BÀI GIẢNG

Môn học:

XỬ LÝ TÍN HIỆU SỐ

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU...3

CHƯƠNG I. TÍN HIỆU RỜI RẠC VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC 4

CHƯƠNG II. BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN Z 34

CHƯƠNG III. PHÂN TÍCH PHỔ CỦA TÍN HIỆU 71

CHƯƠNG IV. BIỂU DIỄN, PHÂN TÍCH HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ 126

TÀI LIỆU THAM KHẢO

PHỤ LỤC 148

MỘT SỐ CHƯƠNG TRÌNH MẪU DÙNG PHẦN MỀM MATLAB TRONG XỬ LÝ TÍN HIỆU SỐ.

LỜI NÓI ĐẦU

Xử lý tín hiệu số (Digital Signal Processing - DSP) hay tổng quát hơn, xử lý tín hiệu rời rạc theo thời gian (Discrete-Time Signal Processing - DSP) là một môn cơ sở không thể thiếu được cho nhiều ngành khoa học, kỹ thuật như: điện, điện tử, tự động hóa, điều khiển, viễn thông, tin học, vật lý,... Tín hiệu liên tục theo thời gian (tín hiệu tương tự) cũng được xử lý một cách hiệu quả theo qui trình: biến đổi tín hiệu tương tự thành tín hiệu số (biến đổi A/D), xử lý tín hiệu số (lọc, biến đổi, tách lấy thông tin, nén, lưu trữ, truyền,...) và sau đó, nếu cần, phục hồi lại thành tín hiệu tương tự (biến đổi D/A) để phục vụ cho các mục đích cụ thể. Các hệ thống xử lý tín hiệu số, hệ thống rời rạc, có thể là phần cứng hay phần mềm hay kết hợp cả hai.

Xử lý tín hiệu số có nội dung khá rộng dựa trên một cơ sở toán học tương đối phức tạp. Nó có nhiều ứng dụng đa dạng, trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Nhưng các ứng dụng trong từng lĩnh vực lại mang tính chuyên sâu. Có thể nói, xử lý tín hiệu số ngày nay đã trở thành một ngành khoa học chứ không phải là một môn học. Vì vậy, chương trình giảng dạy bậc đại học chỉ có thể bao gồm các phần cơ bản nhất, sao cho có thể làm nền tảng cho các nghiên cứu ứng dụng sau này. Vấn đề là phải chọn lựa nội dung và cấu trúc chương trình cho thích hợp.

Nhằm mục đích xây dựng giáo trình học tập cho sinh viên chuyên ngành Điện tử - Viễn thông tại khoa Công nghệ thông tin môn học ***Xử lý tín hiệu số I, II***, cũng như làm tài liệu tham khảo cho sinh viên chuyên ngành Công nghệ thông tin môn học ***Xử lý tín hiệu số***, giáo trình được biên soạn với nội dung khá chi tiết và có nhiều ví dụ minh họa. Nội dung chủ yếu của giáo trình ***Xử lý tín hiệu số I*** bao gồm các kiến thức cơ bản về xử lý tín hiệu, các phương pháp biến đổi Z, Fourier, DFT, FFT trong xử lý tín hiệu, phân tích tín hiệu và hệ thống trên các miền tương ứng. Nội dung chủ yếu của giáo trình ***Xử lý tín hiệu số II*** bao gồm các kiến thức về phân tích và tổng hợp bộ lọc số, các kiến thức nâng cao như bộ lọc đa vận tốc, xử lý thích nghi, xử lý thời gian – tần số wavelet, các bộ xử lý tín hiệu số và một số ứng dụng của xử lý số tín hiệu.

CHƯƠNG I
TÍN HIỆU RỜI RẠC VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC

1.1. MỞ ĐẦU

Sự phát triển của công nghệ vi điện tử và máy tính cùng với sự phát triển của thuật toán tính toán nhanh đã làm phát triển mạnh mẽ các ứng dụng của ***XỬ LÝ TÍN HIỆU SỐ*** (***Digital Signal Proccessing***). Hiện nay, xử lý tín hiệu số đã trở thành một trong những ứng dụng cơ bản cho kỹ thuật mạch tích hợp hiện đại với các chip có thể lập trình ở tốc độ cao. Xử lý tín hiệu số được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau như:

- Xử lý tín hiệu âm thanh, tiếng nói: nhận dạng tiếng nói, người nói; tổng hợp tiếng nói / biến văn bản thành tiếng nói; kỹ thuật âm thanh số ;…
- Xử lý ảnh: thu nhận và khôi phục ảnh; làm nổi đường biên; lọc nhiễu; nhận dạng; thị giác máy; hoạt hình; các kỹ xảo về hình ảnh; bản đồ;…
- Viễn thông: xử lý tín hiệu thoại và tín hiệu hình ảnh, video; truyền dữ liệu; khử xuyên kênh; điều chế, mã hóa tín hiệu; …
- Thiết bị đo lường và điều khiển: phân tích phổ; đo lường địa chấn; điều khiển vị trí và tốc độ; điều khiển tự động;…
- Quân sự: truyền thông bảo mật; xử lý tín hiệu rada, sonar; dẫn đường tên lửa;…
- Y học: não đồ; điện tim; chụp X quang; chụp CT(Computed Tomography Scans); nội soi;…

Có thể nói, xử lý tín hiệu số là nền tảng cho mọi lĩnh vực và chưa có sự biểu hiện bão hòa trong sự phát triển của nó.

Việc xử lý tín hiệu rời rạc được thực hiện bởi các hệ thống rời rạc. Trong chương 1 này, chúng ta nghiên cứu về các vấn đề biểu diễn, phân tích, nhận dạng, thiết kế và thực hiện hệ thống rời rạc.

1.2. TÍN HIỆU RỜI RẠC

1.2.1. Định nghĩa tín hiệu:

Tín hiệu là một đại lượng vật lý chứa thông tin (information). Về mặt toán học, tín hiệu được biểu diễn bằng một hàm của một hay nhiều biến độc lập.

Tín hiệu là một dạng vật chất có một đại lượng vật lý được biến đổi theo qui luật của tin tức. Về phương diện toán học, các tín hiệu được biểu diễn như những hàm số của một hay nhiều biến độc lập. Chẳng hạn, tín hiệu tiếng nói được biểu thị như một hàm số của thời gian còn tín hiệu hình ảnh thì lại được biểu diễn như một hàm số độ sáng của hai biến số không gian. Mỗi loại tín hiệu khác nhau có các tham số đặc trưng riêng, tuy nhiên tất cả các loại tín hiệu đều có các tham số cơ bản là độ lớn (giá trị), năng lượng và công suất, chính các tham số đó nói lên bản chất vật chất của tín hiệu.

