', die ook vaak gebruikt wordt. Daarnaast zal ook het symbool ∞ ('oneindig') worden gebruikt. Dat is geen reëel getal, maar een symbool dat in de omschrijving in de rechterkolom nader verklaard wordt.

'lim'-notatie:	*pijlennotatie:*	*omschrijving:*
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$	$a_n \to L$ als $n \to \infty$	Bij ieder positief getal p (hoe klein ook) is er een term a_N in de rij waarvoor geldt dat alle termen a_n met $n > N$ voldoen aan $\lvert a_n - L\rvert < p$.
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$	$a_n \to \infty$ als $n \to \infty$	Bij ieder positief getal P (hoe groot ook) is er een term a_N in de rij waarvoor geldt dat alle termen a_n met $n > N$ voldoen aan $a_n > P$.
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$	$a_n \to -\infty$ als $n \to \infty$	Dit betekent eenvoudig dat $\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n) = \infty$.

Niet alle rijen hebben overigens een limiet in een van de bovenvermelde vormen. Zo heeft de rij waarvan de n-de term gelijk is aan $(-1)^n$ (de meetkundige rij met reden (-1)) geen eindige of oneindige limiet, want de termen ervan zijn afwisselend $+1$ en -1. Evenmin heeft de meetkundige rij $(-2)^n$ een limiet: de termen ervan stijgen weliswaar in absolute waarde boven elke grens uit, maar ze zijn om en om positief en negatief, dus er blijven ook altijd termen aanwezig die niet boven zo'n grens uitkomen.

We benadrukken nogmaals dat ∞ en $-\infty$ geen reële getallen zijn, maar symbolen die we gebruiken om het limietgedrag van bepaalde rijen aan te geven. Met enige voorzichtigheid kun je er toch mee rekenen. Als bijvoorbeeld voor een rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ geldt dat $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ dan geldt voor de rij $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots$ dat $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$. De reden is duidelijk: als de getallen a_n op den duur boven iedere grens uitstijgen, zullen de getallen $\frac{1}{a_n}$ op den duur steeds dichter bij 0 komen. Op bladzijde 65 en in de opgaven vind je hier voorbeelden van.

IV Vergelijkingen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

In veel toepassingen van de wiskunde moeten vergelijkingen of ongelijkheden worden opgelost. Je moet dan alle getallen bepalen die aan een of meer gegeven vergelijkingen of ongelijkheden voldoen. In dit deel leren we de meest elementaire oplossingstechnieken. In het bijzonder geven we methodes om eerstegraadsvergelijkingen en tweedegraadsvergelijkingen op te lossen. De beroemde *abc*-formule is daarvan een belangrijk voorbeeld. In het laatste hoofdstuk behandelen we een oplossingsmethode voor eenvoudige stelsels eerstegraadsvergelijkingen.

9 Eerstegraadsvergelijkingen

Bepaal de oplossing x van elk van de volgende vergelijkingen.

9.1
a. $x + 7 = 10$
b. $x - 12 = 4$
c. $x + 3 = -10$
d. $x - 10 = -7$
e. $x + 8 = 0$

9.2
a. $-x + 15 = 6$
b. $-x - 7 = 10$
c. $-x + 17 = -10$
d. $-x - 8 = -9$
e. $-x - 19 = 0$

9.3
a. $2x + 7 = 9$
b. $3x - 8 = 7$
c. $4x + 3 = 11$
d. $9x - 10 = 17$
e. $6x + 6 = 0$

9.4
a. $-3x + 15 = 21$
b. $-2x - 7 = 11$
c. $-5x + 17 = 32$
d. $-4x - 8 = 16$
e. $-6x - 18 = 0$

9.5
a. $2x + 9 = 12$
b. $3x - 12 = 9$
c. $-4x + 3 = -11$
d. $5x - 12 = 17$
e. $-6x + 9 = 0$

9.6
a. $-x - 15 = 6$
b. $-9x - 7 = -10$
c. $6x + 17 = 12$
d. $-9x - 18 = -6$
e. $5x - 19 = 0$

9.7
a. $x + 7 = 10 - 2x$
b. $x - 12 = 4 + 5x$
c. $2x + 3 = -10 + x$
d. $3x - 10 = 2x - 7$
e. $5x + 9 = 2x$

9.8
a. $-x + 15 = 6 - 4x$
b. $-2x - 7 = 2x - 10$
c. $3x + 17 = -11 + x$
d. $-x - 8 = -9x - 4$
e. $2x - 19 = 19 - 2x$

9.9
a. $x - 12 = 3 - 4x$
b. $-3x + 5 = 2x - 8$
c. $-x + 7 = -12 - x$
d. $4x - 1 = -7x + 4$
e. $2x + 12 = 9 + 4x$

Werk bij de volgende opgaven eerst de breuken weg door het linker- en rechterlid te vermenigvuldigen met een geschikt getal (eigenschap V2).

9.10
a. $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 1 + \frac{5}{2}x$
b. $-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}x - 1$
c. $\frac{2}{5}x + \frac{3}{5} = -\frac{3}{5} - \frac{1}{5}x$
d. $-\frac{3}{7}x - \frac{3}{7} = -\frac{6}{7} - \frac{1}{7}x$
e. $\frac{2}{9}x - \frac{1}{9} = x - \frac{2}{9}$

9.11
a. $\frac{1}{3}x + \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{6}x$
b. $-\frac{2}{3}x - \frac{3}{4} = \frac{4}{3}x - 1$
c. $\frac{2}{5}x + \frac{5}{3} = -\frac{5}{6} - \frac{2}{3}x$
d. $-\frac{2}{9}x - \frac{1}{4} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{6}x$
e. $\frac{1}{8}x - \frac{5}{6} = x - \frac{3}{4}$

9.12
a. $3(x + 4) = -2(x + 8)$
b. $-2(x - 3) + 1 = -3(-x + 7) + 2$
c. $2 - (x + 4) = -2(x + 1) - 3$

9.13
a. $6(-x + 2) - (x - 3) = 3(-x + 1)$
b. $2x - (-x + 1) = -3(-x + 1)$
c. $5(-2x + 3) + (2x - 5) = 4(x - 4)$

Algemene oplossingsregels

Stel dat van een getal x gegeven is dat het voldoet aan de volgende vergelijking:

$$3x + 7 = -2x + 1$$

en dat gevraagd wordt x te bepalen.

Oplossing:

1. tel bij het linker- en rechterlid $2x$ op: $5x + 7 = 1$,
2. tel bij het linker- en rechterlid -7 op: $5x = -6$,
3. deel het linker- en rechterlid door 5: $x = -\dfrac{6}{5}$.

Hiermee is in drie stappen het onbekende getal x gevonden. Ter controle kun je de gevonden waarde $x = -\frac{6}{5}$ in de oorspronkelijke vergelijking substitueren en constateren dat het klopt.

We hebben gebruikgemaakt van de volgende algemene regels:

V1. *De geldigheid van een vergelijking verandert niet als je bij het linker- en rechterlid hetzelfde getal optelt.*

V2. *De geldigheid van een vergelijking verandert niet als je het linker- en rechterlid met hetzelfde getal vermenigvuldigt of door hetzelfde getal deelt, mits dat getal niet* 0 *is.*

De beide eerste stappen van de oplossing in het gegeven voorbeeld kun je ook zien als

het verplaatsen van een term van de ene kant van het gelijkteken naar de andere kant waarbij die term van teken wisselt (van plus naar min of omgekeerd).

Dat is de manier waarop regel V1 meestal wordt gebruikt. In stap 1 hebben we de term $-2x$ van het rechterlid naar het linkerlid overgebracht, en in stap 2 de term $+7$ van het linkerlid naar het rechterlid.

Schrijf de volgende ongelijkheden in een van de volgende gedaanten:
$x < a,\ x \leq a,\ x > a$ of $x \geq a$.

Voorbeeld: $-3x + 7 > 5$. Aftrekken van 7 geeft $-3x > -2$ en delen door -3 geeft vervolgens $x < \frac{2}{3}$.

9.14

a. $x + 6 < 8$
b. $x - 8 > 6$
c. $x + 9 \leq 7$
d. $x - 1 \geq -3$
e. $x + 6 > 7$

9.15

a. $-2x + 4 < 8$
b. $-3x - 8 > 7$
c. $-5x + 9 \leq -6$
d. $-4x + 1 \geq -3$
e. $-2x + 6 > 5$

9.16

a. $2x + 6 < x - 8$
b. $3x - 8 > 7 - 2x$
c. $x + 9 \leq 7 - 3x$
d. $2x - 1 \geq x - 3$
e. $5x + 6 > 3x + 7$

9.17

a. $-2x + 6 < x + 9$
b. $x - 8 > 3x + 6$
c. $2x + 9 \leq 3x + 1$
d. $-3x - 1 \geq 3 - x$
e. $5x + 6 > 7x + 2$

9.18

a. $\frac{1}{2}x + 1 < 2 - \frac{1}{3}x$
b. $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} > 1 + \frac{1}{3}x$
c. $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$
d. $\frac{1}{6}x - \frac{1}{3} \geq \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$
e. $\frac{2}{5}x - \frac{5}{2} > \frac{1}{2}x - \frac{2}{5}$

9.19

a. $-\frac{3}{2}x - 1 < 2 - \frac{1}{4}x$
b. $\frac{1}{5}x - \frac{1}{2} > 1 + \frac{2}{5}x$
c. $-\frac{3}{4}x + \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2}x - \frac{5}{6}$
d. $\frac{2}{7}x - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}x - \frac{3}{7}$
e. $-\frac{3}{5}x - \frac{5}{2} > -\frac{1}{2}x + \frac{2}{5}$

Schrijf de volgende ongelijkheden in een van de volgende gedaanten:
$a < x < b,\ a \leq x < b,\ a < x \leq b$ of $a \leq x \leq b$.

Voorbeeld: $-2 \leq 3 - 6x < 4$. Aftrekken van 3 geeft $-5 \leq -6x < 1$ en delen door -6 geeft vervolgens $\frac{5}{6} \geq x > -\frac{1}{6}$ dus $-\frac{1}{6} < x \leq \frac{5}{6}$.

9.20

a. $-3 < x + 1 < 4$
b. $2 < 2x + 4 < 6$
c. $0 \leq 3x + 6 < 9$
d. $-6 < 4x - 2 \leq 4$
e. $1 \leq 1 + 2x \leq 2$

9.21

a. $-3 < -x + 1 < 2$
b. $2 < 2x - 4 < 4$
c. $0 \leq -3x + 9 < 6$
d. $-6 < -4x + 2 \leq 4$
e. $-1 \leq 1 - 2x \leq 0$

Ongelijkheden

Het manipuleren van ongelijkheden vergt iets meer zorg dan het manipuleren van vergelijkingen. Toch zijn er ook overeenkomsten. Ongelijkheden komen voor in vier gedaanten:

$$a < b, \qquad a \leq b, \qquad a > b, \qquad a \geq b.$$

Ze betekenen respectievelijk 'a is kleiner dan b','a is kleiner dan of gelijk aan b', 'a is groter dan b' en 'a is groter dan of gelijk aan b'. Uiteraard betekent $a > b$ dus hetzelfde als $b < a$, en $a \geq b$ hetzelfde als $b \leq a$. Verder geldt de volgende regel:

O1. *De geldigheid van een ongelijkheid verandert niet als je bij het linker- en rechterlid hetzelfde getal optelt.*

Deze regel heeft net als bij vergelijkingen tot gevolg dat je een term van het ene lid naar het andere lid mag overbrengen mits je daarbij het teken van die term omdraait (van plus naar min of omgekeerd).

Bij het vermenigvuldigen van het linker- en rechterlid met hetzelfde getal (ongelijk aan nul) moet je oppassen:

O2. *De geldigheid van een ongelijkheid verandert niet als je het linker- en rechterlid met hetzelfde positieve getal vermenigvuldigt of door hetzelfde positieve getal deelt.*

O3. *Als je het linker- en rechterlid van een ongelijkheid met hetzelfde negatieve getal vermenigvuldigt of door hetzelfde negatieve getal deelt, moet je het ongelijkheidsteken omklappen.*

Soms worden gelijksoortige ongelijkheden aan elkaar gekoppeld. Zo betekent $a < b \leq c$ dat b groter dan a en kleiner dan of gelijk aan c is. Men combineert echter *nooit* ongelijksoortige ongelijkheden: combinaties van 'groter' en 'kleiner' in één keten komen nooit voor. Je kunt dus wel schrijven $a > b > c$ maar niet $a < b > c$, ook al zouden wel de afzonderlijke ongelijkheden $a < b$ en $b > c$ geldig zijn. De reden is dat je in dat geval wel weet dat a en c allebei kleiner dan b zijn, maar dat je hieruit over de onderlinge relatie van a en c niets kunt concluderen.

Bepaal alle oplossingen x van de volgende vergelijkingen.

9.22

a. $\dfrac{1}{x+1} = 5$

b. $\dfrac{x}{x-4} = 2$

c. $\dfrac{2x+1}{x} = -3$

d. $\dfrac{4x-1}{x-3} = -2$

e. $\dfrac{x+7}{-3x+8} = 1$

9.23

a. $\dfrac{2x}{3x-4} = -1$

b. $\dfrac{8x}{4x-4} = 2$

c. $\dfrac{4-4x}{x-1} = -3$

d. $\dfrac{2x+3}{4x} = 6$

e. $\dfrac{x-5}{x-4} = 1$

9.24

a. $(x+1)^2 = 1$

b. $(x-4)^2 = 9$

c. $(1-x)^2 = 25$

d. $(2x+1)^2 = 4$

e. $(-3x+1)^2 = 16$

9.25

a. $(x+2)^2 = 3$

b. $(x-1)^2 = 2$

c. $(3-x)^2 = 5$

d. $(2x+1)^2 = 6$

e. $(6-2x)^2 = 8$

9.26

a. $(x-1)^3 = 1$

b. $(x+4)^3 = -8$

c. $(1-x)^3 = 1$

d. $(2x-1)^3 = 27$

e. $(-4x-1)^3 = 64$

9.27

a. $(x-2)^4 = 1$

b. $(x+1)^4 = 16$

c. $(3-2x)^4 = 4$

d. $(2x+3)^4 = 81$

e. $(4-3x)^4 = 625$

9.28

a. $(x+1)^2 = (2x-1)^2$

b. $(3x-1)^2 = (x-1)^2$

c. $(x+1)^2 = (-2x+1)^2$

d. $(2x+5)^2 = (3-x)^2$

e. $(4x+3)^2 = x^2$

9.29

a. $(x+2)^2 = 4x^2$

b. $(2x+1)^2 = 4(x+1)^2$

c. $(-x+2)^2 = 9(x+2)^2$

d. $4(x+1)^2 = 25(x-1)^2$

e. $9(2x+1)^2 = 4(1-2x)^2$

Een vergelijking reduceren tot een eerstegraadsvergelijking

Een vergelijking van de vorm

$$ax + b = 0$$

waarin x een onbekend getal is en a en b gegeven (bekende) getallen zijn met $a \neq 0$, heet een *eerstegraadsvergelijking* in x. De vergelijkingen van bladzijde 52 kunnen allemaal in deze vorm worden geschreven. Zo'n vergelijking kunnen we met behulp van de regels V1 en V2 van bladzijde 73 oplossen. De oplossing is dan

$$x = -\frac{b}{a}$$

In bepaalde gevallen kun je gecompliceerdere vergelijkingen tot eerstegraadsvergelijkingen terugbrengen.

Voorbeeld 1:

$$\frac{3x+2}{4x-5} = 2$$

Door het linker- en rechterlid met $4x - 5$ te vermenigvuldigen, ontstaat de vergelijking

$$3x + 2 = 2(4x - 5)$$

die met de methode van bladzijde 73 kan worden opgelost. Het resultaat is $x = \frac{12}{5}$, zoals je zelf kunt nagaan.

We maakten bij de eerste stap dus gebruik van regel V2. Dit is slechts toegestaan als het getal $4x - 5$ waarmee we het linker- en rechterlid vermenigvuldigd hebben, ongelijk aan 0 is. Omdat we x in dit stadium van de oplossingsmethode nog niet kenden, wisten we toen ook nog niet of $4x - 5 \neq 0$ is. Dat konden we pas controleren toen we de nieuwe vergelijking naar x hadden opgelost. Zo'n *controle achteraf* is niet overbodig, zoals je kunt zien in sommige van de opgaven op de tegenoverliggende bladzijde.

Voorbeeld 2:

$$(3x - 1)^2 = 4$$

Als x voldoet, moet het kwadraat van $3x - 1$ gelijk zijn aan 4. Dat wil zeggen dat $3x - 1$ gelijk is aan $+2$ of -2. Er zijn dus twee mogelijkheden:

$$3x - 1 = 2 \quad \text{en} \quad 3x - 1 = -2$$

met als oplossingen $x = 1$ en $x = -\frac{1}{3}$ (ga dit zelf na).

10 Tweedegraadsvergelijkingen

Bepaal alle oplossingen x van de volgende vergelijkingen.

10.1

a. $x^2 = 9$

b. $4x^2 = 16$

c. $3x^2 + 1 = 13$

d. $-2x^2 + 21 = 3$

e. $2x^2 - 48 = 50$

10.2

a. $3x^2 - 2 = x^2 + 2$

b. $x^2 - 15 = 2x^2 - 2$

c. $12 - x^2 = x^2 - 4$

d. $3(2 - x^2) = x^2 + 6$

e. $-2(1 - x^2) = x^2$

10.3

a. $\frac{1}{2}x^2 = 2$

b. $\frac{2}{3}x^2 = \frac{1}{2}$

c. $\frac{3}{2}x^2 = \frac{2}{3}$

d. $\frac{4}{5}x^2 = \frac{5}{4}$

e. $2x^2 = \frac{9}{4}$

10.4

a. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

b. $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

c. $-\frac{2}{5}x^2 - \frac{3}{7} = \frac{4}{3}$

d. $\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4} = \frac{5}{2}$

e. $\frac{1}{3}(x^2 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

10.5

a. $x(x+3) = 0$

b. $(x+1)(x-5) = 0$

c. $(x-1)(x+1) = 0$

d. $(x+7)(x-2) = 0$

e. $(x-3)(x+9) = 0$

10.6

a. $x(2x-1) = 0$

b. $(2x+1)(x-3) = 0$

c. $(3x+2)(2x-3) = 0$

d. $(5x+3)(3x-5) = 0$

e. $(2-3x)(3x-2) = 0$

10.7

a. $3(x-1)(x+3) = 0$

b. $5(x-1)(x+5) = 0$

c. $-2(2x+1)(3x-4) = 0$

d. $4(3x+2)(6x+3) = 0$

e. $-5(3x-2)(3x+2) = 0$

10.8

a. $(\frac{1}{2}x + 3)(x - \frac{2}{3}) = 0$

b. $(\frac{2}{3}x - \frac{4}{5})(\frac{1}{3}x - \frac{2}{7}) = 0$

c. $\frac{1}{2}(\frac{3}{4}x - \frac{4}{3})(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}) = 0$

Tweedegraadsvergelijkingen

Een vergelijking van de vorm

$$ax^2 + bx + c = 0$$

waarin x een onbekende is en a, b en c gegeven (bekende) getallen zijn met $a \neq 0$, heet een *tweedegraadsvergelijking* in x. Vaak wordt ook de term *vierkantsvergelijking* gebruikt.

Zo'n vergelijking heeft 0, 1 of 2 oplossingen, dat wil zeggen er zijn 0, 1 of 2 getallen x die aan de vergelijking voldoen. Die oplossingen worden ook wel *wortels* van de vergelijking genoemd, hoewel er in de schrijfwijze van die getallen helemaal geen wortels in de zin van hoofdstuk 3 hoeven voor te komen. We geven van elk van de drie gevallen een voorbeeld.

1. De vergelijking $x^2 + 1 = 0$ heeft geen oplossingen, want het linkerlid is voor elke keuze van x groter dan of gelijk aan 1 (een kwadraat is altijd groter dan of gelijk aan 0).

2. De vergelijking $x^2 + 2x + 1 = 0$ heeft één oplossing, want het linkerlid kan geschreven worden als $(x + 1)^2$, en dat is alleen maar gelijk aan 0 als $x + 1 = 0$ is, dat wil zeggen als $x = -1$.

3. De vergelijking $x^2 - 1 = 0$ heeft twee oplossingen, namelijk $x = 1$ en $x = -1$.

In sommige gevallen vereist het oplossen van een tweedegraadsvergelijking geen speciale techniek. Als voorbeeld nemen we

$$x^2 - 3x = 0$$

Door deze vergelijking te schrijven als

$$x(x - 3) = 0$$

en op te merken dat het product van twee getallen die beide ongelijk aan 0 zijn, ook altijd ongelijk aan 0 is, zien we dat $x = 0$ of $x - 3 = 0$ moet zijn. De oplossingen zijn dus $x = 0$ en $x = 3$.

Wat we net hebben gebruikt, kunnen we ook formuleren als een algemene eigenschap van getallen die we nog vaak zullen toepassen:

$$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \;\text{ of }\; b = 0$$

waarbij 'of' zo moet worden opgevat dat a en b ook beide nul kunnen zijn. Immers, als minstens één van de getallen a en b gelijk aan nul is, is $a \cdot b$ ook nul, en als geen van beide nul is, is hun product ook niet nul.

Los de volgende vergelijkingen op via kwadraatafsplitsen.

10.9

a. $x^2 + 4x + 1 = 0$

b. $x^2 + 6x - 2 = 0$

c. $x^2 + 8x + 3 = 0$

d. $x^2 - 2x - 1 = 0$

e. $x^2 + 10x + 5 = 0$

10.10

a. $x^2 - 12x + 6 = 0$

b. $x^2 - 13x - 7 = 0$

c. $x^2 + x - 42 = 0$

d. $x^2 - 12x + 27 = 0$

e. $x^2 + 6x - 12 = 0$

10.11

a. $x^2 + 7x - 1 = 0$

b. $x^2 + 3x - 4 = 0$

c. $x^2 + 4x + 4 = 0$

d. $x^2 - 4x - 4 = 0$

e. $x^2 - 11x + 7 = 0$

10.12

a. $x^2 + 20x + 60 = 0$

b. $x^2 - 18x - 80 = 0$

c. $x^2 + 13x - 42 = 0$

d. $x^2 - 15x + 56 = 0$

e. $x^2 + 60x + 800 = 0$

10.13

a. $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = 0$

b. $x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{5}{9} = 0$

c. $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} = 0$

d. $x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{8} = 0$

e. $x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{1}{5} = 0$

10.14

a. $x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8} = 0$

b. $x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$

c. $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0$

d. $x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{4} = 0$

e. $x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{4}{5} = 0$

Soms kun je een vergelijking die er niet uitziet als een tweedegraadsvergelijking door een truc tot een tweedegraadsvergelijking terugbrengen.
Voorbeeld: $x^4 - 6x^2 - 16 = 0$.
Dit is een vierdegraadsvergelijking, maar door $y = x^2$ te stellen, wordt het een tweedegraadsvergelijking: $y^2 - 6y - 16 = 0$. Kwadraatafsplitsen geeft $(y-3)^2 = 25$ dus $y - 3 = \pm 5$ met als oplossingen $y = 8$ en $y = -2$. Maar omdat $y = x^2$ is, levert $y = -2$ geen oplossingen. Een kwadraat kan immers niet negatief zijn. De oplossingen zijn dus $x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$.

