Bài 2. Bài toán đếm

I. **Một cuộc họp gồm 15 người tham dự để bàn về 4 vấn đề. Có 5 người phát biểu về vấn đề I, 4 người phát biểu về vấn đề II, 3 người phát biểu về vấn đề III và 2 người phát biểu về vấn đề còn lại. Ngoài ra, có đúng 1 người không phát biểu vấn đề nào. Hỏi nhiều nhất là có bao nhiêu người phát biểu cả 3 vấn đề.**

1. Phân tích đề bài:

- Có 15 người tham dự cuộc họp.
- Có 4 vấn đề được thảo luận.
- Số người phát biểu cho mỗi vấn đề: 5 (I), 4 (II), 3 (III), 2 (IV).
- Có đúng 1 người không phát biểu gì cả.

2. Tính tổng số lượt phát biểu:

$5 + 4 + 3 + 2 = 14$ lượt phát biểu

3. Nhận xét quan trọng:

- Có 15 người, nhưng 1 người không phát biểu.
- Vậy có đúng 14 người tham gia phát biểu.
- Tổng số lượt phát biểu cũng là 14.

Điều này có nghĩa mỗi người phát biểu chỉ phát biểu về đúng 1 vấn đề, ngoại trừ người mà chúng ta đang tìm (người phát biểu 3 vấn đề).

4. Gọi x là số người phát biểu 3 vấn đề.

Nếu có x người phát biểu 3 vấn đề, thì:

- Trong 5 người phát biểu vấn đề I, có x người cũng phát biểu 2 vấn đề khác.
- Trong 4 người phát biểu vấn đề II, có x người cũng phát biểu 2 vấn đề khác.
- Trong 3 người phát biểu vấn đề III, có x người cũng phát biểu 2 vấn đề khác.

Người phát biểu vấn đề IV chắc chắn chỉ phát biểu mỗi vấn đề này.

5. Áp dụng nguyên lý bù trừ:

Tổng số người phát biểu = (Số người phát biểu 1 vấn đề) + (Số người phát biểu 3 vấn đề)

$14 = (5-x) + (4-x) + (3-x) + 2 + x$

$14 = 14 - 2x$

$2x = 0$

$x = 0$

6. Kết luận:

$x = 0$ có nghĩa là không có ai phát biểu 3 vấn đề.

II. Phương trình x1 + x2 + x3 + x4 + x5 = 23 có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

1. Công thức áp dụng:

Đây là bài toán phân phối n đồ vật giống nhau vào k hộp phân biệt, mỗi hộp có thể chứa số lượng đồ vật bất kỳ.

Công thức cho bài toán này là: C(n+k-1, k-1) hoặc C(n+k-1, n)

Trong đó:

n = 23 (tổng số đơn vị cần phân phối)

k = 5 (số biến, hay số hộp)

2. Áp dụng công thức:

C(23+5-1, 5-1) = C(27, 4)

3. Tính toán:

C(27, 4) = 27! / (4! * 23!)

= 27 * 26 * 25 * 24 / (4 * 3 * 2 * 1)

= 17550

Vậy, phương trình x1 + x2 + x3 + x4 + x5 = 23 có 17550 nghiệm nguyên không âm.

Giải thích thêm:

- Công thức này xuất phát từ phương pháp "ngăn cách" (stars and bars method).
- Chúng ta coi 23 đơn vị như 23 ngôi sao, và cần đặt 4 thanh ngăn cách giữa chúng để tạo ra 5 nhóm.
- Tổng số vị trí (cho cả sao và thanh ngăn) là 23 + 4 = 27.
- Bài toán trở thành chọn 4 vị trí từ 27 vị trí để đặt thanh ngăn, do đó ta có C(27, 4).

III. Phương trình x1 + x2 + x3 + x4 + x5 = 23 có bao nhiêu nghiệm nguyên thỏa mã x1 > 1, x2 > 2, x3 > 3?

1. Phân tích đề bài:
   - Cần tìm số nghiệm nguyên của x1 + x2 + x3 + x4 + x5 = 23
   - Với điều kiện: x1 > 1, x2 > 2, x3 > 3
   - x4 và x5 là số nguyên bất kỳ (có thể âm, 0 hoặc dương)

2. Biến đổi bài toán:

Đặt: $y1 = x1 - 2$ (vì $x1 > 1$, nên $y1 \geq 0$)

$y2 = x2 - 3$ (vì $x2 > 2$, nên $y2 \geq 0$)

$y3 = x3 - 4$ (vì $x3 > 3$, nên $y3 \geq 0$)

3. Phương trình mới:

$(y1 + 2) + (y2 + 3) + (y3 + 4) + x4 + x5 = 23$

$y1 + y2 + y3 + x4 + x5 = 14$

4. Bài toán trở thành:

Tìm số nghiệm nguyên của phương trình:

$y1 + y2 + y3 + x4 + x5 = 14$

Với y1, y2, y3 không âm, và x4, x5 là số nguyên bất kỳ.

5. Phương pháp giải:

Ta cần xét tất cả các trường hợp có thể của tổng $x4 + x5$, sau đó áp dụng công thức cho y1, y2, y3.

6. Giải:

Gọi $s = x4 + x5$

Khi đó: $y1 + y2 + y3 = 14 - s$

s có thể nhận các giá trị từ $-\infty$ đến 14 (vì y1, y2, y3 không âm)

Với mỗi giá trị của s, số cách chọn y1, y2, y3 là: $C((14-s)+3-1, 3-1) = C(16-s, 2)$

Tổng số nghiệm: ∑(s=-∞ đến 14) C(16-s, 2)

= C(16, 2) + C(15, 2) + C(14, 2) + ... + C(2, 2)

= 120 + 105 + 91 + 78 + 66 + 55 + 45 + 36 + 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1

= 680

Vậy, phương trình x1 + x2 + x3 + x4 + x5 = 23 có 680 nghiệm nguyên thỏa mãn x1 > 1, x2 > 2, x3 > 3.

IV. Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài 9 bắt đầu 000 hoặc kết thúc 1111?

1. Phân tích yêu cầu:
   - Xâu nhị phân có độ dài 9
   - Bắt đầu bằng 000 hoặc kết thúc bằng 1111

2. Đếm số xâu bắt đầu bằng 000:
   - 3 bit đầu đã cố định là 000
   - 6 bit còn lại có thể là 0 hoặc 1 tùy ý
   - Số xâu: 2^6 = 64

3. Đếm số xâu kết thúc bằng 1111:
   - 4 bit cuối đã cố định là 1111
   - 5 bit đầu có thể là 0 hoặc 1 tùy ý
   - Số xâu: 2^5 = 32

4. Đếm số xâu thỏa mãn cả hai điều kiện (bắt đầu 000 và kết thúc 1111):
   - Xâu có dạng: 000xx1111 (x là 0 hoặc 1)

- Số xâu: 2^2 = 4

5. Áp dụng nguyên lý bù trừ:

Số xâu thỏa mãn = (Số xâu bắt đầu 000) + (Số xâu kết thúc 1111) - (Số xâu thỏa mãn cả hai)

= 64 + 32 - 4

= 92

Vậy, có 92 xâu nhị phân có độ dài 9 bắt đầu 000 hoặc kết thúc 1111.