Tín hiệu được biểu diễn dưới dạng hàm của biên thời gian x(t), hoặc hàm của biến tần số X(f) hay X(ω). Trong giáo trình này, chúng ta qui ước (không vì thế mà làm mất tính tổng quát) tín hiệu là một hàm của một biến độc lập và biến này là thời gian.

Giá trị của hàm tương ứng với một giá trị của biến được gọi là biên độ (amplitude) của tín hiệu. Ta thấy rằng, thuật ngữ biên độ ở đây không phải là giá trị cực đại mà tín hiệu có thể đạt được.

1.2.2. Phân loại tín hiệu:

Tín hiệu được phân loại dựa vào nhiều cơ sở khác nhau và tương ứng có các cách phân loại khác nhau. Ở đây, ta dựa vào sự liên tục hay rời rạc của thời gian và biên độ để phân loại. Có 4 loại tín hiệu như sau:

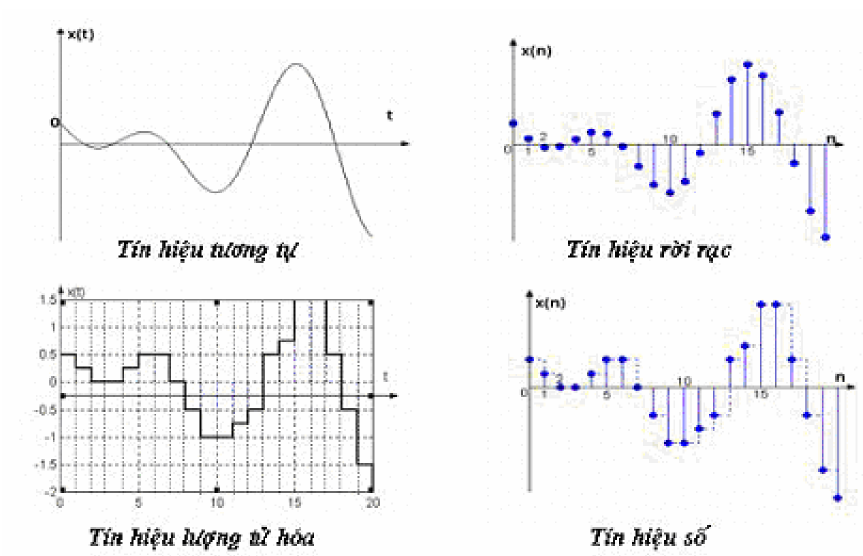
- *Tín hiệu tương tự (Analog signal):* thời gian liên tục và biên độ cũng liên tục.

- *Tín hiệu rời rạc (Discrete signal):* thời gian rời rạc và biên độ liên tục. Ta có thể thu được một tín hiệu rời rạc bằng cách lấy mẫu một tín hiệu liên tục. Vì vậy tín hiệu rời rạc còn được gọi là tín hiệu lấy mẫu (sampled signal).

- *Tín hiệu lượng tử hóa (Quantified signal):* thời gian liên tục và biên độ rời rạc. Đây là tín hiệu tương tự có biên độ đã được rời rạc hóa.

- *Tín hiệu số (Digital signal):* thời gian rời rạc và biên độ cũng rời rạc. Đây là tín hiệu rời rạc có biên độ được lượng tử hóa.

Các loại tín hiệu trên được minh họa trong hình 1.1.



Hình 1.1 Minh hoạ các loại tín hiệu

1.2.3. Tín hiệu rời rạc - dãy
1.2.3.1. Cách biểu diễn:

Một tín hiệu rời rạc có thể được biểu diễn bằng một dãy các giá trị (thực hoặc phức). Phần tử thứ n của dãy (n là một số nguyên) được ký hiệu là x(n) và một dãy được ký hiệu như sau:

$$x = \{x(n)\} \quad \text{với} \quad -\infty < n < \infty \qquad (1.1.a)$$

x(n) được gọi là mẫu thứ n của tín hiệu x.

Ta cũng có thể biểu diễn theo kiểu liệt kê. Ví dụ:

$$x = \{ ..., 0, 2, -1, 3, 25, -18, 1, 5, -7, 0,...\} \qquad (1.1.b)$$

Trong đó, phần tử được chỉ bởi mũi tên là phần tử rương ứng với n = 0, các phần tử tương ứng với n > 0 được xếp lần lượt về phía phải và ngược lại.

Nếu x = x(t) là một tín hiệu liên tục theo thời gian t và tín hiệu này được lấy mẫu cách đều nhau một khoảng thời gian là Ts, biên độ của mẫu thứ n là x(nTs). Ta thấy, x(n) là cách viết đơn giản hóa của x(nTs), ngầm hiểu rằng ta đã chuẩn hoá trục thời gian theo TS.

Ts gọi là chu kỳ lấy mẫu (Sampling period).

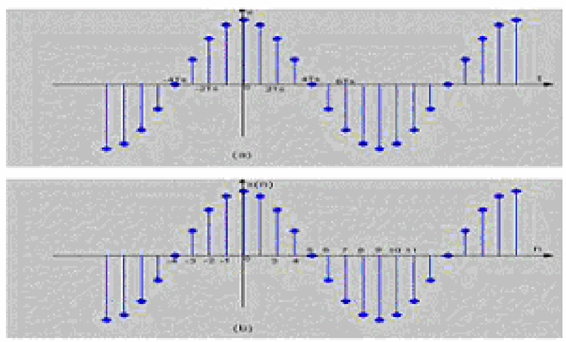
Fs = 1/Ts được gọi là tần số lấy mẫu (Sampling frequency).

Ví dụ:

Một tín hiệu tương tự x(t) = cos(t) được lấy mẫu với chu kỳ lấy mẫu là Ts = (/8. Tín hiệu rời rạc tương ứng là x(nTs) = cos(nTs) được biểu diễn bằng đồ thị hình 1.2.a. Nếu ta chuẩn hóa trục thòi gian theo Ts thì tín hiệu rời rạc x = {x(n)} được biểu diễn như đồ thị hình 1.2.b.

