Logica

(SV 1.2)

P.J. den Brok MA

18 mei 2011

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Logica

Het is mogelijk dat je iemand met dreigen of verleiden een standpunt kan opdringen. Toch heeft een *bewijs* van je standpunt meer overtuigingskracht. Een bewijs lever je door je standpunt te onderbouwen met een geldige redenatie vanuit uitgangspunten die door jou en je opponent onderschreven worden. In de wiskunde bijvoorbeeld, doe je dat zelfs vanuit algemeen aanvaarde uitgangspunten, de *axioma's*. Als je een wiskundige conclusie op de juiste manier heb bewezen, kan je haar gebruiken als een nieuw uitgangspunt, een *theorema* of *stelling*. De wiskunde krijgt op deze manier een hoge overtuigingskracht en samenhang. '*Wisconst*' is trouwens een ouderwets woord voor 'bewijskunde'.

In de minder exacte werkelijkheid zijn de uitgangspunten vaak onzeker of onvolledig. Een verkeerd uitgangspunt wordt in het algemeen minder hard aangevochten dan een ongeldige redenatie, vooral bij konflikten over aansprakelijkheid. Meestal voel je op een intuïtieve manier aan of een redenatie geldig is of niet. Soms is deze *intuïtie* niet voldoende, je moet vooral op je hoede zijn voor een schijnbaar geldige redenatie, een *drogreden*:

"Als men veel drinkt, is men agressief. Omdat de beklaagde niet veel drinkt is hij niet agressief."

Als je een drogreden wil voorkomen, kan je bewust gebruik maken van redenatieregels. De regels voor het redeneren worden sinds de oudheid bestudeerd in de wetenschap die wij de *logica* noemen. De logica wordt niet alleen als zelfstandige wetenschap bedreven, zij wordt ook toegepast in de filosofie, de methodologie, de taalkunde, de theologie, de rechtspraak, de wis- en natuurkunde, de schakeltechniek en de informatica.

In de *informatica* wordt de logica bijvoorbeeld gebruikt bij het specificeren van programma's. Een informaticus moet in staat zijn een logische specificatie te begrijpen of op te stellen. Bovendien, al zou een opdrachtgever een onjuiste of onvolledige specificatie (de uitgangspunten) verstrekken, de informaticus blijft professioneel verantwoordelijk voor het ontwerpproces (de geldige redenatie), zelfs als dit tot een onjuist of onvolledig product (conclusie) leidt.

Ook bij het *programmeren* moet je logisch denken:

- **if** p **and** q **then** s
- **if** $(x \leq 10)$ **or** $(x > 0)$ **then** ... **else** ...

Zo'n programmaregel moet 'logisch' zijn. Één 'onlogische' programmaregel kan een geheel programma laten falen. Of nog erger, af en toe laten falen. Al is in het gunstigste geval een onlogische programmaregel overbodig en onschadelijk, de omvang en het onderhoud van het programma nemen er wel mee toe.

Logisch denken kan ook ontspannend werken. In de opgaven zijn een aantal logische puzzels opgenomen die een goed inzicht geven in de logische begrippen.

1.1 De propositielogica

In de *propositielogica* onderzoekt men het waarheidsgehalte van samengestelde uitspraken aan de hand van *elementaire proposities* en *logische voegwoorden*. Wij noemen de woorden 'en', 'of', 'als ... dan ... ', 'impliceert' logische voegwoorden. Hoewel het taalkundig geen voegwoorden zijn, noemen wij de ontkenningen 'niet' en 'geen' toch logische voegwoorden.

Definitie 1.1 *Een propositie is een uitdrukking in de omgangstaal die waar of onwaar is, maar niet beide.*

Voorbeelden:

1. een rechthoek is een vierhoek
2. $x + x = 2x$
3. $5 < 3$
4. een vierkant is een rechthoek *en* een vierkant is gelijkzijdig

Voorbeelden 1,2 en 3 zijn elementaire proposities omdat zij geen logische voegwoorden bevatten. Voorbeeld 4 is een samengestelde propositie met het logische voegwoord 'en'.

Definitie 1.2 *Proposities die in de werkelijkheid waar zijn, worden feiten genoemd.*

De logica houdt geen rekening met de *feitelijke waarheid* van de uitgangspunten. De feitelijke waarheid van een propositie, die alleen door observaties, experimenten en getuigenissen worden vastgesteld, is absoluut van aard. Omdat wij in de logica aannemen dat de uitgangspunten van een redenatie waar zijn, noemen wij ze *premissen*. De 'waarheid' van de premissen die alleen geldig is binnen de redenatie, is relatief van aard. Een redenatie die gebruik maakt van feitelijke onwaarheden kan desondanks toch geldig zijn. Anderzijds, een redenatie is ongeldig als een (schijnbaar) onware conclusie getrokken wordt uit (schijnbaar) ware premissen. Toch is het mogelijk een redenatie te baseren op een onbekend uitgangspunt, een *hypothese*, een *veronderstelling* of een *aanname* genoemd. Zo'n *hypothetisch bewijs* leidt tot een *conditionele conclusie*. Voorbeeld: *"Uit het gegeven dat Mars geen vrije zuurstof heeft (premisse) en de aanname dat er leven op Mars is (hypothese), kan men concluderen dat dit hypothetisch leven een andere stofwisseling moet hebben dan het Aardse leven."*

Voorbeelden:

1. een vierkant is een rechthoek of een vierhoek
2. vandaag regent het en is het niet koud
3. als er een maansverduistering is, dan staan de zon, aarde en maan op een lijn
4. een hoekige vorm is lelijk
5. $x < 5$
6. maak je huiswerk op tijd af
7. hoe gaat het?

Voorbeelden 1, 2 en 3 zijn proposities. Voorbeeld 1 is een (in de wiskunde ware) samengestelde propositie die gebruik maakt van het logische voegwoord 'of'. Voorbeeld 2 is een samengestelde propositie die gebruik maakt van de logische voegwoorden 'en' en 'niet'. Voorbeeld 3 is een samengestelde propositie. Voorbeelden 4, 5, 6 en 7 zijn geen proposities. Voorbeeld 4 is een *mening*. Iedereen kan een andere mening hebben over een bepaald onderwerp. Discussies over meningsverschillen zijn vaak niet vruchtbaar. Toch spelen meningen vaak een belangrijke rol in het beslissingsproces, Het is daarom belangrijk om een uitspraak te herkennen als een mening of een feit. Voorbeeld 5 is een uitspraak die een propositie kan worden, zodra de waarde van de variabele x bekend is. Voorbeeld 6 is een opdracht en voorbeeld 7 is een vraag.

Stelling 1.1 *De waarheid van de elementaire proposities en de logische voegwoorden bepalen de waarheid van de propositie.*

In de *symbolische propositielogica* ookwel de *propositierekening* genoemd, worden elementaire proposities voorgesteld als kleine letters, *variabelen* genoemd. De elementaire propositie *"Veel roken"* stellen wij voor met de variabele p. De variabele q staat voor *"men kan longkanker krijgen"*. De symbolische uitdrukking $p \rightarrow q$ betekent in de omgangstaal: *"Veel roken impliceert dat men longkanker kan krijgen"*. De logische voegwoorden 'niet', 'en', 'of', 'impliceert' en 'equivalent' uit de omgangstaal worden in de symbolische propositielogica voorgesteld als *logische operatoren*: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ en $\leftrightarrow$.

logisch voegwoord	logische operator
ontkenning (niet)	$\neg$
conjunctie (en)	$\wedge$
disjunctie (of)	$\vee$
implicatie	$\rightarrow$
equivalentie	$\leftrightarrow$

Wij kunnen deze verzameling symbolen uitbreiden met symbolen voor de *logische waarden* '*waar*' en '*onwaar*'. Wij kiezen voor 'waar' het teken '1' en voor 'onwaar' het teken '0'. Deze tekens mag men niet verwarren met de getallen 0 en 1. Zolang het gevaar van verwarring niet bestaat, laten wij de accenten weg:

logische waarde	symbool
onwaar	0
waar	1

Opmerking: In sommige theorieboeken over symbolische propositielogica worden andere notaties gebruikt. De variabele p wordt vaak ontkend met de notatie $\overline{p}$ of $\sim p$. Bovendien worden vaak de symbolen T en F ('True' en 'False') gebruikt voor de logische waarden waar en onwaar. Er bestaan ook notatieverschillen voor de conjunctie ($p \wedge q \quad p,q \quad p\&q \quad p \cdot q \quad pq$) en de disjunctie ($p \vee q \quad p|q \quad p+q$).

1.1.1 De ontkenning

Elke propositie p heeft een ontkennende tegenhanger $\neg p$. In de omgangstaal kan de uitdrukking "..." op vele manieren ontkend worden:

- het is niet waar dat ...
- ... is onwaar
- niet ...
- geen ...

Definitie 1.3 (De ontkenning) *Als p waar is, dan is $\neg p$ onwaar; als p onwaar is, dan is $\neg p$ waar.*

Wij kunnen de ontkenning weergeven als een *waarheidstabel*. Een waarheidstabel geeft alle mogelijke waarheidswaarden aan van een propositie. De propositie $\neg p$, kent twee *gevallen*, de overeenkomstige waarheidstabel bestaat uit twee rijen:

p	$\neg p$
0	1
1	0

Voorbeelden:

1. Amsterdam is de hoofdstad van Nederland
2. Amsterdam is niet de hoofdstad van Nederland
3. het is niet waar dat Amsterdam de hoofdstad van Nederland is
4. $2 < 3$
5. $\neg(2 < 3)$

Uitspraak 2 en 3 zijn ontkenningen van 1. Uitspraak 5 is een ontkenning van 4.

1.1.2 De conjunctie

Als twee proposities verbonden zijn met het logische voegwoord 'en', dan wordt dit symbolisch genoteerd als $p \wedge q$. De samenstelling $p \wedge q$ is zelf ook een propositie.

Definitie 1.4 (Conjunctie) *Als p en q beide waar zijn, dan is $p \wedge q$ waar, anders is $p \wedge q$ onwaar.*

Wij kunnen de conjunctie weergeven als een waarheidstabel. De propositie $p \wedge q$, kent vier gevallen. Elk *geval* komt overeen met een *rij* in de waarheidstabel. Het is gebruikelijk de 4 gevallen te nummeren *gevalsnummer* met $0 \dots 3$:

geval	p	q	$p \wedge q$
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

Meestal wordt de nummering van de gevallen (rijen) in de eerste kolom weggelaten. De variabelen p en q voor de dubbele kolomstreep, nemen de gevalsnummering in tweetallige codering over.

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Bij het vertalen van logische uitspraken uit de omgangstaal naar symbolische logica moeten wij eerst uitzoeken of het voegwoord 'en' een conjunctie is. Daarbij letten wij vooral op de volgorde. Bij een conjunctie kunnen wij volgorde van p en q omkeren zonder dat de betekenis van de uitspraak verandert.

Voorbeelden:

1. *"een vierkant is rechthoekig en een vierkant is gelijkzijdig"*. De logische waarde wordt niet beïnvloedt door de omkering: *"een vierkant is gelijkzijdig en een vierkant is rechthoekig"*. Het voegwoord 'en' heeft hier een conjunctieve betekenis;

2. *"zij trouwde en kreeg (toen) een kind"*. In dit geval levert omkering een andere betekenis op: *"zij kreeg een kind en trouwde (toen)"* In dit voorbeeld is 'en' een *causaal voegwoord*. Het causale voegwoord 'en' wordt gebruikt om een *causaliteit* (een oorzaak- en gevolgrelatie) aan te geven;

3. De opsomming: *"Perl, C++ en Java zijn programmeertalen"* heeft een conjunctieve betekenis. Daarentegen heeft de opsomming: *"men kiest uit Perl, C++ en Java"* geen conjunctieve betekenis omdat wij haar kunnen interpreteren als: *"men kiest C of C++ of Java"*. Omdat een andere volgorde niet altijd de betekenis verandert, moeten wij een opsomming nauwkeurig interpreteren aan de hand van de context.

1.1.3 De disjunctie

Als het logische voegwoord 'of' wordt gebruikt om twee proposities met elkaar te verbinden, wordt dit genoteerd als $p \vee q$. De samenstelling $p \vee q$ is ook een propositie.

Definitie 1.5 (Disjunctie) *Als p en q beide onwaar zijn, dan is $p \vee q$ onwaar, anders is $p \vee q$ waar.*

Wij kunnen de disjunctie voorstellen met een waarheidstabel. De propositie $p \vee q$, kent vier gevallen ($0 \ldots 3$, in de tabel niet aangegeven):

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Bij het vertalen van logische uitspraken uit de omgangstaal moeten wij eerst uitzoeken of het voegwoord ‘of’ een disjunctie is. Bij een disjunctie maakt de volgorde $p \vee q$ en $q \vee p$ niets uit. Bovendien moet uit de context blijken of de gehele uitdrukking waar is als de deeluitdrukkingen p en q beide waar zijn.

Voorbeelden:

1. *“het sneeuwt of het hagelt”*. De gehele uitdrukking is waar als een van de deeluitdrukkingen *“het sneeuwt”* of *“het hagelt”* waar is, of als beide waar zijn. Dit noemen wij een ‘*inclusieve of*’. In de propositielogica bedoelt men met een ‘of’ een ‘inclusieve of’. Als men in de omgangstaal het inclusieve gedrag van een ‘of’ wil benadrukken dan zal men zeggen: *“Het sneeuwt of het hagelt of beide”*

2. *“het is warm of koud”*. In dit voorbeeld is het voegwoord ‘of’ een ‘*exclusieve of*’. De gehele uitdrukking is onwaar als de deeluitdrukkingen *“het is warm”* en *“het is koud”* beide waar zijn. Als men in de omgangstaal het exclusieve gedrag van een ‘of’ wil benadrukken dan zal men zeggen: *“het is warm of koud, maar niet beide”* Men geeft de ‘exclusieve of’ vaak aan met leestekens. “òf het is warm òf het is koud”

Voor de volledigheid geven wij de waarheidstabel voor de ‘exclusieve of’ $p \oplus q$.

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

1.1.4 De implicatie

Een tweetal proposities kan worden verbonden met een logische implicatie: ‘p impliceert q’ of ‘als p dan q’. Men noteert de logische implicatie symbolisch als: $p \rightarrow q$. De samenstelling van twee proposities met een implicatie is zelf ook een propositie.

Definitie 1.6 (Implicatie) *Als p waar is en q is onwaar, dan is $p \rightarrow q$ onwaar, anders is $p \rightarrow q$ waar.*

Wij kunnen de implicatie voorstellen met een waarheidstabel. De propositie $p \rightarrow q$, kent vier gevallen:

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Bij het vertalen van logische uitspraken uit de omgangstaal moeten wij eerst uitzoeken of het een implicatie is. Wanneer is $p \to q$ onwaar? Alleen als p waar is en q onwaar, in alle andere gevallen is de implicatie waar. In tegenstelling met de conjunctie en de disjunctie, is de volgorde van p en q in een implicatie zeer belangrijk. De uitspraak "p impliceert q" heeft een andere betekenis dan "q impliceert p". In een implicatie is een verband tussen p en q niet noodzakelijk. Men kan de meest onzinnige uitspraken combineren in een implicatie als p onwaar is. Wij moeten voorzichtig zijn met implicaties waarvan de p onwaar is.

Voorbeelden:

1. *"als ik mijn dak niet gerepareerd had, dan zou ik waterschade hebben"*. Hoewel beide deeluitdrukkingen onwaar zijn (ik heb mijn dak wel gerepareerd en ik heb geen waterschade), wordt de gehele uitdrukking als waar en zinnig beschouwd. Het werd waarschijnlijk als een veronderstelling uitgesproken. De gehele uitdrukking is een implicatie $p \to q$.

2. *"als de maan van kaas is, ben ik miljonair"*

In de omgangstaal wordt de implicatie $p \to q$ op verschillende manieren geformuleerd:

1. p impliceert q
2. als p dan q
3. als p dan q en niet omgekeerd
4. q als p
5. q omdat p
6. als $\neg q$ dan $\neg p$
7. p is een voldoende voorwaarde voor q
8. q is een noodzakelijke voorwaarde voor p
9. alleen als q dan p
10. p, alleen als q

De uitspraak "p is een voldoende voorwaarde voor q" betekent dat als p waar is, dan moet q waar zijn. Dit blijkt uit de een-na laatste rij van de waarheidstabel. De uitspraak "q is een noodzakelijke voorwaarde voor p" blijkt uit de eerste rij van de waarheidstabel. Daaruit volgt dat als q onwaar is, dan moet p onwaar zijn. De noodzakelijkheid van q blijkt ook uit "als niet q dan niet p" of uit "alleen als q dan p".

In *gevolguitspraken* zoals *"uit p volgt q"* of *"als p dan q"* of *"p leidt tot q"* wordt een geldig verband verondersteld tussen p en q. Hoewel elke gevolguitspraak een implicatie is, is niet elke implicatie een gevolguitspraak. Een implicatie is niet anders dan een logisch voegwoord tussen twee uitspraken die soms niets met elkaar te maken hebben.

Voorbeelden:

1. $5x = 15 \rightarrow x = 3$
2. als $a = b$, dan geldt $a^2 = b^2$
3. **if** $x \leq 10$ **then** $x := x + 1$
4. als je dit snapt p, dan bent je geschift q
5. als je een kans wil maken p, dan moet je snel zijn q
6. alleen als je snel ben q maak je een kans p
7. als je niet snel ben $\neg q$, dan maakt je geen kans $\neg p$
8. je maakt geen kans $\neg p$, als je niet snel ben $\neg q$
9. het is noodzakelijk dat je snel ben q om een kans te maken p
10. één besmettelijk geval is voldoende p voor een epidemie q,
11. voor een epidemie q, is één besmettelijk geval voldoende p
12. alleen met toestemming van uw nageslacht q mag u trouwen p

1.1.5 De equivalentie

Twee proposities kunnen met een logische equivalentie worden verbonden: 'p is equivalent met q' of 'p dan en slechts dan als q'. Men noteert de logische equivalentie symbolisch als: $p \leftrightarrow q$. De samenstelling van twee proposities met dit logische voegwoord is zelf ook een propositie.

Definitie 1.7 (Equivalentie) *Als p en q beide waar of onwaar zijn , dan is $p \leftrightarrow q$ waar, anders is $p \leftrightarrow q$ onwaar.*

Wij kunnen de equivalentie voorstellen met een waarheidstabel. De propositie $p \leftrightarrow q$, kent vier gevallen:

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Bij het vertalen van logische uitspraken uit de omgangstaal moeten wij eerst uitzoeken of het een equivalentie is. Wanneer is $p \leftrightarrow q$ onwaar? Alleen als een van de deeluitdrukkingen waar is en de andere onwaar. Bij een equivalentie maakt de volgorde $p \leftrightarrow q$ en $q \leftrightarrow p$ niets uit. In de omgangstaal wordt de equivalentie $p \leftrightarrow q$ op verschillende manieren geformuleerd:

1. p equivalent met q
2. p als q en omgekeerd
3. p als en alleen als q
4. p dan en slechts dan als q (afgekort tot: d.e.s.d.a.)
5. p is een noodzakelijke en een voldoende voorwaarde voor q
6. p **iff** q (Engels/Amerikaans)

Voorbeelden:

1. $5x = 15 \leftrightarrow x = 3$
2. $2a = 2b$ d.e.s.d.a. $a = b$
3. voor het slapen p is rust q noodzakelijk en voldoende
4. je moet sporten p als en alleen als je lichaam het nodig heeft q
5. veel roken p veroorzaakt stress q en omgekeerd

1.2 Opgaven

1. Verklaar de verschillen tussen feiten, premissen en hypothesen.
2. Verklaar het verschil tussen een ontkennende propositie en een onware propositie.
3. Verklaar waarom de volgende zin geen leugen is: *“als niets alles is, dan ben ik een rijk mens”*.

