博弈论笔记

kurt

November 30, 2018

1 多人 TU 游戏与特征函数

多人合作博弈收益，可转移的效用 (TU，transferrable utility)，side payments 联盟形式，定义 $N = \{1, 2, \cdots, n\}\,(n \geq 2)$ 为玩家的集合，联盟 (coalition) S 定义为 S 的子集，也即 $S \subset N$，所有联盟的集合定义为 2^N，习惯上，空集 $\emptyset$ 称为 empty coalition，N 称为 grand coalition n 人的联盟形式定义为 (N, v), $N = \{1, 2, \cdots, n\}$ 是玩家的集合，v 是定义在 2^N 上的所有联盟 (子集) 的特征函数并且满足

i $v(\emptyset) = 0$

ii $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$，其中 S 和 T 不相交 ($S \cap T = \emptyset$), 也称为超可加性

与策略形式的关系

$$v(S) = Val(\sum_{i \in S} u_i(x_1, \cdots, x_n))$$

$v(S)$ 代表 S 的安全阈值对于任何 $S \in 2^N$ 都有 $v(S) + v(\bar{S}) = v(N) = c$，这样联盟形式的博弈称为 constant-sum，如果 $c = 0$，则称为零和博弈

2 Imputation 分配与核心 Core

定义 如果 $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$，那么收益向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为**集体理性 (group rational)**的或者**有效的 (efficient)**

定义 如果 $x_i > v(\{i\}), \forall i$，那么收益向量 $\boldsymbol{x}$ 称为**个体理性的 (individually rational) 定义** 一个**分配 (imputation)**定义为满足集体理性和个体理性的收益向量，即

$$\left\{ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i = v(N) \quad and \quad \forall i, x_i \geq v(\{i\}) \right\}$$

定义 如果 $\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) = v(N)$ 则这样联盟形式的博弈称为 inessential，如果 $\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) < v(N)$ 则称为 essential

可以想象 $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$，这样是没有让玩家形成联盟的趋势的

定义 若 $v(S) > \sum_{i \in S} x_i$ 则称分配 $\boldsymbol{x}$ **在** S **上是不稳定的 (unstable through a coalition** S**)**，如果存在 S 使得 $\boldsymbol{x}$ 在 S 上是不稳定的，则称 $\boldsymbol{x}$ 是不稳定的，反之称 $\boldsymbol{x}$ 是稳定的

定义 稳定分配的集合 C 称为**核心 (core)**

$$C = \{ \boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \; and \; \forall S \subset N, \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \; \}$$

如果某些成员所形成的某个联盟 S 所得的利益所得的总体利益比各自在大联盟中所得利益之和多，那么这些成员更趋向于形成联盟 S，从而获得更大的利益，**核心**保证了这种情况不会发生。当然核心也可能是空的

定理一 一个必要的常和博弈的核心为空

证明 假定 $\boldsymbol{x}$ 为一个分配，因为博弈是必要的，所以 $\sum_{i\in N} v(\{i\}) < v(N)$，则一定存在玩家 k 使得 $x_k > v(\{k\})$，否则 $\sum_{i\in N} x_i \leq \sum_{i\in N} v(\{i\}) < v(N)$，因为是常和博弈，所以 $v(N-\{k\}) + v(\{k\}) = v(N)$，因此 $\boldsymbol{x}$ 在 $N-\{k\}$ 上一定不稳定，因为 $\sum_{i\neq k} x_i = \sum_{i\in N} x_i - x_k < v(N) - v(\{k\}) = v(N-\{k\})$

例题　手套市场

$\{P, Q\}$ 是 N 的一个划分，$P\cup Q = N, P\cap Q = \emptyset$，特征函数定义为

$$v(S) = \min\{S\cap P, S\cap Q\}$$

博弈 (N, v) 被称为手套市场，因为 P, Q 正如左右手套，将 k 个左手套和 j 个右手套，匹配成功手套价值为 1，否则为 0，则共有 $\min(k, j)$ 双手套匹配成功