10.15

a. $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$

b. $x^4 - 6x^2 = 7$

c. $x^4 + 4x^2 + 4 = 0$

d. $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$

e. $x^6 - 11x^3 = 12$

10.16

a. $x - 2\sqrt{x} = 3$ (stel $y = \sqrt{x}$)

b. $x - 18\sqrt{x} + 17 = 0$

c. $x + 4\sqrt{x} = 21$

d. $x - 15\sqrt{x} + 26 = 0$

e. $x + 6\sqrt{x} = 7$

Kwadraatafsplitsen

Om de vergelijking

$$x^2 - 6x + 3 = 0$$

op te lossen, schrijven we die vergelijking als

$$x^2 - 6x + 9 = 6$$

waardoor het linkerlid een volledig kwadraat wordt, namelijk het kwadraat van $x - 3$, want $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$. Het oplossen van de vergelijking die dan ontstaat, is eenvoudig:

$$(x - 3)^2 = 6$$

zodat

$$x - 3 = \sqrt{6} \quad \text{of} \quad x - 3 = -\sqrt{6}$$

en de beide oplossingen zijn dus

$$x = 3 + \sqrt{6} \quad \text{en} \quad x = 3 - \sqrt{6}$$

Deze methode is algemeen bruikbaar als de coëfficiënt van x^2 gelijk aan 1 is. Neem dan *de helft* van de coëfficiënt van x om in het linkerlid een volledig kwadraat te maken, en in het rechterlid een constante, dat wil zeggen een getal dat niet van x afhangt. Is die constante positief of nul, dan kun je worteltrekken, en daarmee de vergelijking oplossen. Is de constante negatief, dan zijn er geen oplossingen, want het linkerlid is een kwadraat, en dus niet-negatief.

We geven nog een voorbeeld:

$$x^2 + 10x + 20 = 0$$

De helft van 10 is 5 en $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$. We herschrijven de vergelijking dus als

$$x^2 + 10x + 25 = 5$$

oftewel

$$(x + 5)^2 = 5$$

zodat

$$x + 5 = \sqrt{5} \quad \text{of} \quad x + 5 = -\sqrt{5}$$

De oplossingen zijn daarom

$$x = -5 + \sqrt{5} \quad \text{en} \quad x = -5 - \sqrt{5}$$

Los de volgende vergelijkingen op met behulp van de *abc*-formule.

10.17

a. $x^2 + 5x + 1 = 0$
b. $x^2 - 3x + 2 = 0$
c. $x^2 + 7x + 3 = 0$
d. $x^2 - x + 1 = 0$
e. $x^2 + 11x + 11 = 0$

10.18

a. $x^2 + 3x + 1 = 0$
b. $x^2 - 4x + 3 = 0$
c. $x^2 + 9x - 2 = 0$
d. $x^2 - 12x + 3 = 0$
e. $x^2 - 5x + 1 = 0$

10.19

a. $2x^2 + 4x + 3 = 0$
b. $2x^2 - 12x + 9 = 0$
c. $3x^2 + 12x - 8 = 0$
d. $4x^2 + 12x + 1 = 0$
e. $6x^2 - 12x - 1 = 0$

10.20

a. $2x^2 + x - 1 = 0$
b. $3x^2 + 2x + 1 = 0$
c. $2x^2 + 8x - 2 = 0$
d. $6x^2 + 18x + 7 = 0$
e. $4x^2 - 8x + 1 = 0$

10.21

a. $-x^2 + 2x + 1 = 0$
b. $-2x^2 + 8x - 3 = 0$
c. $-3x^2 + 9x - 1 = 0$
d. $-4x^2 - 12x + 9 = 0$
e. $-x^2 + x + 1 = 0$

10.22

a. $3x^2 - 4x + 3 = 0$
b. $-2x^2 + 3x + 2 = 0$
c. $-4x^2 + 6x + 5 = 0$
d. $6x^2 + 18x - 1 = 0$
e. $-x^2 - x - 1 = 0$

10.23

a. $\frac{1}{2}x^2 + x - 1 = 0$
b. $\frac{2}{3}x^2 + 2x - 3 = 0$
c. $\frac{1}{2}x^2 - x - 1 = 0$
d. $\frac{4}{5}x^2 + 3x - 2 = 0$
e. $\frac{5}{2}x^2 + 5x - 2 = 0$

10.24

a. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} = 0$
b. $-\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2} = 0$
c. $\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{3}{4} = 0$
d. $\frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{5}{4} = 0$
e. $-\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} = 0$

10.25

a. $x(1 - x) = -2$
b. $(3x + 1)(x + 3) = 1$
c. $(x - 2)(2 - 3x) = x$
d. $(5 - x)(5 + x) = 5$
e. $(1 - x)(2 - x) = 3 - x$

10.26

a. $(x^2 - 4)(x^2 - 1) = 5$
b. $(1 - x^2)(1 + 2x^2) = x^2$
c. $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 3) = 1$
d. $\sqrt{x}(1 + \sqrt{x}) = 1 - \sqrt{x}$
e. $(1 - x^3)(2 - x^3) = x^3$

De abc-formule

De methode van het kwadraatafsplitsen kunnen we ook in het algemene geval toepassen. Om breuken in de afleiding zo veel mogelijk te vermijden, zullen we het recept een klein beetje aanpassen.

Stel dat gegeven is de tweedegraadsvergelijking

$$ax^2 + bx + c = 0$$

met $a \neq 0$. Vermenigvuldig het linker- en rechterlid met $4a$

$$4a^2x^2 + 4ab\,x + 4ac = 0$$

en schrijf dit als

$$4a^2x^2 + 4ab\,x + b^2 = b^2 - 4ac$$

zodat het linkerlid een volledig kwadraat wordt, namelijk het kwadraat van $2ax + b$, want $(2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$. De vergelijking wordt dan

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Het rechterlid $b^2 - 4ac$ wordt de *discriminant* genoemd. Als de discriminant negatief is, heeft de vergelijking geen oplossingen, want het linkerlid is niet-negatief omdat het een kwadraat is.

Is de discriminant positief of nul, dan geeft worteltrekken

$$2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{of} \quad 2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac}$$

waaruit de oplossingen volgen:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Als de discriminant nul is, vallen de beide oplossingen samen. Men schrijft de oplossingen vaak als één formule:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dit is de beroemde *abc-formule*, ook wel de *wortelformule* genoemd.

11 Stelsels eerstegraadsvergelijkingen

Los de volgende stelsels vergelijkingen op.

11.1

a. $$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 4 \\ 3x & - & 2y & = & 6 \end{array}\right.$$

b. $$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 5y & = & 8 \\ -x & + & 6y & = & 5 \end{array}\right.$$

c. $$\left\{\begin{array}{rcrcr} 5x & + & 2y & = & 3 \\ 2x & - & 4y & = & 6 \end{array}\right.$$

d. $$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 5y & = & 9 \\ -3x & + & 4y & = & -2 \end{array}\right.$$

e. $$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 4y & = & 3 \\ 4x & - & 2y & = & 3 \end{array}\right.$$

11.2

a. $$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 5y & = & 1 \\ 5x & - & 4y & = & 0 \end{array}\right.$$

b. $$\left\{\begin{array}{rcrcr} 7x & - & 5y & = & 1 \\ 4x & - & 7y & = & 13 \end{array}\right.$$

c. $$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & = & 7 \\ -5x & + & 2y & = & 4 \end{array}\right.$$

d. $$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 2y & = & 6 \\ 3x & + & 4y & = & -5 \end{array}\right.$$

e. $$\left\{\begin{array}{rcrcr} 7x & + & 5y & = & 1 \\ 3x & - & 4y & = & 25 \end{array}\right.$$

11.3

a. $$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 2 \\ 3x & + & 4y & = & 2 \end{array}\right.$$

b. $$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 1 \\ 3x & - & 4y & = & 0 \end{array}\right.$$

c. $$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 4 \\ 3x & + & 5y & = & 1 \end{array}\right.$$

d. $$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 7y & = & 5 \\ x & - & 4y & = & -1 \end{array}\right.$$

e. $$\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 7y & = & 8 \\ 3x & - & 5y & = & 4 \end{array}\right.$$

11.4

a. $$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & 5y & = & 4 \\ 3x & + & 4y & = & 1 \end{array}\right.$$

b. $$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 7y & = & 2 \\ 3x & - & 4y & = & -2 \end{array}\right.$$

c. $$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 9y & = & 5 \\ -x & - & 4y & = & 2 \end{array}\right.$$

d. $$\left\{\begin{array}{rcrcr} 6x & + & 5y & = & 1 \\ 7x & + & 6y & = & 2 \end{array}\right.$$

e. $$\left\{\begin{array}{rcrcr} 5x & - & 3y & = & 7 \\ 8x & - & 5y & = & 2 \end{array}\right.$$

Twee vergelijkingen met twee onbekenden

Stel dat van twee onbekende getallen x en y gegeven is dat ze voldoen aan elk van de volgende twee eerstegraadsvergelijkingen:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 5y & = & 9 \\ 3x & - & 4y & = & 2 \end{array}\right.$$

Men noemt dit een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden. De getallen x en y kunnen we op de volgende manier uit dit stelsel oplossen.

Vermenigvuldig in de eerste vergelijking het linker- en rechterlid met 3, en in de tweede vergelijking het linker- en rechterlid met 2, zodat de coëfficiënten van x in beide vergelijkingen gelijk worden:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 6x & + & 15y & = & 27 \\ 6x & - & 8y & = & 4 \end{array}\right.$$

Trek vervolgens de tweede vergelijking van de eerste af. Je houdt dan een vergelijking over waarin alleen nog maar de onbekende y voorkomt:

$$23y = 23$$

met als oplossing $y = 1$. Substitutie van deze waarde in een van de beide oorspronkelijke vergelijkingen geeft een vergelijking waaruit x kan worden opgelost. We kiezen de eerste vergelijking:

$$2x + 5 \times 1 = 9$$

oftewel $2x = 4$ dus $x = 2$.

Hiermee zijn de getallen x en y gevonden. Je kunt ter controle nagaan dat de combinatie $x = 2$ en $y = 1$ inderdaad aan de beide oorspronkelijke vergelijkingen voldoet.

Deze methode is algemeen bruikbaar: vermenigvuldig de vergelijkingen met factoren waardoor de coëfficiënten van x (of die van y) gelijk worden. Aftrekken geeft dan een vergelijking waarin alleen nog y (respectievelijk x) voorkomt. Daaruit kan y (respectievelijk x) worden opgelost, en substitutie van de gevonden waarde in een van de beide oorspronkelijke vergelijkingen geeft dan een vergelijking waarin alleen nog maar de andere onbekende voorkomt. Die kan vervolgens daaruit worden opgelost.

Los de volgende stelsels vergelijkingen op.

11.5

a.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & y & - & 3z & = & -8 \\ -3x & + & 2y & + & 2z & = & 7 \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 4y & + & z & = & -2 \\ -2x & + & 3y & - & 2z & = & -1 \\ -4x & + & y & + & z & = & -2 \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 2y & + & 3z & = & -3 \\ x & - & 2y & + & 4z & = & 8 \\ -3x & + & y & & & = & -7 \end{array}$$

d.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x & - & 3y & + & z & = & 2 \\ -2x & - & y & - & 2z & = & 2 \\ -x & + & 2y & + & 4z & = & -9 \end{array}$$

e.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & -9 \\ x & - & y & - & 2z & = & -6 \\ -4x & & & + & 3z & = & 7 \end{array}$$

11.6

a.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 5y & + & z & = & -2 \\ x & - & 3y & - & 2z & = & 1 \\ -3x & + & 5y & + & 7z & = & -4 \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & - & y & + & 2z & = & 5 \\ x & + & y & - & z & = & -3 \\ -3x & + & 2y & - & 6z & = & -5 \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 6y & + & z & = & -8 \\ & - & y & - & 2z & = & -1 \\ -3x & + & 2y & + & 4z & = & 8 \end{array}$$

d.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -5 \\ -3x & - & y & - & 3z & = & 1 \\ -2x & - & 3y & + & 2z & = & -8 \end{array}$$

e.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 8y & + & 3z & = & -9 \\ & - & 2y & - & 3z & = & 1 \\ -4x & + & 5y & & & = & -3 \end{array}$$

Bij het oplossen van de volgende stelsels vergelijkingen gebeuren er vreemde dingen. Onderzoek wat er gebeurt, en probeer het te verklaren. Wat zou je in deze gevallen verstaan onder het 'oplossen' van het stelsel vergelijkingen?

11.7

a.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & - & 3z & = & 4 \\ -4x & + & 6y & + & 4z & = & -8 \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & 3z & = & 4 \\ -4x & + & 6y & + & 4z & = & -9 \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & -1 \\ -2x & + & y & & & = & 5 \\ & & 5y & - & 2z & = & -3 \end{array}$$

11.8

a.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & -2 \\ -2x & + & y & & & = & 4 \\ & & 5y & - & 2z & = & -1 \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 5y & - & 2z & = & 5 \\ 2x & & & - & 4z & = & 1 \\ -x & + & 5y & + & 2z & = & -4 \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 5y & - & 2z & = & 4 \\ 2x & & & - & 4z & = & -2 \\ -x & + & 5y & + & 2z & = & 6 \end{array}$$

Drie vergelijkingen met drie onbekenden

Wanneer we een stelsel van drie eerstegraadsvergelijkingen hebben voor de drie onbekenden x, y en z, kunnen we als volgt te werk gaan. Neem bijvoorbeeld het stelsel

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & - & 3z & = & 4 \\ -4x & + & 5y & + & 9z & = & -9 \end{array}\right.$$

Uit de eerste twee vergelijkingen kunnen we x elimineren door de eerste van de tweede af te trekken:

$$\begin{array}{rcrcrcrc} x & - & 2y & + & z & = & 0 & (\times -1) \\ x & - & y & - & 3z & = & 4 & (\times 1) \\ \hline & & y & - & 4z & = & 4 & \end{array}$$

Uit de eerste en de derde vergelijking kunnen we x elimineren door vier maal de eerste bij de derde op te tellen:

$$\begin{array}{rcrcrcrc} x & - & 2y & + & z & = & 0 & (\times 4) \\ -4x & + & 5y & + & 9z & = & -9 & (\times 1) \\ \hline & & -3y & + & 13z & = & -9 & \end{array}$$

Zo krijg je een stelsel van twee vergelijkingen in de twee onbekenden y en z

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} y & - & 4z & = & 4 \\ -3y & + & 13z & = & -9 \end{array}\right.$$

dat je op de bekende manier op kunt lossen. Hier is het handig om drie maal de eerste vergelijking bij de tweede op te tellen, met als resultaat $z = 3$. Substitutie van deze waarde in de eerste vergelijking geeft

$$y - 4 \times 3 = 4$$

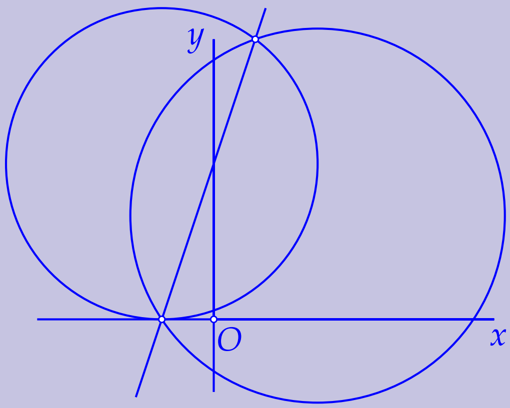
dus $y = 16$. Vul je $y = 16$ en $z = 3$ in de eerste vergelijking van het oorspronkelijke stelsel in, dan krijg je

$$x - 2 \times 16 + 3 = 0$$

met als oplossing $x = 29$. Hiermee is het stelsel opgelost. De gezochte waarden zijn $x = 29$, $y = 16$, $z = 3$.

De methode is algemeen bruikbaar voor 3×3-stelsels: elimineer één van de onbekenden uit twee paren vergelijkingen, los het resulterende stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden op, en bereken vervolgens via substitutie ook de waarde van de geëlimineerde onbekende.

V Meetkunde



De oude Grieken legden meer dan tweeduizend jaar geleden met hun axiomatische methode de basis voor de ontwikkeling van de klassieke meetkunde. In de zeventiende eeuw kwamen Fermat en Descartes echter met een nieuw concept: meetkunde met behulp van coördinaten. Dat is inmiddels de grondslag geworden van vrijwel alle toepassingen van de meetkunde. In dit deel behandelen we de belangrijkste eigenschappen van lijnen en cirkels in het vlak met behulp van coördinaten. In het laatste hoofdstuk zien we hoe dezelfde methoden ook toepasbaar zijn op vlakken en bollen in de ruimte.

12 Lijnen in het vlak

In de volgende opgaven wordt aangenomen dat in het vlak een rechthoekig coördinatenstelsel Oxy gekozen is. Je kunt het met ruitjespapier mooi in beeld brengen.

Teken de volgende lijnen op ruitjespapier. Bepaal ook telkens de snijpunten van zo'n lijn met de x-as en de y-as (indien aanwezig).

12.1
a. $x + y = 1$
b. $x - y = 0$
c. $2x + y = 2$
d. $-x + 2y = -2$
e. $x + 3y = 4$

12.2
a. $x - 4y = -3$
b. $2x + 8y = -10$
c. $-3x + y = 0$
d. $7x - 2y = -14$
e. $-5x - 2y = 4$

12.3
a. $x = 0$
b. $x = -3$
c. $x = 2y$
d. $y = -1$
e. $3x = 2y + 1$

Teken de volgende halfvlakken.

12.4
a. $x < 0$
b. $x > -3$
c. $x > y$
d. $y < -2$
e. $3x < y$

12.5
a. $x + y < 2$
b. $2x - y > 0$
c. $2x + y < 2$
d. $-2x + 3y < -2$
e. $3x + 3y > 4$

12.6
a. $5x - 4y > 3$
b. $-2x + 7y < -9$
c. $-3x > y + 2$
d. $7x + 2 < y$
e. $-5 < x + 2y$

12.7 Teken de volgende lijnen in één figuur.

a. $x + y = -1,\ x + y = 0,\ x + y = 1$ en $x + y = 2$
b. $x - y = -1,\ x - y = 0,\ x - y = 1$ en $x - y = 2$
c. $x + 2y = -1,\ x + 2y = 0,\ x + 2y = 1$ en $x + 2y = 2$
d. $2x + 2y = -1,\ 2x + 2y = 0,\ 2x + 2y = 1$ en $2x + 2y = 2$
e. $x = -2y,\ x = -y,\ x = 0,\ x = y$ en $x = 2y$

De vergelijking van een lijn in het vlak

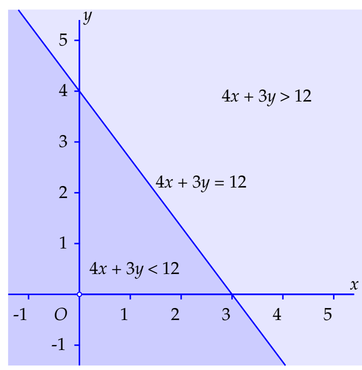
De vergelijking

$$4x + 3y = 12$$

bevat twee onbekenden x en y. Een oplossing van deze vergelijking is dus een *paar* (x, y) dat aan de vergelijking voldoet. Zo is bijvoorbeeld $(1, \frac{8}{3})$ een oplossing, want als je $x = 1$, $y = \frac{8}{3}$ invult, is aan de vergelijking voldaan. Maar er zijn nog meer oplossingen, bijvoorbeeld $(3, 0)$, $(0, 4)$ of $(-1, \frac{16}{3})$.

In feite kun je één van de beide onbekenden x en y vrij kiezen, waarna de ander uit de vergelijking kan worden opgelost. Wanneer je in het vlak een rechthoekig coördinatenstelsel Oxy gekozen hebt, zijn de oplossingen van de vergelijking de punten van een rechte lijn, in dit geval de lijn door $(0, 4)$ en $(3, 0)$. De punten (x, y) van die lijn zijn precies de punten waarvan de coördinaten voldoen aan de vergelijking $4x + 3y = 12$.

De lijn met vergelijking $4x + 3y = 12$ verdeelt het vlak in twee halfvlakken. Voor de punten die in het ene halfvlak liggen, geldt $4x + 3y > 12$, voor die in het andere halfvlak geldt $4x + 3y < 12$. Voor welk halfvlak welke ongelijkheid geldt, bepaal je door een punt in te vullen: de oorsprong O voldoet aan $4 \times 0 + 3 \times 0 < 12$, dus het halfvlak waar de oorsprong in zit, wordt gegeven door $4x + 3y < 12$.



In het algemeen stelt elke vergelijking van de vorm

$$ax + by = c$$

een rechte lijn voor. De enige voorwaarde is dat a en b niet allebei nul mogen zijn. Zo'n vergelijking is niet uniek bepaald: vermenigvuldig je het linker- en het rechterlid met hetzelfde getal (dat niet nul is), dan krijg je een andere vergelijking voor dezelfde lijn. Zo stelt $8x + 6y = 24$ dezelfde lijn voor als $4x + 3y = 12$.

De snijpunten van een lijn met vergelijking $ax + by = c$ met de y-as vind je door $x = 0$ te stellen. Dat levert $y = \frac{c}{b}$, dus het snijpunt is $(0, \frac{c}{b})$. Het snijpunt met de x-as vind je door $y = 0$ te stellen. Dat levert het snijpunt $(\frac{c}{a}, 0)$. De lijn is horizontaal als $a = 0$ en verticaal als $b = 0$.

Een lijn ligt vast als je twee punten ervan kent. In de volgende paragraaf geven we je een eenvoudige methode om de vergelijking van een lijn te bepalen door twee gegeven punten.

Bepaal in de volgende gevallen een vergelijking van de lijn door de twee gegeven punten. Maak er ook een tekening bij.

12.8
- a. $(3,0)$ en $(0,3)$
- b. $(3,0)$ en $(2,0)$
- c. $(-1,0)$ en $(0,5)$
- d. $(-2,0)$ en $(0,5)$
- e. $(-2,-1)$ en $(-2,-2)$

12.9
- a. $(3,0)$ en $(0,-2)$
- b. $(3,1)$ en $(3,-1)$
- c. $(2,0)$ en $(0,5)$
- d. $(-2,2)$ en $(2,-2)$
- e. $(1,-1)$ en $(2,0)$

12.10
- a. $(2,1)$ en $(1,2)$
- b. $(2,2)$ en $(-2,0)$
- c. $(-1,1)$ en $(1,5)$
- d. $(-3,-1)$ en $(-1,5)$
- e. $(4,-1)$ en $(-1,-2)$

12.11
- a. $(1,-2)$ en $(3,5)$
- b. $(7,1)$ en $(5,-1)$
- c. $(-1,1)$ en $(4,5)$
- d. $(3,-2)$ en $(2,-6)$
- e. $(4,-1)$ en $(-1,-3)$

12.12
- a. $(4,-1)$ en $(0,0)$
- b. $(0,0)$ en $(2,3)$
- c. $(-1,0)$ en $(1,-5)$
- d. $(-3,4)$ en $(4,-3)$
- e. $(-2,0)$ en $(-1,-2)$

12.13
- a. $(10,0)$ en $(0,10)$
- b. $(3,-1)$ en $(-3,-1)$
- c. $(5,-2)$ en $(1,3)$
- d. $(-2,-8)$ en $(8,-2)$
- e. $(1,-1)$ en $(2,7)$

De vergelijking $(a_1 - b_1)(y - b_2) = (a_2 - b_2)(x - b_1)$ is de vergelijking van de lijn door (a_1, a_2) en (b_1, b_2). Elk punt (x, y) dat aan die vergelijking voldoet, ligt op die lijn, en omgekeerd voldoet elk punt op die lijn ook aan die vergelijking. Een punt (c_1, c_2) ligt dus op de lijn door (a_1, a_2) en (b_1, b_2) als

$$(a_1 - b_1)(c_2 - b_2) = (a_2 - b_2)(c_1 - b_1)$$

Gebruik dit om te onderzoeken of de volgende drietallen punten op één lijn liggen. Maak er telkens ook ter controle een tekening bij.

12.14
- a. $(2,1)$, $(3,0)$ en $(1,2)$
- b. $(2,2)$, $(0,1)$ en $(-2,0)$
- c. $(-1,1)$, $(3,9)$ en $(1,5)$
- d. $(-3,-1)$, $(0,2)$ en $(-1,1)$
- e. $(4,-1)$, $(1,1)$ en $(-1,2)$

12.15
- a. $(1,-2)$, $(0,-5)$ en $(3,4)$
- b. $(7,1)$, $(1,-5)$ en $(5,-1)$
- c. $(-1,1)$, $(1,3)$ en $(4,5)$
- d. $(3,2)$, $(-1,-10)$ en $(2,-1)$
- e. $(4,1)$, $(0,-2)$ en $(-1,-3)$

De vergelijking van de lijn door twee punten

Omdat de vergelijking

$$ax + by = c$$

bij gegeven a, b en c een *rechte lijn* in het Oxy-vlak voorstelt (mits a en b niet beide nul zijn), noemt men zo'n vergelijking een *lineaire vergelijking* in x en y. Omgekeerd hoort bij elke rechte lijn ook een lineaire vergelijking in x en y waarin de coëfficiënten van x en y niet allebei nul zijn.

