Euler Problem 616

$x_1, \ldots, x_k \implies y_1, \ldots, y_l$ bedeutet, dass die Elemente x_i durch eine Folge von Transformationen in y_j überführt werden können. Entsprechend $\impliedby$ und $\iff$. Es gelten

1. $a, b \iff a^b$ per Definition

2. $a, b, c \iff a, bc$, denn
$$a, b, c \iff a^b, c \iff \left(a^b\right)^c = a^{bc} \iff a, bc$$
Um zwei Elemente zu addieren braucht man eine Hilfsbasis a. Umgekehrt kann man mit Hilfe einer Hilfsbasis a ein Element nichttrivial (weil $b, c > 1$) faktorisieren.

3. $a, b, b, c, d \iff a, b, c + d$, denn
$$a, b, b, c, d \iff a, b^c, b^d \underset{2}{\iff} a, b^{c+d} \iff a, b, c + d$$
Um zwei Elemente c und d zu addieren, braucht man drei Hilfsbasen a, b und nochmal b. Umgekehrt kann man mit Hilfe zweier Hilfsbasen a und b ein Element additiv aufspalten (die Summanden c, d müssen allerdings > 1 sein.) und bekommt dann sogar noch ein weiteres b geschenkt.

Lemma 1. *Sei $m > 1$. Enthält L drei Elemente $x, y, r > 1$ von denen mindestens eines ≥ 3 ist, so kann sie in eine m-enthaltende Liste überführt werden*

Proof. OBdA $r \geq 3$. Mit den obigen Regeln gilt

$$x, y, r \implies x, y^r \implies x, y, y, y \implies x, y^{y \cdot y} \underset{y \cdot y \geq 4}{\implies} x, y, y, y, y \implies x, y^{y \cdot y \cdot y} \underset{y \cdot y \cdot y \geq 8}{\implies} x, y, y, y, y, y, y, y, y \implies \ldots$$

Man kann dann also unbegrenzt viele y herstellen, also sagen wir mal, man hat so viele y, dass man eines als Hilfsbasis nimmt und die übrigen setzt man zu $y^{y \cdot \cdots \cdot y} = m + s$ mit $s > 1$ zusammen. Dann wendet man Regel 3 rückwärts an:
$$x, y, y^{y \cdot \cdots \cdot y} \implies x, y, y, m, s$$
□

Corollary 2. *Nur Potenzen a^b mit $a, b > 1$ haben eine Chance kreativ zu sein. Unter ihnen sind genau folgende unkreativ:*

1. *$a^b = p^q$ mit p, q prim, denn hier können nur die Listen $[p^q]$ und $[p, q]$ erzeugt werden.*

2. *$16 = 2^4 = 4^2$, denn hier können nur die Listen $[16], [2, 4]$ und $[2, 2, 2]$ erzeugt werden.*

Es sei bemerkt, dass $2, 4, 8$ nicht kreativ sind, denn 2 ist nicht von der Form a^b mit $a, b > 1$. $4 = 2^2$ und $8 = 2^3$ werden durch 1. ausgeschlossen.