(a) $|P| = 2$，$|Q| = 2$，求 core

设 x_1, x_2 来自 Player I, x_3, x_4 来自 Player II

$$\begin{aligned}
&C = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0,\\
&x_1 + x_3 \geq 1, x_1 + x_4 \geq 1, x_2 + x_3 \geq 1, x_2 + x_4 \geq 1,\\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2\}\\
&\Rightarrow C = \{(x_1, x_1, 1-x_1, 1-x_1) : x_1 \in [0, 1]\}
\end{aligned}$$

(b) $|P| = 2$，$|Q| = 3$，求 core

$$C = \{(1, 1, 0, 0, 0)\}$$

(c) 对任意 P, Q，求 core

如果 $|P| < |Q|$ 则 $\boldsymbol{x_P}$ 满足 $\forall i \in P, x_i = 1, \forall i \in Q, x_i = 0$

如果 $|P| > |Q|$ 则 $\boldsymbol{x_Q}$ 满足 $\forall i \in P, x_i = 0, \forall i \in Q, x_i = 1$

如果 $|P| = |Q|$ 则 core 为连接 $\boldsymbol{x_P}$，$\boldsymbol{x_Q}$ 的线段

3　Shapley Value

value function $\boldsymbol{\phi}(v) = (\phi_1(v), \phi_2(v), \cdots, \phi_n(v))$，$\phi_i(v)$ 表示在特征函数 v 下第 i 个参与者获得的值

Shapley Axioms for $\phi(v)$

1. 有效性 (**Efficiency**) $\sum_{i\in N} \phi_i(v) = v(N)$
2. 对称性 (**Symmetry**) 若对于任意不包含 i, j 的集合 S 有，$v(S\cup\{i\}) = v(S\cup\{j\})$，则 $\phi_i(v) = \phi_j(v)$, 也就是同等地位的两个人收益相同
3. **Dummy Axiom** 对于任意集合 S 有 $i \notin S$，$v(S\cup\{i\}) = v(S)$ 则 $\phi_i(v) = 0$
4. 可加性 (**Additivity**) $\boldsymbol{\phi}(u + v) = \boldsymbol{\phi}(u) + \boldsymbol{\phi}(v)$

定理一 存在唯一的 ϕ 满足 Shapley Axiom.

证明

定义

$$w_S(T) = \begin{cases} 1 & \text{if } S \subset T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

对于某个 S

根据公理 3，若 $i \notin S$，有 $\phi_i(w_S) = 0$

根据公理 2，若 i, j 均在 S 中，则 $\phi_i(w_s) = \phi_j(w_s)$

根据公理 1，$\sum_{i \in N} \phi_i(w_S) = w_S(N) = 1$

在特征函数为 cw_S 时，我们可以推出

$$\phi_i(cw_S) = \begin{cases} c/|S| & \text{i} \in \text{S} \\ 0 & \text{i} \notin \text{S} \end{cases}$$

我们将证明 v 可以唯一写成如定义1带权的特征函数之和，即

$$v = \sum_{S \subset N} c_S w_S$$

根据公理 4

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{S \subset T \\ i \in S}} \frac{c_S}{|S|}$$

我们首先定义 $c_\emptyset = 0$，递归定义

$$c_T = v(T) - \sum_{\substack{S \subset T \\ S \neq T}} c_S$$

这样就可以推出

$$\sum_{S \subset N} c_S w_S(T) = \sum_{S \subset T} c_S = c_T + \sum_{\substack{S \subset T \\ S \neq T}} c_S = v(T)$$

证明唯一性，假定存在两个集合的常数 c_S, c'_S 则

$$v(T) = \sum_{S \subset N} c_S w_S(T) = \sum_{S \subset N} c'_S w_S(T), \forall\, T \subset N$$

假定 $T = i$ 则 $c_{\{i\}} = c'_{\{i\}}$，对于任意联盟 R，假定 $\forall\, S \subset R, c_S = c'_S$ 对 $T = R$，根据 $V(T)$ 我们可以得到 $c_R = c'_R$

Shapley Value 的计算

$$v(\emptyset) = 0 \quad \begin{array}{ll} v(\{1\}) = 1 & v(\{1,2\}) = 4 \\ v(\{2\}) = 0 & v(\{1,3\}) = 3 \\ v(\{3\}) = 1 & v(\{2,3\}) = 5 \end{array} \quad v(\{1,2,3\}) = 8$$