4. Is de volgende zin een equivalentie? *“genoeg van niets is het zelfde als niets is genoeg”*.

5. Welk verband is er tussen de ‘inclusieve of’ en de ‘exclusieve of’?

6. Welk verband is er tussen de ‘exclusieve of’ en de ‘equivalentie’?

7. Welk verband is er tussen een ‘gevolguitspraak’ en een ‘implicatie’?

8. Bepaal van de volgende uitspraken of zij implicaties zijn, geef ook aan of het gevolg-uitspraken zijn:

   (a) ik kan het niet lezen, de letters zijn te klein

   (b) omdat de school binnenkort wordt gesloten, kunnen wij nu beter door werken

   (c) als de maan van kaas is, winnen wij het wereldkampioenschap

   (d) uit stress volgt overgewicht

   (e) het gebouw was oud en vies, de ratten liepen door de kelder

   (f) weet iemand wat hier geschreven staat?

   (g) er is nog steeds analfabetisme

   (h) ik kom, alleen als jij ook komt

9. Stel dat b staat voor *“het is bewolkt”*, k staat voor *“het is koud”*, r staat voor *“het regent”* en s staat voor *“het sneeuwt”*. Vertaal de volgende zinnen uit de omgangstaal naar symbolische notatie van de propositierekening:

   (a) het regent, noch het sneeuwt

   (b) het sneeuwt en het regent

   (c) noch sneeuw, noch regen

   (d) het regent als het niet sneeuwt

   (e) het regent en het is koud

   (f) het regent, maar het is niet bewolkt

   (g) als het bewolkt en koud is, dan regent het

   (h) óf het is koud óf het is warm

   (i) het is koud enof warm

Hoofdstuk 2

De propositierekening

In de propositielogica worden proposities gemaakt van elementaire proposities en logische voegwoorden. In de symbolische propositielogica, de *propositierekening*, wordt een *propositieformule* gemaakt van *variabelen* (letters), *logische operatoren* en *haakjes*. Net zoals een formule in de rekenkunde, heeft het deel van een propositieformule binnen de haakjes een hogere prioriteit dan het deel buiten de haakjes. Bovendien wordt alles wat tussen haakjes staat, beschouwd als een eenheid. Om een propositieformule correct samen te stellen, moeten wij verplicht gebruik maken van de volgende *grammaticale regels*:

1. Een variabele is een formule;
2. Als p een formule is, dan is $\neg p$ een formule;
3. Als p en q formules zijn, dan zijn $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \rightarrow q)$ en $(p \leftrightarrow q)$ formules.

In een propositieformule mogen haakjes worden weggelaten mits er geen verwarring ontstaat.

Is $p \wedge q \vee r$ nu gelijk aan $((p \wedge q) \vee r)$ of aan $(p \wedge (q \vee r))$?

Dit probleem wordt opgelost als wij de logische operatoren een prioriteit toekennen. De volgende tabel geeft de logische operatoren in afnemende *prioriteit*:

logische operator
$\neg$
$\wedge$
$\vee$
$\rightarrow$
$\leftrightarrow$

De prioriteitsordening van de operatoren gebruikt men bij het plaatsen van de ontbrekende haakjes. Het plaatsen van haakjes kan de ordening van de formuledelen verduidelijken. Hoe worden haakjes geplaatst als operatoren gelijke prioriteit hebben? Indien twee operatoren dezelfde prioriteit hebben, wordt het linkerdeel van de formule tussen haakjes geplaatst.

Voorbeelden:

1. $\neg p \wedge q \wedge r$ betekent $(\neg p \wedge q) \wedge r$ in plaats van $\neg p \wedge (q \wedge r)$.
2. $\neg p \rightarrow q \wedge r$ betekent $(\neg p) \rightarrow (q \wedge r)$
3. $p \wedge q \vee r \wedge s$ betekent $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$
4. $p \rightarrow q \leftrightarrow r$ betekent $(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$
5. $\neg p \vee q \wedge r \rightarrow s \wedge \neg t$ betekent $((\neg p) \vee (q \wedge r)) \rightarrow (s \wedge (\neg t))$

2.1 Metalogica

Tijdens het logisch beschrijven van logica of bij het maken van formules over formules, is het mogelijk dat wij een *paradoxale uitspraak* doen. Zo'n uitspraak is vergelijkbaar met de volgende zin:

$$\boxed{\text{Deze zin is onwaar}}$$

De bovenstaande zin beschrijft zichzelf. Is deze zin nu waar of onwaar? Dit is een paradox. Wij moeten de uitspraken over de logica scheiden van de logica zelf. Daarom introduceren wij *metasymbolen*. Deze metasymbolen zijn geen onderdeel van de beschreven logica, maar een toevoeging aan de omgangstaal in dit dictaat.

metasymbool	betekenis
$\phi, \psi, \ldots$	willekeurige formules ϕ en ψ
ϕ_ψ	formule ϕ met een deelformule ψ
$\phi(\nu, \ldots)$	formule ϕ met variabelen $\nu, \ldots$
$\phi \models \psi$	ψ is een geldig gevolg van ϕ
$\models \phi$	ϕ is een tautologie
$\phi \vdash \psi$	ψ is correct afgeleid uit ϕ
$\vdash \phi$	ϕ is een theorema
$\Rightarrow$	meta-implicatie
$\Leftrightarrow$	meta-equivalentie

Willekeurige formules in de propositierekening worden aangegeven met Griekse letters zoals ϕ en ψ. Als wij $\phi(p,q)$ schrijven dan bedoelen wij een formule die opgebouwd is uit de variabelen p en q. Als wij $\phi(p,q) \equiv (p \rightarrow q)$ noteren, dan staat $\phi(p,q)$ voor de formule $p \rightarrow q$. Met de notatie ϕ_ψ bedoelen wij dat formule ϕ de deelformule ψ bevat. Met $\phi_{p\vee q}$ geven wij aan dat de formule $\phi \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \vee q)$ de deelformule $(p \vee q)$ bevat. Metasymbolen hebben een lagere prioriteit dan alle andere logische symbolen. Wij zullen de haakjes weglaten mits er geen verwarring ontstaat.

2.2 De waarheidstabel

Voor het bepalen van de waarheidswaarde van een formule $\phi(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ moeten alle mogelijke combinaties van *waardetoekenningen* worden bepaald. Deze combinatie van waardetoekenningen vormen samen de *waarheidstabel* van deze formule. Het construeren van een waarheidstabel gaat met de volgende stappen:

1. Plaats de $i = 1 \ldots n$ variabelen p_i in de eerste kolommen van de tabel. Deze n variabelen geven een waarheidstabel met 2^n waardetoekenningen (rijen);
2. Geef elk rij een oplopend nummer van $0 \ldots 2^n - 1$, plaats de k^{de} bitpositie van het rijnummer onder elke kolom met variabele p_k;
3. Plaats onder de propositieformule in volgorde van prioriteit, de betreffende logische waarden. Gebruik definities 1.3, 1.4, 1.5, 1.6 en 1.7 voor het bepalen van de logische waarde per rij;
4. De kolom die het laatst geplaatst wordt, is de *resultaatkolom*.

Indien wij een waarheidstabel voor $\phi(p,q) \equiv \neg p \wedge q \wedge r$ willen maken, dan plaatsen wij alle variabelen, haakjes en operatoren boven de horizontale streep:

nummer	p	q	$(\neg$	$p)$	$\wedge$	q
0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1
2	1	0	0	1	0	0
3	1	1	0	1	0	1
			2	1	4	3

In dit voorbeeld is de kolom waaronder het cijfer 4 staat, het laatst gevuld. Deze kolom staat onder de operator met de laagste prioriteit in de formule. Deze kolom is het resultaat voor de gehele propositieformule.

Zoals al eerder is gezegd, worden bij een waarheidstabel de tussenstappen en de rijnummers weggelaten. Om de *resultaatkolom* gemakkelijk te herkennen, wordt zij geplaatst tussen dubbele kolomlijnen:

$(\neg$	$p)$	$\wedge$	q
1	0	0	0
1	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	1

Voorbeelden:

1. De propositieformule $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(q \wedge p)$

$(p$	$\wedge$	$q)$	$\leftrightarrow$	$\neg$	$(q$	$\wedge$	$p)$
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1	1

   Elke rij is 0 in de resultaatkolom. Een formule die altijd onwaar is, noemen wij een *contradictie*.

2. De propositieformule $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$(q$	$\rightarrow$	$r)$	$\rightarrow$	$(p$	$\rightarrow$	$r)$
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

   Elke rij in de resultaatkolom is een 1. Een formule die altijd waar is, noemen wij een *tautologie*.

3. De propositieformule $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$

$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(q$	$\rightarrow$	$p)$
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1

   In de resultaatkolom staan zowel 0-en en 1-en. Een formule die soms waar, soms onwaar is, noemen wij een *contingentie*.

Het begrip tautologie zal een belangrijke rol gaan spelen in de propositielogica. Als een formule τ een tautologie is, wordt op de volgende manier genoteerd: $\models \tau$. Dit betekent dat de formule τ altijd waar is.

	altijd	niet-altijd
waar	tautologie	contingentie
onwaar	contradictie	contingentie

Definitie 2.1 (Tautologie) *Een tautologie is een formule die altijd waar is, voor alle mogelijke waarden van de variabelen.*

2.3 Gelijkwaardigheid

Formules zijn gelijkwaardig, als zij gelijkwaardige waarheidstabellen hebben:

Voorbeelden:

1.

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

q	p	$q \wedge p$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

De tabel voor $p \wedge q$ blijkt gelijkwaardig met de tabel voor $q \wedge p$

2.

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$q \vee p$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

De tabel voor $p \vee q$ blijkt gelijkwaardig met de tabel voor $q \vee p$.

3.

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$q \rightarrow p$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

De tabel voor $p \rightarrow q$ blijkt **niet** gelijkwaardig met de tabel voor $q \rightarrow p$.

4.

tabel A

p	q	r	ϕ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

tabel B

p	q	ψ
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

In dit voorbeeld hebben de waarheidstabellen evenveel rijen, als wij een extra variabele r aan de tweede tabel toegevoegen. Deze variabele r veroorzaakt geen verschillen in de resultaatkolommen. Zo'n variabele noemt men een *overbodige variabele*:

Om te bepalen of de tabellen van twee formules ϕ en ψ gelijkwaardig zijn, ongeacht de aanwezigheid van overbodige variabelen, maken wij een tabel samengestelde formules $\phi \leftrightarrow \psi$. Als deze samengestelde tabel volledig waar is en de samengestelde formule daarom een tautologie is, zijn ϕ en ψ gelijkwaardig:

Stelling 2.1 (Gelijkwaardige formules) *Twee formules ϕ en ψ zijn gelijkwaardig als de equivalentie van ϕ een ψ een tautologie is:*

$$(\phi(\gamma_1,\ldots,\gamma_n) \Leftrightarrow \psi(\gamma_1,\ldots,\gamma_m)) \Leftrightarrow (\models \phi(\gamma_1,\ldots,\gamma_n) \leftrightarrow \psi(\gamma_1,\ldots,\gamma_m))$$

Opmerking: Het aantal overbodige variabelen is $|n-m|$.

Met stelling 2.1 maken wij geen onderscheid meer tussen gelijkwaardige tabellen en gelijkwaardige formules. In de volgende paragrafen zullen wij de verschillende vormen van gelijkwaardige formules onderzoeken.

2.4 Normaalvormen

Als een formule in de *normaalvorm* staat, zijn alleen de disjunctie $\vee$, de conjunctie $\wedge$ en de ontkenning $\neg$ toegestaan. Alle andere operatoren zijn verboden. Bovendien moet een ontkenning $\neg$ direct voor de variabele staan. Een variabele p of zijn directe ontkenning $\neg p$ noemen wij in de metalogica een *literaal*.

Voorbeelden:

1. $\neg(p \vee q)$ dit is geen literaal;
2. $\neg\neg p \vee q$ $\neg\neg p$ is geen literaal, vervang $\neg\neg p$ door p;
3. $(p \vee \neg q) \rightarrow (\neg p \vee q)$ geen normaalvorm (implicatie).

Normaalvormen zijn er in twee varianten: De disjunctieve- en de conjunctieve normaalvorm.

2.4.1 De disjunctieve normaalvorm

De *disjunctieve normaalvorm* (DNV) bestaat uit *termen* gescheiden door disjuncties $\vee$. Elke term bestaat uit één of meer literalen λ gescheiden door conjuncties $\wedge$:

$$\underbrace{\overbrace{(\lambda \wedge \lambda \wedge \ldots)}^{\text{term}} \vee \overbrace{(\lambda \wedge \lambda \wedge \ldots)}^{\text{term}} \vee \ldots \vee \overbrace{(\lambda \wedge \lambda \wedge \ldots)}^{\text{term}}}_{\text{DNV}}$$

Omdat de conjuncties van de literalen in de term en disjuncties van de termen in de DNV gelijkwaardig zijn als zij in een andere volgorde geplaats worden, kunnen wij voor de DNV de volgende regels formuleren:

De volgorde van de literalen is onbelangrijk:
De term $(\ldots\lambda_x \wedge \ldots\lambda_y \wedge \ldots)$ is gelijkwaardig met $(\ldots\lambda_y \wedge \ldots\lambda_x \wedge \ldots)$;

De volgorde van de termen is onbelangrijk:
De DNV $(\ldots t_x \vee \ldots t_y \vee \ldots)$ is gelijkwaardig met $(\ldots t_y \vee \ldots t_x \vee \ldots)$;

Gelijke literalen in een term zijn overbodig:
De term $(\ldots\lambda_x \wedge \ldots\lambda_x \wedge \ldots)$ is gelijkwaardig met $(\ldots\lambda_x\ldots)$;

Tegenstrijdige literalen maken de term overbodig:
De term $(\ldots\lambda_x \wedge \ldots\neg\lambda_x \wedge \ldots)$ is gelijkwaardig met 0.
De DNV $(\ldots \vee 0 \vee \ldots)$ is gelijkwaardig met $(\ldots)$;

Gelijke termen in de DNV zijn overbodig:
De DNV $(\ldots t_x \vee \ldots t_x \vee \ldots)$ is gelijkwaardig met $(\ldots t_x\ldots)$;

Tegenstrijdige termen maken van de DNV een tautologie:
De DNV $(\ldots t_x \vee \ldots\neg t_x \vee \ldots)$ is gelijkwaardig met 1;

Voorbeelden:

1	$p \vee \neg p$	tautologie
2	$(p \wedge \neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)$	term overbodig
3	$(p \wedge p \wedge q) \vee (p \wedge q)$	literaal en term overbodig
4	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$	

2.4.2 De conjunctieve normaalvorm

De *conjunctieve normaalvorm* (CNV) bestaat uit *factoren* gescheiden door conjuncties $\wedge$. Elke factor bestaat uit één of meer literalen λ gescheiden door disjuncties $\vee$:

$$\underbrace{\overbrace{(\lambda \vee \lambda \vee \ldots)}^{\text{factor}} \wedge \overbrace{(\lambda \vee \lambda \vee \ldots)}^{\text{factor}} \wedge \ldots \wedge \overbrace{(\lambda \vee \lambda \vee \ldots)}^{\text{factor}}}_{\text{CNV}}$$

Omdat de disjuncties van de literalen in de factor en conjuncties van de factoren in de CNV gelijkwaardig zijn als zij in een andere volgorde geplaats worden, kunnen wij voor de CNV de volgende regels formuleren:

De volgorde van de literalen is onbelangrijk:
De factor $(\ldots \lambda_x \vee \ldots \lambda_y \vee \ldots)$ is gelijkwaardig met $(\ldots \lambda_y \vee \ldots \lambda_x \vee \ldots)$;

De volgorde van de factoren is onbelangrijk:
De CNV $(\ldots f_x \wedge \ldots f_y \wedge \ldots)$ is gelijkwaardig met $(\ldots f_y \wedge \ldots f_x \wedge \ldots)$;

Gelijke literalen in een factor zijn overbodig:
De factor $(\ldots \lambda_x \vee \ldots \lambda_x \vee \ldots)$ is gelijkwaardig met $(\ldots \lambda_x \ldots)$;

Tegenstrijdige literalen maken de factor overbodig:
De factor $(\ldots \lambda_x \vee \ldots \neg\lambda_x \vee \ldots)$ is gelijkwaardig met 1.
De CNV $(\ldots \wedge 1 \wedge \ldots)$ is gelijkwaardig met $(\ldots)$;

Gelijke factoren in de CNV zijn overbodig:
De CNV $(\ldots f_x \wedge \ldots f_x \wedge \ldots)$ is gelijkwaardig met $(\ldots f_x \ldots)$;

Tegenstrijdige termen maken van de CNV een contradictie:
De CNV $(\ldots f_x \wedge \ldots \neg f_x \wedge \ldots)$ is gelijkwaardig met 0;

Voorbeelden:

1	$p \wedge \neg p$	contradictie
2	$(p \vee \neg p \vee q) \wedge (p \vee q)$	factor overbodig
3	$(p \vee p \vee q) \wedge (p \vee q)$	literaal en factor overbodig
4	$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (q \vee r)$	

2.4.3 Normaalvormen van waarheidstabellen

In paragraaf 2.2 hebben wij uit een gegeven formule een waarheidstabel geconstrueerd. Wij zullen nu een formule uitwerken als de waarheidstabel gegeven is. Wij kunnen dus uit de waarheidstabel van de formule $\phi(p,q,\ldots)$ een gelijkwaardige formule $\psi(p,q,\ldots)$ bepalen.

Voorbeeld 1:

Uit $\phi(p,q) \equiv q$ is de volgende waarheidstabel geconstrueerd:

rij	p	q	q
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	0
3	1	1	1

Wij zoeken nu een formule $\psi(p,q)$ met een gelijkwaardige waarheidstabel:

Bepaal $\psi(p,q)$:

rij	p	q	$\psi(p,q)$
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	0
3	1	1	1

De formule $\psi(p,q)$ is waar in rij 1 of in rij 3. In rij 1 geldt dat $\neg p$ en q waar zijn, in rij 3 geldt dat p en q waar zijn. Dit is waar als $\psi(p,q) \equiv (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)$. Hieruit blijkt dat $q \leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)$.

q	$\leftrightarrow$	$(\neg p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	$(p$	$\wedge$	$q)$
0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1

Deze methode leidt tot een disjunctieve normaalvorm voor de formule. Als de waarheidstabel bekend is, kunnen wij een disjunctieve normaalvorm $\psi(p,q,\ldots)$ verkrijgen met de volgende stappen:

1. Bepaal van elk model (elke rij die waar is in de resultaatkolom) de *factor*. Dit de conjunctie van alle variabelen $(p \wedge q \wedge \ldots)$. Als een variabele in de rij onwaar is, dan wordt zij in de term ontkennend aangegeven en andersom.

2. Maak van alle factoren een disjunctie.

Voorbeeld 2:

Bepaal de normaalvorm $\psi(p,q)$:

rij	p	q	$\psi(p,q)$
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	1
3	1	1	1

Rij 2 en 3 zijn modellen. In rij 2 geldt dat p en $\neg q$ waar zijn, in rij 3 geldt dat p en q waar zijn. De formule $\psi(p,q)$ is waar als: $(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$.