Ghi chú:

- Từ đây về sau, trục thời gian sẽ được chuẩn hóa theo Ts, khi cần trở về thời gian thực, ta thay biến n bằng nTs.
- Tín hiệu rời rạc chỉ có giá trị xác định ở các thời điểm nguyên n. chúng có giá trị bằng 0.
- Để đơn giản, sau này, thay vì ký hiệu đầy đủ, ta chỉ cần viết x(n) và hiểu đây là dãy x = {x(n)}.



Hình 1.2 Tín hiệu rời rạc

1.2.3.2. Các tín hiệu rời rạc cơ bản

1/. Tín hiệu xung đơn vị (Unit inpulse sequence):

Đây là một dãy cơ bản nhất, ký hiệu làĠ, được định nghĩa như sau:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases} \qquad (1.2)$$

$$\delta(n) = \{\ldots 0, \ldots . 0, 1, 0 \ldots . 0, \ldots\} \qquad (1.3)$$

Dãy $\delta(n)$ được biểu diễn bằng đồ thị như hình 1.3 (a)

2/. Tín hiệu hằng (Constant sequence): tín hiệu này có giá trị bằng nhau với tất cả các giá trị chủa n. Ta có:

$$x(n)=A, \text{ với } -\infty < n < \infty \qquad (1.4)$$

$$\{x(n)\} = \{..., A, ...A., A, A...., A\} \qquad (1.5)$$

Dãy hằng được biểu diễn bằng đồ thị như hình 1.3.(b)

3/. Tín hiêu nhẫy bậc đơn vị (Unit step sequence)

Dãy này thường được ký hiệu là u(n) và được định nghĩa như sau:

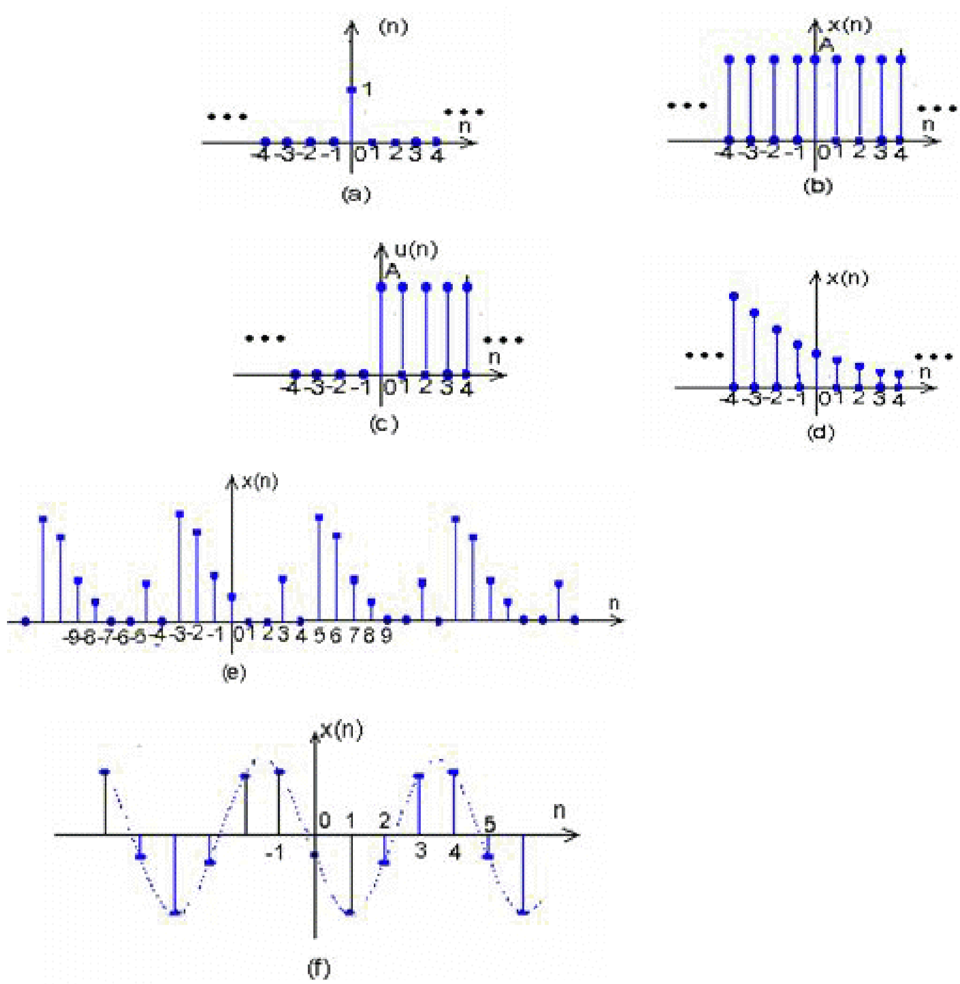
$$u(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases} \qquad (1.5)$$

Dãy u(n) được biểu diễn bằng đồ thị hình 1.3 (c).

Mối quan hệ giữa tín hiệu nhãy bậc đơn vị với tín hiệu xung đơn vị:

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k) \Leftrightarrow \delta(n) = u(n) - u(n-1) \qquad (1.6)$$

với u(n-1) là tín hiệu u(n) được dịch phải một mẫu.



Hình 1.3 Các dãy cơ bản

a) Dãy xung đơn vị

b) Dãy hằng

c) Dãy nhảy bậc đơn vị

d) Dãy hàm mũ

e) Dãy tuần hoàn có chu kỳ N=8

f) Dãy hình sin có chu kỳ N=5

4/. Tín hiệu hàm mũ (Exponential sequence)

$$x(n) = A\,\alpha^n \quad (1.7)$$

Nếu A và α là số thực thì đây là dãy thực. Với một dãy thực, nếu $0 < \alpha < 1$ và A>0 thì dãy có các giá trị dương và giảm khi n tăng, hình 1.3(d). Nếu $-1 < \alpha < 0$ thì các giá trị của dãy sẽ lần lượt đổi dấu và có độ lớn giảm khi n tăng. Nếu $|\alpha| > 1$ thì độ lớn của dãy sẽ tăng khi n tăng.

5/. Tín hiệu tuần hoàn (Periodic sequence)

Một tín hiệu x(n) được gọi là tuần hoàn với chu kỳ N khi: x(n+N) = x(n), với mọi n. Một tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ N=8 được biểu diễn bằng đồ thị hình 1.3(e). Dĩ nhiên, một tín hiệu hình sin cũng là một hiệu tuần hoàn.