递归计算 c_S 得

$$v = w_{\{1\}} + w_{\{3\}} + 3w_{\{1,2\}} + w_{\{1,3\}} + 4w_{\{2,3\}} - 2w_{\{1,2,3\}}$$

$$\boldsymbol{\phi} = (14/6, 17/6, 17/6)$$

计算 Shapley Value 的另一种方式

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} [v(S) - v(S - \{i\})] \tag{2}$$

对于某个集合 S，成员依次进入，最终形成 N 的过程，$(|S|-1)!$ 代表除了 i 之外的成员的排列进入 S 集合，然后 i 进入，然后剩下的成员依次进入。

	Player			
Order of Entry	1	2	3	Total
1 2 3	1	3	4	8
1 3 2	1	5	2	8
2 1 3	4	0	4	8
2 3 1	3	0	5	8
3 1 2	2	5	1	8
3 2 1	3	4	1	8
Average	14/6	17/6	17/6	8

Figure 1: 成员依次进入

3.1 Simple Games. The Shapley-Shubik Power Index

定义 若对每个 $S \subset N$，要么 $v(S) = 0$，要么 $v(S) = 1$，则称博弈 (N, v) 是**简单的 (simple)**

在简单博弈中，$v(S) = 1$ 称为胜者联盟，$v(S) = 1$ 称为败者联盟

(a) 多数规则博弈，$|S| > n/2$ 时 $v(S) = 1$，否则 $v(S) = 0$

(b) 一致博弈，$S = N$ 时 $v(S) = 1$，否则 $v(S) = 0$

(c) 独裁者博弈，若 $1 \in S$ 时 $v(S) = 1$，否则 $v(S) = 0$

在投票博弈中，Shapley Value 被称为 (Shapley-Shubik Index)

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{S \text{ winning} \\ S - \{i\} \text{ losing}}} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}$$

这类博弈被称为**加权投票博弈 (weighted voting games)**

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \sum_{i \in S} w_i > q \\ 0 & \sum_{i \in S} w_i \le q \end{cases}$$

若 $q=(1/2)\sum_{i\in S} w_i$，则称为**加权多数博弈 (weighted majority game)**
一个卖家多个买家市场
卖家 0 拥有物品，买家 j 认为物品价值为 $a_j, j=1,\cdots,m$，假定 $a_1>a_2>\cdots>a_m>0$，求 Shapley value

$$\phi_0(v)=\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{k(k+1)}$$

$$\phi_j(v)=\frac{a_j}{j(j+1)}-2\sum_{k=j+1}^{m}\frac{a_k}{(k-1)k(k+1)}$$

3.2 The Nucleolus

定义 分配 $\boldsymbol{x}$ 在 S 上的**超额 (excess)**为

$$e(\boldsymbol{x},S)=v(S)-\sum_{j\in S}x_j$$

我们调整 $\boldsymbol{x}$ 将最大的超额变得尽可能小，然后对第二大的超额进行类似操作，依次执行下去。我们可以推出分配 $\boldsymbol{x}$ 在 core 中，当且仅当它所有的超额小于等于 0
破产博弈 公司欠 A10 千元，欠 B20 千元，欠 30 千元，但公司将破产，只有 36 千元，该如何偿还？
按比例分配，$\boldsymbol{x}=(6,12,18)$ 如图2，最后一列代表 Shapley value

S	$v(S)$	$e(\boldsymbol{x},S)$	$(6,12,18)$	$(5,12,19)$	$(5,10.5,20.5)$	$(6,11,19)$
A	0	$-x_1$	-6	-5	-5	-6
B	0	$-x_2$	-12	-12	-10.5	-11
C	6	$6-x_3$	-12	-13	-14.5	-13
AB	6	$6-x_1-x_2$	-12	-11	-9.5	-11
AC	16	$16-x_1-x_3$	-8	-8	-9.5	-9
BC	26	$26-x_2-x_3$	-4	-5	-5	-4

Figure 2

nucleolus 性质:Nucleolus 存在且唯一，Nucleolus 满足集体理性和个体理性，满足对称公理和 dummy 公理，如果 core 不为空，则 nucleolus 在 core 中