In de waarheidstabellen waarin de minderheid van de rijen een model is, is het handig om uit te gaan van onware rijen. De resultaatkolom is onwaar in rij 0 of in rij 1. In rij 0 geldt dat $\neg p$ en $\neg q$ waar zijn, in rij 1 geldt dat $\neg p$ en q waar zijn. De resultaatkolom is onwaar als: $(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$. Daaruit volgt dat de resultaatkolom waar is als $\neg((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q))$. Deze laatste uitspraak is equivalent met $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$. Deze laatste methode leidt tot een conjunctieve normaalvorm voor de formule. Wij kunnen in het algemeen een conjunctieve normaalvorm $\psi(p,q,\ldots)$ verkrijgen met de volgende stappen:

1. Bepaal van elk onware rij in de resultaatkolom de *term*. Dit is de disjunctie van de ontkenning van de variabelen $(\neg p \vee \neg q \vee \ldots)$. Als een variabele in de rij waar is, dan wordt zij in de term ontkennend aangegeven en andersom.

2. Maak van alle termen een conjunctie.

Voorbeeld 3:

Bepaal de conjunctieve normaalvorm van $\psi(p,q,r)$:

nummer	p	q	r	$\psi(p,q,r)$
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Antwoord:

Voor de rijen 1 en 4 geldt: $\psi(p,q,r) \equiv (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$

Voorbeeld 4:

Bepaal de normaalvorm van $\psi(p,q)$:

nummer	p	q	$\psi(p,q)$
0	0	0	1
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	1

Antwoord:

Deze tautologie krijgt een disjunctieve normaalvorm: $\psi(p,q) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee q) \vee (p \vee \neg q) \vee (p \vee q)$. Natuurlijk zou deze tautologie korter genoteerd kunnen worden met $p \vee \neg p$. In de conjunctieve normaalvorm is een tautologie kunnen dus elke waarheidstabel symbolisch noteren als een disjunctieve- of een conjunctieve normaalvorm.

Opmerkingen:

Indien wij een waarheidstabel met de variabelen op een alternatieve manier willen beschrijven, kunnen wij gebruik maken van de normaalvormen.

Neem bijvoorbeeld een waarheidstabel met (mogelijk overbodige) variabelen p, q en r, waarvan de rijen $2,3,5,7$ waar en de rijen $0,1,4,6$ onwaar zijn. Wij kunnen deze waarheidstabel met behulp van normaalvormen als volgt beschrijven:

- In disjunctieve normaalvorm gaan wij uit van de ware rijen: $\bigvee(2,3,5,7) \cdot (p \wedge q \wedge r)$.
  Uitgewerkt is dit: $(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$;
- In conjunctieve normaalvorm gaan wij uit van de onware rijen: $\bigwedge(0,1,4,6) \cdot (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$.
  Uitgewerkt is dit: $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$.

2.5 Formules

In paragraaf 2.2 hebben wij een waarheidstabel uit een formule geconstrueerd. In paragraaf 2.4 is daarentegen een formule uit een waarheidstabel geconstrueerd. In deze paragraaf zullen wij een formule herschrijven of vereenvoudigen als een andere gelijkwaardige formule, zonder tussenkomst van een waarheidstabel.

Volgens stelling 2.1 zijn formules gelijkwaardig als zij dezelfde waarheidstabel hebben. Wij kunnen dus gelijkwaardige formules maken als wij de beschikking hebben over kant en klare tautologieën. Zeker als zo'n tautologie een equivalentie betreft. Zo'n type tautologie wordt *herschrijfregel* genoemd. Het andere type tautologie met een implicatie wordt *afleidingsregel* genoemd.

Definitie 2.2 (Herschrijfregel) *Een tautologie waarvan de operator met de laagste prioriteit een equivalentie is, noemen wij een herschrijfregel ($\Leftrightarrow$):*

$$\models \alpha(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \leftrightarrow \beta(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)$$

Definitie 2.3 (Afleidingsregel) *Een tautologie waarvan de operator met de laagste prioriteit een implicatie is, noemen wij een afleidingsregel ($\Rightarrow$):*

$$\models \alpha(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \rightarrow \beta(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)$$

In de volgende tabel zijn enkele voorbeelden uit de verzameling tautologiën opgenomen. Achter elke tautologie staat de naam en het type. Sommige herschrijfregels worden *vereenvoudigingen* genoemd. Met deze herschrijfregels is het mogelijk overbodige variabelen te elimineren of te introduceren ($m \neq n$).

$\models (p \wedge 0) \leftrightarrow 0$	vereenvoudiging	$\Leftrightarrow$
$\models (p \vee 1) \leftrightarrow 1$	vereenvoudiging	$\Leftrightarrow$
$\models (p \rightarrow 1) \leftrightarrow 1$	vereenvoudiging	$\Leftrightarrow$
$\models (0 \rightarrow p) \leftrightarrow 1$	vereenvoudiging	$\Leftrightarrow$
$\models (p \wedge \neg p) \leftrightarrow 0$	vereenvoudiging	$\Leftrightarrow$
$\models (p \vee \neg p) \leftrightarrow 1$	vereenvoudiging	$\Leftrightarrow$
$\models (1 \rightarrow p) \leftrightarrow p$	triviaal	$\Leftrightarrow$
$\models (p \rightarrow 0) \leftrightarrow \neg p$	absurd	$\Leftrightarrow$
$\models (p \wedge 1) \leftrightarrow p$	identiteit conjunctie	$\Leftrightarrow$
$\models (p \vee 0) \leftrightarrow p$	identiteit disjunctie	$\Leftrightarrow$
$\models (p \vee p) \leftrightarrow p$	idempotentie disjunctie	$\Leftrightarrow$
$\models (p \wedge p) \leftrightarrow p$	idempotentie conjunctie	$\Leftrightarrow$
$\models (p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$	associativiteit disjunctie	$\Leftrightarrow$
$\models (p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	associativiteit conjunctie	$\Leftrightarrow$
$\models (p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$	commutativiteit disjunctie	$\Leftrightarrow$
$\models (p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$	commutativiteit conjunctie	$\Leftrightarrow$
$\models p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	distributiviteit disjunctie	$\Leftrightarrow$
$\models p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	distributiviteit conjunctie	$\Leftrightarrow$
$\models \neg\neg p \leftrightarrow p$	dubbele ontkenning	$\Leftrightarrow$
$\models \neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$	deMorgan	$\Leftrightarrow$
$\models \neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$	deMorgan	$\Leftrightarrow$
$\models (p \vee (p \wedge q)) \leftrightarrow p$	vereenvoudiging	$\Leftrightarrow$
$\models (p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p$	vereenvoudiging	$\Leftrightarrow$
$\models (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \leftrightarrow \neg p$	vereenvoudiging	$\Leftrightarrow$
$\models (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \leftrightarrow p$	vereenvoudiging	$\Leftrightarrow$
$\models (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	contrapositie	$\Leftrightarrow$
$\models (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$	eliminatie implicatie	$\Leftrightarrow$
$\models (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	eliminatie equivalentie	$\Leftrightarrow$
$\models (p \wedge q) \rightarrow p$	simplificatie conjunctie	$\Rightarrow$
$\models p \rightarrow (p \vee q)$	toevoeging disjunctie	$\Rightarrow$
$\models (\neg p \wedge p) \rightarrow q$	bewijs uit het ongerijmde	$\Rightarrow$
$\models ((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$	modus tollens	$\Rightarrow$
$\models (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$	modus ponens	$\Rightarrow$
$\models ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$	hypothetisch syllogisme	$\Rightarrow$

2.5.1 Substitutie van variabelen

Als wij $\phi(p,q) \equiv (p \rightarrow q)$ noteren, dan staat de naam $\phi(p,q)$ met de *formele argumenten* p en q voor de formule $p \rightarrow q$. De argumenten betreffen dus de variabelen in de formule. Als wij de originele formule aan geven met $\phi(\gamma\ldots)$ dan wordt de nieuwe formule $\phi(\delta\ldots)$. Bij een *substitutie* moeten alle voorkomens van de formele argumenten uit de lijst $\gamma\ldots$ vervangen door de overeenkomstige actuele argumenten in de lijst $\delta\ldots$. Dit betekent niet dat de nieuwe formule $\phi(\delta\ldots)$ gelijkwaardig is met de originele formule $\phi(\gamma\ldots)$.

Voorbeelden:

1. als: $\phi(p,q) \equiv p \to q$ dan: $\phi(p,p) \equiv p \to p$
2. als: $\phi(p,q) \equiv p \to q$ dan: $\phi(r,\neg r) \equiv r \to \neg r$
3. als: $\phi(p,q) \equiv p \to q$ dan: $\phi(q \to p, p \to q) \equiv (q \to p) \to (p \to q)$
4. als: $\phi(p,q) \equiv (p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ dan:
   $\phi(\neg p \wedge p, \neg q \wedge q) \equiv ((\neg p \wedge p) \to (\neg q \wedge q)) \leftrightarrow (\neg(\neg p \wedge p) \vee (\neg q \wedge q))$

Uit voorbeelden 1,2 en 3 blijken door substitutie ongelijkwaardige formules voortgekomen. Daarentegen, blijkt in voorbeeld 4 dat uit een tautologie weer een tautologie is ontstaan. Stel dat $\tau(\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$ een tautologie is, dan is $\tau(\delta_1, \delta_2, \ldots)$ ook een tautologie. Dit is een gevolg van het feit dat de resultaatkolom van een tautologie altijd waar is, ongeacht de waarde en naam van de variabelen. Dit wordt de *substitutiestelling* genoemd:

Stelling 2.2 (De substitutiestelling:)

$$(\models \tau(\gamma\ldots)) \quad \Rightarrow \quad (\models \tau(\delta\ldots))$$

Voorbeelden: $\tau(p,q) \equiv (\models (p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p))$

1. $\Rightarrow \quad \tau(r,s) \equiv (\models (r \wedge s) \leftrightarrow (s \wedge r))$
2. $\Rightarrow \quad \tau(\neg q, p) \equiv (\models (\neg q \wedge p) \leftrightarrow (p \wedge \neg q))$
3. $\Rightarrow \quad \tau(p \wedge q, r) \equiv ((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (r \wedge (p \wedge q))$

2.5.2 Boole-algebra

Met substituties van variabelen in een tautologie kunnen wij onbeperkt nieuwe tautologieën creëren. Bovendien krijgen wij een nieuwe herschrijfregels door de variabelen in andere herschrijfregels te substitueren. Als wij de beschikking hebben over een onbeperkt aantal herschrijfregels, dan kunnen wij gelijkwaardige formules maken door delen van formules te *herschrijven* met herschrijfregels.

Stel dat in de formule $\phi(\delta\ldots)$ een deelformule $\alpha(\delta\ldots)$ heeft, $\phi(\delta\ldots)_{\alpha(\delta\ldots)}$, dan is $\phi(\delta\ldots)_{\beta(\delta\ldots)}$ een formule met dezelfde waarheidstabel mits $\alpha(\gamma\ldots) \leftrightarrow \beta(\gamma\ldots)$ een herschrijfregel is. Dit komt omdat de resultaatkolom ϕ niet gewijzigd wordt door de kolom onder α te vervangen door een equivalente kolom β. Dat de variabelen in $\phi(\delta\ldots)$ een andere naam hebben dan de herschrijfregel $\alpha(\gamma\ldots) \leftrightarrow \beta(\gamma\ldots)$ is niet belangrijk omdat met de substitutiestelling altijd een nieuwe herschrijfregel $\alpha(\delta\ldots) \leftrightarrow \beta(\delta\ldots)$ gevormd kan worden.

Stelling 2.3 (De herschrijfstelling:)

$$(\models \alpha(\gamma\ldots) \leftrightarrow \beta(\gamma\ldots)) \quad \Rightarrow \quad (\phi(\delta\ldots)_{\alpha(\delta\ldots)} \Leftrightarrow \phi(\delta\ldots)_{\beta(\delta\ldots)})$$

Omdat substituties van variabelen in herschrijfregels en herschrijvingen van deelformules mogelijk zijn, wordt een soort algebra[1] met logische formules mogelijk. Deze uitbreiding is vooral te danken aan het werk van de Engelse wiskundige *George Boole* (1815-1864). Het is mogelijk een formule met *Boole-algebra* te herschrijven in een vorm waaruit eenvoudig de waardering is af te lezen. Dit noemt men *vereenvoudigen*. Een vereenvoudigde formule bevat in het gunstigste geval geen overbodige variabelen meer, maar een herkenbare tautologie, een contradictie of een normaalvorm.

Tijdens het vereenvoudigen van een formule is het aan te bevelen bij elke stap de gebruikte herschrijfregel te noemen. Soms worden voor de hand liggende herschrijvingen zoals commutativiteit en associativiteit gecombineerd in een stap. De stappen kunnen ook in de omgekeerde volgorde genomen worden.

Voorbeelden:

1. Vereenvoudig $\neg p \wedge (p \wedge q)$:

$$\begin{array}{lll} & \neg p \wedge (p \wedge q) & \\ \Leftrightarrow & (\neg p \wedge p) \wedge q & \text{associativiteit} \\ \Leftrightarrow & 0 \wedge q & \text{vereenvoudiging} \\ \Leftrightarrow & 0 & \text{vereenvoudiging} \end{array}$$

2. Vereenvoudig $(p \wedge q) \rightarrow p$:

$$\begin{array}{lll} & (p \wedge q) \rightarrow p & \\ \Leftrightarrow & \neg(p \wedge q) \vee p & \text{implicatie} \\ \Leftrightarrow & (\neg p \vee \neg q) \vee p & \text{deMorgan} \\ \Leftrightarrow & \neg p \vee \neg q \vee p & \text{associativiteit} \\ \Leftrightarrow & \neg p \vee p \vee \neg q & \text{commutativiteit} \\ \Leftrightarrow & (\neg p \vee p) \vee \neg q & \text{associativiteit} \\ \Leftrightarrow & 1 \vee \neg q & \text{vereenvoudiging} \\ \Leftrightarrow & 1 & \text{vereenvoudiging} \end{array}$$

Omdat de formules vaak complexer worden tijdens het vereenvoudigen en er geen goede strategie is om geschikte herschrijfregels te kiezen, wordt het vereenvoudigen met behulp van herschrijvingen beperkt toegepast. Als er niet teveel variabelen zijn, wordt in de schakeltechniek gebruik gemaakt van een *Karnaugh diagram* om een formule (schakeling) te vereenvoudigen.

[1] Wiskundigen bewijzen dit door aan te tonen dat Boole-algebra een 'tralie' is.

2.6 Opgaven

1. Stel dat p staat voor "*het regent*", q staat voor "*het is bewolkt*" en r staat voor het is "*het is koud*". Vertaal de volgende zinnen uit de omgangstaal naar formules. Bepaal van deze formules de waarheidstabellen.

   (a) het regent en het is koud

   (b) het regent, maar het is niet bewolkt

   (c) als het bewolkt en koud is, dan regent het

2. Er zijn twee personen p en q. Maximaal één persoon spreekt de waarheid. Dit zou je in een tabel kunnen plaatsen:

p	q	$\phi(p,q)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

   Hieruit volgt dat $\phi(p,q) \equiv \neg(p \wedge q)$. Bepaal voor de volgende uitspraken de bijbehorende propositie:

   (a) Minstens één persoon spreekt de waarheid.

   (b) Zij spreken beide de waarheid of niet.

   (c) Er wordt altijd de waarheid gesproken.

3. Maak waarheidstabellen voor de volgende proposities, geef aan of de propositie een tautologie, een contradictie of een contingentie is.

   (a) $p \vee \neg(p \leftrightarrow q)$

   (b) $\neg p \wedge q$

   (c) $\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) \leftrightarrow \neg p$

   (d) $\neg(p \vee r) \wedge (p \vee q) \rightarrow \neg p$

   (e) $\neg p \vee r \rightarrow (p \rightarrow q)$

   (f) $\neg p \vee r \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

4. Maak de waarheidstabellen van $\bigwedge(2,3,5,7) \cdot (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ en $\bigvee(1,3,5,7) \cdot (p \wedge q \wedge r)$. Geef de vereenvoudigde formules.

Hoofdstuk 3

Bewijzen met proposities

In het vorige hoofdstuk is het vereenvoudigen van formules behandeld. Het vereenvoudigen van formules is gebaseerd op het algebraïsch herschrijven van formules met behulp van tautologiën met equivalenties die op hun beurt weer gebaseerd zijn op waarheidstabellen. Dat redeneren meer is dan vereenvoudigen, wordt aan de hand van het volgende voorbeeld aangetoond.

Vereenvoudig de programmaregel:

while $(\neg(x \geq 5) \wedge (x \geq 0)) \vee ((x \geq 5) \wedge \neg(x \geq 0)) \vee ((x \geq 5) \wedge (x \geq 0))$ **do**

Stel $p \Leftrightarrow (x \geq 5)$ en $q \Leftrightarrow (x \geq 0)$:

$$\begin{array}{lll} & (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) & \\ \Leftrightarrow & (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) & \text{toevoegen term} \\ \Leftrightarrow & ((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)) \vee ((p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)) & \text{associativiteit 2x} \\ \Leftrightarrow & q \vee p & \text{vereenvoudiging 2x} \end{array}$$

De vereenvoudigde programmaregel wordt:

while $(x \geq 0) \vee (x \geq 5)$ **do**

Hoewel deze vereenvoudiging domweg het gevolg is van het toepassen van de propositierekening, mogen wij niet tevreden zijn met het resultaat. Als wij inhoudelijk de uitspraken onderzoeken, dan blijkt uitspraak $x \geq 5$ de uitspraak $x \geq 0$ te impliceren. Wij zeggen dat $x \geq 5$ *sterker* is dan de *zwakke uitspraak* $x \geq 0$. Wij hebben nu de beschikking over de formule $p \rightarrow q$ en de eerder gevonden vereenvoudiging $q \vee p$. Kunnen wij uit deze twee formules een extra vereenvoudiging afleiden? Ja, daarvoor gebruiken wij de volgende redenatie:

Beide formules zijn waar, de extra vereenvoudiging moet een consequentie zijn van deze twee premissen. De premissen $(p \rightarrow q)$ en $(q \vee p)$ kunnen misschien verder vereenvoudigd worden tot een nieuw resultaat:

$$\begin{array}{lll} & (p \rightarrow q) \wedge (p \vee q) & \\ \Leftrightarrow & (\neg p \vee q) \wedge (p \vee q) & \text{implicatie} \\ \Leftrightarrow & q & \text{overbodige variabele} \end{array}$$

De conclusie van de bovenstaande redenatie is dat het programma vereenvoudigd kan worden tot:

while $x \geq 0$ **do**

Bij een bewijs of redenatie gaat men uit van uitgangspunten, de *premissen* . In het voorbeeld is de premisse $p \rightarrow q$ afkomstig uit de wiskunde van de ongelijkheden. De premisse $p \vee q$ is een vereenvoudiging van de gegeven programmaregel. Soms worden premissen algemeen geldig verondersteld (*axioma's*), of zijn zij indirect in de gegevens aanwezig (*verborgen premissen*), zoals bij puzzels. Het is dan de kunst om een verborgen premisse te vinden en op een heldere manier te formuleren.

Nadat de premissen bekend zijn, worden zij gebundeld tot een conjunctie. Dit betekent dat **alle** premissen bij het bewijs betrokken worden. Soms moet in bepaalde logische puzzels uit de premissen een conclusie gedestilleerd worden. Meestal moet van een gegeven formule bewezen worden dat zij een *geldig gevolg* is uit de premissen.

3.1 Geldigheid

Het begrip geldigheid hebben wij al informeel besproken in paragraaf 1.1. Wij zullen nu de formele definitie van geldigheid geven:

Definitie 3.1 (Geldigheid) *Een bewijs is ongeldig als de premissen $\phi_1, \phi_2 \ldots \phi_n$ waar zijn en de conclusie ψ onwaar is. In alle andere gevallen is het bewijs geldig.*

Dit wordt duidelijk gemaakt in de volgende tabel ($\phi \equiv \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \ldots \wedge \phi_n$):

model	premissen ϕ	conclusie ψ	redenatie
0	0	0	geldig
1	0	1	geldig
2	1	0	ongeldig
3	1	1	geldig

Het metasymbool $\models$ staat voor een geldig gevolg. Hoe valt dit te rijmen met de notatie $\models \tau$ van een tautologie? Een tautologie τ is een geldige uitspraak zonder premissen. Omdat een tautologie τ alleen ongeldig is als de conclusie onwaar is en de niet-bestaande premissen waar zijn (geval 2), zal door het ontbreken van de premissen de tautologie altijd geldig zijn: $\models \tau$.

