

Trường Đại học Khoa học tự nhiên  
Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh

## TOÁN ỨNG DỤNG & THỐNG KÊ

Bài tập tuần 9

Phan Đình Kha - 18120127

Ngày 6 tháng 6 năm 2021

# 1 Yêu cầu

Các tính chất của xác suất:

- (a)  $Pr(\emptyset) = 0$
- (b)  $Pr(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n Pr(A_i)$ ,  $A_i \cap A_{j \neq i} = \emptyset$
- (c)  $Pr(A^c) = 1 - Pr(A)$ ,  $\forall A$ ,  $A^c = S \setminus A$
- (d)  $0 \leq Pr(A) \leq 1$ ,  $\forall A$
- (e)  $A \subset B \Rightarrow Pr(A) \leq Pr(B)$
- (f)  $Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B)$

Hai tính chất đầu đã được chứng minh trên lớp. Hãy chứng minh 4 tính chất còn lại.

# 2 Bài làm

- (c)  $Pr(A^c) = 1 - Pr(A)$ ,  $\forall A$ ,  $A^c = S \setminus A$

Ta có  $A \cap A^c = \emptyset$  và  $A \cup A^c = S$  ( $S$  là tập vũ trụ)

Áp dụng tính chất (b) ta được:  $Pr(A \cup A^c) = Pr(A) + Pr(A^c)$

Mà:

$$Pr(A \cup A^c) = Pr(S) = 1$$

Do đó ta có:  $Pr(A) + Pr(A^c) = 1$

Hay  $Pr(A^c) = 1 - Pr(A)$ .

Ta có điều cần chứng minh.

- (d)  $0 \leq Pr(A) \leq 1$ ,  $\forall A$

Ta có:  $Pr(A) \geq 0$ ,  $\forall A$

Từ tính chất (c), ta được:  $Pr(A) = 1 - Pr(A^c) \leq 1$  (Do  $Pr(A^c) \geq 0$ )

Từ đó suy ra:  $0 \leq Pr(A) \leq 1$ ,  $\forall A$

- (e)  $A \subset B \Rightarrow Pr(A) \leq Pr(B)$

Vì  $A \subset B \Rightarrow$  nên  $B = A \cup (B \cap A^c)$ . Chú ý rằng,  $A \cap (B \cap A^c) = \emptyset$ . Do đó, áp dụng tính chất (b) ta được:  
 $Pr(B) = Pr(A \cup (B \cap A^c)) = Pr(A) + Pr(B \cap A^c)$  (\*)

Ta có:  $Pr(B \cap A^c) \geq 0$ . Kết hợp với (\*) suy ra  $Pr(A) \leq Pr(B)$ . Vậy ta có điều cần chứng minh.

- (f)  $Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B)$

Ta có:  $A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$  và  $A \cap (B \cap A^c) = \emptyset$ . Áp dụng tính chất (b) ta được:

$$Pr(A \cup B) = Pr(A \cup (B \cap A^c)) = Pr(A) + Pr(B \cap A^c) \quad (**)$$

Ta lại có:  $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$  và  $(B \cap A) \cap (B \cap A^c) = \emptyset$ . Một lần nữa áp dụng tính chất (b) ta được:

$$Pr(B) = Pr((B \cap A) \cup (B \cap A^c)) = Pr(B \cap A) + Pr(B \cap A^c)$$

$$\Rightarrow Pr(B \cap A^c) = Pr(B) - Pr(B \cap A) \quad (***)$$

Từ (\*\*) và (\*\*\*) ta suy ra:

$$Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(B \cap A)$$

Ta có điều phải chứng minh.