Voor een vergelijking door twee verschillende punten bestaat een overzichtelijke formule:

Een vergelijking van de lijn door de punten (a_1, a_2) en (b_1, b_2) is
$$(a_1 - b_1)(y - b_2) = (a_2 - b_2)(x - b_1)$$

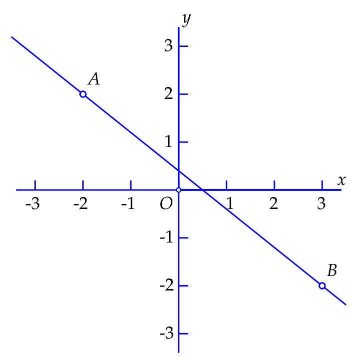
Voorbeeld: een vergelijking van de lijn door $A = (-2, 2)$ en $B = (3, -2)$ is

$$(-2 - 3)(y + 2) = (2 - (-2))(x - 3)$$

oftewel, na haakjes uitwerken en sorteren:

$$4x + 5y = 2$$

En inderdaad, als je $(-2, 2)$ of $(3, -2)$ in deze vergelijking invult klopt het, en aangezien een rechte lijn door twee punten bepaald is, moet dit dus wel de gezochte vergelijking zijn.



Om de algemene formule te verifiëren, is het ook voldoende om te controleren dat (a_1, a_2) en (b_1, b_2) beide voldoen aan de vergelijking

$$(a_1 - b_1)(y - b_2) = (a_2 - b_2)(x - b_1)$$

Invullen van $x = a_1$ en $y = a_2$ geeft $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) = (a_2 - b_2)(a_1 - b_1)$ en dat klopt, en invullen van $x = b_1$ en $y = b_2$ maakt het linker- en het rechterlid beide nul, dus dan klopt de vergelijking ook.

Het mooie van de bovenstaande formule is, dat hij *altijd* opgaat, zelfs als de lijn verticaal is. Neem bijvoorbeeld de punten $(3, 5)$ en $(3, 7)$, dan geeft de formule

$$(3 - 3)(y - 7) = (5 - 7)(x - 3)$$

oftewel, na haakjes wegwerken en vereenvoudigen, de verticale lijn $x = 3$ zoals we ook al direct hadden kunnen zien.

Bepaal in de volgende gevallen het snijpunt van de twee gegeven lijnen, voor zover ze niet evenwijdig zijn of samenvallen.

12.16

a. $x + y = 2$
$x - y = 1$

b. $x + y = 3$
$2x + y = 6$

c. $-5x + 2y = 4$
$x - 3y = 0$

d. $x + y = 3$
$-x - y = 7$

e. $8x + 3y = 7$
$7y = -4$

12.17

a. $x + 2y = -8$
$3x - 8y = 5$

b. $-2x + 7y = 3$
$-5x - 2y = 6$

c. $5x = 14$
$3x - 2y = 7$

d. $4x = -17$
$9y = 11$

e. $8x - 5y = 1$
$-2x - 11y = 0$

12.18

a. $x + y = 3$
$x - y = 5$

b. $2x + y = 3$
$-x - 2y = 6$

c. $-3x + 2y = 4$
$x - 2y = 2$

d. $4x - 7y = -2$
$5x + 4y = 11$

e. $x + 3y = 6$
$3x + 9y = -2$

12.19

a. $-x + 2y = 9$
$13x - 8y = 15$

b. $12x - 7y = 13$
$-5x - y = 8$

c. $5x + 8y = 14$
$9x - 12y = 5$

d. $4x - 6y = -12$
$-6x + 9y = 18$

e. $-8x + 3y = 5$
$3x - 7y = -12$

12.20 Bepaal een vergelijking van

a. de lijn door $(0, 0)$ die evenwijdig is aan $x + y = 4$
b. de lijn door $(1, 0)$ die evenwijdig is aan $2x - y = -2$
c. de lijn door $(0, 3)$ die evenwijdig is aan $-x + 4y = 5$
d. de lijn door $(1, -1)$ die evenwijdig is aan $-5x + 2y = -7$
e. de lijn door $(-2, 5)$ die evenwijdig is aan $8x + 7y = 14$

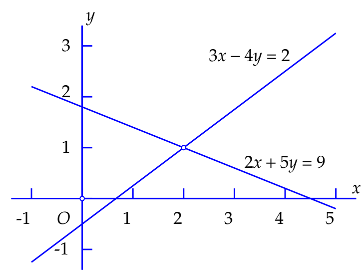
Het snijpunt van twee lijnen

Twee verschillende lijnen in het vlak snijden elkaar in één punt of ze zijn evenwijdig. Als ze elkaar snijden, hoe bepaal je dan het snijpunt? We geven een voorbeeld. Stel dat de lijnen gegeven worden door de vergelijkingen

$$2x + 5y = 9 \qquad \text{en} \qquad 3x - 4y = 2$$

Hun snijpunt (x, y) voldoet dan aan beide vergelijkingen, met andere woorden, het is een oplossing van het *stelsel vergelijkingen*

$$\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$$



In hoofdstuk 11 hebben we laten zien hoe je zo'n stelsel oplost. Het snijpunt blijkt het punt $(x, y) = (2, 1)$ te zijn.

Niet altijd hebben twee lijnen precies één snijpunt. Ze kunnen evenwijdig zijn, dan is er geen snijpunt, en ze kunnen ook samenvallen, dan zou je kunnen zeggen dat er oneindig veel snijpunten zijn. Hoe zie je dat aan de vergelijkingen?

Bij samenvallende lijnen zijn de twee vergelijkingen gelijk of een veelvoud van elkaar; dat zie je onmiddellijk. Bij evenwijdige lijnen zijn, in de standaardvorm $ax + by = c$, alleen de linkerleden gelijk of een veelvoud van elkaar. Neem bijvoorbeeld de lijnen $-6x + 8y = 1$ en $3x - 4y = 2$. In het stelsel

$$\begin{cases} -6x + 8y = 1 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$$

krijg je, als je de tweede vergelijking met een factor -2 vermenigvuldigt

$$\begin{cases} -6x + 8y = 1 \\ -6x + 8y = -4 \end{cases}$$

Dat is een *strijdig stelsel*, dat wil zeggen dat er geen oplossingen (x, y) zijn. De uitdrukking $-6x + 8y$ kan immers niet tegelijkertijd 1 en -4 zijn. En lijnen die geen snijpunt hebben, zijn evenwijdig.

13 Afstanden en hoeken

Bereken de afstand van de volgende paren punten

13.1

a. $(0,0)$ en $(0,-3)$
b. $(2,0)$ en $(-2,0)$
c. $(0,0)$ en $(1,-5)$
d. $(-1,1)$ en $(-3,3)$
e. $(2,2)$ en $(-4,0)$

13.2

a. $(1,2)$ en $(1,-2)$
b. $(3,-1)$ en $(4,-2)$
c. $(-1,-3)$ en $(3,1)$
d. $(-1,0)$ en $(0,-2)$
e. $(1,1)$ en $(-2,2)$

13.3

a. $(3,0)$ en $(0,3)$
b. $(3,0)$ en $(2,1)$
c. $(-1,0)$ en $(1,5)$
d. $(-2,1)$ en $(3,5)$
e. $(-2,-1)$ en $(-4,-2)$

13.4

a. $(3,2)$ en $(1,-2)$
b. $(3,1)$ en $(4,-1)$
c. $(-2,3)$ en $(3,5)$
d. $(-1,2)$ en $(2,-2)$
e. $(1,-1)$ en $(2,2)$

Bepaal een vergelijking van de middelloodlijn van elk van de volgende paren punten. Teken alles ook op ruitjespapier.

13.5

a. $(3,0)$ en $(0,3)$
b. $(0,0)$ en $(2,1)$
c. $(-2,0)$ en $(0,0)$
d. $(-2,1)$ en $(2,5)$
e. $(-2,-1)$ en $(-4,-2)$

13.6

a. $(3,2)$ en $(1,-2)$
b. $(3,1)$ en $(4,-1)$
c. $(-2,3)$ en $(3,5)$
d. $(-1,2)$ en $(2,-2)$
e. $(1,-1)$ en $(2,2)$

13.7 Neem in de volgende opgaven eerst $a = 2$, $b = 3$, en teken je resultaten op ruitjespapier. Los daarna het algemene geval op.

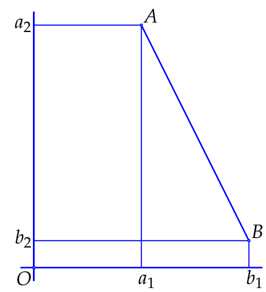
a. Bepaal een vergelijking van de middelloodlijn van (a,b) en $(a,-b)$, alsmede een vergelijking van de lijn door (a,b) en $(a,-b)$.
b. Bepaal een vergelijking van de middelloodlijn van (a,b) en (b,a), alsmede een vergelijking van de lijn door (a,b) en (b,a).
c. Bepaal een vergelijking van de middelloodlijn van (a,b) en $(-a,-b)$, alsmede een vergelijking van de lijn door (a,b) en $(-a,-b)$.
d. Bepaal een vergelijking van de lijn door $(1,1)$ die loodrecht staat op de verbindingslijn van $(0,0)$ en (a,b).
e. Bepaal een vergelijking van de lijn door (a,b) die loodrecht staat op de verbindingslijn van $(0,0)$ en (a,b).

Afstand en middelloodlijn

Een rechthoekig coördinatenstelsel Oxy wordt *orthonormaal* genoemd wanneer de schaalverdelingen op de beide assen gelijk zijn. In meetkundige toepassingen zullen we bijna altijd met zo'n orthonormaal coördinatenstelsel werken.

In een orthonormaal coördinatenstelsel Oxy wordt volgens de stelling van Pythagoras de afstand $d(A, B)$ van de punten $A = (a_1, a_2)$ en $B = (b_1, b_2)$ gegeven door

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

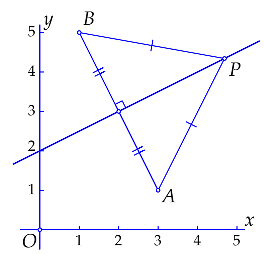


Neem bijvoorbeeld $A = (4, 9)$ en $B = (8, 1)$, dan is $d(A, B) = \sqrt{(4-8)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

De punten P waarvoor geldt dat $d(P, A) = d(P, B)$ vormen de *middelloodlijn* van A en B. Het is de lijn die het lijnstuk AB loodrecht middendoor deelt.

Hiernaast is als voorbeeld de middelloodlijn van $A = (3, 1)$ en $B = (1, 5)$ getekend. Als $P = (x, y)$ op de middelloodlijn ligt, dan is $d(P, A) = d(P, B)$ dus

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2}$$



Kwadrateren en haakjes uitwerken geeft de vergelijking

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 10y + 25$$

en dat kan worden vereenvoudigd tot een *lineaire* vergelijking, want de kwadraten vallen tegen elkaar weg. Het resultaat is $-4x + 8y = 16$. Oftewel

$$-x + 2y = 4$$

Zo vinden we dus een vergelijking voor de middelloodlijn van A en B. Het midden $(2, 3)$ van het lijnstuk AB ligt er op, en inderdaad snijdt de middelloodlijn dat lijnstuk daar loodrecht.

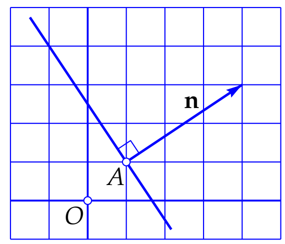
In de volgende opgaven zijn telkens een vector $\mathbf{n}$ en een punt A gegeven. Bepaal de vergelijking van de lijn door A die $\mathbf{n}$ als normaalvector heeft.

Voorbeeld: $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A = (1, 1)$.
De vergelijking heeft dan de vorm

$$3x + 2y = c$$

en invullen van de coördinaten van A geeft $3 \times 1 + 2 \times 1 = c$ dus $c = 5$. De gevraagde vergelijking is daarom

$$3x + 2y = 5$$



13.8

a. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = (0, -3)$

b. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A = (4, 3)$

c. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A = (-1, 2)$

d. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $A = (5, 0)$

e. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix}$, $A = (1, -2)$

13.9

a. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = (2, -3)$

b. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A = (4, 7)$

c. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}$, $A = (5, 8)$

d. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}$, $A = (2, 4)$

e. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$, $A = (8, 8)$

13.10

a. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A = (1, 3)$

b. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A = (-4, 2)$

c. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $A = (-3, 0)$

d. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A = (-5, 2)$

e. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $A = (2, -1)$

13.11

a. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $A = (2, 3)$

b. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $A = (-3, 8)$

c. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $A = (-4, 7)$

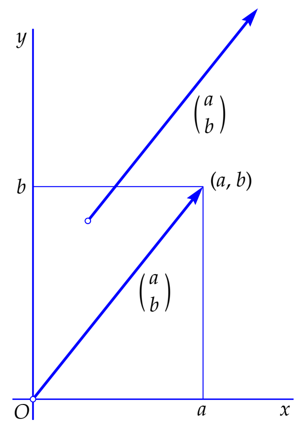
d. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}$, $A = (-2, 7)$

e. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix}$, $A = (5, -3)$

De normaalvector van een lijn

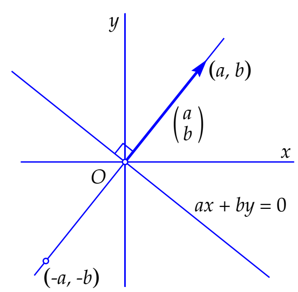
In veel toepassingen van de wiskunde wordt gewerkt met *vectoren* om grootheden voor te stellen die een grootte en een richting hebben. Een vector is een pijl met de desbetreffende grootte en richting. Gelijk gerichte pijlen die even lang zijn, stellen *dezelfde* vector voor. Je kunt het beginpunt van een vector dus vrij kiezen. Vectoren geven we vaak aan door een vet gedrukte letter.

Is in een vlak een orthonormaal coördinatenstelsel Oxy gegeven, dan kun je een vector $\mathbf{v}$ die in dat vlak ligt coördinaten geven door de pijl in de oorsprong te laten beginnen. De coördinaten van het eindpunt zijn dan de coördinaten van de vector $\mathbf{v}$. Om ze te onderscheiden van puntcoördinaten zetten we de coördinaten van een vector onder elkaar. De vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ is dus de vector die voorgesteld wordt door de pijl die van de oorsprong O naar het punt (a, b) loopt, of door iedere andere pijl die even groot is en dezelfde richting heeft.



De middelloodlijn van (a, b) en $(-a, -b)$ is de verzameling van alle punten die gelijke afstand hebben tot (a, b) en $(-a, -b)$. Het zijn de punten (x, y) die voldoen aan $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2}$. Na kwadrateren en vereenvoudigen geeft dit $ax + by = 0$.

Dit is de vergelijking van een lijn die door de oorsprong gaat. De vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ staat blijkbaar loodrecht op die lijn. Men noemt elke vector die loodrecht staat op een lijn een *normaalvector* van die lijn. Omdat $ax + by = c$ voor elke keuze van c een lijn voorstelt die evenwijdig is met de lijn $ax + by = 0$, geldt dus:



De vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ is voor elke c een normaalvector van de lijn $ax + by = c$.

In de volgende opgaven zijn telkens een punt A en de vergelijking van een lijn gegeven. Bepaal de vergelijking van de lijn door A die de gegeven lijn loodrecht snijdt.

Voorbeeld: $A = (1,2)$ en $3x + 4y = 5$. Elke lijn loodrecht op deze lijn heeft een vergelijking van de vorm $4x - 3y = c$ (verwissel de coëfficiënten van x en y en voeg een minteken toe). Invullen van de coördinaten van A geeft $4 \times 1 - 3 \times 2 = c$ dus $c = -2$. De gevraagde lijn heeft dus de vergelijking $4x - 3y = -2$.

13.12
- a. $A = (2,0)$, $2x - 3y = 4$
- b. $A = (3,-2)$, $4x + 5y = -1$
- c. $A = (-1,1)$, $x - 7y = 2$
- d. $A = (8,-6)$, $4x + 3y = 5$
- e. $A = (-2,1)$, $3x - 3y = 1$

13.13
- a. $A = (0,0)$, $4x - 9y = 1$
- b. $A = (0,-3)$, $2x + 7y = -2$
- c. $A = (-2,1)$, $-x + 5y = 3$
- d. $A = (4,6)$, $4x + 5y = 8$
- e. $A = (-4,1)$, $2x - 7y = 6$

In de volgende opgaven zijn telkens een punt A en de vergelijking van een lijn gegeven. Bepaal het voetpunt van de loodlijn uit A op de gegeven lijn (met andere woorden: bepaal de loodrechte projectie van A op de gegeven lijn).

Voorbeeld: $A = (1,2)$ en $3x + 4y = 5$. De loodlijn door A heeft de vergelijking $4x - 3y = -2$ (zie boven). Het snijpunt van de beide lijnen is $(\frac{7}{25}, \frac{26}{25})$.

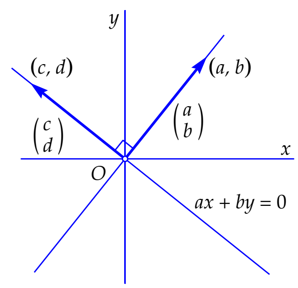
13.14
- a. $A = (1,-2)$, $2x - 3y = 0$
- b. $A = (1,1)$, $x + y = -1$
- c. $A = (2,0)$, $2x - y = 1$
- d. $A = (1,-1)$, $2x + y = -2$
- e. $A = (-2,2)$, $x - 3y = 3$

13.15
- a. $A = (0,5)$, $x - 4y = 1$
- b. $A = (1,-3)$, $x + 2y = -2$
- c. $A = (2,-1)$, $-x + y = 3$
- d. $A = (-2,2)$, $3x + y = 1$
- e. $A = (4,0)$, $2x - y = 6$

Loodrechte stand van lijnen en vectoren

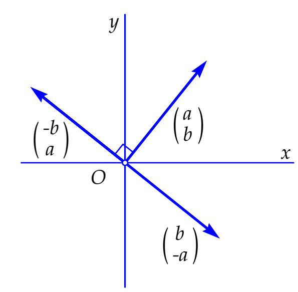
We hebben gezien dat de vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ een normaalvector is van elke lijn van de vorm $ax + by = c$, en in het bijzonder dus ook van de lijn $ax + by = 0$ die door de oorsprong gaat.

Voor elk punt (c, d) op die lijn $ax + by = 0$ geldt $ac + bd = 0$. De bijbehorende vector $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ staat dan loodrecht op de vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. We geven dit aan met het teken $\perp$. Er geldt dus



$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad ac + bd = 0$$

In het bijzonder staan de vectoren $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ loodrecht op de vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, want $(-b) \times a + a \times b = 0$ en $b \times a + (-a) \times b = 0$. Deze vectoren hebben allemaal dezelfde lengte, en de eerste ontstaat uit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ door een rotatie over 90 graden tegen de klok in, de tweede door een rotatie over 90 graden met de klok mee.



Als we zeggen dat $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ een normaalvector is van de lijn $ax + by = c$, gaan we er stilzwijgend van uit dat a en b niet beide nul zijn, want in dat geval is $ax + by = c$ geen vergelijking van een lijn. Maar als vector kunnen we natuurlijk wel over de *nulvector* $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ spreken. Het is de 'pijl' zonder richting en met lengte nul. Omdat $a \times 0 + b \times 0 = 0$ is, spreken we af dat de nulvector loodrecht staat op elke andere vector (en dus ook op zichzelf).

In de volgende opgaven zijn telkens twee vectoren **a** en **b** gegeven. Bereken de cosinus van de hoek tussen die vectoren en (met behulp van een rekenmachine) die hoek in graden nauwkeurig.

Voorbeeld: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Dan is $|\mathbf{a}| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{5}$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = -1$ dus $\cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = -\frac{1}{10}\sqrt{10} \approx -0.31623$ en dus is $\varphi \approx 108°$.

13.16

a. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

d. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

e. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

13.17

a. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

d. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

e. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

In de volgende opgaven zijn telkens de vergelijkingen van twee lijnen gegeven. Bereken met behulp van een rekenmachine de hoek waaronder ze elkaar snijden in graden nauwkeurig. Neem die hoek steeds kleiner dan of gelijk aan 90 graden.

Voorbeeld: $x + y = -1$, $x - 2y = 4$. De hoek tussen de twee lijnen is gelijk aan de hoek tussen de normaalvectoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, en die is, afgerond, 108° (zie het voorbeeld hierboven). Dit is een stompe hoek; de scherpe hoek tussen de twee lijnen is dus (afgerond) $180° - 108° = 72°$.

13.18

a. $x + y = 3$, $2x - 3y = 4$

b. $x - 2y = 5$, $4x + 5y = -1$

c. $2x - 2y = 1$, $x + y = -3$

d. $2x - y = 3$, $x - y = 1$

e. $x - 2y = -1$, $x + 3y = -3$

13.19

a. $x + 2y = 0$, $2x + 3y = 1$

b. $-2x - y = 5$, $4x = -1$

c. $3x + y = 1$, $-4x + y = -2$

d. $6x - 7y = 1$, $-2x - 3y = 0$

e. $-3x - 2y = 2$, $3x + y = 2$

Het inproduct

Bij elk tweetal vectoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ definieert men het *inproduct*, notatie $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, door

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Andere namen die hiervoor gebruikt worden, zijn *inwendig product* en *scalair product*. In de Engelstalige literatuur wordt ook vaak de term *dot product* gebruikt; het inproduct van **a** en **b** wordt dan genoteerd als $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$.

In de vorige paragraaf hebben we al gezien dat $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ als $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ en omgekeerd. Verder volgt uit de stelling van Pythagoras dat voor de lengte $|\mathbf{a}|$ van een vector **a** geldt dat

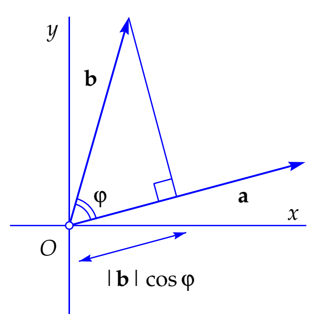
$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

In het algemeen is er voor het inproduct een meetkundige interpretatie waaruit deze beide eigenschappen als bijzondere gevallen voortvloeien. Men kan namelijk bewijzen dat

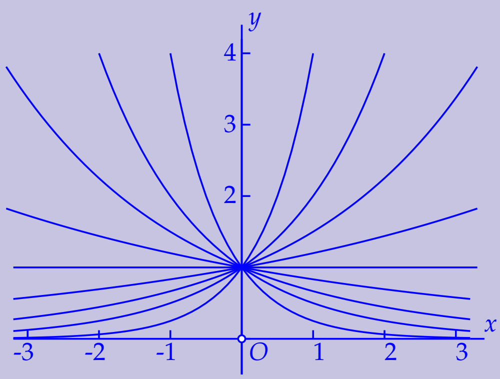
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \varphi$$

waarin φ de hoek is die de twee vectoren met elkaar in de oorsprong maken. (Zie de bladzijden 141 en 143 voor de definitie van de cosinus.)

Merk op dat $|\mathbf{b}| \cos \varphi$ de lengte is van de projectie van de vector **b** op de drager van de vector **a** (voorzien van een minteken als φ een stompe hoek is, want dan is de cosinus negatief). Je kunt de rol van **a** en **b** daarbij natuurlijk ook verwisselen: het inproduct is ook de lengte van **b** maal de lengte van de projectie van **a** op de drager van **b**. Ook meetkundig gezien is het hiermee duidelijk dat het inproduct nul is als de vectoren loodrecht op elkaar staan (want dan is $\cos \varphi = 0$), en dat het gelijk is aan het kwadraat van de lengte als de beide vectoren samenvallen (want dan is $\cos \varphi = 1$).