Ví dụ: $x(n) = \sin\left[\frac{2\pi}{5}(n+3)\right]$ là một tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ là N=5, xem hình1.3(f)

1.2.3.3. Các phép toán cơ bản của dãy

Cho 2 dãy $x_1 = \{x_1(n)\}$ và $x_2 = \{x_2(n)\}$ các phép toán cơ bản trên hai dãy được định nghĩa như sau:

1/. Phép nhân 2 dãy: $y = x_1 . x_2 = \{x_1(n).x_2(n)\}$ (1.8)

2/. Phép nhân 1 dãy với 1 hệ số: $y = a.x_1 = \{a.x_1(n)\}$ (1.9)

3/. Phép cộng 2 dãy: $y = x_1 + x_2 = \{x_1(n) + x_2(n)\}$ (1.10)

4/. Phép dịch một dãy (Shifting sequence):

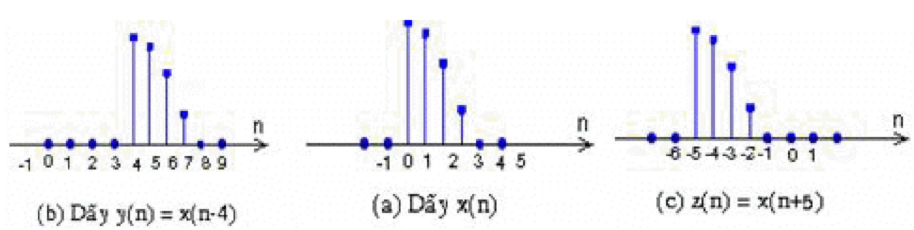
- Dịch phải: Gọi y là dãy kết quả trong phép dịch phải n_0 mẫu một dãy x ta có:

$$y(n) = x(n-n_0),\ \text{với}\ n_0 > 0 \quad (1.11)$$

- Dịch trái: Gọi z là dãy kết quả trong phép dịch trái n0 mẫu dãy x ta có:

$$z(n) = x(n+n_0),\ \text{với}\ n_0 > 0 \quad (1.12)$$

Phép dịch phải còn gọi là phép làm trễ (delay). Phép làm trễ một mẫu thường được ký hiệu bằng chữ D hoặc Z-1 . Các phép dịch trái và dịch phải được minh họa trong các hình 1.4.



Hình 1.4:

(a) Dãy x(n)

(b) Phép dịch phải 4 mẫu tr ên tín hiệu x(n)

(c) Phép dịch trái 5 mẫu trên tín hiệu x(n)

Nhận xét: Ta thấy, một tín hiệu x(n) bất kỳ có thể biểu diễn bởi tín hiệu xung đơn vị như sau:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k) \qquad (1.13)$$

Cách biểu diễn này sẽ dẫn đến một kết quả quan trọng trong phần sau.

Ghi chú:

Các phép tính thực hiện trên các tín hiệu rời rạc chỉ có ý nghĩa khi tần số lấy mẫu của các tín hiệu này bằng nhau.

1.3. HỆ THỐNG RỜI RẠC

1.3.1. Khái niệm.

1.3.1.1. Hệ thống thời gian rời rạc (gọi tắt là hệ thống rời rạc):

Hệ thống thời gian rời rạc là một toán tử (operator) hay là một toán thuật (algorithm) mà nó tác động lên một tín hiệu vào (dãy vào là rời rạc) để cung cấp một tín hiệu ra (dãy ra là rời rạc) theo một qui luật hay một thủ tục (procedure) tính toán nào đó. Định nghĩa theo toán học, đó là một phép biến đổi hay một toán tử (operator) mà nó biến một dãy vào x(n) thành dãy ra y(n).

Ký hiệu: $y(n) = T\{x(n)\}$ (1.14)

Tín hiệu vào được gọi là tác động hay kích thích (excitation), tín hiệu ra được gọi là đáp ứng (response). Biểu thức biểu diễn mối quan hệ giữa kích thích và dáp ứng được gọi là quan hệ vào ra của hệ thống.

Quan hệ vào ra của một hệ thống rời rạc còn được biểu diễn như hình 1.5.

$$x(n) \xrightarrow{T} y(n)$$

Hình 1.5. Ký hiệu một hệ thống

Ví dụ 1.1: Hệ thống làm trễ lý tưởng được định nghĩa bởi phương trình:

$$y(n) = x(n - n_d), \quad \text{với } -\infty < n < \infty \qquad (1.15)$$

n_d là một số nguyên dương không đổi gọi là độ trễ của hệ thống.

Ví dụ 1.2: Hệ thống trung bình động (Moving average system) được định nghĩa bởi phương trình:

$$y(n) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1}\sum_{k=-M}^{M} x(n-k) \qquad (1.16)$$

$$y(n) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1}\left\{x(n+M_1) + x(n+M_1-1) + \dots + x(n) + x(n-1) + \dots + x(n-M_2)\right\}$$

với M1 và M2 là các số nguyên dương.

Hệ thống này tính mẫu thứ n của dãy ra là trung bình của (M1 + M2 + 1) mẫu của dãy vào xung qu../Anh mẫu thứ n, từ mẫu thứ n-M2 đến mẫu thứ n+M1 .

1.3.1.2. Đáp ứng xung (impulse response) của một hệ thống rời rạc

Đáp ứng xung h(n) của một hệ thống rời rạc là đáp ứng của hệ thống khi kích thích là tín hiệu xung đơn vị ((n), ta có:

$$h(n) = T\{\delta(n)\} \text{ hay } \delta(n) \rightarrow [T] \rightarrow h(n) \qquad (1.17)$$

Trong các phần sau, ta sẽ thấy, trong các điều kiện xác định đáp ứng xung của một hệ thống có thể mô tả một cách đầy đủ hệ thống đó.

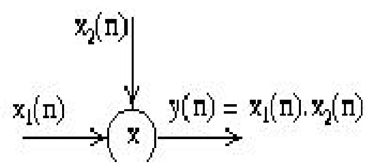
Ví dụ 1.3: Đáp ứng xung của hệ thống trung bình động là:

$$y(n) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta(n-k) = \begin{cases} \dfrac{1}{M_1 + M_2 + 1}, -M_1 \le n \le M_2 \\ 0, n \ne \end{cases} \quad (1.1.8)$$

1.3.1.3. Biểu diễn hệ thống bằng sơ đồ khối

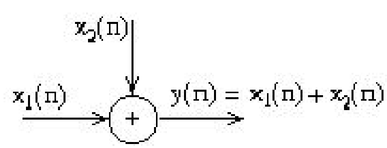
Để có thể biểu diễn một hệ thống bằng sơ đồ khối, ta cần định nghĩa các phần tử cơ bản. Một hệ thống phức tạp sẽ là sự liên kết của các phần tử cơ bản này.