Stelling 3.1 (Geldig gevolg) *Een conclusie uit de premissen is dan en slechts dan een geldig gevolg als de conjunctie van de premissen met de implicatie van de conclusie een tautologie is. In symbolische notatie:*

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \ldots \wedge \phi_n \rightarrow \psi$$

Dit wordt gedemonstreerd in de volgende tabel:

ϕ	ψ	redenatie $\phi \models \psi$	$\phi \to \psi$
0	0	geldig	1
0	1	geldig	1
1	0	ongeldig	0
1	1	geldig	1

Voorbeeld 1:

Men wil conclusie $\neg q \to \neg p$ bewijzen uit premisse $p \to q$. Met andere woorden: $\models (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$?

$(p$	$\to$	$q)$	$\to$	$(\neg$	q	$\to$	$\neg$	$p)$
0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1	1	0	1

Uit de waarheidstabel blijkt dat de redenatie geldig is.

Voorbeeld 2:

Mag de conclusie ψ getrokken worden uit de premissen ϕ_1 en ϕ_2?

ϕ_1	als een eend een vis is, dan zwemt zij in het water	$q \to p$
ϕ_2	een eend zwemt in het water	p
ψ	een eend is een vis	q

De premissen ϕ_1, ϕ_2 en de conclusie ψ geven de volgende waarheidstabel:

$((q$	$\to$	$p)$	$\wedge$	$p)$	$\to$	q
0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Omdat de vereenvoudiging niet tot een tautologie leidt, is de redenatie niet geldig.

Voorbeeld 3:

In dit voorbeeld gaan wij het begrip geldigheid verder onderzoeken aan de hand van een logische puzzel.

ϕ_1	als een student werkt kan hij de school betalen	$w \to b$
ϕ_2	als hij niet werkt dan is hij op school	$\neg w \to s$
ϕ_2	als hij niet kan betalen dan komt hij niet op school	$\neg b \to \neg s$
ψ	onbekend	

De conclusie is in dit voorbeeld onbekend. Dit is meestal de vorm waarin logische puzzels worden aangeboden. Wij kunnen geen gebruik maken van stelling 3.1 omdat wij de conclusie ψ nog niet hebben vastgesteld. Wij kunnen wel een waarheidstabel maken en kijken welke van de variabelen geconcludeerd mogen worden.

geval	w	b	s	$w \to b$	$\neg w \to s$	$\neg b \to \neg s$
0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0
2	0	1	0	1	0	1
3	0	1	1	1	1	1
4	1	0	0	0	1	1
5	1	0	1	0	1	0
6	1	1	0	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1

Alleen in geval 3, 6 en 7 zijn alle premissen waar. De enige variabele die in al deze 3 gevallen waar is, is de variabele b. De enig geldige conclusie van de premissen luidt daarom b: “betalen”.

Voorbeeld 4:

Op het politiebureau van Kneiphof zijn verdachten volledig eerlijk of volledig oneerlijk. Zij spreken de volledige waarheid of zij liegen dat ze barsten. De rechercheur die de verdachten moet ondervragen, weet niet wat voor vlees hij in de kuip heeft. Gelukkig is deze rechercheur gezegend met een knobbel voor logisch denken.

Op een zekere dag worden twee personen p en q voor ondervraging binnen geleid. Zij worden verdacht van een bankoverval. Op de vraag van de rechercheur waar de buit is, antwoord p:*“Als er een buit is, dan ben ik een leugenaar.”*. Verdachte q antwoord op dezelfde vraag: *“Verdachte p liegt.”*

Wat is de conclusie van de rechercheur?

De oplossing moet gezocht worden in de antwoorden van de verdachten. Als een verdachte ϕ de waarheid spreekt, dan is de uitspraak ψ waar. Als een verdachte ϕ liegt, dan is uitspraak ψ onwaar. Een eerlijke verdachte wordt voorgesteld door ϕ en een ware uitspraak wordt voorgesteld door ψ. Een oneerlijke verdachte wordt voorgesteld door $\neg\phi$, een leugen wordt voorgesteld door $\neg\psi$. Uit $(\phi \to \psi) \wedge (\neg\phi \to \neg\psi)$ volgt $\phi \leftrightarrow \psi$. Met deze *‘basisequivalentie’* worden puzzels met eerlijke en oneerlijke verdachten opgelost.

In ons voorbeeld gelden de volgende premissen:

ϕ_1	p zegt: “Als er een buit b is, dan ben ik een leugenaar.”	$p \leftrightarrow (b \to \neg p)$
ϕ_2	q zegt: “Verdachte p liegt.”	$q \leftrightarrow \neg p$

De conclusie is onbekend:

geval	p	q	b	$p \leftrightarrow (b \rightarrow \neg p)$	$\wedge$	$q \leftrightarrow \neg p$
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	0	0	1
3	0	1	1	0	0	1
4	1	0	0	1	1	1
5	1	0	1	0	0	1
6	1	1	0	1	0	0
7	1	1	1	0	0	0

Uit de waarheidstabel blijkt dat in geval 4 alle premissen waar zijn. De conclusie van de rechercheur luidt: p spreekt de waarheid, q liegt en er is geen buit b.

3.2 De klassieke logica

Wij hebben tot dusverre direct of indirect gebruik gemaakt van waarheidstabellen. Het toepassen van waarheidstabellen in de logica is pas mogelijk geworden in het begin van deze eeuw. Vooral het werk van *Ludwig Wittgenstein* (1889-1951) heeft veel bijgedragen tot het gebruik van waarheidstabellen en tautologieën in de propositielogica. De klassieke logica, zoals die wordt beschreven door *Aristoteles* (384-322 v. Chr.), maakt geen gebruik van waarheidstabellen. Men spreekt in de klassieke logica niet over een tautologie maar over een *theorema* als men het over een onbetwistbaar geldige formule heeft. Sommige theorema's worden intuïtief als waar aangenomen. Deze theorema's worden *axioma's* genoemd. In de klassieke logica worden de premissen en de axioma's als uitgangspunten genomen worden bij een bewijs. Met behulp van substituties en een bijzondere afleidingsregel, de 'modus ponens', worden uit van 8 axioma's alle andere theorema's *afgeleid*.

Om afleidingen gebaseerd op axioma's, te onderscheiden van geldige gevolgen gebaseerd op waarheidstabellen, gebruiken wij andere symbolen:

- Afleidingen gebaseerd op axioma's: $\phi_1, \phi_2 \ldots, \phi_n \vdash \psi$
- Geldige gevolgen gebaseerd op waarheidstabellen: $\phi_1, \phi_2 \ldots, \phi_n \models \psi$

De klassieke logica kent de volgende axioma's in de vorm $\phi \rightarrow \psi$:

$$\begin{array}{ll}
\alpha_1 & p \rightarrow (q \rightarrow p) \\
\alpha_2 & (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r) \\
\alpha_3 & p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q)) \\
\alpha_{4a} & (p \wedge q) \rightarrow p \\
\alpha_{4b} & (p \wedge q) \rightarrow q \\
\alpha_{5a} & p \rightarrow (p \vee q) \\
\alpha_{5b} & q \rightarrow (p \vee q) \\
\alpha_6 & (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)) \\
\alpha_7 & (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q)) \rightarrow \neg p) \\
\alpha_8 & (\neg\neg p) \rightarrow p
\end{array}$$

De enig toegestane afleidingsregel, de 'modus ponens', luidt:

$$(\phi \wedge (\phi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi$$

Het is in de klassieke logica gebruikelijk dat de premisse ϕ en de implicatie $\phi \rightarrow \psi$, meestal een axioma, in tegenstelling met de conclusie ψ boven de streep geplaatst worden.

$$\frac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi}$$

Het is niet ongebruikelijk dat er meer premissen zijn. Daarom mag een conclusie gebruikt als worden als een premisse of implicatie voor de volgende afleiding. In principe kan door een herhaald toepassen van deze afleidingen de geldigheid van een redenatie worden bepaald.

Voorbeeld:

Gegeven: de premissen ϕ_1, ϕ_2 en de conclusie ψ:

ϕ_1	Als het koud is, ga ik naar huis.	$p \rightarrow q$
ϕ_2	Ik ga niet naar huis.	$\neg q$
ψ	Het is niet koud.	$\neg p$

Het afleidingsschema wordt in de klassieke logica:

$$\cfrac{\cfrac{\overbrace{\neg q}^{\phi_1} \quad \overbrace{\neg q \rightarrow (p \rightarrow \neg q)}^{\alpha_1}}{p \rightarrow \neg q} \qquad \cfrac{\overbrace{p \rightarrow q}^{\phi_2} \quad \overbrace{(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)}^{\alpha_7}}{(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p}}{\neg p}$$

In dit nogal complexe schema is een bekend theorema, de 'contrapositie', afgeleid uit de axioma's met behulp van de 'modus ponens'.

3.2.1 Natuurlijke deductie

In het algemeen zijn de afleidingen met de 'modus ponens' nogal omvangrijk. Daarom heeft de Duitse wiskundige *Gerhard Gentzen* (1909-1931) een aangepast logisch systeem, de *natuurlijke deductie*, ontwikkeld uit de klassieke logica. Omdat natuurlijke deductie meer dan één afleidingregel toestaat, zijn de afleidingen compacter en duidelijker dan die van de klassieke logica. Bovendien sluiten de afleidingsregels van de natuurlijke deductie goed aan op onze natuurlijke manier van redeneren. Wij noemen de afleidingsregels van de natuurlijke deductie *inferentieregels*. In de natuurlijke deductie zijn de begrippen 'waar' en 'onwaar' niet gedefiniëerd. Daarentegen kent de natuurlijke deductie wel het begrip '*absurditeit*'. Het begrip 'absurditeit' komt overeen met het begrip 'contradictie' uit de waarheidstabellen. Een absurditeit heeft de vorm $p \wedge \neg p$. In afleidingen met natuurlijke deductie maakt men gebruik van de volgende symbolen:

- $\perp$ betekent: *een absurditeit*, een ongeldige uitspraak zoals $p \wedge \neg p$;
- $\vdash q$ betekent: formule q is geldig;
- $p \vdash q$ betekent: een geldige afleiding van q uit p;

Het $\vdash$ teken in $p \vdash q$ wordt vaak als streep weergegeven: $\dfrac{\text{p}}{\text{q}}$

De inferentieregels zijn in twee groepen te verdelen: de *introductieregels* en de *eliminatieregels*. De eerste groep introduceert een operator, de tweede groep verwijdert een operator.

1. De introductie van een conjunctie ($I\wedge$) betekent, dat als de premissen p en q geldig zijn, hun conjunctie $p \wedge q$ ook geldig is.
2. De eliminatie van een conjunctie ($E\wedge$) betekent, dat als de premisse $p \wedge q$ geldig zijn, de conclusie p geldig is. Een soortgelijke redenering geldt ook voor q.
3. De introductie van een disjunctie ($I\vee$) betekent, dat als de premisse p geldt, men altijd een q mag introduceren: $p \vee q$. Men mag bijvoorbeeld de uitspraak "$1+1 = 2$" zonder de geldigheid te verliezen disjunctief combineren met een geldige of ongeldige uitspraak, zoals: "$4-1=7$". De gecombineerde uitspraak blijft geldig: "$1+1=2 \quad \vee \quad 4-1=7$".
4. De eliminatie van een disjunctie ($E\vee$) betekent, dat als de premisse $p \vee q$ geldt en men uit p of q de uitspraak r kan afleiden, de conclusie r geldig is. *"Je heb rijk- of een arm leven, dood ga je toch."*

5. De introductie van een implicatie ($I \rightarrow$) wordt gebruikt om vanuit een *hypothese* p een conclusie q af te leiden. Een hypothese is een *fictieve premisse*, een *aanname* om een implicatie te bewijzen. Omdat hypothese is niet noodzakelijk geldig is, mag zij niet zondermeer in een eindconclusie worden opgenomen. De hypothese p mag alleen gebruikt worden om q af te leiden om daarmee de geldigheid van $p \rightarrow q$ aan te tonen. Men noem zo'n *hypothetisch bewijs* een *conditioneel bewijs*.

   Voorbeeld: Stel dat *"je niet studeert"*. Hieruit volgt: *"je haalt geen voldoendes"* en daaruit volgt weer dat: *"je krijgt geen diploma"*. Hiermee is bewezen dat: *"**als** je niet studeert **dan** krijg je geen diploma"*.

6. De eliminatie van een implicatie ($E \rightarrow$) betekent, dat als de premissen p en $p \rightarrow q$ gelden, de conclusie q geldig is. In deze regel is duidelijk de 'modus ponens' herkenbaar.

7. De introductie van een equivalentie ($I \leftrightarrow$) is meestal het sluitstuk van een *equivalentiebewijs*. Dit soort bewijzen begint met de opdracht: *"Toon aan dat beide uitspraken equivalent zijn."* Men leidt eerst q uit p af, vervolgens leidt men p uit q af.

8. De eliminatie van een equivalentie ($E \leftrightarrow$) betekent, dat als twee uitspraken equivalent zijn, men zonder geldigheid te verliezen de alternatieve uitspraak mag kiezen.

9. De introductie van een ontkenning ($I\neg$) betekent, dat als een uitspraak p leidt tot een absurditeit $\perp$, men de ontkenning $\neg p$ van deze uitspraak mag concluderen. Om een stelling van het type $\neg p$ te bewijzen, wordt de hypothese p aangenomen. Als de hypothese leidt tot een absurditeit, hebben wij $\neg p$ bewezen. Men noemt dit een *bewijs door tegenspraak* of *indirect bewijs*.

10. De eliminatie van een ontkenning ($E\neg$) betekent, dat als een ontkenning van een uitspraak $\neg p$ leidt tot een absurditeit $\perp$, men de uitspraak $\neg p$ mag concluderen. Ook dit is een vorm van indirect bewijzen of bewijzen door tegenspraak. Om een stelling van het type p te bewijzen wordt vaak de hypothese $\neg p$ gesteld. Als deze hypothese leidt tot een absurditeit hebben wij p bewezen. Men komt een variant van de eliminatie van de ontkenning vaak tegen in de verkorte vorm $\neg\neg p \vdash p$, de *uitgesloten derde*.

Deze inferentieregels worden schematisch weergegeven in de volgende tabel:

operator	introductie	eliminatie
$\neg$	$\dfrac{\begin{array}{c}p\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg p}$	$\dfrac{\begin{array}{c}\neg p\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{p}$ $\quad$ $\dfrac{p \quad \neg p}{q}$
$\wedge$	$\dfrac{p \quad q}{p \wedge q}$	$\dfrac{p \wedge q}{p}$ $\quad$ $\dfrac{p \wedge q}{q}$
$\vee$	$\dfrac{p}{p \vee q}$ $\quad$ $\dfrac{q}{p \vee q}$	$\dfrac{p \vee q \quad \begin{array}{c}p\\ \vdots\\ r\end{array} \quad \begin{array}{c}q\\ \vdots\\ r\end{array}}{r}$
$\rightarrow$	$\dfrac{\begin{array}{c}p\\ \vdots\\ q\end{array}}{p \rightarrow q}$	$\dfrac{p \quad p \rightarrow q}{q}$
$\leftrightarrow$	$\dfrac{\begin{array}{c}p\\ \vdots\\ q\end{array} \quad \begin{array}{c}q\\ \vdots\\ p\end{array}}{p \leftrightarrow q}$	$\dfrac{p \quad p \leftrightarrow q}{q}$ $\quad$ $\dfrac{q \quad p \leftrightarrow q}{p}$

Bij elke afleidingsstap moeten wij aangeven welke inferentieregel gebruikt is. Deze inferentieregels worden afgekort met de hoofdletters E of I voor respectievelijk de eliminatie of introductie van een operator: $E\neg, I\neg, E\wedge, I\wedge, \ldots, E\leftrightarrow, I\leftrightarrow$. De premissen en de hypothesen staan aan de bovenkant van de strepen. De hypothesen moeten duidelijk herkenbaar worden aangegeven.

Voorbeelden:

1. Bewijs $(p \wedge q) \vdash (q \wedge p)$:

   $$\dfrac{\dfrac{p \wedge q}{q}\,E\wedge \qquad \dfrac{p \wedge q}{p}\,E\wedge}{q \wedge p}\,I\wedge$$

   Deze afleidingsboom kunnen wij weegeven als een lijst van regels zoals bij tranformaties van formules. Als wij de premissen P, de hypothesen H en de redenatiestappen aangeven met een regelnummer, dan kan ons dat zelfs schrijfwerk besparen.

Het samenstellen van zo'n lijst is gebonden aan een aantal voorwaarden. De eerste regels van de lijst bevatten de premissen, de volgende regels de afleidingen en de laatste regel bevat de conclusie. Het is gebruikelijk per regel de referenties en de inferenties te noteren als commentaar. Men mag alleen refereren naar lagere regelnummers en inferentieregels gebruiken van de natuurlijke deductie. Bij de laatste regel in het bewijs moeten wij controleren of **alle** premissen noodzakelijk zijn voor de conclusie, anders is het bewijs ongeldig.

1	$p \wedge q$	P
2	p	$1\ E\wedge$
3	q	$1\ E\wedge$
4	$q \wedge p$	$2,3\ I\wedge$

2. Bewijs $(p \wedge q) \wedge (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \vdash r$:

1	$(p \wedge q) \wedge (p \rightarrow (q \rightarrow r))$	P
2	$p \wedge q$	$1\ E\wedge$
3	q	$2\ E\wedge$
4	p	$2\ E\wedge$
5	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$1\ E\wedge$
6	$q \rightarrow r$	$4,5\ E \rightarrow$
7	r	$3,6\ E \rightarrow$

3. Bewijs $p, (p \rightarrow q) \vdash (r \wedge s) \vee q$:

1	p	P
2	$p \rightarrow q$	P
3	q	$1,2\ E \rightarrow$
4	$(r \wedge s) \vee q$	$1\ I\vee$

4. Bewijs $p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$:

1	$p \rightarrow q$		P
2	$q \rightarrow r$		P
3		p	H
4		q	$1,3\ E \rightarrow$
5		r	$2,4\ E \rightarrow$
6	$p \rightarrow r$		$3-5\ I \rightarrow$

Het *conditionele deelbewijs* staat achter de verticale lijn. De lijn begint bij de regel waarin de hypothese wordt geïntroduceerd (regel 3) en eindigt bij de conclusie van het deelbewijs (regel 5). Het conditionele deelbewijs wordt in regel 6 opgenomen in het hoofdbewijs als een introductie van een implicatie.

Deelbewijzen mogen refereren naar regels met lagere nummers uit het hoofdbewijs. Daarentegen mogen hoofdbewijzen niet refereren naar regels van deelbewijzen (de regels achter de verticale lijnen).

5. Bewijs $p, \neg p \vdash q$:

1	p	P
2	$\neg p$	P
3	$\mid \; \neg q$	H
4	$\mid \; p \wedge \neg p$	$1,2\ I\wedge\ \bot$
5	q	$2-4\ E\neg$

Het indirecte deelbewijs (regel 2-4) met de hypothese (regel 2) neemt wordt in het hoofdbewijs opgenomen door de hypothese te ontkennen (regel 5).