VI Functies



Een functie is een voorschrift om volgens een vaste, welbepaalde regel uit een gegeven getal een ander getal, de *functiewaarde*, te maken. Zo produceert de wortelfunctie bij een gegeven getal x als functiewaarde de wortel $\sqrt{x}$ uit dat getal. Vergelijk het met de worteltoets van een rekenmachine, die bij elk 'invoergetal' x dat je intoetst, in het venster het 'uitvoergetal' $\sqrt{x}$ (afgerond op een vast aantal decimalen) laat zien.
In dit deel behandelen we allerlei veel gebruikte functies en hun grafieken. In het laatste hoofdstuk beschrijven we geparametriseerde krommen in het vlak en in de ruimte.

16 Functies en grafieken

Bereken van de volgende lijnen in het vlak de richtingscoëfficiënt:

16.1

a. $3x + 5y = 4$
b. $2x = y + 7$
c. $-4x + 2y = 3$
d. $5y = 7$
e. $-x - 5y = 1$

16.2

a. $2x - 7y = -2$
b. $x = 3y - 2$
c. $-5x + 2y = -3$
d. $2x - 11y = 0$
e. $x = 2y$

Bereken met je rekenmachine van de volgende lijnen in het vlak de hellingshoek in graden nauwkeurig:

16.3

a. $x - 3y = 2$
b. $-3x = -y + 7$
c. $4x + 3y = 1$
d. $y = 7x$
e. $x - 4y = 2$

16.4

a. $5x - 2y = 12$
b. $4x = y + 8$
c. $x - y = 3$
d. $12x + 11y = 12$
e. $3x = -y$

Bereken met je rekenmachine van de volgende lijnen in het vlak de hellingshoek in radialen in twee decimalen nauwkeurig:

16.5

a. $x - 3y = 2$
b. $-3x = -y + 7$
c. $4x + 3y = 1$
d. $y = 7x$
e. $x - 4y = 2$

16.6

a. $5x - 2y = 12$
b. $4x = y + 8$
c. $x - y = 3$
d. $12x + 11y = 12$
e. $3x = -y$

Bepaal in de volgende opgaven de lineaire functie waarvan de grafiek de rechte lijn is door P met richtingscoëfficiënt m.

16.7

a. $P = (0, 0)$, $m = 3$
b. $P = (1, -1)$, $m = -2$
c. $P = (1, 2)$, $m = 0.13$
d. $P = (-1, 1)$, $m = -1$
e. $P = (2, -3)$, $m = 4$

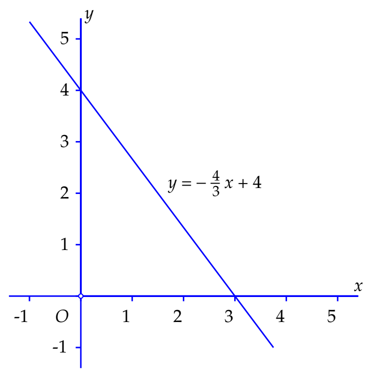
16.8

a. $P = (4, 0)$, $m = -4$
b. $P = (3, -4)$, $m = 2.22$
c. $P = (-1, -3)$, $m = 0$
d. $P = (1, -1)$, $m = -1.5$
e. $P = (-1, -2)$, $m = 0.4$

Eerstegraadsfuncties

De lineaire vergelijking $4x + 3y = 12$ kun je ook schrijven als

$$y = -\frac{4}{3}x + 4$$



waarmee y als een functie van x gegeven is: bij iedere x levert het rechterlid $-\frac{4}{3}x + 4$ de bijbehorende waarde van y. De rechte lijn in het Oxy-vlak die door de vergelijking wordt voorgesteld, is de grafiek van die functie.

In het algemeen kun je elke lineaire vergelijking $ax + by = c$ waarvoor geldt dat $b \neq 0$ is, schrijven in de vorm

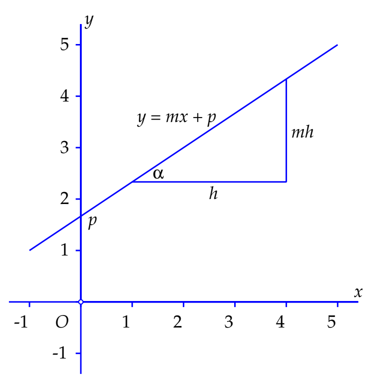
$$y = mx + p$$

(neem $m = -a/b$ en $p = c/b$). De voorwaarde $b \neq 0$ betekent dat de bijbehorende lijn in het Oxy-vlak niet verticaal is.

De functie $f(x) = mx + p$ heet een *eerstegraadsfunctie* van x. Omdat de grafiek ervan een rechte lijn is, spreekt men ook wel over een *lineaire* functie. De uitdrukking $mx + p$ is het functievoorschrift.

De coëfficiënt m van x heet de *richtingscoëfficiënt*. Bij een toename van h lengte-eenheden in de x-richting langs de grafiek hoort een toename van mh lengte-eenheden in de y-richting. Een positieve m hoort bij een stijgende grafiek, een negatieve m bij een dalende grafiek.

Als de schaaleenheden op de beide assen gelijk zijn gekozen, is m ook de *tangens* van de hoek α die de grafiek maakt met de richting van de x-as. Die hoek α heet de *hellingshoek*.



Bij hoekmeting in graden neemt men α tussen $-90°$ en $90°$, bij hoekmeting in radialen neemt men α tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$. Je kunt verder nog opmerken dat de grafiek van de functie $y = mx + p$ de y-as snijdt in het punt $(0, p)$ want bij $x = 0$ hoort $y = p$.

Bepaal de coördinaten (x_t, y_t) van de top van de volgende parabolen:

16.9

a. $y = x^2 - 1$

b. $y = -3x^2 + 7$

c. $y = (x+1)^2$

d. $y = -2(x-2)^2 + 1$

e. $y = x^2 + 2x$

16.10

a. $y = (x+3)^2 + 4$

b. $y = 2x^2 - 8x$

c. $y = -3x^2 + 7x + 2$

d. $y = 2x^2 + 12x - 5$

e. $y = 5x^2 + 20x - 6$

16.11

a. $y = x^2 + 2x - 3$

b. $y = x^2 - 2x - 3$

c. $y = x^2 + 2x - 8$

d. $y = 2x^2 + x - 1$

e. $y = 3x^2 - x - 2$

16.12

a. $y = -x^2 - 2x + 3$

b. $y = -x^2 + 4x - 3$

c. $y = -x^2 - x + 2$

d. $y = 2x^2 - 3x - 2$

e. $y = 3x^2 + 2x - 1$

Bepaal de vergelijking $y = ax^2 + bx + c$ van de parabool met de gegeven top T die ook nog door het gegeven punt P gaat.

16.13

a. $T = (0,0)$ en $P = (1,2)$

b. $T = (0,0)$ en $P = (-1,-2)$

c. $T = (0,0)$ en $P = (2,1)$

d. $T = (0,0)$ en $P = (2,-2)$

e. $T = (0,0)$ en $P = (-1,-5)$

16.14

a. $T = (0,1)$ en $P = (1,2)$

b. $T = (0,-1)$ en $P = (2,-2)$

c. $T = (0,-2)$ en $P = (-1,-5)$

d. $T = (3,0)$ en $P = (-1,-2)$

e. $T = (-2,0)$ en $P = (2,1)$

16.15

a. $T = (1,2)$ en $P = (2,3)$

b. $T = (-1,2)$ en $P = (1,6)$

c. $T = (2,-1)$ en $P = (1,1)$

d. $T = (0,3)$ en $P = (1,4)$

e. $T = (-3,0)$ en $P = (-2,3)$

16.16

a. $T = (0,0)$ en $P = (3,6)$

b. $T = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ en $P = (1, -\frac{1}{4})$

c. $T = (\frac{1}{3}, -1)$ en $P = (\frac{2}{3}, \frac{2}{9})$

d. $T = (0, \frac{3}{2})$ en $P = (\frac{1}{2}, 2)$

e. $T = (-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ en $P = (-\frac{1}{2}, \frac{7}{8})$

Tweedegraadsfuncties en parabolen

Het functievoorschrift

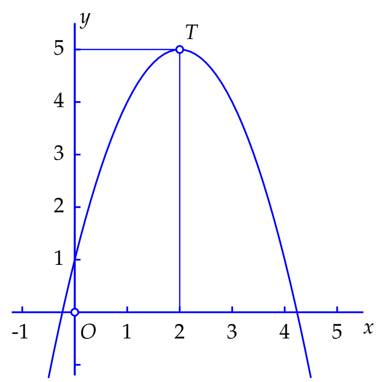
$$f(x) = -x^2 + 4x + 1$$

definieert een *tweedegraadsfunctie*, ook wel *kwadratische functie* genoemd.

De grafiek ervan is een *parabool*, in dit geval een *bergparabool* met zijn *top* in het punt $T = (2, 5)$. We zien dat onmiddellijk wanneer we het functievoorschrift via kwadraatafsplitsen schrijven als

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 - 4x + 4) + 5 \\ &= -(x-2)^2 + 5 \end{aligned}$$

Immers, de term $-(x-2)^2$ is altijd negatief of nul, en alleen maar nul wanneer $x = 2$ is. In dat geval is $f(x) = 5$ en de coördinaten (x_t, y_t) van de top T zijn dus $(x_t, y_t) = (2, 5)$.



De parabool die de grafiek is van de functie $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ heeft als vergelijking $y = -x^2 + 4x + 1$. Alle punten (x, y) in het Oxy-vlak die aan deze vergelijking voldoen, liggen op de parabool en omgekeerd voldoen de coördinaten (x, y) van elk punt op de parabool ook aan deze vergelijking.

In het algemeen is $f(x) = ax^2 + bx + c$ het functievoorschrift van een tweedegraadsfunctie, mits natuurlijk $a \neq 0$ is. De grafiek ervan is een parabool met als vergelijking

$$y = ax^2 + bx + c$$

Het is een *dalparabool* wanneer $a > 0$ is, en een *bergparabool* wanneer $a < 0$ is (zoals in het voorbeeld hierboven).

Het laagste, respectievelijk hoogste punt van de parabool heet de *top* (ook bij een dalparabool!). De coördinaten (x_t, y_t) ervan bepaal je door net als in het voorbeeld hierboven eerst x_t te berekenen via kwadraatafsplitsen. Daarna kun je y_t via het functievoorschrift berekenen: $y_t = f(x_t)$.

De algemene vergelijking van een parabool met top (x_t, y_t) is

$$y = a(x - x_t)^2 + y_t$$

De constante a kun je berekenen als je de coördinaten kent van nog één ander punt P op de parabool.

Teken de grafieken van de functies f en g in één figuur en bereken hun snijpunten.

16.17

a. $f(x) = x^2 + x - 2$
$g(x) = x + 2$

b. $f(x) = -x^2 - 2x - 1$
$g(x) = 2x + 3$

c. $f(x) = 2x^2 + x - 3$
$g(x) = -x - 3$

d. $f(x) = -2x^2 + 5x - 2$
$g(x) = 2x - 1$

e. $f(x) = 3x^2 + x - 4$
$g(x) = -3x - 5$

16.18

a. $f(x) = x^2 + 1$
$g(x) = -x^2 + 3$

b. $f(x) = x^2 + x - 2$
$g(x) = x^2 + 2x - 3$

c. $f(x) = 2x^2 - x - 1$
$g(x) = -x^2 + 8x - 7$

d. $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$
$g(x) = x^2 + x + 1$

e. $f(x) = x^2 - 2x - 3$
$g(x) = -x^2 + 2x - 5$

Voor welke reële getallen x geldt $f(x) \geq g(x)$?

16.19

a. $f(x) = x^2 + x - 3$
$g(x) = -1$

b. $f(x) = x^2 - 2x - 3$
$g(x) = -2x - 2$

c. $f(x) = -x^2 + 2x - 1$
$g(x) = x - 3$

d. $f(x) = 2x^2 - x - 1$
$g(x) = 2x + 2$

e. $f(x) = -3x^2 + x + 2$
$g(x) = -x + 2$

16.20

a. $f(x) = x^2 + x - 3$
$g(x) = -x^2 + 3x - 3$

b. $f(x) = x^2 - x - 2$
$g(x) = 2x^2 - 3x - 4$

c. $f(x) = -x^2 + 2x - 1$
$g(x) = x^2 - 3x + 2$

d. $f(x) = 2x^2 - x - 1$
$g(x) = -x^2 + x + 4$

e. $f(x) = -3x^2 + x + 2$
$g(x) = 2x^2 - 5x - 6$

16.21 Voor welke reële getallen p heeft de grafiek van f geen snijpunten met de x-as?

a. $f(x) = x^2 + px + 1$

b. $f(x) = x^2 - x + p$

c. $f(x) = px^2 + 2x - 1$

d. $f(x) = x^2 + px + p$

e. $f(x) = -x^2 + px + p - 3$

16.22 Voor welke reële getallen p snijdt de grafiek van f de x-as in twee verschillende punten?

a. $f(x) = x^2 + 2px - 1$

b. $f(x) = -x^2 + x + p + 1$

c. $f(x) = px^2 + 2x - 3$

d. $f(x) = x^2 + px + p + 3$

e. $f(x) = (p+1)x^2 - px - 1$

Snijpunten van grafieken

Stel dat gegeven zijn de tweedegraadsfuncties

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 2$$

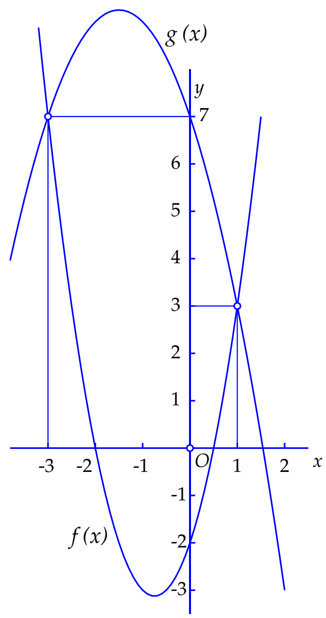
en

$$g(x) = -x^2 - 3x + 7$$

Voor de x-coördinaat van een snijpunt van hun grafieken geldt $f(x) = g(x)$, dus

$$2x^2 + 3x - 2 = -x^2 - 3x + 7$$

oftewel $3x^2 + 6x - 9 = 0$. De oplossingen hiervan zijn $x = 1$ en $x = -3$. Omdat $f(1) = g(1) = 3$ en $f(-3) = g(-3) = 7$ zijn de coördinaten van snijpunten van de twee parabolen dus $(1, 3)$ en $(-3, 7)$.
Uit de grafieken lezen we verder af dat $f(x) \leq g(x)$ wanneer $-3 \leq x \leq 1$ en dat $f(x) \geq g(x)$ wanneer $x \leq -3$ of $x \geq 1$.



De methode is algemeen bruikbaar. Als je voor twee verschillende functies f en g de eventuele snijpunten van hun grafieken zoekt, los je de vergelijking $f(x) = g(x)$ op om de x-coördinaten van de snijpunten te vinden. Invullen van een gevonden x-coördinaat in een van de beide functievoorschriften geeft dan de bijbehorende y-coördinaat.

Wanneer de beide functies tweedegraadsfuncties zijn, is de vergelijking die je oplost een tweedegraadsvergelijking (of eventueel een eerstegraadsvergelijking), en dan zijn er dus hoogstens twee snijpunten.

Hetzelfde geldt voor het geval dat een van de twee functies een eerstegraadsfunctie, en de andere een tweedegraadsfunctie is.

Teken de grafieken van de volgende functies. Bepaal daarbij in het bijzonder de horizontale en de verticale asymptoot en de eventuele snijpunten van de grafiek met de beide coördinaatassen.

16.23

a. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

b. $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$

c. $f(x) = \dfrac{3}{2x-4}$

d. $f(x) = \dfrac{2x}{x-5}$

e. $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$

16.24

a. $f(x) = \dfrac{-x}{2x-3}$

b. $f(x) = \dfrac{x+2}{3x-1}$

c. $f(x) = \dfrac{2x-4}{1-5x}$

d. $f(x) = \dfrac{x+3}{4+7x}$

e. $f(x) = \dfrac{3-2x}{4x-2}$

Bepaal met behulp van de grafiek van f voor welke reële getallen x geldt dat $-1 \le f(x) \le 1$.

16.25

a. $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

b. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$

c. $f(x) = \dfrac{5}{x-5}$

d. $f(x) = \dfrac{2x}{3-2x}$

e. $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+2}$

16.26

a. $f(x) = \dfrac{2-x}{2x-1}$

b. $f(x) = \dfrac{2x-2}{3x+4}$

c. $f(x) = \dfrac{-x+7}{1-3x}$

d. $f(x) = \dfrac{2x+2}{4-5x}$

e. $f(x) = \dfrac{3-x}{2x+4}$

Bereken de snijpunten van de grafieken van de volgende functies f en g.

16.27

a. $f(x) = \dfrac{8}{x+3}$ en $g(x) = 2x$

b. $f(x) = \dfrac{2x-4}{x+1}$ en $g(x) = 2-x$

c. $f(x) = \dfrac{8}{5-x}$ en $g(x) = x+4$

d. $f(x) = \dfrac{2x-1}{3-2x}$ en $g(x) = 3-2x$

16.28

a. $f(x) = \dfrac{x+3}{2x+1}$ en $g(x) = 3x-5$

b. $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$ en $g(x) = x+2$

c. $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+1}$ en $g(x) = 2-x$

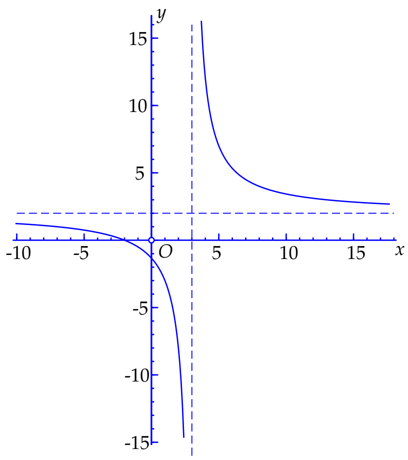
d. $f(x) = \dfrac{2+2x}{2x-4}$ en $g(x) = 3x-5$

Gebroken lineaire functies

De functie

$$f(x) = \frac{2x + 4}{x - 3}$$

waarvan het functievoorschrift een 'breuk' is met een lineaire functie in de teller en een lineaire functie in de noemer, heet een *gebroken lineaire functie*. Voor $x = 3$ wordt de noemer nul, en dan kan $f(x)$ dus niet berekend worden. De grafiek van f heeft de verticale lijn $x = 3$ als *verticale asymptoot*. Nadert x van boven tot 3, dan nadert $f(x)$ tot $+\infty$, nadert x van onder tot 3, dan nadert $f(x)$ tot $-\infty$.



Wanneer we in het functievoorschrift teller en noemer delen door x, ontstaat

$$f(x) = \frac{2 + \frac{4}{x}}{1 - \frac{3}{x}}$$

Voor zeer grote positieve of negatieve waarden van x zijn $\frac{4}{x}$ en $\frac{3}{x}$ zeer kleine getallen, en dan is $f(x)$ dus vrijwel gelijk aan $\frac{2}{1} = 2$. De horizontale lijn $y = 2$ is daarom een *horizontale asymptoot* van de grafiek van f.

De algemene vorm van een gebroken lineaire functie is

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

waarbij we aannemen dat $c \neq 0$ (want anders is het een 'gewone' lineaire functie). De horizontale asymptoot is de lijn $y = \frac{a}{c}$. Zo'n functie is niet gedefinieerd wanneer de noemer nul wordt, dus als $x = -\frac{d}{c}$. De verticale lijn $x = -\frac{d}{c}$ is de verticale asymptoot van de grafiek, tenzij de teller voor $x = -\frac{d}{c}$ ook nul is.

Dat laatste doet zich bijvoorbeeld voor bij de functie

$$f(x) = \frac{2x - 4}{-6x + 12}$$

De noemer is nul voor $x = 2$, maar de teller is dan ook nul. Voor alle $x \neq 2$ geldt $f(x) = -\frac{1}{3}$ (deel teller en noemer door $2x - 4$), dus de grafiek is gewoon de horizontale lijn $y = -\frac{1}{3}$ met een onderbreking in het punt $(2, -\frac{1}{3})$.

Teken de grafieken van de volgende functies. Werk de haakjes niet uit!

16.29

a. $f(x) = (x-1)^3$

b. $f(x) = x^3 - 1$

c. $f(x) = 1 - x^4$

d. $f(x) = 1 + (x+1)^3$

e. $f(x) = (2x-1)^3$

16.30

a. $f(x) = \sqrt{x-1}$

b. $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

c. $f(x) = 1 - \sqrt[4]{2-x}$

d. $f(x) = \sqrt[3]{4+7x}$

e. $f(x) = \sqrt[5]{x-2}$

16.31

a. $f(x) = \sqrt{x^3}$

b. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

c. $f(x) = \sqrt{|x|}$

d. $f(x) = \sqrt{|x|^3}$

e. $f(x) = |\sqrt[3]{x}|$

16.32

a. $f(x) = |x|^3$

b. $f(x) = |x-1|^3$

c. $f(x) = |1-x^2|$

d. $f(x) = |1+x^3|$

e. $f(x) = |1-(x+1)^2|$

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden op. Maak daarbij steeds gebruik van een tekening.

16.33

a. $x^4 \leq x^3$

b. $x^4 = |x|$

c. $x^4 \geq |x|^3$

d. $x^4 \geq \sqrt{x}$

e. $x^4 \leq |\sqrt[3]{x}|$

16.34

a. $|2x+3| = 2$

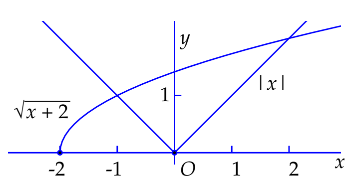
b. $|2x-3| = -2$

c. $|2x+3| = 4x$

d. $|2x+3| \geq |4x|$

e. $|x^2-2x| < 1$

Ook bij de volgende opgaven is het handig eerst een (ruwe) tekening te maken. *Voorbeeld:* Los op $\sqrt{x+2} = |x|$. De tekening hieronder laat zien dat er twee oplossingen zijn. Je vindt ze door de vergelijking te kwadrateren (als x aan de oorspronkelijke vergelijking voldoet, voldoet x ook aan de gekwadrateerde vergelijking). Dit geeft $x+2 = x^2$, met als oplossingen (kwadraatafsplitsen of *abc*-formule) $x = -1$ en $x = 2$.



16.35 Los op:

a. $\sqrt{x} = |x|$

b. $\sqrt{x-1} = |x-2|$

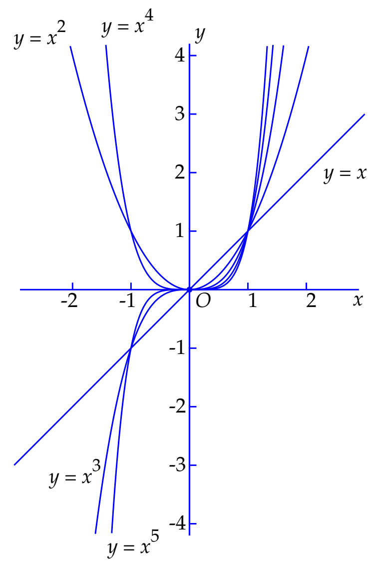
c. $\sqrt{x+1} \leq x-1$

d. $\sqrt{|1-x|} \geq x$

e. $\sqrt{2x+1} \leq |x+1|$

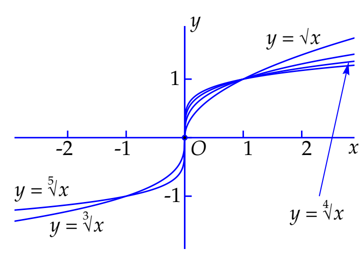
Machtsfuncties, wortelfuncties en de absolute-waardefunctie

Hiernaast zijn in één figuur de grafieken getekend van de *machtsfuncties* $f(x) = x^n$ voor $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Allemaal gaan ze door de oorsprong en door het punt $(1, 1)$.
Voor elke $n > 1$ heeft de grafiek van x^n in de oorsprong de x-as als raaklijn. Voor even waarden van n nemen de functies daar hun minimale waarde aan.
Voor even waarden van n liggen de grafieken symmetrisch ten opzichte van de y-as. Er geldt dan $f(-x) = f(x)$ voor alle x. Voor oneven n zijn de grafieken puntsymmetrisch in de oorsprong. Er geldt dan $f(-x) = -f(x)$.