1/. Phần tử nhân dãy với dãy (signal multiplier), tương ứng với phép nhân hai dãy, có sơ đồ khối như sau:

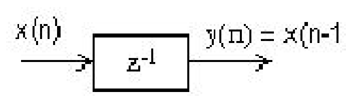


2/. Phần tử nhân một dãy với một hằng số (Constant multiplier), tương ứng với phép nhân một hệ số với một dãy, có sơ đồ khối như sau:

3/. Phần tử cộng (Adder), tương ứng với phép cộng hai dãy, có sơ đồ khối như sau:



4/. Phần tử làm trễ một mẫu (Unit Delay Element): tương ứng với phép làm trễ một mẫu, có sơ đồ khối như sau:



Trong các phần sau, ta sẽ thành lập một hệ thống phức tạp bằng sự liên kết các phần tử cơ bản này.

1.3.2. Phân loại hệ thống rời rạc

Các hệ thống rời rạc được phân loại dựa vào các thuộc tính của nó, cụ thể là các thuộc tính của toán tử biểu diễn hệ thống (T).

1/. Hệ thống không nhớ (Memoryless systems):

Hệ thống không nhớ còn được gọi là hệ thống tĩnh (Static systems) là một hệ thống mà đáp ứng y(n) ở mỗi thời điểm n chỉ phụ thuộc vào giá trị của tác động x(n) ở cùng thời điểm n đó.

Một hệ thống không thỏa mãn định nghĩa trên được gọi là hệ thống có nhớ hay hệ thống động *(Dynamic systems).*

Ví dụ 1.4:

- Hệ thống được mô tả bởi quan hệ vào ra như sau: y(n) = [x(n)]2 , với mọi giá trị của n, là một hệ thống không nhớ.
- Hệ thống làm trễ trong ví dụ 1.1, nói chung là một hệ thống có nhớ khi n_d>0.
- Hệ thống trung bình động trong ví dụ 1.2 là hệ thống có nhớ, trừ khi M_1=M_2=0.

2/. Hệ thống tuyến tính (Linear systems)

Một hệ thống được gọi là tuyến tính nếu nó thỏa mãn nguyên lý chồng chất (Principle of superposition). Gọi y1(n) và y2(n) lần lượt là đáp ứng của hệ thống tương ứng với các tác động x1(n) và x_2(n), hệ thống là tuyến tính nếu và chỉ nếu:

$T\{ax_1(n)+bx_2(n)\}=aT\{ax_1(n)\}+bT\{bx_2(n)\}=ay_1(n)+by_2(n)$ (1.19)

với a, b là 2 hằng số bất kỳ và với mọi n.

Ta thấy, đối với một hệ thống tuyến tính, thì đáp ứng của một tổng các tác động bằng tổng đáp ứng của hệ ứng với từng tác động riêng lẻ.

Một hệ thống không thỏa mãn định nghĩa trên được gọi là hệ thống phi tuyến (Nonliear systems).

Ví dụ 1.5: Ta có thể chứng minh được hệ thống tích lũy (accumulator) được định nghĩa bởi quan hệ:

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k) \qquad (1.20)$$

là một hệ thống tuyến tính. Hệ thống này được gọi là hệ thống tích lũy vì mẫu thứ n của đáp ứng bằng tổng tích lũy tất cã các giá trị của tín hiệu vào trước đó đến thời điểm thứ n.

Chứng minh: Đặt $y_1(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)$ và $y_2(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)$ thì

$$y(n)=T\{ax_1(n)+bx_2(n)\}=\sum_{k=-\infty}^{n}\{ax_1(k)+bx_2(k)\}=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{n}\{ax_1(k)\}+\sum_{k=-\infty}^{n}\{bx_1(k)\}=a\sum_{k=-\infty}^{n}x_1(k)+b\sum_{k=-\infty}^{n}x_2(k)=ay_1(n)+by_2(n)$$

với a và b là các hằng số bất kỳ. Vậy hệ thống này là một hệ thống tuyến tính.

3/. Hệ thống bất biến theo thời gian (Time-Invariant systems)

Một hệ thống là bất biến theo thời gian nếu và chỉ nếu tín hiệu vào bị dịch n_d mẫu thì đáp ứng cũng dịch n_d mẫu, ta có:

Nếu y(n) =T{x(n)} và x1(n) = x(n-n_d)

thì $y_1(n) = T\{x_1(n)\} = \{x(n-n_d)\} = y(n - n_d)$ (1.21)

Ta có thể kiểm chứng rằng các hệ thống trong các ví dụ trước đều là hệ thống bất biến theo thời gian.

Ví dụ 1.6: Hệ thống nén (compressor) được định nghĩa bởi quan hệ:

y(n) = x(M.n)   (1.22)

với $-\infty < n < \infty$ và M là một số nguyên dương.

Hệ thống này được gọi là hệ thống nén bởi vì nó loại bỏ (M-1) mẫu trong M mẫu (nó sinh ra một dãy mới bằng cách lấy một mẫu trong M mẫu). Ta sẽ chứng minh rằng hệ thống này không phải là một hệ thống bất biến.

Chứng minh: Gọi $y_1(n)$ là đáp ứng của tác động $x_1(n)$, với $x_1(n) = x(n - n_d)$, thì:

$$y_1(n) = x_1(Mn) = x(Mn - n_d)$$

Nhưng: $y(n-n_d) = x[M(n-n_d)]$ ($y_1(n)$)

Ta thấy $x_1(n)$ bằng x(n) được dịch n_d mẫu, nhưng $y_1(n)$ không bằng với y(n) trong cùng phép dịch đó. Vậy hệ thống này không là hệ thống bất biến, trừ khi M = 1.

4/. Hệ thống nhân quả (Causal systems)

Một hệ thống là nhân quả nếu với mỗi giá trị n_0 của n, đáp ứng tại thời điểm $n=n_0$ chỉ phụ thuộc vào các giá trị của kích thích ở các thời điểm $n \le n_0$. Ta thấy, đáp ứng của hệ chỉ phụ thuộc vào tác động ở quá khứ và hiện tại mà không phụ thuộc vào tác động ở tương lai. Ta có;

$$y(n) = T\{x(n)\} = F\{x(n),x(n-1),x(n-2),...\}$$

với F là một hàm nào đó.