6. Bewijs $\vdash \neg p \neg p \leftrightarrow p$:

1	$\mid \; p$	H
2	$\mid \; \mid \; \neg p$	H
3	$\mid \; \mid \; p \wedge \neg p$	$1,2\ I\wedge\ \bot$
4	$\mid \; \neg\neg p$	$2-3\ I\neg$
5	$p \rightarrow \neg\neg p$	$1-4\ I\rightarrow$
6	$\mid \; \neg\neg p$	H
7	$\mid \; \mid \; \neg p$	H
8	$\mid \; \mid \; \neg p \wedge \neg\neg p$	$6,7\ I\wedge\ \bot$
9	$\mid \; p$	$7-8\ E\neg$
10	$\neg\neg p \rightarrow p$	$6-9\ I\rightarrow$
11	$p \leftrightarrow \neg\neg p$	$5,10\ I\leftrightarrow$

In dit voorbeeld zijn de premissen afwezig, de formule is altijd geldig.

3.2.2 Vuistregels afleiding met inferentielijst

Bij het opstellen van een afleiding met een inferentielijst maken wij gebruik van de volgende vuistregels:

- Referenties mogen **niet** van links naar rechts of van boven naar beneden.
- Men neemt het conditionele bewijs, met hypothese H en conclusie C, in het bewijs op met de stap $H \rightarrow C$.

- Men neemt het indirecte bewijs, met hypothese H en conclusie $\perp$, in het bewijs op met de stap $\neg H$.

3.2.3 De volledigheid- en de consistentiestelling

De *volledigheidsstelling* zegt dat in een systeem met de axioma's $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ en de premissen $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$, waarbij de conclusie ψ met waarheidstabellen afgeleid kan worden ($\models$), dit ook mogelijk is met behulp van de klassieke propositielogica (en van de natuurlijke deductie met proposities) met zijn axioma's, substituties en het herhaald toepassen van de 'modus ponens' ($\vdash$) als afleidingsregel:

Stelling 3.2 (De volledigheidsstelling)

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \phi_1, \ldots \phi_n \models \psi \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \phi_1, \ldots \phi_n \vdash \psi$$

Wij zullen deze stelling niet bewijzen, evenmin als de volgende stelling:

De *consistentiestelling* beweert dat in een systeem met de axioma's $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ en de premissen $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$, waarbij de conclusie ψ met de 'modus ponens' afgeleid kan worden, dit ook mogelijk is met behulp van waarheidstabellen.

Stelling 3.3 (De consistentiestelling)

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \phi_1, \ldots \phi_n \vdash \psi \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \phi_1, \ldots \phi_n \models \psi$$

Beide stellingen worden gecombineerd tot de volgende equivalentie-stelling:

Stelling 3.4 (De volledigheid van de propositielogica)

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \phi_1, \ldots \phi_n \models \psi \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \phi_1, \ldots \phi_n \vdash \psi$$

Als de verzameling axioma's wordt voorgesteld door $\Gamma \equiv \alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_m$ en de verzameling premissen door $\Lambda \equiv \phi_1, \phi_2 \ldots, \phi_n$ en de gemeenschappelijke verzameling van axioma's en premissen door $\Sigma \equiv \Gamma \cup \Lambda$, dan wordt de volledigheid en consistentie van de propositielogica voorgesteld door:

$$\Sigma \models \psi \qquad \Leftrightarrow \qquad \Sigma \vdash \psi$$

Een andere belangrijke stelling voor klassieke logica en de natuurlijke deductie is de *deductiestelling* van *Jacques Herbrand* (1908-1931).

Stelling 3.5 (De deductiestelling)

$$\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n \vdash \psi \qquad \Leftrightarrow \qquad \vdash \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \ldots \wedge \phi_n \rightarrow \psi$$

Deze stelling komt overeen met geldigheidsstelling 3.1. Deze stelling geeft aan dat een geldige conclusie afgeleid met de ‘modus ponens’, dan en slechts dan geldig is als de conjunctie van de premissen met de implicatie van de conclusie als geheel een geldige formule is. Als wij deze laatste stelling combineren met de volledigheid en consistentie van de propositielogica, dan mogen wij de algebraïsche logica en de klassieke logica als een systeem beschouwen.

Waarom zijn de omslachtige axiomatische methoden nog belangrijk, als wij de beschikking hebben over algebraïsche vereenvoudigingen? Het antwoord ligt niet voor de hand: Uit de klassieke logica zijn gemakkelijk andere logische systemen te construeren door te sleutelen aan de axioma’s.

3.3 Meerwaardige logica

In de klassieke logica en de daarvan afgeleide natuurlijke deductie kan men bewijzen dat $\vdash p \vee \neg p$:

$$
\begin{array}{lll}
1 & \quad \neg(p \vee \neg p) & H \\
2 & \quad\quad p & H \\
3 & \quad\quad p \vee \neg p & 2\ I\vee \\
4 & \quad\quad (p \vee \neg p) \wedge \neg(p \vee \neg p) & 1,3\ I\wedge\ \ \bot \\
5 & \quad \neg p & 2-4\ I\neg \\
6 & \quad p \vee \neg p & 5\ I\vee \\
7 & \quad (p \vee \neg p) \wedge \neg(p \vee \neg p) & 1,6\ I\wedge\ \ \bot \\
8 & p \vee \neg p & 1-7\ E\neg
\end{array}
$$

Deze formule staat bekend als de *uitgesloten derde*. In de klassieke logica wordt de $\vee$ in deze formule als een ‘exclusieve of’ geïnterpreteerd: *“p is waar of onwaar, maar niet beide”*. Deze interpretatie vinden wij terug in een uitspraak zoals: *“je leeft of je leeft niet (maar niet beide)”*.

Toch is een inclusieve interpretatie van de ‘of’ mogelijk, denk maar aan de uitspraak: *“je bent gezond of je bent niet gezond”* (een beetje gezond is mogelijk). Er is sprake van een glijdende schaal voor het waarheidsgehalte van de variabele ‘gezond zijn’.

Er zijn situaties waarin de waarheid afhankelijk is van het perspectief of de interpretatie: Een opgerold vel papier is een rechthoek, cilinder of een cirkel. Terwijl iedereen weet dat een rechthoek geen cirkel is, heeft een waarnemer afhankelijk van het perspectief zijn eigen ‘waarheid’. Soms is men niet in staat te bepalen of iets waar is of niet. Is een knal in het nachtelijke donker een ontploffing of iets anders?

De kritiek op het zwart/wit denken van de klassieke logica, heeft geleid tot logische systemen waarin een variabele of propositie meer waarden kent dan ’waar’ en ’onwaar’. De *driewaardige logica* kent naast de waarden ‘waar’ (1) en ‘onwaar’ (0), de extra waarde ‘onbekend’ (?). De relaties tussen deze drie waarden is voor de operatoren $\neg$, $\wedge$ en $\vee$ als volgt gedefiniëerd:

$\neg$	
0	1
1	0
?	?

$\wedge$	0	1	?
0	0	0	0
1	0	1	?
?	0	?	?

$\vee$	0	1	?
0	0	1	?
1	1	1	1
?	?	1	?

De uitspraak $p \vee q$ betekent in de driewaardige logica ‘nooit onwaar’. Driewaardige logica is een bijzonder geval van de ‘*fuzzy logic*’. In de ‘fuzzy logic’ heeft een uitspraak een glijdende schaal van ‘onwaar’ naar ‘waar’ die loopt van 0 tot 1. Een waarde van 0 is ‘met hoogste nauwkeurigheid onwaar’, van 1 is ‘met hoogste nauwkeurigheid waar’ en van 0,5 is ‘onnauwkeurig’. De ontkenning, de conjunctie en de disjunctie van twee fuzzy variabelen worden gedefiniëerd als:

$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$
$1 - p$	$min(p,q)$	$max(p,q)$

Fuzzy logica wordt vooral gebruikt in expert- en regelsystemen, waar men te maken heeft met kennis of gegevens met een bepaalde mate van nauwkeurigheid.

3.4 Opgaven

1. Maak een logische analyse van de volgende tekst uit het eisenpakket van een verkeersregelautomaat. Welke conclusie mag u trekken?

   - *Pas na het doorlopen van het inschakelprogramma zal de verkeersautomaat het regelprogramma activeren.*
   - *De verkeersregelautomaat is uitgeschakeld dan en slechts dan als er geen inschakel- of regelprogramma actief is.*

2. Bepaal of de volgende redenaties geldig zijn:

   (a) $p \leftrightarrow \neg(p \vee q) \models q$

   (b) $\neg p \vee \neg q \models p \wedge q$

   (c) $\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) \models \neg p$

   (d) $\neg(p \vee r) \wedge (p \vee q) \models \neg p$

3. Op het politiebureau Kneiphof komen alleen verdachten die de waarheid spreken en verdachten die liegen. De rechercheur die de verdachten moeten ondervragen weet niet of hij te maken heeft met een leugenaar of een waarheidspreker. Hij vraagt aan verdachten A en B of zij eerlijk zijn. A antwoordt: “Als B eerlijk is, ben ik het ook”. B antwoord: “Als ik eerlijk ben, is A het ook.” Wat is de waarheid?

4. Een rechercheur van het politiebureau Kneiphof vraagt aan de verdachten A en B of er een buit is. A antwoordt: “Als er een buit is, dan ben ik een leugenaar”. B antwoordt: “Als ik een leugenaar ben, dan is A ook een leugenaar”. Wat is de waarheid?

5. Op het politiebureau Kneiphof worden 3 dichtgelaste metalen cilinders bezorgd. Het politiebureau is in rep en roer, want één van de drie cilinders bevat een bom. Op elke cilinder staat een boodschap:

   - Cilinder A: Hierin zit de bom.
   - Cilinder B: Hierin zit geen bom.
   - Cilinder C: Ten hoogste één de cilinders geeft een ware boodschap.

   In welke cilinder zit de bom?

6. Op het politiebureau Kneiphof worden door de hoofdcommissaris sollicitanten A en B voor de positie van rechercheur beoordeeld. Dat doet hij met behulp van twee witte kaarten en één rode kaart. A en B krijgen elk een kaart op de rug. A en B zien elkaars rug, maar niet hun eigen rug. Zij mogen niet met elkaar communiceren. Degene die het eerst weet welke kleur zijn kaart heeft, wordt rechercheur. Na vijf minuten weet sollicitant A als eerste welke kleur zijn kaart heeft. Formuleer de verborgen premisse(n).

7. Bepaal de afleidingen van:

   (a) $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$

   (b) $\vdash \neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

Hoofdstuk 4

De predikatenrekening

Hoewel de volgende redenatie in de propositielogica ongeldig is, wordt zij intuïtief toch als geldig beschouwd:

ϕ_1	"alle republikeinen plegen geen overspel"
ϕ_2	"sommige overspeligen zijn president"
ψ	"sommige presidenten zijn geen republikein"

De geldigheid van deze redenatie is gebaseerd op informatie, waarmee de propositielogica geen rekening mee houdt. Om deze extra informatie bij het redeneren te betrekken, moeten wij de propositielogica uitbreiden met de begrippen eigenschappen, variabelen en kwantoren. De zin *"alle mensen zijn sterfelijk"* geeft aan dat objecten, die de eigenschap 'menselijk zijn' hebben, blijkbaar ook de eigenschap 'sterfelijk zijn' hebben.

uitspraak	symbolisch
sterfelijk objecten	$S(x)$
menselijke objecten	$M(x)$
x is een priemgetal	$P(x)$

In de uitspraken geven wij de eigenschappen sterfelijk en priemgetal aan met de hoofdletters S en P. De variabele x stelt objecten voor. Een variabele, waarvan de waarde onbekend is, noemen wij *vrije variabele*.

Definitie 4.1 (Predikaat) *Een predikaat is een uitspraak met vrije variabelen, die een propositie wordt zodra alle vrije variabelen in dat predikaat gebonden zijn aan een waarde.*

Een vrije variabele wordt een *gebonden variabele* zodra zij een waarde krijgt. Wij kunnen een vrije variabele binden aan een waarde of een bepaald object. In het predikaat *"13 is een priemgetal"* $P(13)$ wordt de variabele x gebonden met de waarde 13. Het predikaat is in dit geval 'waar'.

uitspraak	symbolisch
ik ben sterfelijk	$S(ik)$
13 is een priemgetal	$P(13)$

Wij kunnen de variabelen in een predikaat niet alleen binden aan een enkele waarde maar ook aan een *universum* van waarden. Net zoals in de informatica noemen wij het universum het *type* van een variabele. Men kan zich een universum voorstellen als de verzameling van alle waarden of objecten van dat type. Het binden van een vrije variabele aan alle waarden in een universum geschiedt met de *universele kwantor*. Het binden van een vrije variabele aan één of meer waarden in een universum geschiedt met de *existentiële kwantor*.

uitspraak	symbolisch	naam
"voor alle x"	$\forall x$	universele kwantor
"er zijn x"	$\exists x$	existentiële kwantor

Er bestaan notatieverschillen voor de universele kwantor ($\forall$ $\bigwedge$ $\underline{A}$) en de existentiële kwantor ($\exists$ $\bigvee$ $\underline{E}$). De letters $\underline{A}$ en $\underline{E}$ worden meestal gebruikt in de commentaarregels van programma's.

Voorbeelden:

uitspraak	predikaat	type
alle menselijke individuen zijn sterfelijk	$\forall i\ (M(i) \rightarrow S(i))$	individu
alle mensen zijn sterfelijk	$\forall m\ S(m)$	mens
er is een priemgetal	$\exists x\ P(x)$	getal
er is een even priemgetal	$\exists x\ (E(x) \wedge P(x))$	getal

4.1 Het domein van een kwantor

Tot dusverre hebben wij in de voorbeelduitspraken *"voor alle x"* en *"er is een x"* gekoppeld aan alle voorkomens van x in een universum. De uitspraak *"er is een x in het universum van x met de eigenschap P"* wordt weergegeven als:

$$\exists x\ P(x)$$

Soms willen wij zo'n universum beperken. Zo'n beperkt deel van een universum, een *domein*, is het gebied waaruit de gebonden variabele moet putten. De beschrijving van het domein $D(x)$ wordt onder de kwantor geplaatst.

$$\underset{D(x)}{\exists x}\ P(x) \qquad\qquad \underset{D(x)}{\forall x}\ P(x)$$

De beschrijving van het domein $D(x)$ is zelf ook een predikaat. Het is een eigenschap D die toegekend wordt aan de variabele x. Het is mogelijk dat zo'n domein D leeg is. Men zou dat kunnen noteren met $\neg\exists x\, D(x)$. Het lege domein wordt meestal aangegeven met het Θ teken voor een *leeg domein*:

$$\underset{\Theta}{\exists x} P(x) \qquad\qquad \underset{\Theta}{\forall x} P(x)$$

In de volgende voorbeelden wordt het domein van de kwantor beschreven met een predikaat $(1 < x < 4)$. De uitspraak *"alle getallen in het domein van de getallen tussen de een en de vier, zijn priemgetallen"* wordt genoteerd als:

$$\underset{1<x<4}{\forall x} P(x)$$

Wij kunnen dit ook schrijven als *"alle getallen, indien zij tussen een en vier liggen, zijn priemgetallen"*. Het domein is implicatief gekoppeld aan de eigenschap $P(x)$. Dit noemen wij een *domeinoverheveling*:

$$\forall x\, ((1 < x < 4) \rightarrow P(x))$$

Zo'n overheveling van het domein kunnen wij eveneens toepassen in een uitspraak met een existentiële kwantor. De uitspraak *"er is een getal tussen de een en vier, dat een priemgetal is"* wordt genoteerd als:

$$\underset{1<x<4}{\exists x} P(x)$$

Deze uitspraak is het zelfde als *"er is een getal, dat tussen de een en vier ligt en priemgetal is"*. Het domein wordt conjunctief gekoppeld aan de eigenschap $P(x)$:

$$\exists x\, ((1 < x < 4) \wedge P(x))$$

Stelling 4.1 (Overheveling van het domein bij de $\forall$ kwantor)

$$\underset{D(x)}{\forall x} P(x) \quad\Leftrightarrow\quad \forall x\, (D(x) \rightarrow P(x))$$

Stelling 4.2 (Overheveling van het domein bij de $\exists$ kwantor)

$$\underset{D(x)}{\exists x} P(x) \quad\Leftrightarrow\quad \exists x\, (D(x) \wedge P(x))$$

Voorbeelden:

1. er zijn geen mensen op Mars $\underset{\Theta}{\exists m} M(m)$

2. er zijn geen mensen op Mars $\neg\exists m\; M(m)$

3. alle Rotterdammers zijn sterfelijk $\underset{R(m)}{\forall m}\; S(m)$

4. alle Rotterdammers zijn sterfelijk $\forall m\; (R(m) \rightarrow S(m))$

5. er zijn sterfelijke Rotterdammers $\underset{R(m)}{\exists m}\; S(m)$

6. er zijn sterfelijke Rotterdammers $\exists m\; (R(m) \wedge S(m))$

Als er geen domein wordt opgegeven, dan bedoelt men alle objecten in het universum van x. Zo'n universum kan eindig of oneindig veel objecten bevatten. Het studentenuniversum is bijvoorbeeld eindig, daarentegen is het universum van de reële getallen oneindig. In dit hoofdstuk behandelen wij de kwantorformules over eindige universa. Gelukkig zijn wij in de informatica tevreden met eindige universa voor onze algoritmen. Eindige universa worden vaak aangegeven met symbolische grenzen, zoals bijvoorbeeld: $0, 1, 2 \ldots n$. In hoofdstuk 5 worden kwantorformules afgeleid die algemeen geldig zijn, ook voor oneindige universa.