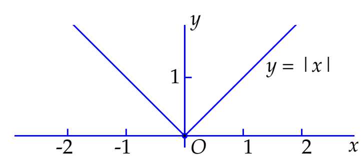


In het algemeen heet een functie $f(x)$ *even* als $f(-x) = f(x)$ voor alle x, en *oneven* als $f(-x) = -f(x)$ voor alle x. Maar let op: niet iedere functie is even of oneven. De meeste functies zijn geen van beide, neem bijvoorbeeld de functie $f(x) = x + 1$, die even noch oneven is zoals je gemakkelijk nagaat.

In de tekening hiernaast staan de grafieken van de *wortelfuncties* $f(x) = \sqrt[n]{x}$ voor $n = 2, 3, 4, 5$. Allemaal gaan ze door de oorsprong en door het punt $(1, 1)$. Voor even waarden van n zijn die functies alleen maar gedefinieerd voor $x \geq 0$, voor oneven n zijn ze gedefinieerd voor alle x. Al die grafieken hebben in de oorsprong de y-as als raaklijn.



In de onderste tekening is de grafiek getekend van de *absolute-waardefunctie* $f(x) = |x|$, die gedefinieerd is door $|x| = x$ als $x \geq 0$ en $|x| = -x$ als $x \leq 0$. Voor alle x geldt dat $|x|^2 = x^2$.



Merk op dat $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ als n even is, en $\sqrt[n]{x^n} = x$ als n oneven is.

16.36 Geef voorbeelden van

a. een vijfdegraadspolynoom met vijf verschillende nulpunten,
b. een vijfdegraadspolynoom met vier verschillende nulpunten,
c. een vijfdegraadspolynoom met drie verschillende nulpunten,
d. een vijfdegraadspolynoom met twee verschillende nulpunten,
e. een vijfdegraadspolynoom met één nulpunt,
f. een zesdegraadspolynoom zonder nulpunten.

De factorstelling op de volgende bladzijde zegt dat er bij elk nulpunt $x = a$ van een polynoom $f(x)$ van graad groter dan of gelijk aan 1 een polynoom $g(x)$ hoort waarvoor geldt dat $f(x) = (x - a)g(x)$. Neem bijvoorbeeld

$$f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 3x^2 - x - 2$$

Invullen laat zien dat $f(2) = 0$ dus $x = 2$ is een nulpunt. De volgende staartdeling levert het polynoom $g(x) = 3x^3 - x^2 + x + 1$.

$$
\begin{array}{l|rrrrr|l}
x-2 & 3x^4 & -7x^3 & +3x^2 & -x & -2 & 3x^3 - x^2 + x + 1 \\
 & \underline{3x^4} & \underline{-6x^3} & & & & \\
 & & -x^3 & +3x^2 & & & \\
 & & \underline{-x^3} & \underline{+2x^2} & & & \\
 & & & x^2 & -x & & \\
 & & & \underline{x^2} & \underline{-2x} & & \\
 & & & & x & -2 & \\
 & & & & \underline{x} & \underline{-2} & \\
 & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Hieruit blijkt dat $3x^4 - 7x^3 + 3x^2 - x - 2 = (x - 2)(3x^3 - x^2 + x + 1)$.

Ga bij de volgende opgaven na dat a een nulpunt van het gegeven polynoom $f(x)$ is en bepaal vervolgens met een staartdeling het polynoom $g(x)$ waarvoor geldt dat $f(x) = (x - a)g(x)$.

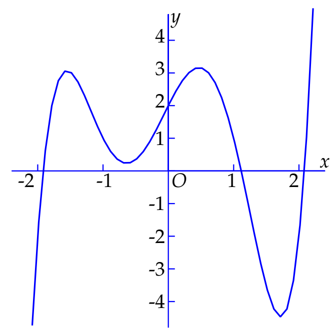
16.37

a. $f(x) = x^2 - x - 2$, $a = 2$
b. $f(x) = 2x^2 - 2$, $a = 1$
c. $f(x) = x^3 + 1$, $a = -1$
d. $f(x) = x^6 - 1$, $a = 1$
e. $f(x) = 2x^3 - 4x + 8$, $a = -2$
f. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$, $a = 1$
g. $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 12x - 4$, $a = 2$

16.38

a. $f(x) = 2x^4 - 2$, $a = 1$
b. $f(x) = x^3 + x^2 + 4$, $a = -2$
c. $f(x) = x^3 + 8$, $a = -2$
d. $f(x) = x^4 - 16$, $a = 2$
e. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, $a = 1$
f. $f(x) = 2x^3 - 4x + 8$, $a = -2$
g. $f(x) = x^4 - 9x^3 - 6x^2 - 4$, $a = -1$

Polynomen



Hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = x^5 - 5x^3 - x^2 + 4x + 2$. De schaalverdelingen op de assen zijn verschillend gekozen.
Je ziet drie *nulpunten* van deze functie, dat wil zeggen punten x waarvoor $f(x) = 0$ is. Of $f(x)$ nog meer nulpunten heeft, kun je zo direct niet zien: misschien liggen er verderop naar links of naar rechts wel meer. Nader onderzoek zou dat kunnen uitwijzen.
In het algemeen heet elke functie van de vorm

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

een *polynoomfunctie*, of, kortweg, een *polynoom*. Ook het Nederlandse woord *veelterm* wordt hiervoor wel gebruikt. De getallen a_i heten de *coëfficiënten*. We veronderstellen daarbij altijd dat de hoogste coëfficiënt a_n niet nul is (anders zou je die term net zo goed weg kunnen laten). De andere coëfficiënten mogen wel nul zijn. Men noemt n de *graad* van het polynoom. Het hierboven gegeven voorbeeld is dus een vijfdegraadspolynoom.

Van belang is de *factorstelling*:

Als $f(x)$ een n-degraads polynoom is met $n \geq 1$ en a is een reëel getal waarvoor geldt dat $f(a) = 0$, dan is er een polynoom $g(x)$ van graad $n-1$ zo, dat $f(x) = (x-a)g(x)$.

Neem als voorbeeld $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 3x^2 - x - 2$. Als je hier $x = 2$ invult, krijg je $f(2) = 3 \cdot 16 - 7 \cdot 8 + 3 \cdot 4 - 2 - 2 = 0$ dus 2 is een nulpunt. De bijbehorende functie $g(x)$ vind je via een *staartdeling*. Op de tegenoverliggende bladzijde is dat voorgedaan. Zo zie je dat $f(x) = (x-2)(3x^3 - x^2 + x + 1)$.

Als $g(x)$ een nulpunt heeft, kun je daar ook weer zo'n eerstegraadsfactor uit halen, enzovoort, net zo lang totdat er een polynoom zonder nulpunten overblijft. Elk polynoom $f(x)$ is dus te schrijven als

$$f(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_k) h(x)$$

waarbij $h(x)$ een polynoom zonder nulpunten is. Gevolg:

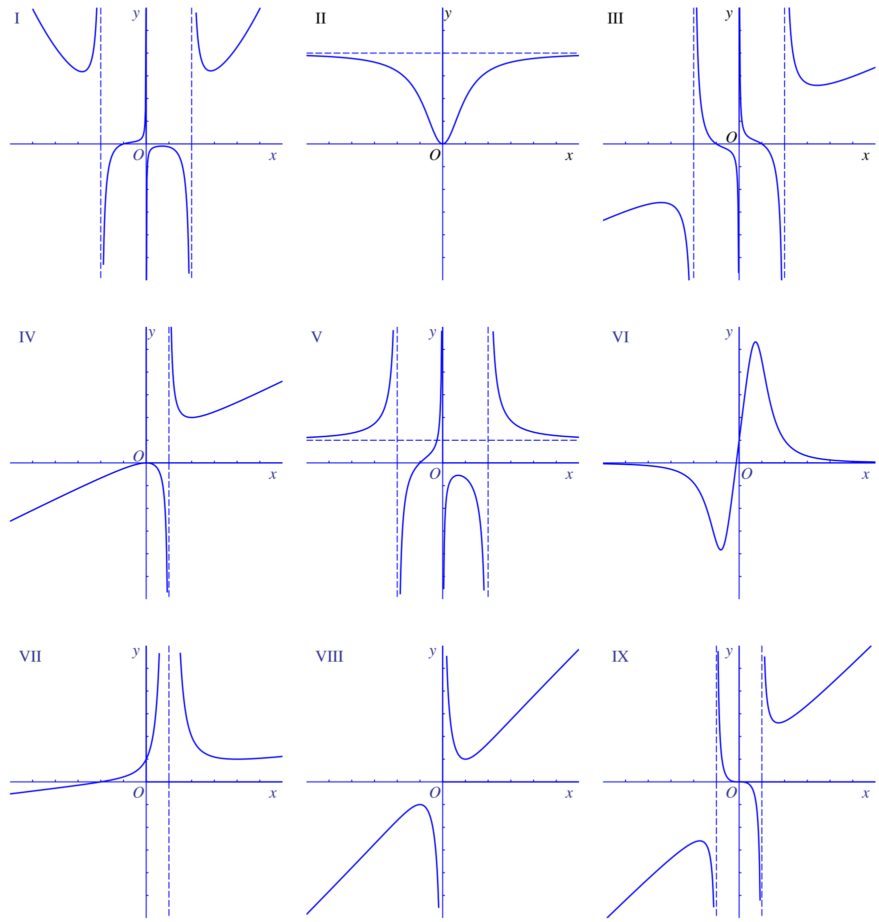
Elk n-degraads polynoom met $n \geq 1$ heeft hoogstens n nulpunten.

Zonder bewijs vermelden we nog de volgende stelling:

Elk n-degraads polynoom met n oneven heeft minstens één nulpunt.

In het bijzonder heeft elk derdegraadspolynoom dus minstens één nulpunt.

16.39 Zoek bij elke grafiek het bijpassende functievoorschrift. Motiveer je antwoord. Gebruik geen grafische rekenmachine.

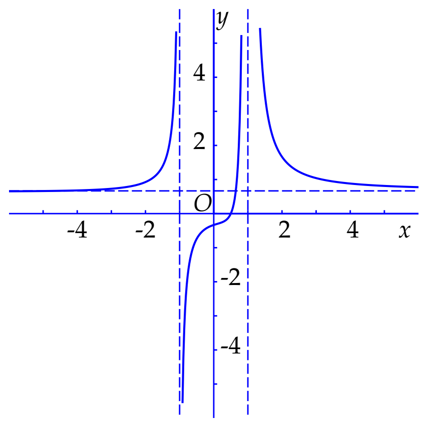


a. $\dfrac{x^4+1}{x^3+x}$ b. $\dfrac{x^3+1}{x^3-4x}$ c. $\dfrac{4x^2}{x^2+1}$

d. $\dfrac{x^4-1}{2x^3-8x}$ e. $\dfrac{x^5+1}{5x^3-20x}$ f. $\dfrac{x^2}{2x-2}$

g. $\dfrac{x^3+8}{8(x-1)^2}$ h. $\dfrac{x^3}{x^2-1}$ i. $\dfrac{8x+1}{x^4+1}$

Rationale functies



Hiernaast is de grafiek getekend van de functie

$$f(x) = \frac{(x^2+1)(2x-1)}{3(x-1)^2(x+1)}$$

Je ziet twee verticale asymptoten en een horizontale asymptoot. De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = 1$ en $x = -1$, precies bij de waarden van x waarvoor de noemer nul wordt. De horizontale asymptoot is de lijn $y = \frac{2}{3}$. De horizontale asymptoot geeft de limietwaarde van $f(x)$ als $x \longrightarrow +\infty$ en als $x \longrightarrow -\infty$.

Je vindt die limieten het gemakkelijkst als je $f(x)$ schrijft als

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 2x - 1}{3x^3 - 3x^2 - 3x + 3} = \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{3 - \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^3}}$$

dus haakjes uitwerken en teller en noemer delen door de hoogste macht van x. Het enige nulpunt van de functie is het punt waar de teller nul wordt, en dat is als $x = \frac{1}{2}$.

Men noemt in het algemeen iedere functie waarvan het functievoorschrift geschreven kan worden als het quotiënt van twee polynomen een *rationale functie*. Zo'n functie is dus van de gedaante

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

We kunnen daarbij aannemen dat het tellerpolynoom $a(x)$ en het noemerpolynoom $b(x)$ geen gemeenschappelijke nulpunten hebben, want als die er wel zijn, kunnen we ze via de factorstelling tegen elkaar wegdelen.

Als dat gebeurd is, zijn de nulpunten van de teller $a(x)$ ook de nulpunten van $f(x)$. De nulpunten van de noemer $b(x)$ heten dan de *polen* van $f(x)$. Bij elke pool hoort een verticale asymptoot.

Een horizontale asymptoot treedt alleen maar op als $n \leq m$. Als $n = m$ is de lijn $y = \dfrac{a_n}{b_n}$ de horizontale asymptoot. Dit geval deed zich voor in het hierboven getekende voorbeeld: daar was $a_3 = 2$ en $b_3 = 3$. Als $n < m$ is de x-as de horizontale asymptoot. De limiet van $f(x)$ voor $x \longrightarrow \pm\infty$ is dan nul.

17 Goniometrie

Bereken de grootte van de volgende in graden gegeven hoeken in radialen. Geef exacte antwoorden!

17.1
a. $30°$
b. $45°$
c. $60°$
d. $70°$
e. $15°$

17.2
a. $20°$
b. $50°$
c. $80°$
d. $100°$
e. $150°$

17.3
a. $130°$
b. $135°$
c. $200°$
d. $240°$
e. $330°$

Bereken de grootte van de volgende in radialen gegeven hoeken in graden. Geef exacte antwoorden!

17.4
a. $\frac{1}{6}\pi$
b. $\frac{7}{6}\pi$
c. $\frac{1}{3}\pi$
d. $\frac{2}{3}\pi$
e. $\frac{1}{4}\pi$

17.5
a. $\frac{5}{4}\pi$
b. $\frac{5}{12}\pi$
c. $\frac{11}{24}\pi$
d. $\frac{15}{8}\pi$
e. $\frac{23}{12}\pi$

17.6
a. $\frac{71}{72}\pi$
b. $\frac{41}{24}\pi$
c. $\frac{25}{18}\pi$
d. $\frac{13}{24}\pi$
e. $\frac{31}{36}\pi$

Bereken bij de volgende draaiingshoeken de hoek α met $0 \leq \alpha < 360°$ die hetzelfde draaiingsresultaat geeft.

17.7
a. $-30°$
b. $445°$
c. $-160°$
d. $700°$
e. $515°$

17.8
a. $-220°$
b. $-650°$
c. $830°$
d. $1000°$
e. $1550°$

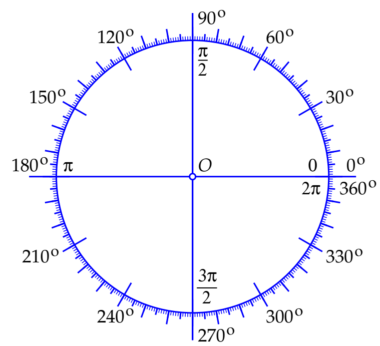
17.9
a. $-430°$
b. $935°$
c. $1200°$
d. $-240°$
e. $730°$

17.10

a. Wat is de oppervlakte van de cirkelsector met straal 3 en een middelpuntshoek van 1 radiaal?
b. Wat is de oppervlakte van een halve cirkel met *diameter* 1 ?
c. Wat is de omtrek van een cirkel met oppervlakte 1 ?

Hoekmeting

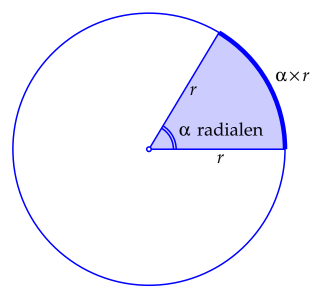
Hoeken meten we in *graden* of in *radialen*. Hiernaast zie je de eenheidscirkel in het vlak (de cirkel met straal 1 en de oorsprong O als middelpunt) waarop de beide verdelingen zijn aangegeven. Een volledige rondgang telt 360 graden, oftewel 2π radialen.



Ook draaiingshoeken kunnen we in graden of in radialen meten. De *draaiingsrichting* is dan wel van belang: volgens afspraak geven we draaiingen in het vlak tegen de klok in met een plusteken aan, en draaiingen met de klok mee met een minteken.

Bij draaiingen kan de draaiingshoek natuurlijk ook groter dan 360° zijn. Voor het resultaat maakt het niets uit of je er gehele veelvouden van 360° (of 2π radialen) bij optelt of van aftrekt.

De term *radiaal* komt van *radius*, hetgeen straal betekent. Wanneer je op een cirkel met straal r een boog met een middelpuntshoek van α radialen tekent, is de lengte van die boog precies $\alpha \times r$. De hoekmaat in radialen geeft dus de verhouding tussen de booglengte en de straal, vandaar de naam radiaal. Bij een cirkel met straal $r = 1$ is de booglengte precies *gelijk* aan de middelpuntshoek α in radialen.



De omtrek van een cirkel met een straal r is $2\pi r$. Bij een volledige rondgang langs een cirkel hoort dan ook een draaiingshoek van 2π radialen. Een hoek van 1 radiaal is iets kleiner dan 60 graden, namelijk, in acht decimalen nauwkeurig, 57.29577950 graden. De exacte waarde is $360/(2\pi)$.

De oppervlakte van een cirkel met straal r is πr^2, en de oppervlakte van een sector met een middelpuntshoek van α radialen is daarom $\dfrac{\alpha}{2\pi} \times \pi r^2 = \dfrac{1}{2}\alpha r^2$.

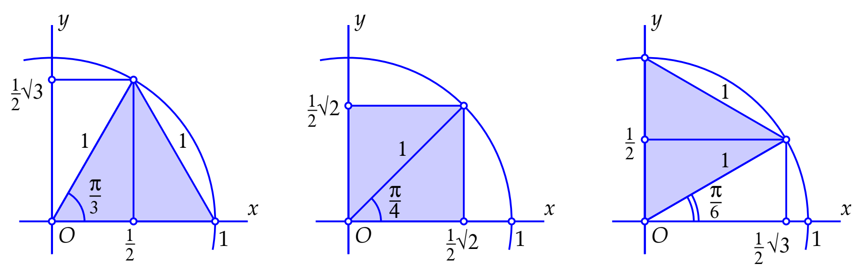
Later in dit hoofdstuk worden de *goniometrische functies* $\sin x$, $\cos x$ en $\tan x$ behandeld. Daarbij wordt uitsluitend met *radialen* gewerkt. In het vervolg zullen we daarom, tenzij expliciet anders aangegeven, hoeken ook steeds in radialen meten.

17.11

a. Toon met behulp van de stelling van Pythagoras (zie bladzijde 143) aan dat de lengte van de zijden van een vierkant met diagonalen van lengte 1 gelijk is aan $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

b. Toon met behulp van de stelling van Pythagoras aan dat de lengte van elke zwaartelijn in een gelijkzijdige driehoek met zijden van lengte 1 gelijk is aan $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (een zwaartelijn in een driehoek verbindt een hoekpunt met het midden van de tegenoverliggende zijde.)

c. Verklaar hiermee de waarden voor $\alpha = \frac{1}{3}\pi$, $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ en $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ in de tabel op de volgende bladzijde (zie ook de onderstaande figuur).



Gebruik de tabel op de volgende bladzijde en een tekening van de eenheidscirkel om de volgende sinussen, cosinussen en tangenten te berekenen. Geef daarbij de plaats van elke hoek op de eenheidscirkel duidelijk aan en gebruik zo nodig symmetrie. Geef exacte antwoorden!

17.12
a. $\sin \frac{2}{3}\pi$
b. $\cos \frac{3}{4}\pi$
c. $\cos \frac{11}{6}\pi$
d. $\tan \frac{5}{4}\pi$
e. $\sin \frac{5}{6}\pi$

17.13
a. $\sin 3\pi$
b. $\tan 7\pi$
c. $\cos -5\pi$
d. $\tan 12\pi$
e. $\sin -5\pi$

17.14
a. $\sin -\frac{2}{3}\pi$
b. $\tan \frac{7}{4}\pi$
c. $\cos -\frac{7}{6}\pi$
d. $\tan -\frac{5}{3}\pi$
e. $\sin \frac{13}{4}\pi$

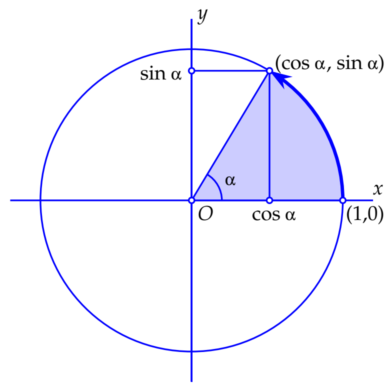
17.15
a. $\tan \frac{4}{3}\pi$
b. $\sin -\frac{3}{4}\pi$
c. $\cos \frac{11}{3}\pi$
d. $\tan -\frac{15}{4}\pi$
e. $\cos -\frac{23}{6}\pi$

17.16
a. $\cos 13\pi$
b. $\tan 17\pi$
c. $\sin -7\pi$
d. $\tan 11\pi$
e. $\cos -8\pi$

17.17
a. $\sin \frac{23}{6}\pi$
b. $\tan -\frac{17}{4}\pi$
c. $\sin -\frac{7}{3}\pi$
d. $\tan -\frac{25}{6}\pi$
e. $\sin \frac{23}{4}\pi$

De sinus, de cosinus en de tangens

Bij elke draaiingshoek α hoort een draaiing in het vlak om de oorsprong over die hoek. Een positieve draaiingshoek correspondeert met een draaiing tegen de klok in, een negatieve hoek hoort bij een draaiing met de klok mee. We kunnen zo'n draaiing aangeven via een boog van de eenheidscirkel met middelpuntshoek α die in $(1, 0)$ begint. De coördinaten (x, y) van het eindpunt zijn dan respectievelijk de *cosinus* en de *sinus* van α, dus



$$x = \cos\alpha \qquad \text{en} \qquad y = \sin\alpha$$

Omdat (x, y) op de eenheidscirkel ligt, geldt $x^2 + y^2 = 1$, dus

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Let hierbij op de notatie: $\cos^2\alpha$ betekent $(\cos\alpha)^2$ en $\sin^2\alpha$ betekent $(\sin\alpha)^2$. Deze notatievormen zijn algemeen gebruikelijk. Echter: $\cos\alpha^2$ betekent $\cos(\alpha^2)$. Ook hier geldt weer: zet bij twijfel haakjes!

De *tangens* van α is het quotiënt van de sinus en de cosinus, in formule:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Uit de hier gegeven definities van de sinus en de cosinus met behulp van de eenheidscirkel volgen direct de volgende *symmetrie-eigenschappen*:

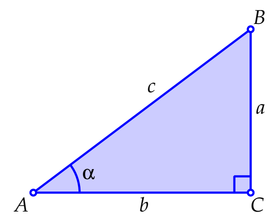
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \qquad \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

Er zijn enige hoeken α met bijzondere waarden voor de sinus, de cosinus en de tangens. Voor $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ (in radialen) geven we ze in de vorm van een tabel. Je moet de waarden uit die tabel *uit je hoofd kennen*.

α	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$

17.18 Voor elke α geldt $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ en $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$. Zijn er ook zulke grenzen voor de tangens? Ga ook aan de hand van het 'raaklijnplaatje' na wat er precies met de tangens gebeurt als het punt op de eenheidscirkel één volledige rondgang maakt.

