Gauss 関数の最尤推定

2024 年 1 月 25 日

最尤推定

最尤推定

Gauss 関数の最尤推定

正規分布の確率関数は Gauss 関数であり，以下である．

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{1}$$

個数 N のデータ $x = (x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を用意すると尤度関数は以下となる．

$$L(x|\theta) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{2}$$

Gauss 関数には 2 つのパラメーターが存在するため，2 回に分けて各々のパラメーターを決定する必要がある．

パラメーター μ についての最尤推定

(2) 式を μ で偏微分するのだが，それに先んじて簡単のため両辺に対数を取って式を変形する．

$$\begin{aligned}
\log_e L(x|\theta) &= \log_e \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] && (3) \\
&= \sum_{n=0}^{N} \log_e \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} + \log_e e^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}} && (4) \\
&= \sum_{n=0}^{N} -\frac{1}{2} \log_e(2\pi\sigma^2) - \frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2} && (5) \\
&= -\frac{N}{2} \log_e(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N} (x_n-\mu)^2 && (6)
\end{aligned}$$

(6) 式を σ で偏微分する．

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}L(x|\theta) = -\frac{1}{\sigma}\sum_{n=0}^{N}(x_n - \mu) \tag{7}$$

最後に (7) 式を 0 とし，μ について解く．

$$-\frac{1}{\sigma}\sum_{n=0}^{N}(x_n - \mu) = 0 \tag{8}$$

$$-N\mu + \sum_{n=0}^{N}x_n = 0 \tag{9}$$

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}x_n \equiv \bar{x} \tag{10}$$

(10) をみると Gauss 関数のパラメーター μ はデータ x の平均に等しいことがわかる．したがって μ はデータの平均である．

パラメーター σ についての最尤推定

μ の場合と同様にして，(6) 式を σ で偏微分する．対数に注意し，その引数を u とする．（合成関数の微分）

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\log_e L(x|\theta) = -\frac{N}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\log_e u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}2\pi\sigma^2 - \frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N}(x_n - \mu)^2 \tag{11}$$

$$= -\frac{N}{2}\cdot\frac{1}{u}\cdot 4\pi\sigma + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{n=0}^{N}(x_n - \mu)^2 \tag{12}$$

$$= -\frac{N}{2}\cdot\frac{1}{2\pi\sigma^2}\cdot 4\pi\sigma + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{n=0}^{N}(x_n - \mu)^2 \tag{13}$$

$$= -\frac{N}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{n=0}^{N}(x_n - \mu)^2 \tag{14}$$

$$= \frac{1}{\sigma}\left\{-N + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N}(x_n - \mu)^2\right\} \tag{15}$$

最後に (15) 式を 0 とし，σ について解く．

$$-\frac{1}{\sigma}\left\{-N + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N}(x_n - \mu)^2\right\} = 0 \tag{16}$$

$$-N + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N}(x_n - \mu)^2 = 0 \tag{17}$$

$$N\sigma^2 = \sum_{n=0}^{N}(x_n - \mu)^2 \tag{18}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}(x_n - \mu)^2 \tag{19}$$

(19) 式を見るとこれは分散の定義そのものである．従ってガウス関数のパラメーター σ はデータの分散である．

以上 2 回の最尤推定により，Gauss 関数のパラメーターを解析的に決定することができた．よって，適当なデータを用意し，その平均と分散とを (1) 式に代入することでヒストグラムを Gauss 関数で近似することができる．