4.2 De universele kwantor

Met de universele kwantor $\forall x$ bedoelen wij alle waarden van x binnen het opgegeven domein. Als het domein niet wordt opgegeven, dan bedoelen wij een of meer waarden x uit een eindig universum. Bijvoorbeeld:

$$\underset{1 \leq x \leq 4}{\forall x} P(x) \quad \Leftrightarrow \quad P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$$

Stelling 4.3 (De universele kwantor) *In een eindig universum of domein is de universele kwantor een generalisatie van de 'en' operator.*

Symbolisch wordt deze stelling als volgt genoteerd:

$$\forall x\, P(x) \quad \Leftrightarrow \quad P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n)$$

Dit betekent dat wij een $\forall$ uitspraak kunnen *splitsen*. Wij noemen dit *domeinsplitsing*.

$$\underset{1 \leq x \leq 4}{\forall x} P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \underset{1 \leq x \leq 3}{\forall x} P(x) \quad \wedge \quad P(4)$$

Het domein kan in tweeën gesplitst worden:

$$\underset{1\le x\le 4}{\forall x} P(x) \quad\Leftrightarrow\quad \underset{1\le x\le 2}{\forall x} P(x) \quad\wedge\quad \underset{3\le x\le 4}{\forall x} P(x)$$

Wij kunnen alle factoren uit de originele kwantor weghalen, zodat een leeg domein overblijft:

$$\underset{1\le x\le 4}{\forall x} P(x) \quad\Leftrightarrow\quad \overbrace{\underset{\Theta}{\forall x} P(x)}^{waar} \quad\wedge\quad \underset{1\le x\le 4}{\forall x} P(x)$$

Stelling 4.4 (De $\forall$ kwantor over een leeg domein) *Een universele kwantor over een leeg domein is altijd een 'ware' propositie.*

Voorbeelden: (het universum is $0,1,2,3\ldots n$)

1. $\forall x\,(x < x^2) \quad\Leftrightarrow\quad 0 \le 0^2 \quad\wedge\quad \underset{1\le x}{\forall x}\,(x \le x^2)$

2. $\forall x\,(x < x^2) \quad\Leftrightarrow\quad \underset{even(x)}{\forall x}\,(x \le x^2) \quad\wedge\quad \underset{oneven(x)}{\forall x}\,(x \le x^2)$

3. $\underset{0\le x}{\forall x}\,(x \le x^2) \quad\Leftrightarrow\quad \underset{0\le x\le 5}{\forall x}\,(x \le x^2) \quad\wedge\quad \underset{6\le x}{\forall x}\,(x \le x^2)$

4. $\underset{0\le x}{\forall x}\,(x \le x^2) \quad\Leftrightarrow\quad \underset{0\le x\le 5}{\forall x}\,(x \le x^2) \quad\wedge\quad \underset{6\le x}{\forall x}\,(x \le x^2)$

4.3 De existentiële kwantor

Met de existentiële kwantor $\exists x$ bedoelen wij één of meer waarden van x uit het opgegeven domein. Als het domein niet wordt opgegeven, dan bedoelen wij een of meer waarden x uit een eindig universum. Bijvoorbeeld:

$$\underset{1\le x\le 4}{\exists x} P(x) \quad\Leftrightarrow\quad P(1)\vee P(2)\vee P(3)\vee P(4)$$

Stelling 4.5 (De existentiële kwantor) *In een eindig universum of domein is de existentiële kwantor een generalisatie van de 'of' operator.*

Symbolisch wordt deze stelling als volgt genoteerd:

$$\exists x\, P(x) \quad\Leftrightarrow\quad P(x_1)\vee P(x_2)\vee\ldots\vee P(x_n)$$

Dit betekent dat wij een $\exists$ uitspraak kunnen *splitsen*:

$$\underset{1\leq x\leq 4}{\exists x} P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \underset{1\leq x\leq 3}{\exists x} P(x) \quad \vee \quad P(4)$$

Het domein kan in tweeën gesplitst worden:

$$\underset{1\leq x\leq 4}{\exists x} P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \underset{1\leq x\leq 2}{\exists x} P(x) \quad \vee \quad \underset{3\leq x\leq 4}{\exists x} P(x)$$

Wij kunnen alle termen uit de originele kwantor weghalen, zodat een leeg domein overblijft:

$$\underset{1\leq x\leq 4}{\exists x} P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \overbrace{\underset{\Theta}{\exists x}\, P(x)}^{onwaar} \quad \vee \quad \underset{1\leq x\leq 4}{\exists x} P(x)$$

Stelling 4.6 (De $\exists$ kwantor over een leeg domein) *Een existentiële kwantor over een leeg domein is altijd een 'onware' propositie.*

Voorbeelden: (het universum is $0,1,2,3\ldots n$)

1. $\exists x\ (x < x^2) \quad \Leftrightarrow \quad (0 \leq 0^2) \quad \vee \quad \underset{1\leq x}{\exists x}\ (x \leq x^2)$

2. $\exists x\ (x < x^2) \quad \Leftrightarrow \quad \underset{even(x)}{\exists x}\ (x \leq x^2) \quad \vee \quad \underset{oneven(x)}{\exists x}\ (x \leq x^2)$

4.4 Geldigheid

Als wij de uitspraak *"alle mensen m zijn sterfelijk $S(m)$"* beschouwen, dan is de volgende formule inderdaad waar:

$$\forall m\ S(m) \Leftrightarrow 1$$

Als wij de variabele m de *interpretatie* 'natuurlijk getal' en het predikaat $S(m)$ de interpretatie 'm deelbaar door 5' geven, dan is de formule onwaar:

$$\forall m\ S(m) \Leftrightarrow 0$$

Wij noemen het binden van de vrije variabelen in een predikaat aan een bepaalde waarde of een verzameling van waarden een interpretatie. Een interpretatie is vergelijkbaar met een geval in de propositierekening. Afhankelijk van de interpretatie van de letters m en S ontstaat een ware uitspraak, een *model*, of een onware uitspraak, een *falsificatie*.

Definitie 4.2 (Geldigheid van een predikaat) *Een predikaat is geldig als elke interpretatie een model is.*

4.5 Enkelvoudige predikaten

Enkelvoudige predikaten bestaan uit één gebonden variabele. In de omgangstaal treden enkelvoudige uitspraken frequent op:

alle *P*'s zijn *Q*'s	$\forall x\ (P(x) \to Q(x))$
geen *P*'s zijn *Q*'s	$\forall x\ (P(x) \to \neg Q(x))$
sommige *P*'s zijn *Q*'s	$\exists x\ (P(x) \land Q(x))$
sommige *P*'s zijn geen *Q*'s	$\exists x\ (P(x) \land \neg Q(x))$

Tijdens het argumenteren geven wij een relatie tussen twee uitspraken vaak aan met: *"... is in tegenspraak met ... "* of *"... is tegenstrijdig met ... "*:

$$
\begin{array}{ccc}
\forall x\ (P(x) \to Q(x)) & \text{tegenspraak} & \forall x\ (P(x) \to \neg Q(x)) \\
\Downarrow & \text{tegenstrijdig} & \Downarrow \\
\exists x\ (P(x) \land Q(x)) & \text{contrasterend} & \exists x\ (P(x) \land \neg Q(x))
\end{array}
$$

- *"alle studenten zijn ijverig"* is in *tegenspraak* met *"alle studenten zijn niet ijverig"*;
- *"alle studenten zijn ijverig"* is *tegenstrijdig* met *"er is een student die niet ijverig is"*;
- *"alle studenten zijn ijverig" impliceert "er is een student die ijverig is"*;
- *"er is een student die ijverig is"* is in *contrast* met *"er is een student die niet ijverig is"*.

De implicaties $\underset{P(x)}{\forall x}\, Q(x) \to \underset{P(x)}{\exists x}\, Q(x)$ en $\underset{P(x}{\forall x} \neg Q(x) \to \underset{P(x)}{\exists x} \neg Q(x)$ gelden alleen als het domein $P(x)$ niet leeg is (waarom?).

4.5.1 Ontkenningen

Met de stellingen 4.3 en 4.5 kunnen wij de ontkenning van een kwantoruitspraak onderzoeken. Wat betekent nu de uitspraak $\neg\forall x\, P(x)$? Met gebruikmaking van de stellingen 4.3 en 4.5 krijgen wij:

$$\neg\forall x\, P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \neg(P(x_1) \wedge \ldots \wedge P(x_n)) \quad \Leftrightarrow \quad \neg P(x_1) \vee \ldots \vee \neg P(x_n)$$

$$\neg\exists x\, P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \neg(P(x_1) \vee \ldots \vee P(x_n)) \quad \Leftrightarrow \quad \neg P(x_1) \wedge \ldots \wedge \neg P(x_n)$$

Dit betekent voor de $\forall$ kwantor in een eindig universum:

$$\neg\forall x\, P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x\, \neg P(x)$$

en voor de $\exists$ kwantor in een eindig universum:

$$\neg\exists x\, P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\, \neg P(x)$$

Voorbeelden:

niet alle mensen zijn sterfelijk	$\neg\forall m\, S(m)$
er is iemand die onsterfelijk is	$\exists m\, \neg S(m)$
niet één mens is onsterfelijk	$\neg\exists m\, \neg S(m)$
alle mensen zijn sterfelijk	$\forall m\, S(m)$

De eerste twee voorbeelden zijn gelijkwaardige uitspraken, de laatste twee ook. In deze voorbeelden zijn wij uitgegaan van het gehele eindige universum van mensen. De ontkenning van een uitspraak waarvan de kwantorvariabele x gebonden is over een deel van het universum, een domein $D(x)$, is net zo eenvoudig te bepalen. Uit de uitspraken:

$$\underset{D(x)}{\forall x}\, P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\, (D(x) \rightarrow P(x))$$

$$\underset{D(x)}{\exists x}\, P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x\, (D(x) \wedge P(x))$$

kunnen wij met herschrijvingen de volgende formules vinden:

$$\neg \underset{D(x)}{\forall x}\, P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \underset{D(x)}{\exists x}\, \neg P(x)$$

$$\neg \underset{D(x)}{\exists x}\, P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \underset{D(x)}{\forall x}\, \neg P(x)$$

4.5.2 Het bereik van kwantoren

Net zoals in de propositierekening wordt in de predikatenrekening een *predikaatformule* gemaakt uit *variabelen* (kleine letters), *predikaten* (hoofdletters), *kwantoren*, *logische operatoren* en *haakjes*. Bij het opstellen van een *predicatenformule* moeten wij verplicht de volgende *grammaticale regels* regels gebruiken:

1. Een predikaat $P(x_1,x_2,\ldots x_n)$ is een formule, kortweg P, met n vrije variabelen $x_1,x_2,\ldots,x_n$;
2. Als P een formule is, dan is $\neg P$ een formule;
3. Als P en Q formules zijn, dan zijn $(P\wedge Q)$, $(P\vee Q)$, $(P\to Q)$ en $(P\leftrightarrow Q)$ formules;
4. Als $P(\ldots,x,\ldots)$ een formule is met een vrije variabele x, dan zijn $\forall x\, P(\ldots,x,\ldots)$ en $\exists x\, P(\ldots,x,\ldots)$ formules, waarbij x gebonden is door de kwantor $\forall$ of $\exists$.

Men mag de haakjes zonder gevaar weglaten in de formules mits dit niet tot verwarring leidt. De kwantoren hebben een hogere prioriteit dan alle andere operatoren. Alleen delen van een formule die niet gebonden zijn door de kwantor, mogen binnen of buiten het bereik van de kwantor geplaatst worden. In de volgende voorbeelden is Q niet gebonden door de kwantor:

Voorbeelden:

$$\begin{array}{lcl}
\forall x\ (P(x)\wedge Q) & \Leftrightarrow & \forall x\, P(x)\wedge Q\\
\forall x\ (P(x)\vee Q) & \Leftrightarrow & \forall x\, P(x)\vee Q\\
\exists x\ (P(x)\wedge Q) & \Leftrightarrow & \exists x\, P(x)\wedge Q\\
\exists x\ (P(x)\vee Q) & \Leftrightarrow & \exists x\, P(x)\vee Q\\
\exists x\ (P(x)\to Q) & \Leftrightarrow & \exists x\, P(x)\to Q\\
\forall x\ (P(x)\to Q) & \Leftrightarrow & \forall x\, P(x)\to Q\\
\exists x\ (Q\to P(x)) & \Leftrightarrow & Q\to \exists x\, P(x)\\
\forall x\ (Q\to P(x)) & \Leftrightarrow & Q\to \forall x\, P(x)
\end{array}$$

Voor de $\forall$ kwantor geldt binnen een eindig universum:

$$\forall x\ (P(x)\wedge Q(x)) \quad\Leftrightarrow\quad P(x_1)\wedge(Q_1)\wedge\ldots\wedge P(x_n)\wedge Q(x_n)$$

Deze formule is het zelfde als:

$$\forall x\, P(x)\wedge\forall x\, Q(x) \quad\Leftrightarrow\quad P(x_1)\wedge\ldots\wedge P(x_n)\wedge Q(x_1)\wedge\ldots\wedge Q(x_n)$$

Dit betekent voor de $\forall$ kwantor:

$$\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x)$$

Zo'n soortgelijke afleiding kunnen wij maken als wij een predikaat van een disjunctie $P(x) \vee Q(x)$ binden met de $\exists$ kwantor:

$$\exists x\ (P(x) \vee Q(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)$$

Wanneer wij een predikaat van een conjunctie $P(x) \wedge Q(x)$ binden met de $\exists$ kwantor, dan wordt de gebonden uitdrukking:

$$\exists x\ (P(x) \wedge Q(x)) \quad \Rightarrow \quad \exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$$

Voorbeelden

1. *"er is een vrouwelijke student"* impliceert: *"er is een student en een vrouw "*;

$$\exists m\ (S(x) \wedge V(m)) \quad \Rightarrow \quad \exists m\ S(x) \wedge \exists m\ V(m)$$

2. *"er is een student en een vrouw "* impliceert *niet*: *"er is een vrouwelijke student"*.

$$\exists m\ S(m) \wedge \exists m\ V(m) \quad \not\Rightarrow \quad \exists m\ (S(m) \wedge V(m))$$

4.5.3 Geldige enkelvoudige predikaten

Wij zijn al geldige kwantoruitspraken tegengekomen, zoals de universele kwantor uitspraak over een leeg domein:

$$\models \underset{\Theta}{\forall x} P(x)$$

$$\models \neg \underset{\Theta}{\exists x} P(x)$$

De volgende uitspraken zijn geldig, waar voor elke interpretatie. Zij zijn geformuleerd als herschrijf- en afleidingsregels:

$\forall x\, P(x)$	$\Leftrightarrow$	$\forall y\, P(y)$	substitutie gebonden variabele
$\exists x\, P(x)$	$\Leftrightarrow$	$\exists y\, P(y)$	substitutie gebonden variabele
$\underset{D(x)}{\forall x}\, P(x)$	$\Leftrightarrow$	$\forall x\, (D(x) \to P(x))$	domeinoverheveling $\forall$
$\underset{D(x)}{\exists x}\, P(x)$	$\Leftrightarrow$	$\exists x\, (D(x) \wedge P(x))$	domeinoverheveling $\exists$
$\neg\forall x\, P(x)$	$\Leftrightarrow$	$\exists x\, \neg P(x)$	ontkenning $\forall$
$\neg\exists x\, P(x)$	$\Leftrightarrow$	$\forall x\, \neg P(x)$	ontkenning $\exists$
$\forall x\, (P(x) \wedge Q(x))$	$\Leftrightarrow$	$\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$	distributie $\forall$
$\exists x\, (P(x) \vee Q(x))$	$\Leftrightarrow$	$\exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$	distributie $\exists$
$\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)$	$\Rightarrow$	$\forall x\, (P(x) \vee Q(x))$	
$\exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$	$\Rightarrow$	$\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$	
$\forall x\, (P(x) \to Q(x))$	$\Rightarrow$	$\forall x\, P(x) \to \forall x\, Q(x)$	
$\exists x\, P(x) \to \exists x\, Q(x)$	$\Rightarrow$	$\exists x\, (P(x) \to Q(x))$	

Let op, de laatste 4 regels zijn afleidingsregels en mogen daarom niet gebruikt worden bij herschrijvingen.

4.6 Meervoudige kwantoren

Formules met meervoudige kwantoren worden vaak herschreven tot een normaalvorm. In de *prenexnormaalvorm* staan alle kwantoren, de *prenex*, vooraan in de formule. Men kan een prenexnormaalvorm verkrijgen door de implicatie en de equivalenties te herschrijven tot een disjunctieve- of conjunctieve normaalvorm zoals wij die kennen uit de propositielogica. Men maakt daarbij gebuik van de herschrijfregels $(P \to Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ en $(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$ om implicaties en equivalenties te vervangen door conjuncties en disjuncties. Bovendien worden eventuele ontkenningen links van de kwantoren verplaatst naar rechts van de kwantoren met de regels $\neg\neg P \Leftrightarrow P$, $\neg\forall \Leftrightarrow \exists\neg$ en $\neg\exists \Leftrightarrow \forall\neg$.

Voorbeelden:

1.
$$
\begin{array}{ll}
 & \forall x\, P(x) \to \exists z \exists y\, Q(z,y) \\
\Leftrightarrow & \neg\forall x\, P(x) \vee \exists z \exists y\, Q(z,y) \\
\Leftrightarrow & \exists x \neg P(x) \vee \exists z \exists y\, Q(z,y) \\
\Leftrightarrow & \exists x \neg P(x) \vee \exists x \exists y\, Q(x,y) \\
\Leftrightarrow & \exists x\, (\neg P(x) \vee \exists y\, Q(x,y)) \\
\Leftrightarrow & \exists x \exists y\, (\neg P(x) \vee Q(x,y))
\end{array}
$$

2.
$$
\begin{array}{lll}
 & \exists x\, P(x) \wedge \exists y\, Q(y) & \\
\Leftrightarrow & \exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x) & \\
\Leftrightarrow & \exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) & \textbf{fout}
\end{array}
$$

De uitspraak: *"er zijn snelle studenten en er zijn trage studenten"* is niet hetzelfde als: *"er zijn snelle trage studenten"*

4.6.1 Ontkenningen van meervoudige predikaten

Het ontkennen van meervoudige predikaten is een generalisatie van de ontkenning van enkelvoudige predikaten. Dit kunnen wij aantonen met de volgende herschrijvingen:

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg\forall x\exists y\forall z\, P(x,y,z) & \\
\Leftrightarrow & \exists x\neg\exists y\forall z\, P(x,y,z) & \neg\forall \Leftrightarrow \exists\neg \\
\Leftrightarrow & \exists x\forall y\neg\forall z\, P(x,y,z) & \neg\exists \Leftrightarrow \forall\neg \\
\Leftrightarrow & \exists x\forall y\exists z\, \neg P(x,y,z) & \neg\forall \Leftrightarrow \exists\neg
\end{array}
$$

4.6.2 Geldige meervoudige predikaten

De volgende meervoudige kwantoruitspraken zijn geldig (altijd waar voor elke interpretatie). Zij zijn geschikt voor vereenvoudigingen.

$$
\begin{array}{lcl}
\forall x\forall y\, P(x,y) & \Leftrightarrow & \forall x\forall y\, P(x,y) \\
\forall x\exists y\, P(x,y) & \Leftrightarrow & \forall x\exists y\, P(x,y) \\
\exists x\forall y\, P(x,y) & \Leftrightarrow & \exists x\forall y\, P(x,y) \\
\exists x\exists y\, P(x,y) & \Leftrightarrow & \exists x\exists y\, P(x,y) \\
\neg\forall x\forall y\, P(x,y) & \Leftrightarrow & \exists x\exists y\, \neg P(x,y) \\
\neg\forall x\exists y\, P(x,y) & \Leftrightarrow & \exists x\forall y\, \neg P(x,y) \\
\neg\exists x\forall y\, P(x,y) & \Leftrightarrow & \forall x\exists y\, \neg P(x,y) \\
\neg\exists x\exists y\, P(x,y) & \Leftrightarrow & \forall x\forall y\, \neg P(x,y)
\end{array}
$$

Om de tabel niet te groot te maken, hebben wij haar beperkt tot tweevoudige kwantoruitspraken. In het algemeen worden meervoudige kwantoruitspraken complexer als er meer kwantoren bij betrokken zijn.

4.7 Opgaven

1. De variabele m staat voor 'mens' . Geef voor de volgende predikaten een gangbare Nederlandse uitdrukking:

$\exists m$	sommige mensen
$\forall m$	...
$\neg\exists m$	...
$\neg\forall m$	...

2. Geef de ontkenning van:
   (a) $\forall u \exists v \forall w \exists x \forall y \exists z\, P(u,v,w,x,y,z)$
   (b) er zijn studenten die werken
   (c) alle studenten werken
   (d) er zijn studenten die werken en studeren

3. Bepaal of de volgende uitspraken elkaar impliceren, tegenspreken, of contrasteren. Geef ook aan welke uitspraken tegenstrijdig zijn.
   (a) sommige studenten wonen in Rotterdam
   (b) alle studenten wonen niet in Rotterdam
   (c) alle studenten wonen in Rotterdam
   (d) sommige studenten wonen niet in Rotterdam

4. Gegeven de volgende predikaten:
   (a) $Kind(x,y)$ x is het kind van y
   (b) $Vrouw(x)$ x is een vrouw
   (c) $Man(x)$ x is een man
   (d) $Gelijk(x,y)$ $x = y$

   Stel dat x en y uit je eigen familie-universum komen. Maak met behulp van de bovengenoemde predikaten de volgende predikaten:
   (a) $Vader(x,y)$
   (b) $Moeder(x,y)$
   (c) $Broer(x,y)$
   (d) $Oma(x,y)$
   (e) $Oom(x,y)$
   (f) $Neef(x,y)$

   Opmerking: In Nederland is het gebruikelijk dat zowel de zoon van je broer of zus als de zoon van je oom of tante, neef genoemd wordt.