In de volgende opgaven is van een rechthoekige driehoek ABC zoals die hiernaast getekend is, telkens de scherpe hoek α en een van de zijden gegeven. Bereken de andere twee zijden in vier decimalen nauwkeurig met behulp van een rekenmachine.



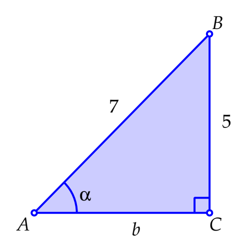
17.19
- a. $\alpha = 32°, c = 3$
- b. $\alpha = 63°, c = 2$
- c. $\alpha = 46°, a = 2$
- d. $\alpha = 85°, c = 7$
- e. $\alpha = 12°, b = 3$

17.20
- a. $\alpha = 23°, a = 3$
- b. $\alpha = 49°, b = 2$
- c. $\alpha = 76°, c = 8$
- d. $\alpha = 21°, b = 2$
- e. $\alpha = 17°, b = 4$

17.21
- a. $\alpha = 1.1$ rad, $c = 3$
- b. $\alpha = 0.5$ rad, $c = 4$
- c. $\alpha = 0.2$ rad, $a = 2$
- d. $\alpha = 1.2$ rad, $b = 7$
- e. $\alpha = 0.7$ rad, $a = 3$

In de volgende opgaven is van een hoek α met $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ de sinus of de cosinus gegeven. Bereken de cosinus respectievelijk de sinus van α en ook de tangens. Geef exacte antwoorden!

Voorbeeld: $\sin\alpha = \frac{5}{7}$.
Teken een rechthoekige driehoek ABC zoals hiernaast met $a = 5$ en $c = 7$. Dan is inderdaad $\sin\alpha = \frac{5}{7}$. Pythagoras geeft dan $b = \sqrt{49-25} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ en dus is $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{2}{7}\sqrt{6}$ en $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{5}{12}\sqrt{6}$.



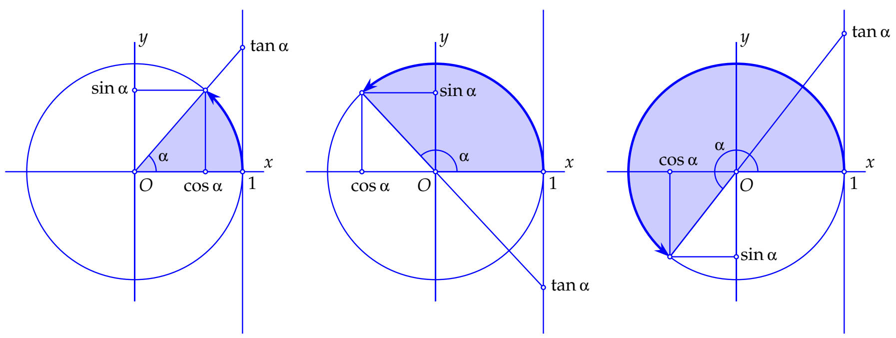
17.22
- a. $\sin\alpha = \frac{1}{5}$
- b. $\cos\alpha = \frac{2}{7}$
- c. $\sin\alpha = \frac{3}{8}$
- d. $\cos\alpha = \frac{2}{5}$
- e. $\cos\alpha = \frac{5}{7}$

17.23
- a. $\sin\alpha = \frac{3}{4}$
- b. $\cos\alpha = \frac{1}{6}$
- c. $\sin\alpha = \frac{1}{8}$
- d. $\cos\alpha = \frac{5}{8}$
- e. $\cos\alpha = \frac{5}{13}$

17.24
- a. $\sin\alpha = \frac{6}{31}$
- b. $\cos\alpha = \frac{4}{23}$
- c. $\sin\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{5}$
- d. $\cos\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{7}$
- e. $\cos\alpha = \frac{1}{4}\sqrt{10}$

De tangens op de raaklijn

Bij een punt op de eenheidscirkel met middelpuntshoek α vind je $\cos\alpha$ en $\sin\alpha$ als projecties op de x-as en de y-as. Maar ook de tangens van α kun je in beeld brengen. Teken daartoe de verticale raaklijn in het punt $(1, 0)$ en snijd de verlengde straal met die lijn. De y-coördinaat van het snijpunt is dan precies gelijk aan $\tan\alpha$. Overigens, dit hangt samen met het feit dat het latijnse woord *tangens* letterlijk *'rakend'* betekent. En het gebruikelijke meervoud van tangens is *tangenten*.



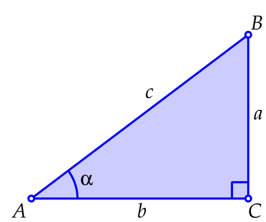
Hierboven is de situatie voor verschillende waarden van α getekend, respectievelijk in het eerste, het tweede en het derde kwadrant. In het tweede kwadrant is de sinus positief en de cosinus negatief, dus $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ is daar negatief. In het derde kwadrant zijn de cosinus en de sinus beide negatief, dus daar is de tangens positief. In het vierde kwadrant (niet getekend) is de cosinus positief, de sinus negatief en de tangens dus ook weer negatief.

Je ziet op deze manier dat voor elke hoek α geldt dat

$$\tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha$$

De rechthoekige driehoek

Als ABC een rechthoekige driehoek is met rechte hoek in C, scherpe hoek α bij A en zijden van lengte a, b en c tegenover respectievelijk A, B en C, dan gelden de volgende betrekkingen. Leer ze uit je hoofd!



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b}$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \textit{(stelling van Pythagoras)}$$

17.25 Leid de volgende formules af. Je kunt daarbij gebruikmaken van de formules op bladzijde 141 en de optelformules van de volgende bladzijde.

a. $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

b. $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

c. $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

d. $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

17.26 Bewijs dat $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ en $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ voor alle x.

17.27 Gebruik de relaties $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$ en $\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}$ om de volgende formules af te leiden.

a. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

b. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

c. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

d. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

De dubbele-hoekformules $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$ (zie boven) kun je ook gebruiken om $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$ te berekenen als je $\cos 2\alpha$ kent:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)} \qquad \text{en} \qquad \cos\alpha = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)}$$

Gebruik dit, en eventueel ook de optelformules, bij de volgende opgaven.

Voorbeeld: $\cos\frac{5}{12}\pi = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\frac{5}{6}\pi)} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}\sqrt{3})} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ want $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en de hoek $\frac{5}{12}\pi$ ligt in het eerste kwadrant, dus de cosinus ervan is positief.

17.28 Bereken exact:

a. $\sin\frac{1}{8}\pi$

b. $\cos\frac{1}{8}\pi$

c. $\tan\frac{1}{8}\pi$

d. $\sin\frac{1}{12}\pi$

e. $\cos\frac{1}{12}\pi$

17.29 Bereken exact:

a. $\sin\frac{3}{8}\pi$

b. $\cos\frac{7}{8}\pi$

c. $\tan\frac{5}{8}\pi$

d. $\sin\frac{7}{12}\pi$

e. $\tan\frac{7}{12}\pi$

17.30 Bereken exact:

a. $\sin\frac{11}{8}\pi$

b. $\cos\frac{17}{12}\pi$

c. $\tan\frac{15}{8}\pi$

d. $\tan\frac{13}{12}\pi$

e. $\cos\frac{13}{8}\pi$

Optelformules en dubbele-hoekformules

Naast de basisformule $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ en de 'symmetrieformules' van bladzijde 141 zijn er nog twee andere fundamentele gonioformules:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

De geldigheid van deze formules illustreren we aan de hand van de onderstaande figuur. Maar eerst leiden we uit de optelformules een aantal andere formules af. In de opgaven hiernaast vragen we je zelf nog enige andere formules af te leiden. *Een volledig formuleoverzicht vind je op bladzijde* **??**.

Als je in de optelformules β vervangt door $-\beta$ krijg je

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

Als je in de optelformules $\alpha = \beta$ neemt, krijg je de *dubbele-hoekformules*:

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\\ \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha\end{aligned}$$

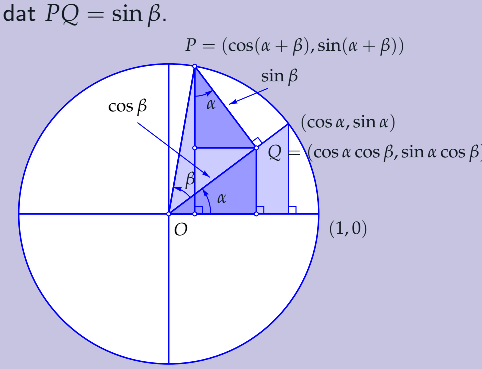
Opgave 17.25a vraagt je de formule voor $\cos 2\alpha$ uit te breiden tot

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

Een meetkundige illustratie van de optelformules

De donkere rechthoekige driehoeken in de figuur hieronder hebben beide een scherpe hoek α. De schuine zijde OQ van de onderste driehoek heeft lengte $\cos\beta$, want OQ is ook een rechthoekszijde van de rechthoekige driehoek OQP met scherpe hoek β en schuine zijde $OP = 1$. Evenzo geldt dat $PQ = \sin\beta$.

Omdat de schuine zijde OQ van de onderste donkere driehoek lengte $\cos\beta$ heeft, zijn de lengten van de rechthoekszijden $\cos\alpha\cos\beta$ (horizontale zijde) en $\sin\alpha\cos\beta$ (verticale zijde). Evenzo hebben de rechthoekszijden van de bovenste donkere driehoek een lengte van $\cos\alpha\sin\beta$ (verticaal) en $\sin\alpha\sin\beta$ (horizontaal).



De x-coördinaat van het punt P is nu enerzijds gelijk aan $\cos(\alpha+\beta)$, want P hoort bij een draaiingshoek van $\alpha+\beta$, en anderzijds gelijk aan $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ (het verschil van de horizontale rechthoekszijden van de donkere driehoeken). Dit levert de eerste optelformule. De tweede optelformule volgt op analoge wijze uit het feit dat de y-coördinaat van P de som is van de lengten van de verticale rechthoekszijden van de donkere driehoeken.

Uit de tekening van de eenheidscirkel en de tabel op bladzijde 141 volgt dat alle oplossingen van de vergelijking $\sin x = \frac{1}{2}$ geschreven kunnen worden als $x = \frac{1}{6}\pi + 2k\pi$ of als $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ voor een gehele waarde van k. Geef op een dergelijke wijze alle oplossingen van de volgende vergelijkingen. Gebruik daarbij steeds de eenheidscirkel en de tabel op bladzijde 141.

17.31
a. $\sin x = -\frac{1}{2}$
b. $\cos x = \frac{1}{2}$
c. $\tan x = -1$

17.32
a. $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
b. $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
c. $\tan x = -\sqrt{3}$

17.33
a. $\tan x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
b. $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
c. $\cos x = 0$

Schets de grafiek van de volgende functies. Een ruwe schets is voldoende. Geef wel altijd de periodelengte aan alsmede de snijpunten van de grafiek met de de x-as.

17.34
a. $\sin(-x)$
b. $\cos(-x)$
c. $\tan(-x)$
d. $\cos(x + \frac{1}{2}\pi)$
e. $\sin(x - \frac{1}{2}\pi)$

17.35
a. $\tan(x + \frac{1}{2}\pi)$
b. $\cos(x - \frac{1}{6}\pi)$
c. $\sin(x + \frac{2}{3}\pi)$
d. $\cos(x - \frac{5}{4}\pi)$
e. $\tan(x - \frac{1}{3}\pi)$

17.36
a. $\tan(x + \frac{1}{6}\pi)$
b. $\cos(x - 3\pi)$
c. $\sin(x + \frac{20}{3}\pi)$
d. $\cos(x - \frac{15}{4}\pi)$
e. $\tan(x - \frac{17}{6}\pi)$

17.37
a. $\sin(\frac{3}{2}\pi - x)$
b. $\cos(\frac{1}{4}\pi + x)$
c. $\tan(\frac{2}{3}\pi - x)$
d. $\cos(\frac{5}{3}\pi + x)$
e. $\sin(\frac{1}{3}\pi - x)$

17.38
a. $\tan(2x)$
b. $\cos(3x)$
c. $\sin(\frac{2}{3}x)$
d. $\cos(\frac{5}{4}x)$
e. $\tan(8x)$

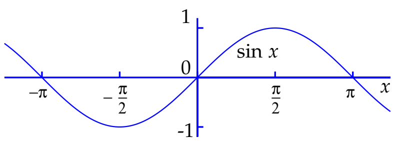
17.39
a. $\tan(3x + \frac{1}{6}\pi)$
b. $\cos(2x - 3\pi)$
c. $\sin(2x + \frac{20}{3}\pi)$
d. $\cos(\frac{1}{2}x - \frac{15}{4}\pi)$
e. $\tan(\frac{1}{3}x - \frac{17}{6}\pi)$

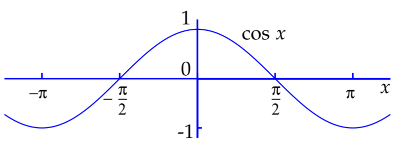
17.40
a. $\sin(2\pi x)$
b. $\cos(3\pi x)$
c. $\tan(\pi x)$
d. $\cos(2\pi x + \frac{1}{2}\pi)$
e. $\sin(2\pi x - \frac{1}{3}\pi)$

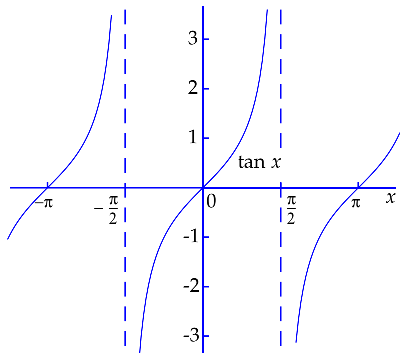
17.41
a. $\tan(6\pi x + \pi)$
b. $\cos(4\pi x - 7\pi)$
c. $\sin(2\pi x + \frac{2}{3}\pi)$
d. $\cos(\frac{5}{4}\pi x - \pi)$
e. $\tan(\frac{1}{3}\pi x + 2\pi)$

17.42
a. $\tan(\pi x + \frac{1}{6}\pi)$
b. $\cos(\frac{1}{2}\pi x - 3\pi)$
c. $\sin(7\pi x + \frac{2}{3}\pi)$
d. $\cos(5\pi x - \frac{5}{4}\pi)$
e. $\tan(\frac{3}{4}\pi x - \frac{7}{6}\pi)$

Grafieken van goniometrische functies







Hierboven zijn de grafieken getekend van de functies $\sin x$, $\cos x$ en $\tan x$, met x in radialen. Die functies zijn *periodiek*: de sinus en de cosinus met periode 2π, de tangens met periode π. De tangens heeft verticale asymptoten voor $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ met k geheel, want voor die waarden van x is de cosinus nul, en dan is $\tan x = (\sin x)/(\cos x)$ dus niet gedefinieerd. Neem bijvoorbeeld de asymptoot $x = \frac{\pi}{2}$. Als x *van onderen* tot $\frac{\pi}{2}$ nadert, gaat $\tan x$ naar $+\infty$, maar als x *van boven* tot $\frac{\pi}{2}$ nadert, gaat $\tan x$ naar $-\infty$. Notatie:

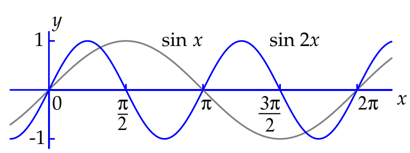
$$\lim_{x \uparrow \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty \qquad \text{en} \qquad \lim_{x \downarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$$

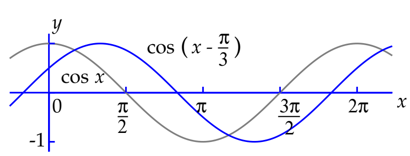
De symmetrie-eigenschappen van de sinus, de cosinus en de tangens (zie bladzijde 141) zie je ook terug in de grafieken. Ter herinnering:

$$\sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = \cos x, \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

Hiernaast staan voorbeelden getekend van twee veelgebruikte transformaties. In de bovenste figuur vind je behalve de grafiek van de functie $\sin x$ (zwart) ook die van $\sin 2x$ (blauw). De sinusgrafiek is in horizontale richting als het ware met een factor 2 samengedrukt. De periode is twee maal zo klein geworden: π in plaats van 2π.

De onderste tekening toont naast de grafiek van $\cos x$ (zwart) ook die van de functie $\cos(x - \frac{\pi}{3})$ (blauw). De cosinusgrafiek is nu in horizontale richting over een afstand van $\frac{\pi}{3}$ naar rechts verschoven.





Bereken exact:

17.43

a. $\arcsin -1$

b. $\arccos 0$

c. $\arctan -1$

d. $\arcsin \frac{1}{2}\sqrt{2}$

e. $\arccos -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

17.44

a. $\arctan -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

b. $\arccos -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

c. $\arcsin \frac{1}{2}\sqrt{3}$

d. $\arctan -\sqrt{3}$

e. $\arccos -1$

17.45

a. $\arctan(\tan \pi)$

b. $\arccos(\cos -\pi)$

c. $\arcsin(\sin 3\pi)$

d. $\arcsin(\sin \frac{2}{3}\pi)$

e. $\arctan(\tan \frac{5}{4}\pi)$

17.46 Stel $\alpha = \arcsin \frac{1}{3}$. Bereken exact:

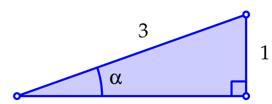
a. $\cos \alpha$

b. $\tan \alpha$

c. $\sin 2\alpha$

d. $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$

e. $\cos \frac{1}{2}\alpha$



Bereken de exacte waarde van de volgende uitdrukkingen. Teken zo nodig als hulpfiguur een geschikt gekozen rechthoekige driehoek.

17.47

a. $\sin(\arcsin -\frac{5}{7})$

b. $\sin(\arccos 0)$

c. $\tan(\arctan \frac{3}{4})$

d. $\cos(\arctan 1)$

e. $\sin(\arctan -1)$

17.48

a. $\cos(\arcsin \frac{3}{5})$

b. $\sin(\arccos \frac{2}{3})$

c. $\cos(-\arctan \frac{3}{4})$

d. $\tan(\arcsin \frac{5}{7})$

e. $\sin(\arctan -4)$

17.49 Bereken

a. $\arcsin(\cos \frac{1}{5}\pi)$ *Hint:* gebruik dat $\cos \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

b. $\arccos(\sin \frac{3}{7}\pi)$

c. $\arcsin(\cos \frac{2}{3}\pi)$

d. $\arcsin(\cos \frac{7}{5}\pi)$

e. $\arctan(\tan \frac{9}{5}\pi)$

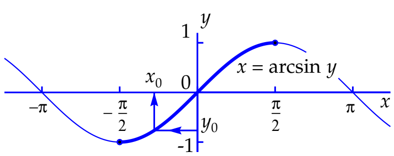
De arcsinus, de arccosinus en de arctangens

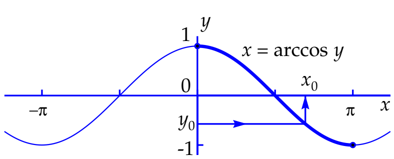
Wanneer we van een (in radialen gemeten) hoek x weten dat $\sin x = \frac{1}{2}$, dan zijn er voor x nog oneindig veel mogelijkheden open. De sinus is namelijk een periodieke functie, en bovendien wordt elke waarde (behalve 1 en -1) gedurende één periode twee maal aangenomen. Zo geldt $\sin x = \frac{1}{2}$ als $x = \frac{1}{6}\pi$ en als $x = \frac{5}{6}\pi$ en bij elk van die hoeken kunnen we nog willekeurige gehele veelvouden van 2π optellen.

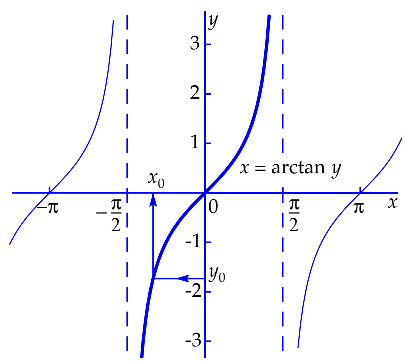
Al die keuzemogelijkheden verdwijnen echter wanneer we *afspreken* dat we x beperken tot het interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dat wil zeggen $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. In de figuur hieronder is het desbetreffende grafiekdeel dik gemaakt.

Voor de cosinus en de tangens, waarvoor soortgelijke problemen spelen, heeft men eveneens zulke voorkeursintervallen afgesproken: $[0, \pi]$ bij de cosinus, en $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ bij de tangens.

Wanneer er nu een waarde y_0 gegeven is, is er steeds precies één x_0 in het voorkeursinterval waarvoor respectievelijk geldt dat $\sin x_0 = y_0$, $\cos x_0 = y_0$ of $\tan x_0 = y_0$. In de figuur hieronder is aangegeven hoe je bij zo'n y_0 de bijbehorende x_0 vindt.







De bijbehorende functies heten respectievelijk de arcsinus, de arccosinus en de arctangens. Ze worden meestal afgekort tot arcsin, arccos en arctan. Je vindt ze ook op je rekenmachine, soms onder de namen $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ en $\tan^{-1}$.

Er geldt dus:

$$\begin{array}{lclcl} x = \arcsin y & \iff & y = \sin x & \text{en} & -\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi \\ x = \arccos y & \iff & y = \cos x & \text{en} & 0 \leq x \leq \pi \\ x = \arctan y & \iff & y = \tan x & \text{en} & -\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi \end{array}$$

Schets de grafiek van de volgende functies. Een ruwe schets is voldoende. Ga daarbij eerst na voor welke waarden van x de functie gedefinieerd is, en welke functiewaarden de functie daarbij kan aannemen. Let ook op de snijpunten met de coördinaatassen en op eventuele asymptoten.

17.50

a. $\arcsin 2x$

b. $\arccos 2x$

c. $\arctan -x$

d. $\arcsin -2x$

e. $\arccos -\frac{1}{3}x$

17.51

a. $\arcsin \frac{1}{3}x$

b. $\arccos -\frac{1}{2}x$

c. $\arctan -3x$

d. $\arcsin(1-x)$

e. $\arccos(1+x)$

17.52 Bereken de volgende limieten:

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan 2x$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan -\frac{1}{5}x$

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x+3)$

d. $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan(2-5x)$

e. $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x^2)$

17.53 Schets de grafiek van de volgende functies:

a. $\arctan(-3x+1)$

b. $\arcsin(1-2x)$

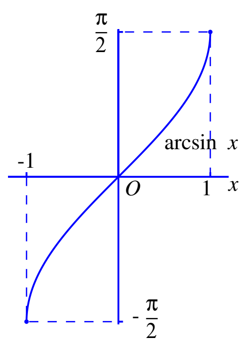
c. $\frac{1}{2}\pi + \arcsin x$

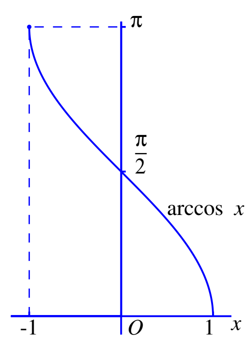
d. $\arctan(1-x^2)$

e. $\arctan \frac{1}{x}$

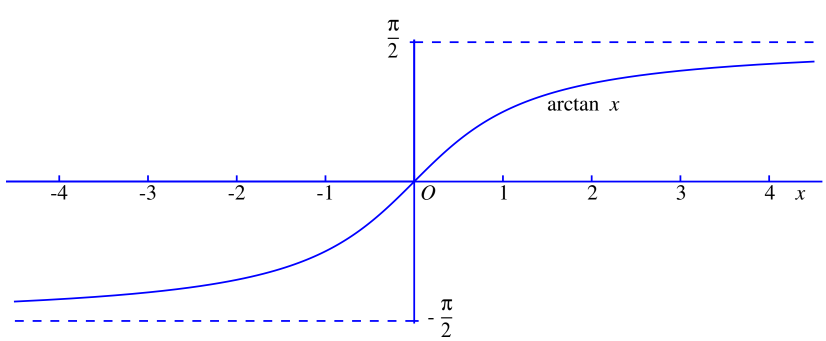
De grafieken van de arcsinus, de arccosinus en de arctangens

De functies $\arcsin x$ en $\arccos x$ hebben beide als domein het gesloten interval $-1 \leq x \leq 1$. Hun grafieken kun je afleiden uit de grafieken op bladzijde 149 door de dikgekleurde delen te spiegelen in de lijn $y = x$. Hieronder zie je het resultaat.