Hệ thống trong ví dụ 1.1 là nhân quả khi $n_d \ge 0$ và không nhân quả khi $n_d < 0$.

Ví dụ 1.7: Hệ thống sai phân tới (Forward difference systems) được định nghĩa bởi quan hệ:

$$y(n) = x(n+1) - x(n) \qquad (1.23)$$

Rõ ràng y(n) phụ thuộc vào x(n+1), vì vậy hệ thống này không có tính nhân quả.

Ngược lại, hệ thống sai phân lùi (Backward difference systems) được định nghĩa bởi quan hệ: $y(n) = x(n) - x(n-1)$ (1.24)

là một hệ thống nhân quả.

5/. Hệ thống ổn định (Stable systems)

Một hệ thống ổn định còn được gọi là hệ thống BIBO (Bounded-Input Bounded-Output) nếu và chỉ nếu với mỗi tín hiệu vào bị giới hạn sẽ cung cấp dãy ra giới hạn.

Một dãy vào x(n) bị giới hạn nếu tồn tại một số dương hữu hạn Bx sao cho:

$$|x(n)| \le Bx < +\infty \text{ , với mọi n} \qquad (1.25)$$

Một hệ thống ổn định đòi hỏi rằng, ứng với mỗi dãy vào hữu hạn, tồn tại một số dương By hữu hạn sao cho:

$$|y(n)| \le By < +\infty \text{ , với mọi n} \qquad (1.26)$$

Các hệ thống trong các ví dụ 1.1; 1.2; 1.3 và 1.6 là các hệ thống ổn định. Hệ thống tích lũy trong ví dụ 1.5 là hệ thống không ổn định.

Ghi chú: Các thuộc tính để phân loại hệ thống ở trên là các thuộc tính của hệ thống chứ không phải là các thuộc tính của tín hiệu vào. Các thuộc tính này phải thỏa mãn vời mọi tín hiệu vào.

1.4. HỆ THỐNG TUYẾN TÍNH BẤT BIẾN THEO THỜI GIAN (LTI: Linear Time-Invariant System)

1.4.1. Khái niệm

Hệ thống tuyến tính bất biến theo thời gian là hệ thống thỏa mãn đồng thời hai tính chất tuyến tính và bất biến.

Gọi T là một hệ thống LTI, sử dụng cách biểu diễn ở pt(1.13) và pt(1.14), ta có thể viết:

$$y(n)=T\{x(n)\}=T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right\} \quad (1.27)$$

với k là số nguyên.

Áïp dụng tính chất tuyến tính, pt(1.27) có thể được viết lại:

$$y(n)=\sum_{K=-\infty}^{\infty} x(k)T\{\delta(n-k)\} \quad (1.28)$$

Đáp ứng xung của hệ thống là: h(n) = T{((n)}, vì hệ thống có tính bất biến, nên:

$$h(n - k) = T\{\delta(n - k)\} \quad (1.29)$$

Thay pt(1.29) vào pt(1.28) ta có:

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \quad (1.30)$$

Từ pt(1.30), ta thấy một hệ thống LTI hoàn toàn có thể được đặc tả bởi đáp ứng xung của nó và ta có thể dùng pt(1.30) để tính đáp ứng của hệ thống ứng với một kích thích bất kỳ. Hệ thống LTI rất thuận lợi trong cách biểu diễn cũng như tính toán, đây là một hệ thống có nhiều ứng dụng quan trọng trong xử lý tín hiệu.

1.4.2. Tổng chập (CONVOLUTION SUM)

1.4.2.1. Định nghĩa: Tổng chập của hai dãy x1(n) và x_2(n) bất kỳ, ký hiệu: * , được định nghĩa bởi biểu thức sau:

$$y(n)=x_1(n)*x_2(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(n-k) \quad (1.31)$$

Pt(1.30) được viết lại: y(n) = x(n)*h(n) (1.32)

Vậy, đáp ứng của một hệ thống bằng tổng chập tín hiệu vào với đáp ứng xung của nó.

1.4.2.2. Phương pháp tính tổng chập bằng đồ thị

Tổng chập của hai dãy bất kỳ có thể được tính một cách nhanh chóng với sự trợ giúp của các chương trình trên máy vi tính. Ở đây, phương pháp tính tổng chập bằng đồ thị được trình bày với mục đích minh họa. Trước tiên, để dễ dàng tìm dãy x_2(n-k), ta có thể viết lại:

$$x_2(n-k) = x_2[-(k - n)] \quad (1.33)$$

Từ pt(1.33), ta thấy, nếu n>0, để có x_2(n-k) ta dịch x_2(-k) sang phải n mẫu, ngược lại, nếu n<0 ta dịch x_2(-k) sang trái |n| mẫu. Từ nhận xét này, Ta có thể đề ra một qui trình tính tổng chập của hai dãy , với từng giá trị của n, bằng đồ thị như sau:

Bước 1: Chọn giá trị của n.

Bước 2: Lấy đối xứng $x_2(k)$ qua gốc tọa độ ta được $x_2(-k)$.

Bước 3: Dịch $x_2(-k)$ sang trái |n| mẫu nếu n<0 và sang phải n mẫu nếu n>0, ta được dãy $x_2(n-k)$.

Bước 4:Thực hiện các phép nhân $x1(k).x_2(n-k)$, với $-\infty < k < \infty$

Bước 5: Tính y(n) bằng cách cộng tất cả các kết quả được tính ở bước 4.

Chọn giá trị mới của n và lặp lại từ bước 3.

Ví dụ 1.8: Cho một hệ thống LTI có đáp ứng xung là **:**

$$h(n) = u(n) - u(n-N) = \begin{cases} 1, 0 \le n \le N-1 \\ 0, n \ne \end{cases} \qquad (1.34)$$

tín hiệu vào là: $x(n) = a^n u(n)$. Tính đáp ứng y(n) của hệ thống, với N> 0 và |a|<1.

Giải:

Từ phương trình ta có: $y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$, ta sẽ tính y(n) bằng phương pháp đồ thị.