5. Definiëer het predikaat $graad(x,y)$ als het aantal geboortes tussen x en y. Je bent van jezelf een bloedverwant tot de 0^{de} graad. Met je ouders en je kinderen ben je bloedverwant tot de 1^{ste} graad. Met je broers,zusters, grootouders en kleinkinderen ben je bloedverwant tot de 2^{de} graad etc. Je mag gebruik maken van het predikaat $Kind(x,y)$, het predikaat $Gelijk(x,y) \equiv (x = y)$ en het predikaat $Ongelijk(x,y) \equiv \neg Gelijk(x,y)$.

6. De uitspraak $H(x,y)$ betekent 'x houdt van y'. Wat betekenen de volgende uitspraken:

   (a) $\neg\exists x\forall y\, H(x,y)$

   (b) $\forall x\, (\exists y\, H(x,y) \rightarrow \forall z\, H(x,z))$

   (c) $\exists x\, (\exists y\, H(x,y) \wedge \exists z\, H(x,z))$

Hoofdstuk 5

Bewijzen met predicaten

In dit hoofdstuk gaan wij de natuurlijke deductie uitbreiden met inferenties voor predikaten. Daarbij spelen de begrippen gebonden- en vrije variabele een bijzondere rol. Tenslotte behandelen wij de natuurlijke inductie, een bewijsmethode waarmee wij bepaalde uitspraken over natuurlijke getallen kunnen maken.

5.1 Gebonden- en vrije variabelen

Elke kwantor bindt een variabele. Deze *gebonden variabele* staat direct achter het kwantorteken zoals: $\forall x$ of $\exists y$. Een variabele die niet door een kwantor gebonden wordt, is een *vrije variabele*. Het principe van gebonden- en vrije variabelen kennen wij ook in de wiskunde en de informatica:

Voorbeelden:

expressie	gebonden	vrij
$\int_0^t f(\tau)d\tau$	τ	t
$\sum_{i=0}^{n} i^2$	i	n
for $i = 0 \ldots n$ $x = x + i;$	i	x, n

In deze voorbeelden kunnen wij de voorkomens van een gebonden variabele vervangen door een naam die niet konflikterend is met de naam van een andere variabele. Niet alleen de naam, ook de *reikwijdte* of *scope*, van een variabele is belangrijk.

$$\forall x\, \exists y\, P(x,y) \vee Q(x,y) \qquad \Leftrightarrow \qquad \underbrace{\forall x\, (\exists y\, (P(x,y)))}_{\text{x,y gebonden}} \vee \underbrace{Q(x,y)}_{\text{x,y vrij}}$$

Bij gebonden variabelen wordt de reikwijdte aangegeven met haken, die alleen weggelaten mogen worden als er geen verwarring kan ontstaan.

$$\forall x\, (P(x)) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x\, P(x)$$

of

$$\forall x\, \exists y\, (P(x) \vee Q(y)) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x\, (\exists y\, (P(x) \vee Q(y)))$$

Gebonden variabelen zijn vergelijkbaar met lokale lusvariabelen in de informatica. Indien er sprake is van meer dan één kwantor in een uitspraak, dan binden de kwantoren binnen sterker dan de kwantoren buiten. In het volgende cryptische voorbeeld wordt dit gedemonstreerd:

$$\forall y\, (\exists y\, P(y) \vee Q(y)) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall y \quad \underbrace{(\exists y\, P(y)}_{\exists y \text{ gebonden}} \quad \vee \quad \underbrace{Q(y))}_{\forall y \text{ gebonden}}$$

Vrije variabelen ontlenen hun bestaansrecht aan de bewijsvoering of aan de premissen. De reikwijdte van een vrije variabele begint bij de introductie. Zij eindigt in de loop van het bewijs door op te gaan in een generaliserende- of een absurde uitspraak. Zij lijken op de normale variabelen in een programma, soms hebben ze een lokale, soms een globale reikwijdte. Wij zullen de reikwijdte van de vrije variabelen in de volgende paragrafen uitwerken. Indien de reikwijdte van een gebonden kwantor binnen de reikwijdte van een vrije variabele valt, dan heeft de gebonden variabele een hogere prioriteit. Met andere woorden, een kwantor bindt sterker dan een vrije variabele. Ondanks dat een vrije- en een gebonden variabele dezelfde naam mogen hebben binnen elkaars reikwijdte, wordt het afgeraden omdat het verwarrend is:

$$\overbrace{\forall y\, [\underbrace{M(x,y)}_{\text{vrije x}} \rightarrow \underbrace{\exists x\, S(x,y)]}_{\text{gebonden x}}}^{\text{gebonden y}}$$

Wij kunnen de naam x in het gedeelte

$\exists x\ S(x,y)$ beter wijzigen in de naam z. De naam z is een goede keuze omdat zij nog niet gebruikt wordt door een vrije- of gebonden variabele.

$$\overbrace{\underbrace{\forall y\ [M(x,y)}_{\text{vrije x}} \rightarrow \underbrace{\exists z\ S(z,y)}_{\text{gebonden z}}\ ]}^{\text{gebonden y}}$$

Voorbeelden:

1. De naam van een gebonden variabele buiten zijn reikwijdte is onbelangrijk: $\exists x\ P(x) \wedge \exists y\ Q(y)$ is gelijk aan het predikaat $\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$. De betekenis *"er een president en er is een querulant"* is niet veranderd;

2. De reikwijdte van een gebonden variable is belangrijk: $\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$ is niet gelijk aan $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$. De betekenis *"er een president en er is een querulant"* is niet hetzelfde als: *er is iemand die president en querulant is"*;

3. Binnen de reikwijdte van een gebonden variabele, mogen de namen van de variabelen niet konflikteren. Dat kunnen wij voorkomen door andere namen te gebruiken. Als wij in het predikaat $\exists y\ B(y,x)$: *"er is een broer van x"* de gebonden variabele y vervangen door u, verandert er niets. De betekenis van $\exists u\ B(u,x)$ is nog steeds: *"er is een broer van x"*. De betekenis van een predikaat kan veranderen of zelfs verdwijnen als de vrije- en de gebonden variabele dezelfde naam krijgen binnen de reikwijdte van de gebonden variabele: $\exists x\ B(x,x)$ *"er is iemand zijn eigen broer"*. Hoewel soms zinvolle interpretaties van $\exists x\ B(x,x)$ bestaan zoals: *"er is iemand die zijn eigen baas is"*, moeten wij op onze hoede zijn voor konflikten door naamgeving.

5.2 Natuurlijke deductie

Tijdens het redeneren zoals wij dat van nature doen, maken wij gebruik van *gevallen* of *voorbeelden*. In de uitspraken zijn ze te herkennen als vrije variabelen. Bij het redeneren met gevallen en voorbeelden moeten wij rekening houden met de volgende principes:

1. Uit een algemene uitspraak mogen wij een willekeurig voorbeeld nemen. Uit: *"iedereen is sterfelijk"* kunnen wij concluderen: *"Lady Di is sterfelijk"*. Dit noemen wij in de natuurlijke deductie de eliminatie van de universele kwantor;

2. Een geval dat op een of andere manier gegeven is of afgeleid kan worden uit de gegevens, mogen wij bestaansrecht toekennen. Uit het gegeven: *"Bill is president"* kunnen wij concluderen: *"er is een president"*. Dit noemen wij in de natuurlijke deductie de introductie van de existentiële kwantor;

3. Wij mogen voorbeelden universeel generaliseren indien zij niet-uniek zijn en daarom niet-expliciet in de gegevens worden genoemd. Uit *"alle prinsessen zijn mensen"* en *alle mensen zijn sterfelijk*, kunnen wij een prinses als voorbeeld nemen en aantonen dat zij vanwege haar menselijkheid sterfelijk is, waaruit wij tenslotte de conclusie trekken dat *"alle prinsessen sterfelijk zijn"*. Dit noemen wij in de natuurlijke deductie de introductie van de universele kwantor;

4. Een geval waarvan wij alleen het bestaan kennen, mag gebruikt worden in een bewijs indien het geen unieke eigenschappen toegeschreven door het een naam te geven van een geval waarvan al iets bekend is. Als *"Hilary de vrouw van Bill is"* en *"er is een president"* gegeven zijn, moeten wij oppassen met een president te veronderstellen die toevalling ook Bill heet, waaruit wij ten onrechte kunnen concluderen dat de vrouw van deze fictieve president Hilary heet. Dat het presidentsechtpaar Bill en Hilary werkelijk bestaat, is niet relevant omdat de fictieve president ook Mr. X genoemd had mogen worden. Om te voorkomen dat er op deze manier verwarring kan optreden, moet het fictieve geval een unieke naam krijgen. Het introduceren van een fictief geval met een unieke naam, noemen wij in de natuurlijke deductie de eliminatie van een existentiële kwantor.

5.2.1 Eliminatie van de universele kwantor

Het nemen van een voorbeeld uit een universele uitspraak wordt in de natuurlijke deductie de eliminatie van de universele kwantor genoemd: $E\forall$. Hierbij worden in de regel die begint met een universele kwantor **alle** voorkomens van de daaraan gebonden variabele vervangen door een variabele met een willekeurig te kiezen naam, mits deze naam ongebonden is. Per bewijsregel mag slechts één kwantor verwijderd of toegevoegd worden.

Voorbeelden:

1. Bewijs: $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x)), P(v) \vdash Q(v)$

1	$\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$	P
2	$P(v)$	P
3	$P(v) \rightarrow Q(v)$	$1\ E\forall$
4	$Q(v)$	$2,3\ E \rightarrow$

In regel 3 worden alle voorkomens van de gebonden variabele x vervangen door de vrije variabele v. Hoewel de naam v aanwezig is in de premisse (regel 2), is de naam v ongebonden in de formule $P(x) \rightarrow Q(x)$ en mag daarom gebruikt worden.

2. Bewijs: $\neg P(v) \vdash \neg\forall x\, P(x)$

1	$\neg P(v)$	P
2	$\quad \forall x\, P(x)$	H
3	$\quad P(v)$	$2\ E\forall$
4	$\quad \neg P(v) \wedge P(v)$	$1,3\ I\wedge\ \ \bot$
5	$\neg\forall x\, P(x)$	$2-4\ I\neg$

3. Bewijs: $\forall x \forall y\, P(x,y) \vdash P(v,v)$

1	$\forall x \forall y\, P(x,y)$	P
2	$\forall y\, P(v,y)$	$1\ E\forall$
3	$P(v,v)$	$2\ E\forall$ **fout**

De gekozen variabele v mag niet reeds gebonden zijn in de conclusie. Stel dat $P(y,x)$ staat voor de uitspraak: *"y ongelijk aan x"*. Dan betekent $\forall x \forall y\, P(x,y) \vdash P(v,v)$ dat uit *"alle x zijn ongelijk aan y"* volgt dat *"v ongelijk is aan v"*. Dit is duidelijk een tegenspraak.

4. Bewijs: $\forall x \forall y\, P(x,y) \vdash P(v,w)$

1	$\forall x \forall y\, P(x,y)$	P
2	$\forall y\, P(v,y)$	$1\ E\forall$
3	$P(v,w)$	$2\ E\forall$

5.2.2 Introductie van de existentiële kwantor

Een *existentiële generalisatie* wordt in de natuurlijke deductie de introductie van de existentiële kwantor genoemd: $I\exists$. Hierbij worden per regel **één of meer** voorkomens van een vrije variabele door een existentiële kwantor gebonden, waarvan het bereik over de gehele regel moet gelden. De introductie van een existentiële kwantor mag overal in het bewijs plaats vinden.

Voorbeelden:

1. Bewijs: $P(v) \wedge \neg Q(v) \vdash \exists x\, (P(x) \wedge \neg Q(x))$

1	$P(v) \wedge \neg Q(v)$	P
2	$\exists x\, (P(x) \wedge \neg Q(x))$	$1\ I\exists$

2. Bewijs: $P(v) \wedge \neg Q(v) \vdash \exists x\, (P(x) \wedge \neg Q(v))$

1	$P(v) \wedge \neg Q(v)$	P
2	$\exists x\ (P(x) \wedge \neg Q(v))$	$1\ I\exists$

3. Bewijs: $P(v) \wedge \neg Q(v) \vdash \exists x\ P(x) \wedge \exists x\ \neg Q(x)$

1	$P(v) \wedge \neg Q(v)$	P
2	$P(v)$	$1\ E\wedge$
3	$\neg Q(v)$	$1\ E\wedge$
4	$\exists x\ P(x)$	$2\ I\exists$
5	$\exists x\ \neg Q(x)$	$3\ I\exists$
6	$\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ \neg Q(x)$	$4,5\ I\wedge$

4. Bewijs: $P(v) \rightarrow Q(v) \vdash \exists x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$

1	$P(v) \rightarrow Q(v)$	P
2	$\exists x\ P(x) \rightarrow Q(v)$	$1\ I\exists$ **fout**
3	$\exists x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x)$	$2\ I\exists$ **fout**

Uit “als 3 een priemgetal getal is, dan is 3 oneven’, volgt niet “als er een priemgetal getal is, dan is 3 oneven” en hieruit volgt niet “als er een priemgetal getal is, dan is er een oneven getal” zoals blijkt bij de verzameling met één even priemgetal $\{2\}$.

Het bereik van de existentiële kwantor moet over de gehele regel (2 en 3) gelden.

5. Bewijs: $\neg\exists x\ P(x) \vdash \exists x\ \neg P(x)$

1	$\neg\exists x\ P(x)$	P
2	$\mid\ P(v)$	H
3	$\mid\ \exists x\ P(x)$	$2\ I\exists$
4	$\mid\ \exists x\ P(x) \wedge \neg\exists x\ P(x)$	$1,3\ I\wedge\ \bot$
5	$\neg P(v)$	$2-4\ I\neg$
6	$\exists x\ \neg P(x)$	$5\ I\exists$

5.2.3 Introductie van de universele kwantor

Een *universele generalisatie* wordt in de natuurlijke deductie de introductie van de universele kwantor genoemd: $I\forall$. Hierbij worden zonder uitzondering **alle** voorkomens van een vrije variabele in een regel gebonden door een universele kwantor waarvan het bereik over de gehele regel geldt. Deze universele generalisatie is toegestaan mits er geen unieke eigenschappen gelden voor de vrije variabele. Als de vrije variabele in een premisse wordt genoemd, heeft de vrije variabele altijd unieke eigenschappen en mag dus nooit universeel gegeneraliseerd worden. Als een vrije variabele in een hypothese unieke eigenschappen krijgt, mag zij niet universeel gegeneraliseerd worden zolang deze hypothese actief is (achter de verticale lijn).

Voorbeelden:

1. Bewijs: $\forall x\, P(x,x) \vdash \exists y \forall x\, P(y,x)$

1	$\forall x\, P(x,x)$	P
2	$P(v,v)$	1 $E\forall$
3	$\forall x\, P(v,x)$	2 $I\forall$ **fout**
4	$\exists y \forall x\, P(y,x)$	3 $I\exists$

   Uit "alle getallen zijn gelijk aan zichzelf", volgt niet "het getal 3 gelijk is aan alle getallen".

   Men moet alle voorkomens van de vrije variabele in een regel universeel binden.

2. Bewijs: $P(v) \vdash \forall x\, P(x)$

1	$P(v)$	P
2	$\forall x\, P(x)$	1 $I\forall$ **fout**

   Uit "het getal 3 is een priemgetal", volgt niet "alle getallen zijn priemgetallen".

   Men mag unieke eigenschappen nooit universeel generaliseren.

3. Bewijs: $\neg\forall x\, P(x) \vdash \forall x\, \neg P(v)$

1	$\neg\forall x\, P(x)$	P
2	$\quad\vert\ P(v)$	H
3	$\quad\vert\ \forall x\, P(x)$	2 $I\forall$ **fout**
4	$\quad\vert\ \forall x\, P(x) \wedge \neg\forall x\, P(x)$	$3,1$ $I\wedge$ $\perp$
5	$\neg P(v)$	$2-4$ $I\neg$
6	$\forall x\, \neg P(x)$	5 $I\forall$

   Ook in een hypothetisch bewijs volgt uit "het getal 3 is een priemgetal" niet "alle getallen zijn priemgetallen".

   In regel 3 is de universele generalisatie fout omdat de hypothese waarin de unieke eigenschappen van de vrije variabele genoemd worden nog actief is (regel 2-4). De universele generalisatie in regel 6 is wel toegestaan omdat de hypothese niet meer actief is en de vrije variabele niet in de premissen voorkomt.

4. Bewijs: $\forall x\, (P(x) \to Q(x)), \forall x\, (Q(x) \to R(x)) \vdash \forall x\, (P(x) \to R(x))$

1	$\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$	P
2	$\forall x\ (Q(x) \rightarrow R(x))$	P
3	$P(v) \rightarrow Q(v)$	$1\ E\forall$
4	$Q(v) \rightarrow R(v)$	$2\ E\forall$
5	$\mid\ P(v)$	H
6	$\mid\ Q(v)$	$5,3\ E \rightarrow$
7	$\mid\ R(v)$	$6,4\ E \rightarrow$
8	$P(v) \rightarrow R(v)$	$5-7\ I \rightarrow$
9	$\forall x\ (P(x) \rightarrow R(x))$	$8\ I\forall$

5. Bewijs: $\vdash \neg\forall x\ P(x) \rightarrow \exists x\ \neg P(x)$

1	$\mid\ \neg\forall x\ P(x)$	H
2	$\mid\ \mid\ \neg\exists x\ \neg P(x)$	H
3	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg P(v)$	H
4	$\mid\ \mid\ \mid\ \exists x\ \neg P(x)$	$3\ I\exists$
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \exists x\ \neg P(x) \wedge \neg\exists x\ \neg P(x)$	$2,4\ I\wedge\ \bot$
6	$\mid\ \mid\ P(v)$	$3-5\ E\neg$
7	$\mid\ \mid\ \forall x\ P(x)$	$6\ I\forall$
8	$\mid\ \mid\ \forall x\ P(x) \wedge \neg\forall x\ P(x)$	$1,7\ I\wedge\ \bot$
9	$\mid\ \exists x\ \neg P(x)$	$2-8\ I\neg$
10	$\neg\forall x\ \neg P(x) \rightarrow \exists x\ \neg P(x)$	$1-9\ I \rightarrow$

De generalisatie van de eigenschap $P(v)$ van de vrije variabele v in regel 7 is toegestaan omdat zij buiten de hypothese $3-5$ niet meer actief is en de vrije variabele in de overgebleven actieve hypothesen en premissen geen unieke eigenschappen wordt toegeschreven.

5.2.4 Eliminatie van de existentiële kwantor

Het stellen van een voorbeeld uit een existentiële uitspraak wordt in de natuurlijke deductie de eliminatie van de existentiële kwantor genoemd: $E\exists$. Hierbij worden in de regel die begint met een existentiële kwantor **alle** voorkomens van de daaraan gebonden variabele vervangen door één en dezelfde vrije variabele. Omdat deze vrije variabele niet echt bekend is, moet zij hypothetisch geïntroduceerd worden. Bovendien mag dit fictieve voorbeeld niet per abuis belast worden met eigenschappen van andere gevallen. Daarom krijgt zij een unieke naam. Als het geïntroduceerde fictieve geval uiteindelijk niet meer vrij voorkomt, is de eliminatie van de existentiële kwantor gelukt. Meestal kunnen wij het fictieve voorbeeld weer binden aan een existentiële kwantor. Soms is het mogelijk het fictieve voorbeeld te laten verdwijnen met een absurde uitspraak, waaruit wij de ontkenning van de originele existentiële uitspraak mogen concluderen.