Op dezelfde manier krijg je de grafiek van de functie $\arctan x$. Die functie is voor *alle* waarden van x gedefinieerd. De grafiek heeft twee horizontale asymptoten: de lijnen $y = -\frac{1}{2}\pi$ en $y = \frac{1}{2}\pi$.



De betekenis van de beide horizontale asymptoten is als volgt. De functie $\arctan x$ nadert voor $x \to \infty$ steeds meer tot de *limietwaarde* $\frac{1}{2}\pi$. In formule: $\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{1}{2}\pi$. En $\arctan x$ nadert voor $x \to -\infty$ steeds meer tot de limietwaarde $-\frac{1}{2}\pi$. In formule: $\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{1}{2}\pi$.

Bereken de volgende limieten met behulp van de standaardlimiet van de volgende bladzijde. We geven twee voorbeelden.

Voorbeeld 1:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \times 3 = 3 \times \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 3 \times 1 = 3$$

Bij het tweede gelijkteken hebben we $y = 3x$ gesteld. Als $x \to 0$ dan geldt $y \to 0$ en omgekeerd.

Voorbeeld 2:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \times \frac{4x}{\sin 4x} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{4} \times \frac{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{4x}} = \frac{5}{4} \times \frac{1}{1} = \frac{5}{4}$$

17.54

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin 2x}$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan x}$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{\sin 3x}$

d. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{x \cos x}$

e. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{\sin 3x}$

17.55

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 4x}{x \sin x}$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{3x^2}$

d. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$

e. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sin x \tan 3x}$

Bereken de volgende limieten met behulp van een geschikt gekozen substitutie. Voor de eerste drie limieten kun je bijvoorbeeld $y = x - \pi$, $y = x - \frac{\pi}{2}$, respectievelijk $y = \arcsin x$ kiezen. Op die manier kun je zo'n limiet weer terugvoeren op een limiet waarin de standaardlimiet optreedt.

17.56

a. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{x-\pi}$

b. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{2x-\pi}$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{3x}$

d. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\pi}{2} - \arccos x}{x}$

e. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$

17.57

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{\arctan x}$

b. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sin 2\pi x}{\tan 3\pi x}$

c. $\lim\limits_{x\to \infty} x \sin \dfrac{1}{x}$

d. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arctan(x-1)}{x-1}$

e. $\lim\limits_{x\to -\infty} \cos \dfrac{1}{x}$

Een standaardlimiet

Een belangrijke limiet in toepassingen van de goniometrie is

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

die betekent dat voor kleine waarden van x het quotiënt $\dfrac{\sin x}{x}$ vrijwel gelijk is aan 1; hoe dichter x bij nul ligt, des te dichter ligt het quotiënt bij 1. Een andere manier om hetzelfde te zeggen, is dat $\sin x$ voor kleine hoeken x (gemeten in radialen!) vrijwel gelijk is aan x, dus dat $\sin x \approx x$ als x klein is. Je kunt dat ook zien in de grafiek van de sinus op bladzijde 147, die voor kleine waarden van x vrijwel samenvalt met de lijn $y = x$. Een afleiding van die limiet vind je hieronder.

Een veel gebruikte toepassing hiervan is de volgende limiet:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

Het bewijs ervan gaat als volgt:

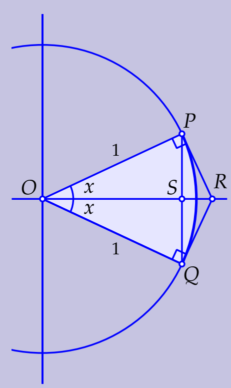
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x} = 1 \times 1 = 1$$

want $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$.

Een meetkundig bewijs van de standaardlimiet

Omdat geldt dat $\frac{\sin(-x)}{(-x)} = \frac{\sin x}{x}$ is het voldoende om alleen positieve waarden van x te bekijken.

In de tekening zie je een sector OQP van de eenheidscirkel met een middelpuntshoek $2x$ waarin ook nog de koorde PQ en de raaklijnen PR en QR getekend zijn. Boog PQ heeft lengte $2x$. Verder geldt $PS = \sin x$ en $PR = \tan x$. Omdat de directe verbindingslijn PQ korter is dan de cirkelboog PQ, die op zijn beurt weer korter is dan de omweg $PR + RQ$, geldt $2\sin x < 2x < 2\tan x$. Uit de eerste ongelijkheid volgt $\frac{\sin x}{x} < 1$ en uit de tweede volgt $\frac{\sin x}{x} > \cos x$, want $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Combinatie van deze beide ongelijkheden geeft



$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

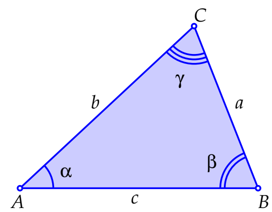
Als x naar nul gaat, gaat $\cos x$ naar 1, en voor het quotiënt $\frac{\sin x}{x}$, dat opgesloten zit tussen $\cos x$ en 1, moet dus hetzelfde gelden. Hiermee is het bewijs geleverd.

17.58 Hieronder zijn telkens enige zijden en/of hoeken van een driehoek gegeven. Bereken met behulp van je rekenmachine de gevraagde hoek of zijde en vervolgens ook de oppervlakte O van de driehoek. Geef je antwoord in vier decimalen nauwkeurig (geef hoeken in radialen).

a. $\alpha = 43°$, $\beta = 82°$, $a = 3$. Bereken b en O.
b. $\alpha = 113°$, $\beta = 43°$, $b = 2$. Bereken a en O.
c. $\alpha = 26°$, $\beta = 93°$, $a = 4$. Bereken c en O.
d. $\alpha = 76°$, $a = 5$, $c = 3$. Bereken γ en O.
e. $\beta = 36°$, $a = 2$, $b = 4$. Bereken α en O.
f. $\beta = 1.7$ rad, $a = 3$, $b = 4$. Bereken γ en O.
g. $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$. Bereken γ en O.
h. $a = 5$, $b = 5$, $c = 6$. Bereken α en O.
i. $\beta = 0.75$ rad, $b = 6$, $c = 5$. Bereken a en O.
j. $\alpha = 71°$, $b = 2$, $c = 3$. Bereken a en O.
k. $\alpha = 58°$, $a = 6$, $b = 5$. Bereken c en O.

Driehoeksmeting

Als ABC een willekeurige driehoek met hoeken α, β en γ bij A, B en C, zijden van lengte a, b en c tegenover A, B en C, en oppervlakte O is, dan gelden de volgende betrekkingen:



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \qquad (\textit{sinusregel})$$

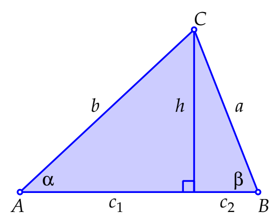
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \qquad (\textit{cosinusregel})$$

$$O = \tfrac{1}{2}bc\sin\alpha = \tfrac{1}{2}ca\sin\beta = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma \qquad (\textit{oppervlakteformule})$$

Bewijs van de sinusregel:

$h = b\sin\alpha = a\sin\beta$ dus $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$

en evenzo $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$.



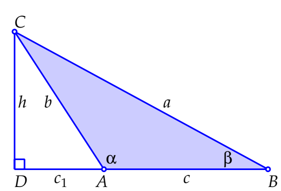
Bewijs van de oppervlakteformule:

$O = \frac{1}{2}hc = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, et cetera.

Bewijs van de cosinusregel:

$a^2 = h^2 + c_2^2 = (b^2 - c_1^2) + (c - c_1)^2 = b^2 + c^2 - 2c_1c = b^2 + c^2 - 2bc\,\cos\alpha$

In het geval dat hoek α een stompe hoek is, zijn de bewijzen van de sinusregel en de oppervlakteformule letterlijk hetzelfde. Voor dat van de cosinusregel moet je een kleine aanpassing uitvoeren (zie de figuur hiernaast).



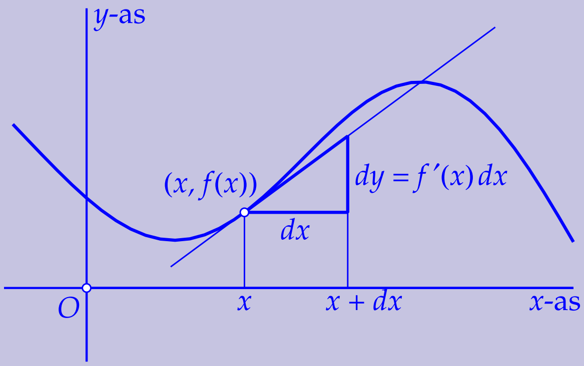
Noem $AD = c_1$ en $BD = c_2$. Dan is $c = AB = c_2 - c_1$ en $b = -c_1\cos\alpha$ want omdat $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ is, is $\cos\alpha$ negatief. Er geldt dus:

$a^2 = h^2 + c_2^2 = (b^2 - c_1^2) + (c + c_1)^2 = b^2 + c^2 + 2c_1c = b^2 + c^2 - 2bc\,\cos\alpha$

waarmee ook in dit geval de cosinusregel bewezen is.

In het geval dat α een rechte hoek is, is de cosinusregel niets anders dan de stelling van Pythagoras, nu in de vorm $a^2 = b^2 + c^2$.

VII Calculus



De differentiaalrekening en de integraalrekening – in de Amerikaanse literatuur samen vaak kortweg met de term 'calculus' aangeduid als afkorting van *differential and integral calculus* – behoren ongetwijfeld tot de meest succesvolle onderdelen van de wiskunde. Toepassingen ervan strekken zich uit van sterrenkunde tot nanotechnologie, van civiele techniek tot quantummechanica, van natuur- en scheikunde tot economie, van kansrekening en statistiek tot populatiedynamica.

Wij behandelen in dit boek voornamelijk de wiskundige techniek. Toch spelen toepassingen op de achtergrond een belangrijke rol: onze behandeling is zo ingericht dat daar een optimale basis voor wordt gelegd. Daarom wordt veel aandacht besteed aan het werken met differentialen, want die zijn in vrijwel alle toepassingen het aangrijpingspunt voor wiskundige modelvorming.

20 Differentiëren

Op bladzijde 179 staan vijf rekenregels voor differentiëren. Bij de opgaven op deze bladzijde heb je alleen de eerste twee nodig:

$$\begin{aligned} (c\,f(x))' &= c\,f'(x) \quad \text{voor elke constante } c \\ (f(x)+g(x))' &= f'(x)+g'(x) \end{aligned}$$

Verder moet je weten dat voor elk reëel getal p geldt dat $(x^p)' = p\,x^{p-1}$. Bereken nu de afgeleide van de volgende functies.

20.1
- a. $2x - 3$
- b. 2
- c. $4x^2 + 1$
- d. $10\,x^7$
- e. $4x + x^3$

20.2
- a. $x^3 - 3$
- b. $x^2 - 2x + 1$
- c. $x^4 - 3x^3 + 2$
- d. $8x^8$
- e. $x^6 - 6x^4$

20.3
- a. $4x^4 - 3x^2 + 2$
- b. $2000\,x^{2000}$
- c. $7x^7 - 6x^6$
- d. $x^3 + 7x^7 - 12$
- e. $x^2 - 5x^3 + x$

20.4
- a. $\sqrt{x}$
- b. $x\sqrt{x}$

  Hint: $x\sqrt{x} = x^{3/2}$
- c. $\sqrt{x^3}$
- d. $x^2\sqrt{x}$
- e. $\sqrt{2x}$

  Hint: $\sqrt{2x} = \sqrt{2}\sqrt{x}$

20.5
- a. $\sqrt[3]{x}$
- b. $x^{2/3}$
- c. $\sqrt[4]{x}$
- d. $x\sqrt[4]{x}$
- e. $x^2\sqrt[5]{x^2}$

20.6
- a. $\sqrt[7]{x^2}$
- b. $\sqrt{3x^3}$
- c. $\sqrt[3]{2x^5}$
- d. $\sqrt[4]{x^5}$
- e. $\sqrt{x^7}$

20.7
- a. x^{-1}
- b. $2x^{-2}$
- c. $3x^{-3}$
- d. $x^{-1/2}$
- e. $x^{-2/3}$

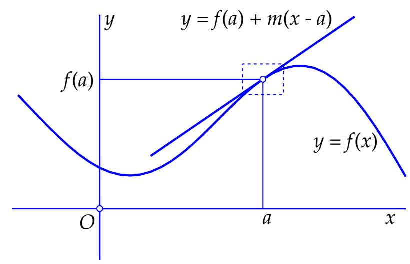
20.8
- a. $x^{2.2}$
- b. $x^{4.7}$
- c. $x^{-1.6}$
- d. $x^{0.333}$
- e. $x^{-0.123}$

20.9
- a. $\dfrac{1}{x}$
- b. $\dfrac{3}{2x}$
- c. $\dfrac{5}{x^5}$
- d. $\dfrac{\sqrt{x}}{x}$
- e. $\dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}$

Raaklijn en afgeleide

De grafieken van veel functies hebben in alle of bijna alle punten een 'glad' verloop: als je steeds sterker op zo'n punt inzoomt, gaat de grafiek steeds meer op een rechte lijn lijken. Die lijn is de raaklijn aan de grafiek in dat punt.

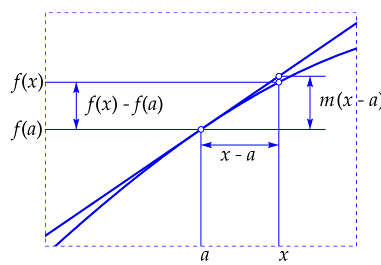
Hiernaast is de grafiek van zo'n functie $f(x)$ getekend, met daarbij ook de raaklijn in het punt $(a, f(a))$. Vlak in de buurt van dat punt zijn grafiek en raaklijn inderdaad nauwelijks van elkaar te onderscheiden. Als illustratie hiervan hebben we het kleine rechthoekje rond het punt $(a, f(a))$ in de figuur eronder nog eens vergroot weergegeven.



Als de raaklijn niet verticaal is, kan de vergelijking ervan worden geschreven als $y = f(a) + m(x - a)$ voor een zekere m, de richtingscoëfficiënt van de raaklijn. Voor x vlak bij a geldt dan blijkbaar dat

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \approx \frac{m(x - a)}{x - a} = m$$

en die gelijkenis is beter naarmate x dichter bij a ligt.



Preciezer geformuleerd, met behulp van een limiet:

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Men noemt m de *afgeleide* van $f(x)$ in a, en gebruikt daarvoor de notatie $f'(a)$.

Wanneer een functie $f(x)$ in alle punten van een interval een niet-verticale raaklijn heeft, is er dus in elk punt x van dat interval een afgeleide $f'(x)$ gedefinieerd. Daarmee is de afgeleide op dat interval zelf een functie geworden, de *afgeleide functie*. Veel gebruikte notaties voor de afgeleide functie van $f(x)$ zijn naast $f'(x)$ ook $\dfrac{df}{dx}(x)$ en $\dfrac{d}{dx}f(x)$.
Het bepalen van de afgeleide van een gegeven functie heet *differentiëren*.

Overigens, als $f(x)$ een *lineaire* functie is, dus $f(x) = mx + c$, dan is de grafiek een rechte lijn met richtingscoëfficiënt m en dan valt de raaklijn in elk punt met de grafiek samen. Voor elke x geldt dan $f'(x) = m$. In het bijzonder is de afgeleide van elke constante functie nul.

Bereken met behulp van de kettingregel de afgeleide van de volgende functies. *Voorbeelden:*

1. $\left((x^3-1)^5\right)' = 5(x^3-1)^4 \cdot 3x^2 = 15x^2(x^3-1)^4$
2. $\left(\sin(x^2+1)\right)' = (\cos(x^2+1)) \cdot 2x = 2x\cos(x^2+1)$

Let op: het is bij het toepassen van de kettingregel op een samengestelde functie $f(g(x))$ *niet* handig om de functies f en g eerst apart op te schrijven! Je moet gewoon terwijl je differentieert de samengestelde functie $f(g(x))$ *van buiten naar binnen toe* afpellen zoals dat hierboven ook gedaan is. Vaak kun je je antwoord daarna nog wat vereenvoudigen.

20.10
- a. $(2+3x)^3$
- b. $(3-5x)^7$
- c. $(1-3x^2)^{-1}$
- d. $(1-\sqrt{x})^4$
- e. $(x-x^4)^{-2}$

20.11
- a. $(2x-3)^5$
- b. $(x^2+5)^{-1}$
- c. $\sqrt{3x-4}$
- d. $\sqrt{x^2+x}$
- e. $(x+4x^3)^{-3}$

20.12
- a. $\sqrt{1+x+x^2}$
- b. $\sqrt[3]{1+x+x^2}$
- c. $(x^2-1)^4$
- d. $\sqrt{x^3+1}$
- e. $(x^2+x)^{3/2}$

Bereken met behulp van de productregel de afgeleide van:

20.13
- a. $x\sin x$
- b. $x\cos 2x$
- c. $x^2\ln x$
- d. $(x+1)\tan x$
- e. $(2x+1)\ln x$

20.14
- a. $\sqrt{x+1}\ln x$
- b. $(\sin x)(\ln x^2)$
- c. $x\ln\sqrt[3]{x}$
- d. $x\ln(\sin x)$
- e. $\sqrt{x}\ln(1-x^2)$

20.15
- a. $x\,({}^2\log x)$
- b. $\sqrt{x}\,({}^5\log x^3)$
- c. $(x-1)({}^2\log x)$
- d. $x\mathrm{e}^{-x}$
- e. $x^2\mathrm{e}^{-x^2}$

Bereken met behulp van de quotiëntregel de afgeleide van:

20.16
- a. $\dfrac{x}{x+1}$
- b. $\dfrac{x-1}{x+1}$
- c. $\dfrac{x^2}{x+1}$
- d. $\dfrac{x}{x^2+1}$
- e. $\dfrac{x-1}{x^2+x}$

20.17
- a. $\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$
- b. $\dfrac{x^2-1}{x+2}$
- c. $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
- d. $\dfrac{2x-3}{4x+1}$
- e. $\dfrac{1-x}{2-x}$

20.18
- a. $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$
- b. $\dfrac{\cos x}{x+1}$
- c. $\dfrac{\arcsin x}{x+1}$
- d. $\dfrac{\ln x}{\sin x}$
- e. $\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$

Rekenregels en standaardafgeleiden

Rekenregels voor differentieerbare functies:

$$
\begin{aligned}
(c\,f(x))' &= c\,f'(x) \quad \text{voor elke constante } c \\
(f(x)+g(x))' &= f'(x)+g'(x) \\
(f(g(x)))' &= f'(g(x))g'(x) \quad \text{(kettingregel)} \\
(f(x)g(x))' &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \quad \text{(productregel)} \\
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad \text{(quotiëntregel)}
\end{aligned}
$$

Standaardfuncties en hun afgeleiden:

$f(x)$	$f'(x)$	
x^p	$p\,x^{p-1}$	voor elke p
a^x	$a^x\ \ln a$	voor elke $a > 0$
$\mathrm{e}^{\,x}$	$\mathrm{e}^{\,x}$	
${}^a\!\log x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	voor elke $a > 0, a \neq 1$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	

Bereken de afgeleide van de volgende functies:

20.19
a. $\sin(x-3)$
b. $\cos(2x+5)$
c. $\sin(3x-4)$
d. $\cos(x^2)$
e. $\sin\sqrt{x}$

20.20
a. $\tan(x+2)$
b. $\tan(2x-4)$
c. $\sin(x^2-1)$
d. $\cos(1/x)$
e. $\tan\sqrt[3]{x}$

20.21
a. $\arcsin 2x$
b. $\arcsin(x+2)$
c. $\arccos(x^2)$
d. $\arctan\sqrt{x}$
e. $\ln(\cos x)$

20.22
a. e^{2x+1}
b. e^{1-x}
c. $2\mathrm{e}^{-x}$
d. $3\mathrm{e}^{1-x}$
e. e^{x^2}

20.23
a. e^{x^2-x+1}
b. e^{1-x^2}
c. $3\mathrm{e}^{3-x}$
d. $2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$
e. $\mathrm{e}^{1+\sqrt{x}}$

20.24
a. 2^{x+2}
b. 3^{1-x}
c. 2^{2-3x}
d. 5^{x^2}
e. $3^{\sqrt[3]{x}}$

20.25
a. $\ln(1-2x)$
b. $\ln(3x^2-8)$
c. $\ln(3x-4x^2)$
d. $\ln(x^3+x^6)$
e. $\ln(x^2+1)$

20.26
a. $\ln\sqrt{x+1}$
b. $\ln x^2$
c. $\ln\sqrt[3]{x}$
d. $\ln\sqrt[3]{1-x}$
e. $\ln(4-x)^2$

20.27
a. ${}^{2}\log x$
b. ${}^{3}\log x^3$
c. ${}^{10}\log(x+1)$
d. ${}^{10}\log\sqrt{x+1}$
e. ${}^{2}\log(x^2+x+1)$

Onderzoek bij de volgende functies voor welke x ze wel gedefinieerd, maar niet differentieerbaar zijn. Een ruwe schets van de grafiek kan je daarbij helpen!

20.28
a. $f(x) = |x-1|$
b. $f(x) = |x^2-1|$
c. $f(x) = \sqrt{|x|}$
d. $f(x) = |\ln(x-1)|$
e. $f(x) = \mathrm{e}^{|x|}$

20.29
a. $f(x) = \sin|x|$
b. $f(x) = \cos|x|$
c. $f(x) = |\sin x|$
d. $f(x) = \sin\sqrt[3]{x}$
e. $f(x) = \ln(1+\sqrt{x})$

Bepaal die vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van $f(x)$ in het punt $(a, f(a))$ in de volgende gevallen (zie bladzijde 177):

20.30
a. $f(x) = 2x^2-3,\quad a=1$
b. $f(x) = x^5-3x^2+3,\quad a=-1$
c. $f(x) = 4x^3+2x-3,\quad a=0$
d. $f(x) = 8x^4-x^7,\quad a=2$
e. $f(x) = 4x-2x^2+x^3,\quad a=-1$

20.31
a. $f(x) = x^2-3x^{-1},\quad a=1$
b. $f(x) = x^2-3\sqrt{x}-3,\quad a=4$
c. $f(x) = x^3+x-3,\quad a=0$
d. $f(x) = x^{-4}-2,\quad a=1$
e. $f(x) = 8x-2x^2,\quad a=-3$

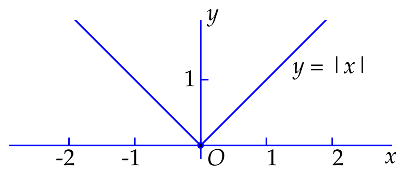
Differentieerbaarheid

In de vorige paragraaf is $f'(a)$ gedefinieerd als

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Het getal $f'(a)$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van $f(x)$ in het punt $(a, f(a))$. Die limiet moet dan wel bestaan en bovendien eindig zijn, want we hebben aangenomen dat de raaklijn niet verticaal is. Wanneer aan deze beide voorwaarden voldaan is, heet $f(x)$ *differentieerbaar* in a.

Niet elke functie is differentieerbaar in elk punt. Zo is bijvoorbeeld de functie $f(x) = |x|$ niet differentieerbaar in 0 omdat $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ gelijk is aan 1 als $x > 0$ is, en gelijk is aan -1 als $x < 0$ is. De limiet voor $x \to 0$ bestaat dus niet. Ook aan de grafiek is dat te zien: die heeft in de oorsprong een knikpunt. Bij het inzoomen blijft die knik altijd zichtbaar aanwezig.