@ Với n < 0: Hình 1.5(a). trình bày hai dãy x(k) và h(n-k) torng trường hợp n < 0 (với N = 4 và n = -3). Ta thấy trong trường hợp này, các thành phần khác 0 của x(k) và h(n-k) không trùng nhau, vì vậy:

$$y(n) = 0, \text{ với mọi } n < 0. \qquad (1.35)$$

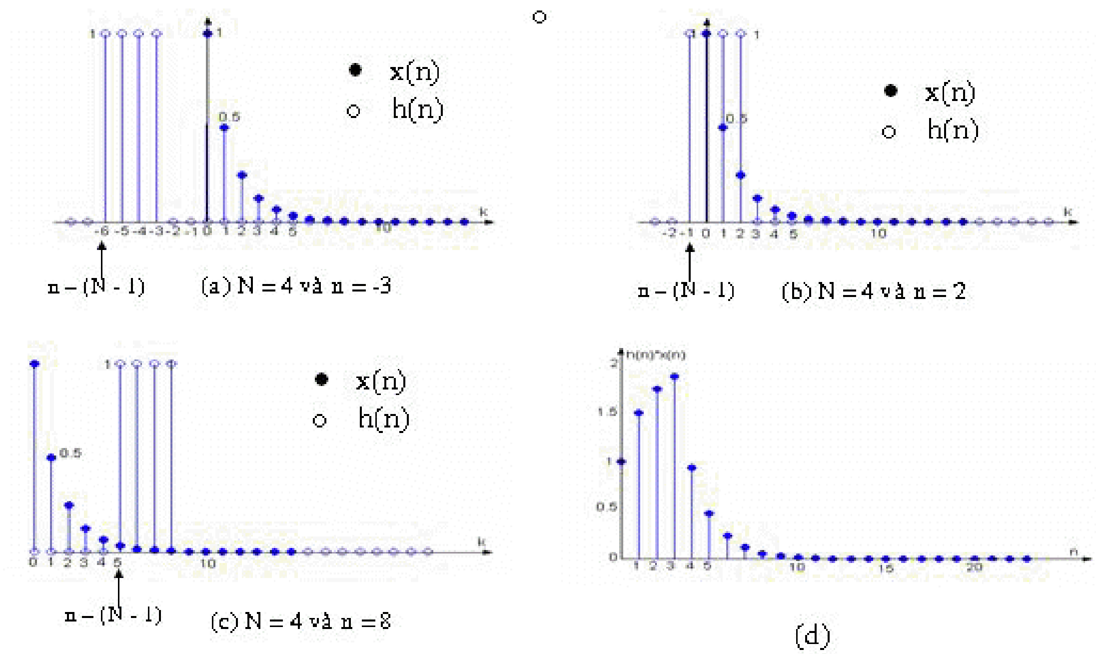
@ Với 0 ≤ n < N-1: Hình 1.5(b). trình bày hai dãy x(k) và h(n-k), trong trường này, ta thấy:

$x(k).h(n-k) = a^k$ nên: $y(n) = \sum_{k=0}^{n} a^K$ (1.36)

Ta thấy, y(n) chính là tổng (n+1) số hạng của một chuỗi hình học có công bội là a, áp dụng công thức tính tổng hữu hạn của chuỗi hình học, đó là:

$$\sum_{k=N}^{M} q^K = \frac{q^N - q^{M+1}}{1-q}, M > N \qquad (1.37)$$

$$y(n) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \qquad (1.38)$$



Hình 1.5 : Các dãy xuất hiện trong quá trình tổng chập. (a);(b);(c)Các dãy x(k) và h(n-k) như là một hàm của k với các giá trị khác nhau cảu n (chỉ các mẫu khác 0 mới được trình bày); (d) Tổng chập y(n) = x(n) * h(n).

- *Với (N-1) < n:* Hình 1.5(b). trình bày hai dãy x(k) và h(n-k), tương tự như trên ta có: x(k).h(n-k) = ak

$$y(n) = \sum_{k=n-N+1}^{n} a^k , n > N-1$$
$$y(n) = \frac{a^{n-N+1} - a^{n+1}}{1-a} = a^{n-N+1}\left(\frac{1-a^N}{1-a}\right) \quad (1.39)$$

Tổng hợp các kết quả từ các phương trình trên ta được:

$$y(n) = \begin{cases} 0, n < 0 \\ \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, 0 \le n \le N-1 \\ a^{n-N+1}\left(\dfrac{1-a^N}{1-a}\right), N-1, n \end{cases} \quad (1.40)$$

Ví dụ này tính tổng chập trong trường hợp đơn giản. Các trường hợp phức tạp hơn, tổng chập cũng có thể tính bằng phương pháp đồ thị, nhưng với điều kiện là 2 dãy phải có một số hữu hạn các mẫu khác 0.

1.4.2.3. Các tính chất của tổng chập

Vì tất cả các hệ thống LTI đều có thể biểu diễn bằng tổng chập, nên các tính chất của tổng chập cũng chính là các tính chất của hệ thống LTI.

a**) Tính giao hoán** (Commutative): cho 2 dãy x(n) và h(n) bất kỳ, ta có:

$$y(n) = x(n)*h(n) = h(n)*x(n) \qquad (1.41)$$

Chứng minh: Thay biến m=n-k vào pt (1.33), ta được:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m)h(m) \qquad (1.42)$$

hay : $y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m)h(m) = h(n) * x(n)$ (1.43)

b) Tính phối hợp (Associative): Cho 3 dãy x(n), h1 (n) và h2(n), ta có:

$$y(n) = [x(n)*h_1(n)]*h_2(n) = x(n)*[h_1(n)*h_2(n)] \qquad (1.44)$$

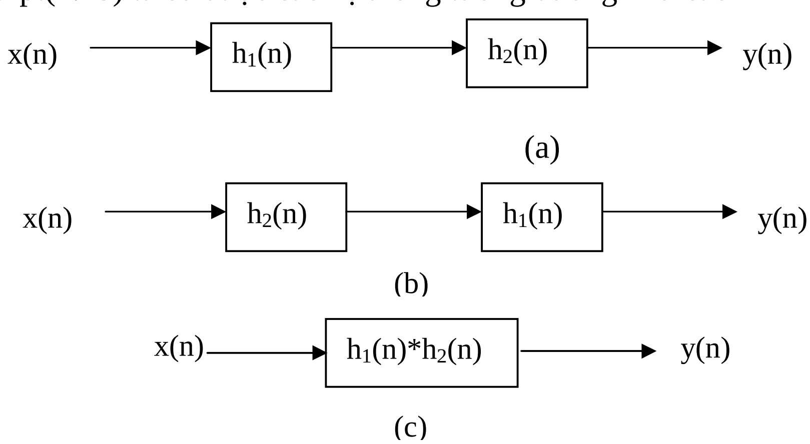
Tính chất này có thể chứng minh một cách dễ dàng bằng cách dựa vào biểu thức định nghĩa của tổng chập.