Voorbeelden:

1. Bewijs: $\exists x\, P(x), Q(v) \vdash \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$

1	$\exists x\, P(x)$	P
2	$Q(v)$	P
3	$\quad\vert\ P(v)$	H (1 $E\exists$) **fout**
4	$\quad\vert\ P(v) \wedge Q(v)$	$2,3\ I\wedge$
5	$\quad\vert\ \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$	$4\ I\exists$
6	$\exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$	$1,3-5\ E\exists$

   Een gegeven "het getal 4 is een kwadraat" mag niet aangevuld worden met de hypothetische uitspraak "4 is een priemgetal" en gebruikt worden als bewijs dat er een kwadratisch priemgetal is.

   Het fictieve geval v in regel 3 heeft dezelfde naam gekregen als de vrije variabele in regel 2. Dit is verboden omdat het fictieve geval ten onrechte de eigenschap Q krijgt.

2. Bewijs: $\forall x \exists y\, P(y,x) \vdash \exists x\, P(x,x)$

1	$\forall x \exists y\, P(y,x)$	P
2	$\exists y\, P(y,v)$	$1\ E\forall$
3	$\quad\vert\ P(v,v)$	H (2 $E\exists$) **fout**
4	$\quad\vert\ \exists x\, P(x,x)$	$3\ I\exists$
5	$\exists x\, P(x,x)$	$2,3-4\ E\exists y$

   Uit "elk mens heeft een moeder" volgt "Jan heeft een moeder" maar niet "Jan is de moeder van Jan".

   Omdat is de naam v al in gebruik is in regel 2 krijgt het ten onrechte de eigenschap $P(v,v)$. Uit het feit dat iedereen (x) een vader heeft (y), mogen wij niet afleiden dat iemand zijn eigen vader is.

3. Bewijs: $\forall x \exists y\, P(y,x) \vdash \exists y \exists x\, P(y,x)$

1	$\forall x \exists y\, P(y,x)$	P
2	$\exists y\, P(y,v)$	$1\ E\forall$
3	$\mid\ P(w,v)$	$H\ (2\ E\exists)$
4	$\mid\ \exists x\, P(w,x)$	$3\ I\exists$
5	$\mid\ \exists y \exists x\, P(y,x)$	$4\ I\exists y$
6	$\exists y \exists x\, P(y,x)$	$2, 3-5\ E\exists y$

Een fictief voorbeeld uit een existentiële eliminatie moet voor de conclusie van het hypothetische bewijs weer verdwijnen. In het hypothetische bewijs (regel 3-5) verdwijnt het fictieve voorbeeld w door een existentiële generalisatie in regel 5. Meestal wordt het fictieve voorbeeld existentieel gegeneraliseerd, maar het kan ook op een andere manier vedwijnen zoals het volgende voorbeeld zal demonstreren:

4. Bewijs: $\vdash \neg(\forall x\, P(x) \wedge \exists x\, \neg P(x))$

1	$\mid\ \forall x\, P(x) \wedge \exists x\, \neg P(x)$	H
2	$\mid\ \forall x\, P(x)$	$1\ E\wedge$
3	$\mid\ \exists x\, \neg P(x)$	$1\ E\wedge$
4	$\mid\ \mid\ \neg P(v)$	$H\ (3\ E\exists)$
5	$\mid\ \mid\ P(v)$	$2\ E\forall$
6	$\mid\ \mid\ \neg P(v) \wedge P(v)$	$4,5\ I\wedge\ \ \bot$
7	$\mid\ \neg\exists x\, \neg P(x)$	$3, 4-5\ E\exists\ \ \bot$
8	$\mid\ \neg\exists x\, \neg P(x) \wedge \exists x\, \neg P(x)$	$3,7\ I\wedge\ \ \bot$
9	$\neg(\forall x\, P(x) \wedge \exists x\, \neg P(x))$	$1,8\ I\neg$

Het is toegestaan dat in regel 5 het unieke fictieve voorbeeld uit regel 4 representatieve eigenschappen krijgt. Het hypothetische bewijs (regel 4-6) leidt tot een absurditeit in regel 6, daarom mag de originele existentiële uitspaak in regel 3 ontkend worden in regel 7.

5.2.5 Overzicht inferentieregels

operator	introductie	eliminatie
$\neg$	$\dfrac{\begin{array}{c}P\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg P}$	$\dfrac{\begin{array}{c}\neg P\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{P}$ $\quad$ $\dfrac{P \quad \neg P}{Q}$
$\wedge$	$\dfrac{P \quad Q}{P \wedge Q}$	$\dfrac{P \wedge Q}{P}$ $\quad$ $\dfrac{P \wedge Q}{Q}$
$\vee$	$\dfrac{P}{P \vee Q}$ $\quad$ $\dfrac{Q}{P \vee Q}$	$\dfrac{\begin{array}{ccc} & P & Q\\ & \vdots & \vdots\\ P \vee Q & R & R\end{array}}{R}$
$\rightarrow$	$\dfrac{\begin{array}{c}P\\ \vdots\\ Q\end{array}}{P \rightarrow Q}$	$\dfrac{P \quad P \rightarrow Q}{Q}$
$\leftrightarrow$	$\dfrac{\begin{array}{cc}P & Q\\ \vdots & \vdots\\ Q & P\end{array}}{P \leftrightarrow Q}$	$\dfrac{P \quad P \leftrightarrow Q}{Q}$ $\quad$ $\dfrac{Q \quad P \leftrightarrow Q}{P}$
$\forall$	$\dfrac{\begin{array}{cc} & P\\ & \vdots\\ P & Q(u)\end{array}}{\forall x Q(x)}$	$\dfrac{\forall x\, P(x)}{P(v)}$
$\exists$	$\dfrac{P(v)}{\exists x\, P(x)}$	$\dfrac{\begin{array}{cc} & P(u)\\ & \vdots\\ \exists x\, P(x) & Q\end{array}}{Q}$

5.2.6 Theorema's

Bewijzen met afleidingen kunnen soms korter met *theorema's*. Theorema's zijn afleidingen die altijd geldig zijn binnen de natuurlijke deductie ($\vdash \tau$), zij zijn te vergelijken met tautologieën ($\models \tau$). Hoewel een bewijs zonder theorema's meer overtuigingskracht heeft, worden algemeen bekende theorema's geaccepteerd in een bewijs. De bekenste theorema's hebben namen zoals 'modus tollens', 'hypothetisch syllogisme', 'deMorgan' of 'verwisseling van kwantoren'. De tautologiën in de paragrafen 2.5, 4.5.3 en 4.6.2 zijn met natuurlijke deductie te bewijzen.

Voorbeeld:

Bewijs: $\neg\exists x \forall y\ (\neg P(x) \wedge Q(y)) \vdash \exists y \exists x\ (P(x) \vee \neg Q(y))$

1	$\neg\exists x \forall y\ (\neg P(x) \wedge Q(y))$	P
2	$\forall x \neg\forall y\ (\neg P(x) \wedge Q(y))$	$1\ \neg\exists \vdash \forall\neg$
3	$\forall x \exists y\ \neg(\neg P(x) \wedge Q(y))$	$2\ \neg\forall \vdash \exists\neg$
4	$\forall x \exists y\ (P(x) \vee \neg Q(y))$	$3\ deMorgan$
5	$\exists y\ (P(v) \vee \neg Q(y))$	$4\ E\forall$
6	$\quad \vert\ (P(v) \vee \neg Q(w))$	$H(5, E\exists)$
7	$\quad \vert\ \exists x\ (P(x) \vee \neg Q(w))$	$6\ I\exists$
8	$\quad \vert\ \exists y \exists x\ (P(x) \vee \neg Q(y))$	$7\ I\exists$
9	$\exists y \exists x\ (P(x) \vee \neg Q(y))$	$5, 6-8, E\exists$

5.3 Natuurlijke inductie

In de wiskunde moet men regelmatig bewijzen leveren van het volgende type:

> *"Bewijs voor elk natuurlijk getal n groter of gelijk aan b de eigenschap $P(n)$."*

of symbolisch:

$$\underset{b \leq n}{\forall n}\ P(n)$$

Dit type bewijs maakt gebruik van *natuurlijke inductie* . Het bewijs met natuurlijke inductie is gebaseerd op de eigenschappen van de natuurlijke getallen $0, 1, 2, 3, \ldots$ en de volgende stappen:

1. Bewijs de eigenschap voor de basis: $P(b)$

2. Neem aan dat de eigenschap geldt voor $k-1$. Bewijs met behulp van deze *hypothese* de eigenschap voor k. Symbolisch: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

In de wiskunde wordt bewijs met natuurlijke inductie als een extra axioma beschouwd. Het geldt alleen voor eigenschappen van natuurlijke getallen. Het axioma luidt:

$$P(b) \wedge \underset{b<k}{\forall k}(P(k-1) \rightarrow P(k)) \quad \vdash \quad \underset{b\leq n}{\forall n}\, P(n)$$

Intuïtief kunnen wij deze stappen verklaren met de eindeloze opeenvolging van uitspraken:

$$\begin{array}{l} P(b) \\ P(b) \rightarrow P(b+1) \\ P(b+1) \rightarrow P(b+2) \\ P(b+2) \rightarrow P(b+3) \\ P(b+3) \rightarrow P(b+4) \\ \quad\quad \vdots \\ P(n-1) \rightarrow P(n) \\ \quad\quad \vdots \end{array}$$

Dit kunnen wij zien als het herhaald toepassen van de 'modus ponens'. Het bewijs met 'natuurlijke inductie' is geen *synthetisch bewijs* , men moet de beschikking hebben over een uitspraak $P(n)$. Meestal wordt $P(n)$ vermoedt door het herkennen van een herhalingspatroon. Een patroonherkenning alleen is niet voldoende voor een bewijs, Dit bewijs kunnen wij maken met natuurlijke inductie. Natuurlijke inductie wordt in de informatica gebruikt bij het aantonen van de correctheid van algoritmen.

Voorbeelden:

1. **Te bewijzen:** $\underset{4\leq n}{\forall n}\, 2^n \leq n!$
   Bewijs:

   Basisstap: $b = 4 \quad \Rightarrow \quad 2^4 \leq 4!$

   Inductiestap: Uit $2^{k-1} \leq (k-1)!$ en $4 \leq k$ volgt:

   $$2^k = 2 \cdot 2^{k-1} \quad \leq \quad 2 \cdot (k-1)! \quad \leq \quad k \cdot (k-1)! = k!$$

   Hiermee is bewezen dat: $\underset{4\leq n}{\forall n}\, 2^n \leq n!$

2. In dit voorbeeld wordt bewezen dat $8^n - 3^n$ altijd deelbaar is door 5:

   Te bewijzen: $\forall n\ (8^n - 3^n)$ deelbaar door 5
   Bewijs:

   Basisstap: $b = 0 \quad \Rightarrow \quad (8^0 - 3^0) = 0$ deelbaar door 5

Inductiestap: Uit de hypothese dat $(8^{k-1} - 3^{k-1})$ deelbaar is door 5 volgt:

$$5 \cdot 8^{k-1} + 3 \cdot (8^{k-1} - 3^{k-1}) = 8 \cdot 8^{k-1} - 3 \cdot 3^{k-1} = 8^k - 3^k$$

Omdat $3 \cdot (8^{k-1} - 3^{k-1})$ en $5 \cdot 8^{k-1}$ deelbaar zijn door 5 is hun som $8^k - 3^k$ ook deelbaar door 5.

5.4 Intuïtionistische logica

De klassieke definitie van een propositie (definitie 1.1) definieert een propositie als een uitspraak die waar of onwaar is, maar niet beide. Men noemt dit het principe van de *uitgesloten derde*. Vanwege dit principe wordt in de klassieke logica de formule $Q \vee \neg Q$ als een exclusieve òf geïnterpreteerd: Q is waar òf $\neg Q$ is waar, maar niet beide. Kritiek op deze interpretatie is de belangrijkste reden geweest voor het ontstaan van andere logische systemen. In de meerwaardige logica zoals de fuzzy logics (zie: paragraaf 3.3) wordt de formule $Q \vee \neg Q$ als een 'inclusieve of' geïnterpreteerd, waarin Q en $\neg Q$ gedeeltelijk waar kunnen zijn. Naast de 'inclusieve of' interpretatie van de meerwaardige logica en de 'exclusieve-of' interpretatie van de klassieke logica is nog een andere zienswijze mogelijk. Deze zienswijze wordt vertolkt door de aanhangers van de *intuïtionistische logica*. De belangrijkste kritiek werd door de Nederlandse wiskundige *L.E.J. Brouwer* (1881-1966) geleverd. Zijn bezwaar hield in, dat het principe van de 'uitgesloten derde' zou leiden tot niet-constructieve bewijzen. Een niet-constructieve bewijs is een bewijs van een existentiële eigenschap zonder het geval te vinden waarvoor het geldt. Het kan ook een bewijs zijn van een niet-universele eigenschap zonder aan te geven welke gevallen deze eigenschap niet hebben. Meestal maken niet-constructieve bewijzen gebruik van absurditeiten om een existentiële eigenschap te bewijzen of een universele eigenschap te ontkennen. Voor de informatica is het onderscheid tussen constructieve- en niet-constructieve bewijzen belangrijk, omdat constructieve bewijzen kunnen leiden tot algoritmen. Het volgende bewijs is niet-constructief:

Gevraagd: (ψ) Bewijs dat $\sqrt{2}$ geen rationaal getal is.

Bewijs ($\phi \vdash \psi$): Het bewijs begint met de aanname $\neg\psi$ en tracht een $\perp$ aan te tonen, waaruit men ψ kan concluderen, een 'bewijs door tegenspraak' $E\neg$:

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m}$$

Hieruit volgt na kwadratering van beide zijden van de gelijkheid:

$$2m^2 = n^2$$

Hieruit volgt dat n een even getal $2u$ moet zijn:

$$2m^2 = 4u^2$$

Hieruit volgt dat m een even getal $2v$ moet zijn:

$$\sqrt{2} = \frac{2u}{2v}$$

Hieruit volgt dat m en n een gemeenschappelijke deler 2 hebben.

Deze laatste conclusie is tegenstrijdig ($\perp$) met de premisse (ϕ). Daarmee is (ψ) bewezen. Dit 'bewijs uit het ongerijmde' toont aan dat er een niet-rationaal getal $\sqrt{2}$ is. Het bewijs geeft geen aanwijzingen hoe een niet-rationeel getal gemaakt of gevonden kan worden.

5.5 Opgaven

1. Bepaal of de volgende afleidingen goed of fout zijn, geef eventueel aan welke fout gemaakt is:

   (a)

1	$\exists x\, P(x)$	P
2	$P(v)$	$1\ E\exists$
3	$\forall x\, P(x)$	$2\ I\forall$

   (b)

1	$\forall x\, P(x)$	P
2	$P(v)$	$1\ E\exists$
3	$\forall x\, P(x)$	$2\ I\forall$

   (c)

1	$\forall x\, P(x)$	P
2	$Q(v)$	P
3	$\forall x\, P(x) \wedge Q(v)$	$1,2\ I\wedge$

   (d)

1	$\forall x\, P(x)$	P
2	$Q(v)$	P
3	$\exists x\, Q(x)$	$2\ I\exists$
4	$\forall x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(v)$	$1,3\ I\wedge$

   (e)

1	$\forall x\, P(x)$	P
2	$\exists x\, Q(x)$	P
3	$Q(v)$	$2\ E\exists$
4	$\forall x\, P(x) \wedge Q(v)$	$1,3\ I\wedge$

2. Bewijs de volgende predicaten met behulp van afleidingen:

   (a) $\forall x\, P(x) \vdash P(v)$

   (b) $\neg\forall x\, P(x) \vdash \exists x\, \neg P(x))$

(c) $\exists x \forall y\, P(x,y) \vdash \forall x \exists y\, P(x,y)$

(d) $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x)$

(e) $\neg\exists x\, P(x), \neg\exists x\, Q(x) \vdash \neg\exists x\, (P(x) \vee Q(x))$

3. Hoewel logica niet afhankelijk is van feitelijke waarheid (zie: definitie 1.2), moeten wij voorzichtig het interpreteren van een conclusie. Het is onder bijzondere omstandigheden mogelijk dat uit een feitelijk ware premisse, een geldige, maar feitelijk onware conclusie afgeleid kan worden:

   Uit: *"Een eenhoorn is onbestaand"*
   volgt: *"er bestaan onbestaande dingen"*

1	$O(e)$	
2	$\exists x\, O(x)$	$1\; I\exists$

   Ondanks de feitelijk ware premisse en de geldige redenatie, is de conclusie feitelijk onwaar.

   Uit dit voorbeeld blijkt dat wij voorzichtig moeten zijn met de formulering en interpretatie van predicaten. Een predicaat moet niet alleen *syntactisch* -grammaticaal-correct zijn, maar ook *semantisch* -naar de betekenis- correct zijn:

   Bij de introductie van een existentiële kwantor moet het geval ook echt bestaan.

   Met andere woorden, het predicaat mag geen existentiële eigenschap 'onbestaandheid' uitdrukken omdat men voorzichtig moet zijn met logische uitspraken over de logica (zie: paragraaf 2.1).

   - Probeer voorbeelden te verzinnen waarin aangetoond wordt dat syntactische correctheid niet voldoende is;
   - Probeer voorbeelden te vinden die intuïtief geldig zijn, maar die niet met klassieke logica zijn te bewijzen.

4. Het menselijk redeneren kent veel varianten, sommige zijn inderdaad niet te beschrijven met de klassieke logica. *George Polya* (1887-1985) beschrijft een heuristische manier van redeneren:

   $$\frac{\text{er zijn meeuwen} \quad \text{als er land in buurt is, zijn er vaak meeuwen}}{\text{de kans dat er land in de buurt is, is toegenomen}}$$

   Is deze uitspraak mogelijk in de klassieke logica?

   Opmerking: Men noemt deze redenatie een *reductie*. Men komt het regelmatig tegen bij kansberekeningen.

5. Bewijs met natuurlijke inductie:

   (a) Voor alle natuurlijk getallen $n > 6$ geldt:

   $$n^3 < n!$$

(b) Voor alle reële getallen r en natuurlijke getallen n geldt:

$$(1+r)^n \geq 1+n \cdot r$$

(c) Voor natuurlijke getallen n geldt:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

Je mag gebruik maken van de recursieve definitie van de 'som-kwantor':
1) de som over een leeg domein:

$$\sum_{i=0}^{i<0} P(i) = 0$$

2) de som over $0 \ldots n$ uitgedrukt in de som over $0 \ldots n-1$:

$$\sum_{i=0}^{n} P(i) = \sum_{i=0}^{n-1} P(i) + P(n)$$

(d) Voor alle reële getallen $r \neq 1$ en natuurlijk getallen n geldt:

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{r^{n+1}-r}{r-1}$$

6. Als wij een formule willen vinden voor

$$\sum_{i=1}^{n} i^3$$

Dan kan met behulp van patroonherkenning:

$$1^3 = 1 = 1^2$$
$$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^4 = 100 = 10^2$$

de volgende formule worden afgeleid:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Is dit een geldig bewijs?

7. Waarom is het principe van de 'uitgesloten derde' bekritiseerd? Geef drie zienswijzen op dit principe.

Bijlage A

Literatuur

[Bac93] BACKHOUSE, R.C, *Constructie en verificatie van programma's*, Prentice-Hall, Academic Service, Schoonhoven, 1986.

[Ben93] BENTHEM, J.F.A.K VAN ... [et al.], *Logica voor informatici*, Addison-Wesley, Amsterdam, 1993.

[Nol88] NOLT, J., D. ROHATYN, *Logic*, McGraw-Hill, New York, 1988.

[Pop97] POPPER, K.R., *The Logic of Scientific Discovery*, Routledge, Londen, 1997.

[Swa76] SWART, H.C.M DE EN H.G. HUBBELING, *Inleiding tot de symbolische logica*, van Gorcum, Amsterdam, 1976.

Index