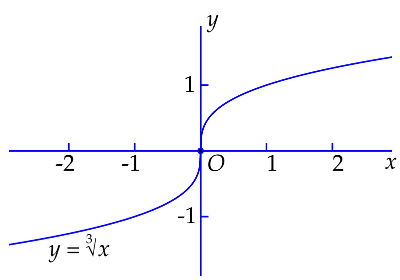


Maar ook als er wél een raaklijn is, hoeft een functie niet differentieerbaar te zijn, want zo'n raaklijn kan verticaal zijn. De limiet waarmee de afgeleide gedefinieerd wordt, is dan plus of min oneindig.

Zo is de de raaklijn aan de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in de oorsprong verticaal, en inderdaad is

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

Voor $x = 0$ is de functie $f(x) = \sqrt[3]{x}$ dus niet differentieerbaar.



Bereken de tweede afgeleide van de volgende functies.

20.32

a. $\sqrt{x+1}$

b. $\dfrac{x-1}{x+1}$

c. $\ln(x^2+1)$

d. $x\ln x$

e. $x\sin x$

f. $x^2\cos 2x$

20.33

a. $\sin(\sqrt{x})$

b. $\tan x$

c. $\arctan x$

d. $x\sqrt{x-1}$

e. $\dfrac{\sin x}{x}$

f. $\sin^2 x$

Bereken de tiende afgeleide van de volgende functies. Probeer daarbij eerst een patroon te ontdekken in de opvolgende afgeleiden.

20.34

a. x^9

b. x^{10}

c. x^{11}

d. e^{-x}

e. e^{2x}

f. e^{x+1}

20.35

a. $\dfrac{1}{x+1}$

b. $\ln x$

c. $\sin 2x$

d. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

e. $x\mathrm{e}^{x}$

f. $x\mathrm{e}^{-x}$

Hogere afgeleiden

Wanneer een functie $f(x)$ differentieerbaar is in alle punten van een interval, kan de afgeleide functie ook weer een differentieerbare functie zijn. De afgeleide van de afgeleide heet dan de *tweede afgeleide*. Gebruikelijke notaties daarvoor zijn $f''(x)$, $\dfrac{d^2f}{dx^2}(x)$ en $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$. (Let bij de laatste twee notaties op de verschillende plaatsing van de 'exponent' 2 in de 'teller' en de 'noemer'!)

Zo kunnen we doorgaan en de n-de afgeleide van een functie definiëren als de afgeleide van de $(n-1)$-e afgeleide wanneer die laatste een differentieerbare functie is. In het algemeen wordt voor de n-de afgeleide met $n > 2$ meestal een van de volgende notaties gebruikt: $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^nf}{dx^n}(x)$ of $\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$.

Sommige functies kunnen net zo vaak gedifferentieerd worden als we willen: voor elke n bestaat de n-de afgeleide. Men noemt zulke functies *oneindig vaak differentieerbaar*. We geven enige voorbeelden.

a. $f(x) = x^n$, waarbij n een positief geheel getal is.
Dan is $f'(x) = nx^{n-1}$, $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$ enzovoort. De exponent daalt bij elke stap met 1, en de n-de afgeleide is een constante, namelijk $n!$ (n-faculteit, zie bladzijde 57). Alle hogere afgeleiden zijn nul.

b. $f(x) = \mathrm{e}^x$. Dan is $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$ voor elke n.

c. $f(x) = \sin x$. Dan is $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$ enzovoort.

d. $f(x) = \cos x$. Dan is $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f^{(3)}(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$ enzovoort.

e. $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Omdat we $f(x)$ ook kunnen schrijven als $f(x) = x^{-1}$ zijn de hogere afgeleiden gemakkelijk te bepalen:
$f'(x) = (-1)x^{-2} = -x^{-2}$,
$f''(x) = (-1)(-2)x^{-3} = 2!x^{-3}$,
$f^{(3)}(x) = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = -3!x^{-4}$ enzovoort.

f. $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Dan is $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$,
$f''(x) = (\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$,
$f^{(3)}(x) = (\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$ enzovoort.

Geef bij elk van de volgende functies de eventuele nulpunten van de afgeleide en de intervallen waarop de functie monotoon stijgend of dalend is.

20.36

a. $x^3 + 1$

b. $x^4 - 4x^3 + 4$

c. $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

20.37

a. $x^3 + x$

b. $x^6 - 6x + 3$

c. $\dfrac{1}{x^2}$

20.38

a. $\dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$

b. $x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

c. $\arctan x^2$

20.39 Ga na of de volgende uitspraken waar zijn of niet. Motiveer je antwoord; geef in het geval dat zo'n uitspraak niet waar is een *tegenvoorbeeld*, dat wil zeggen een voorbeeld van een functie $f(x)$ op een interval I waarvoor de uitspraak niet geldig is.

a. Als $f(x)$ monotoon stijgend is op I, dan is $f(x)$ ook monotoon niet-dalend op I.

b. Als $f(x)$ monotoon niet-stijgend is op I, dan is $f(x)$ ook monotoon dalend op I.

c. Een functie kan niet tegelijkertijd monotoon stijgend en monotoon dalend zijn op I.

d. Een functie kan niet tegelijkertijd monotoon niet-stijgend en monotoon niet-dalend zijn op I.

e. Als $f(x)$ monotoon stijgend en differentieerbaar is op I, dan is $f'(x) > 0$ voor alle x in I.

20.40 Ga na of de volgende uitspraken waar zijn of niet. Motiveer je antwoord; geef in het geval dat zo'n uitspraak niet waar is een *tegenvoorbeeld*, dat wil zeggen een voorbeeld van een functie $f(x)$ op een interval I waarvoor de uitspraak niet geldig is.

a. Als $f(x)$ monotoon stijgend is op I, dan is $g(x) = (f(x))^2$ ook monotoon stijgend op I.

b. Als $f(x)$ monotoon stijgend is op I, dan is $g(x) = (f(x))^3$ ook monotoon stijgend op I.

c. Als $f(x)$ monotoon dalend is op I, dan is $g(x) = \mathrm{e}^{-f(x)}$ monotoon stijgend op I.

20.41 Ga na of de volgende uitspraken waar zijn of niet. Motiveer je antwoord; geef in het geval dat zo'n uitspraak niet waar is een *tegenvoorbeeld*, dat wil zeggen een voorbeeld van functies $f(x)$ en $g(x)$ op een interval I waarvoor de uitspraak niet geldig is.

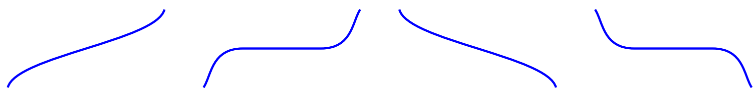
a. Als $f(x)$ en $g(x)$ monotoon stijgend zijn op I, dan is $f(x) + g(x)$ ook monotoon stijgend op I.

b. Als $f(x)$ en $g(x)$ monotoon stijgend zijn op I, dan is $f(x) \times g(x)$ ook monotoon stijgend op I.

Stijgen, dalen en het teken van de afgeleide

Stel dat een functie $f(x)$ op een interval I gegeven is.

De functie $f(x)$ heet *monotoon stijgend op* I als voor alle getallen x_1 en x_2 uit I met $x_1 < x_2$ geldt dat $f(x_1) < f(x_2)$.
De functie $f(x)$ heet *monotoon niet-dalend op* I als voor alle getallen x_1 en x_2 uit I met $x_1 < x_2$ geldt dat $f(x_1) \leq f(x_2)$.
De functie $f(x)$ heet *monotoon dalend op* I als voor alle getallen x_1 en x_2 uit I met $x_1 < x_2$ geldt dat $f(x_1) > f(x_2)$.
De functie $f(x)$ heet *monotoon niet-stijgend op* I als voor alle getallen x_1 en x_2 uit I met $x_1 < x_2$ geldt dat $f(x_1) \geq f(x_2)$.



monotoon stijgend *monotoon niet-dalend* *monotoon dalend* *monotoon niet-stijgend*

Het al of niet differentieerbaar zijn van $f(x)$ speelt bij deze definities geen rol. Voor differentieerbare functies geldt de volgende stelling:

Stelling: Stel dat $f(x)$ differentieerbaar is in alle punten van het interval I. Dan geldt:

a. als de functie $f(x)$ monotoon niet-dalend is op het interval I, dan is $f'(x) \geq 0$ voor alle x in I,
b. als de functie $f(x)$ monotoon niet-stijgend is op het interval I, dan is $f'(x) \leq 0$ voor alle x in I,
c. als $f'(x) > 0$ voor alle x in I, dan is $f(x)$ monotoon stijgend,
d. als $f'(x) \geq 0$ voor alle x in I, dan is $f(x)$ monotoon niet-dalend,
e. als $f'(x) < 0$ voor alle x in I, dan is $f(x)$ monotoon dalend,
f. als $f'(x) \leq 0$ voor alle x in I, dan is $f(x)$ monotoon niet-stijgend,
g. als $f'(x) = 0$ voor alle x in I, dan is $f(x)$ constant.

Het bewijs van de onderdelen (a) en (b) is niet moeilijk, dat van de andere onderdelen echter wel. We laten hier alle bewijzen achterwege.

Bepaal van de volgende functies de x-waarde van alle lokale en globale maxima en minima en geef telkens aan om wat voor soort extremum het gaat. Maak bij deze opgaven steeds gebruik van een (ruwe) schets van de grafiek van de functie en gebruik waar nodig ook de afgeleide.

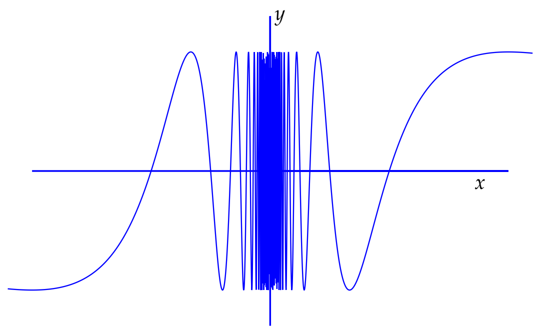
20.42
- a. $x^3 - x$
- b. $x^4 - 2x^2$
- c. $x^4 - 6x^2 + 5$
- d. $|x - 1|$
- e. $|x^2 - 1|$

20.43
- a. $\sin x$
- b. $\sin x^2$
- c. $\sin \sqrt{x}$
- d. $\sin |x|$
- e. $|\sin x|$

20.44
- a. $x \ln x$
- b. $(\ln x)^2$
- c. $\arcsin x$
- d. $\ln \cos x$
- e. $\ln |\cos x|$

20.45
- a. $x\mathrm{e}^{x}$
- b. e^{-x^2}
- c. $x\mathrm{e}^{-x^2}$
- d. $\mathrm{e}^{\sin x}$
- e. $\mathrm{e}^{-|x|}$

20.46 Hieronder is de grafiek geschetst van de functie $f(x) = \sin \dfrac{\pi}{x}$.



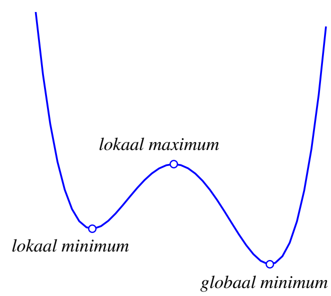
- a. Bepaal alle nulpunten.
- b. Bepaal de plaats van alle maxima en alle minima.
- c. Bereken $\lim_{x\to\infty} f(x)$ en $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
- d. Bestaat $\lim_{x\to 0} f(x)$? Motiveer je antwoord.

Extreme waarden

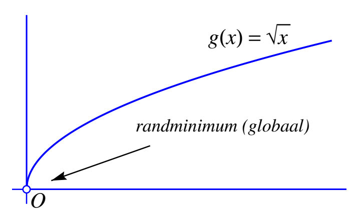
Deze paragraaf gaat over maxima en minima van functies. Eerst zeggen we precies wat we hieronder verstaan.

> Als geldt dat $f(x) \leq f(c)$ voor alle x uit het domein van $f(x)$, dan heet $f(c)$ het *globale maximum* van de functie. Geldt $f(x) \geq f(c)$ voor alle x uit het domein, dan heet $f(c)$ het *globale minimum*.
>
> Men noemt $f(c)$ een *lokaal maximum* of *lokaal minimum* van $f(x)$ als er een getal $r > 0$ bestaat zo dat voor alle x uit het domein van $f(x)$ met $|x - c| < r$ geldt dat $f(x) \leq f(c)$, respectievelijk $f(x) \geq f(c)$.

De algemene term voor minimum of maximum is *extremum* of *extreme waarde*. Een globaal maximum of minimum is ook altijd een lokaal maximum of minimum, maar het omgekeerde hoeft niet waar te zijn. Hiernaast is de grafiek van een vierdegraadspolynoom getekend met drie extremen: een lokaal minimum, een lokaal maximum en een globaal minimum, dat natuurlijk tegelijkertijd ook een lokaal minimum is. Er is geen globaal maximum.



Een term die ook vaak gebruikt wordt is *randextremum*. Dat is een extremum dat optreedt aan de rand van het domein van een functie. Neem bijvoorbeeld de functie $g(x) = \sqrt{x}$, die als domein het interval $[0, \infty\rangle$ heeft. Het globale minimum $g(0) = 0$ treedt op voor $x = 0$, aan de rand van het domein.



Differentieerbaarheid speelt bij deze definities geen rol: zo is bijvoorbeeld het globale minimum van de functie $f(x) = |x|$ gelijk aan $f(0) = 0$, ook al is die functie daar niet differentieerbaar (zie ook bladzijde 181).

Maar als een functie differentieerbaar is in een punt waar een lokaal (of globaal) maximum of minimum wordt aangenomen, dan is er met de afgeleide iets bijzonders aan de hand. Die is dan namelijk nul.

> **Stelling:** Als een functie $f(x)$ voor $x = a$ een lokaal maximum of minimum aanneemt en daar differentieerbaar is, dan is $f'(a) = 0$.

Let op: het *omgekeerde* van deze stelling is niet waar: als $f'(a) = 0$ is, hoeft $f(x)$ in a geen lokaal maximum of minimum aan te nemen, denk maar aan de functie $f(x) = x^3$, die in $x = 0$ geen maximum of minimum aanneemt, maar waarvoor wel geldt dat $f'(0) = 0$.

Bepaal alle stationaire punten en alle buigpunten van de volgende functies.

20.47

a. x^3

b. $x^3 - x$

c. $x^4 - x^2 - 2x + 1$

d. $x^5 + 10x^2 + 2$

e. $\dfrac{1}{1 + x^2}$

20.48

a. $\sin x$

b. $\arctan x$

c. $x^2 \ln x$

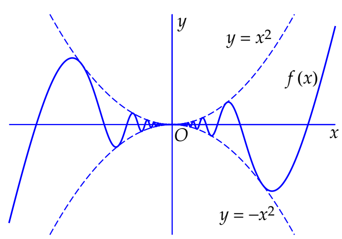
d. $x\mathrm{e}^{-x}$

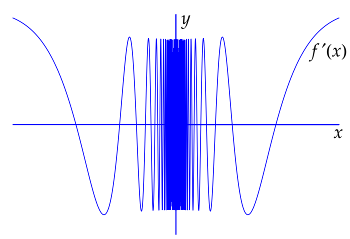
e. e^{-x^2}

20.49 Hieronder zijn de grafieken getekend van de functie

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{\pi}{x} & \text{als } x \neq 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases}$$

en de afgeleide functie $f'(x)$.





a. Laat zien dat $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$ voor alle x en ga na voor welke waarden van x geldt dat $f(x) = -x^2$, respectievelijk $f(x) = x^2$.

b. Geef een formule voor $f'(x)$ als $x \neq 0$.

c. Toon aan dat $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.
(Dit betekent dat $f(x)$ differentieerbaar is in $x = 0$ en dat $f'(0) = 0$.)

d. Bereken $f'(\frac{1}{2k})$ en $f'(\frac{1}{2k+1})$ voor k geheel.

e. Laat zien dat $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ niet bestaat.
(Hieruit volgt dat $f'(x)$ niet continu is in $x = 0$.)

f. Neemt $f(x)$ in $x = 0$ een lokaal minimum of maximum aan?

g. Is $x = 0$ een buigpunt van $f(x)$?

h. Zij $g(x) = f(x) + x$. Dan is $g'(0) = 1$. Is er een $c > 0$ zo, dat $g(x)$ monotoon stijgend is op het interval $(-c, c)$?

Stationaire punten en buigpunten

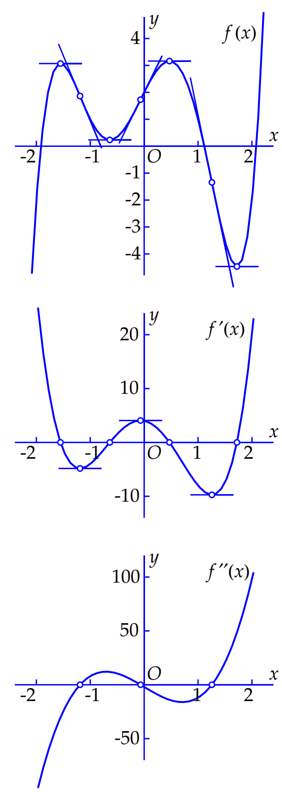
Als $f(x)$ differentieerbaar is in a en $f'(a) = 0$ dan is de raaklijn aan de grafiek daar horizontaal, en dus is $f(x)$ vlak in de buurt van a vrijwel constant. Men noemt zo'n punt daarom een *stationair punt*.

Als $f'(a) = 0$ heet a een *stationair punt* van $f(x)$.

Lokale extrema van differentieerbare functies treden op in stationaire punten, maar een stationair punt hoeft nog niet een lokaal maximum of minimum op te leveren, zoals de functie $f(x) = x^3$ laat zien (zie ook bladzijde 187).

Ook de lokale extrema van de afgeleide functie $f'(x)$ zijn bijzondere punten van de oorspronkelijke functie $f(x)$. Het zijn de *buigpunten*.

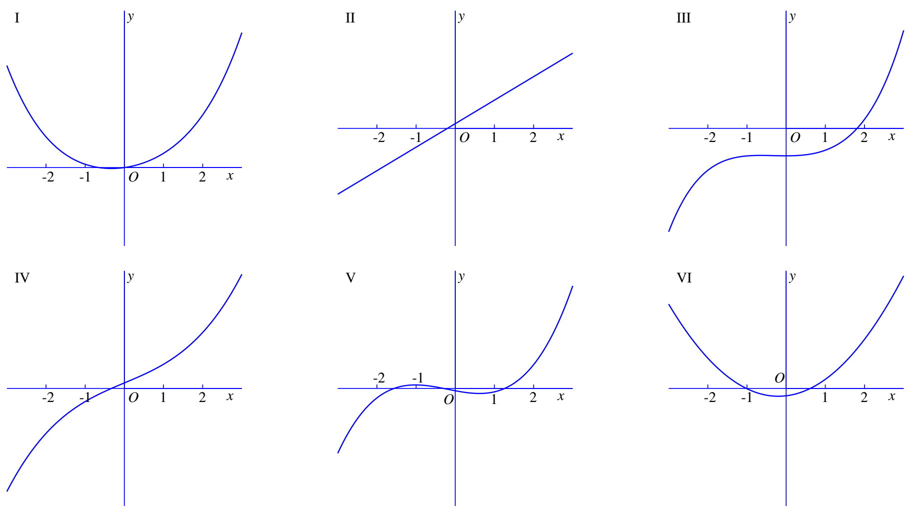
Als $f(x)$ een differentieerbare functie is, dan heet elk punt waar de afgeleide $f'(x)$ een lokaal minimum of maximum aanneemt een *buigpunt* van de functie $f(x)$.



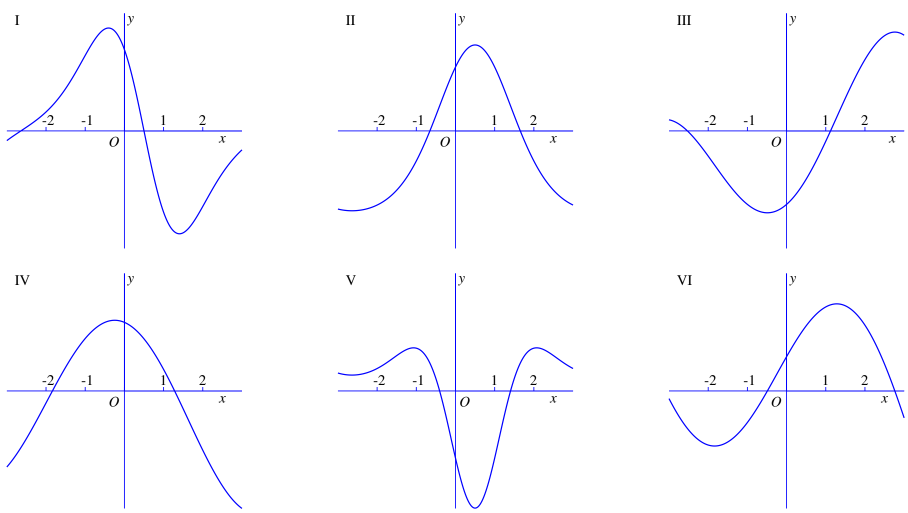
Hiernaast is als voorbeeld een grafiek van de functie $f(x) = x^5 - 5x^3 - x^2 + 4x + 2$ getekend, samen met een grafiek van de afgeleide functie $f'(x) = 5x^4 - 15x^2 - 2x + 4$ en een grafiek van de tweede afgeleide $f''(x) = 20x^3 - 30x - 2$. (Let op de schaalverdelingen op de y-as, die zijn verschillend gekozen om duidelijke plaatjes te krijgen.)
In de grafieken hebben we de lokale maxima en minima van $f(x)$ en $f'(x)$ aangegeven met de bijbehorende horizontale raaklijnen. Tevens zijn de raaklijnen getekend in de buigpunten van $f(x)$, dat wil zeggen de punten waar $f'(x)$ een lokaal maximum of minimum aanneemt. Omdat $f'(x)$ ook weer een differentieerbare functie is, geldt in die punten dus $f''(x) = 0$.
Je ziet dat de grafiek van $f(x)$ in de buigpunten de buigraaklijn doorsnijdt, en ook dat de 'bolling' van de grafiek daar als het ware omklapt. Dat correspondeert ermee dat $f''(x)$ in die punten van teken wisselt. Als $f''(x) > 0$ is, is $f'(x)$ een stijgende functie, en dan neemt de helling van de raaklijn aan de grafiek van $f(x)$ dus toe. Als $f''(x) < 0$ is, dan is $f'(x)$ een dalende functie, en dan neemt de helling van de raaklijn dus af.

20.50 Van het polynoom $f(x) = x^5 - 5x^3 - x^2 + 4x + 2$ is op bladzijde 189 een grafiek getekend. Je ziet daarin drie nulpunten. Zijn er nog meer nulpunten? Zo ja, waar liggen ze ongeveer, zo nee, waarom zijn ze er niet?

20.51 Hieronder zijn in een willekeurige volgorde de grafieken getekend van twee functies $f(x)$ en $g(x)$, hun afgeleiden $f'(x)$ en $g'(x)$ en hun tweede afgeleiden $f''(x)$ en $g''(x)$. Identificeer ze.



20.52 Dezelfde vraag voor de volgende grafieken. Ook hier gaat het om twee functies $f(x)$ en $g(x)$, hun afgeleiden $f'(x)$ en $g'(x)$ en hun tweede afgeleiden $f''(x)$ en $g''(x)$. Identificeer ze.



Puzzelen met functies en hun afgeleiden

Bij het onderzoek naar eigenschappen van differentieerbare functies kunnen de afgeleiden goede diensten bewijzen. Zo is er een verband tussen stijgen en dalen van de functie en het teken (plus of min) van de afgeleide (zie de stelling op bladzijde 185). Met behulp van de nulpunten van de afgeleide kun je mogelijke extreme waarden van de functie op het spoor komen en met behulp van de nulpunten van de tweede afgeleide de mogelijke buigpunten. Op de vorige bladzijden heb je hiermee al heel wat oefensommen gemaakt.

We sluiten dit hoofdstuk af met een paar puzzelopgaven waarbij je je kennis van het verband tussen functies hun afgeleiden op een ongewone, uitdagende manier kunt toetsen. Ze staan op de tegenoverliggende bladzijde. Je zult al je speurzin nodig hebben om ze op te lossen!