Hệ quả 1: Xét hai hệ thống LTI có đáp ứng xung lần lượt là h1(n) và h2(n) mắc liên tiếp (cascade), nghĩa là đáp ứng của hệ thống thứ 1 trở thành kích thích của hệ thống thứ 2 (hình 1.6(a)). Áp dụng tính chất phối hợp ta được:

$$y(n) = x(n)*h(n) = [x(n)*h_1(n)]*h_2(n) = x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$$

hay $h(n) = h_1(n)*h_2(n) = h_2(n)*h_1(n)$ (tính giao hoán) (1.45)

Từ pt(1.45) ta có được các hệ thống tương đương như các hình 1.6 b, c.



Hình 1.6 – Hai hệ thống mắc nối tiếp
và các sơ đồ tương đương

c) Tính chất phân bố với phép cộng (Distributes over addition): tính chất này được biểu diễn bởi biểu thức sau:

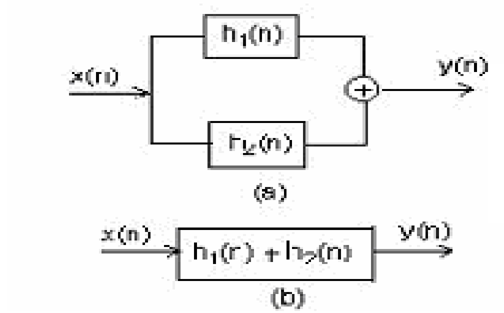
$$y(n) = x(n)*[h_1(n) + h_2(n)] = x(n)*h_1(n) + x(n)*h_2(n) \qquad (1.46)$$

và cũng này có thể chứng minh một cách dễ dàng bằng cách dựa vào biểu thức định nghĩa của tổng chập.

Hệ quả 2: xét hai hệ thống LTI có đáp ứng xung lần lượt là $h_1(n)$ và $h_2(n)$ mắc *song song (parallel), (hình 1.7(a)). áp dụng tính chất phân bố ta được đáp ứng* xung của hệ thống tương đương là:

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n) \qquad (1.47)$$

sơ đồ khối của mạch tương đương được trình bày trong hình 1.7(b).



Hình 1.7. Hai hệ thống mắc song song và sơ đồ tương đương

1.4.3. Các hệ thống LTI đặc biệt.

1.4.3.1. Hệ thống LTI ổn định:

Định lý: Một hệ thống LTI có tính ổn định nếu và chỉ nếu :

$$s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \qquad (1.48)$$

với h(n) là đáp ứng xung của hệ thống.

Chứng minh:

- Điều kiện đủ: *xét một tín hiệu vào hữu hạn, nghĩa là:*

$|x(n)| \le b_x \le \infty$, với b_x là một số dương.

thì $|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)|$

hay : $|y(n)| \le B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$

Vậy |y(n)| hữu hạn khi điều kiện ở pt(1.48) thỏa mãn, hay pt(1.48) là điều kiện đủ để hệ thống ổn định.

- Điều kiện cần: *Để chứng minh điều kiện cần ta dùng phương pháp phản chứng.* Trước tiên ta giả sử rằng hệ thống có tính ổn định, nếu ta tìm được một tín hiệu vào nào đó thỏa mãn điều kiện hữu hạn và nếu tổng s phân kỳ ($s \to \infty$) thì hệ thống sẽ không ổn định, mâu thuẩn với giả thiết.

Thật vậy, ta xét một dãy vào được nghĩa như sau:

$$x(n) = \begin{cases} h^*(-n)/h(-n), (h-n) = 0 \\ 0, h(-n) = 0 \end{cases}$$

ở đây, h*(n) là liên hợp phức của h(n), rõ ràng |x(n)| bị giới hạn bởi 1, tuy nhiên, nếu s $\to\infty$, ta xét đáp ứng tại n = 0:

$$y(0) = \sum_{k=-\infty} h(k)x(-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h(k)|^2}{|h(k)|} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = S \to \infty$$

Ta thấy, kết quả này mâu thuẩn với giả thuyết ban đầu (hệ thống ổn định). Vậy, s phải hữu hạn.

1.4.3.2. Hệ thống LTI nhân quả

Định lý: Một hệ thống LTI có tính nhân quả nếu và chỉ nếu đáp ứng xung h(n) của nó thỏa mãn điều kiện:

$$h(n) = 0 , \quad \text{với mọi } n < 0 \qquad (1.49)$$

Chứng minh:

- Điều kiện đủ: Từ pt(1.30), $y(n) = \sum x(k)h(n-k)$, với điều kiện (1.49) ta có thể viết lại: $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)h(n-k)$ (1.50)

Từ pt(1.50), ta thấy giới hạn trên của tổng là n, nghĩa là y(n) chỉ phụ thuộc vào x(k) với k (n, nên hệ thống có tình hân quả.

- Điều kiện cần*:* Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử rằng, h(m) ≠ 0 với m < 0. Từ pt(1.42): $y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m)h(m)$, ta thấy y(n) phụ thuộc vào x(n-m) với m < 0 hay n-m > n, suy ra hệ thống không có tính nhân quả.

Vì vậy, điều kiện cần và đủ để hệ thống có tính nhân quả là: h(n)=0 khi n <0.

Ví dụ 1.9: Hệ thống tích luỹ được định nghĩa bởi :

$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$, có đáp ứng xung là $h(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k) = u(n)$ (1.51)

Từ pt(1.51) ta thấy h(n) của hệ hệ thống này không thỏa điều kiện pt(1.48) nên không ổn định và h(n) thỏa điều kiện pt(1.49) nên nó là một hệ thống nhân quả.

1.4.3.3. Hệ thống FIR (Finite-duration Impulse Response) và hệ thống IIR (Infinite-duration Impulse Response)

Hệ thống FIR (Hệ thống với đáp ứng xung có chiều dài hữu hạn) là một hệ thống mà đáp ứng xung của nó tồn tại một số hữu hạn các mẫu khác 0.

Ta thấy, hệ thống FIR luôn luôn ổn định nếu tất cả các mẫu trong đáp ứng xung của nó có độ lớn hữu hạn.

Ngược lại, một hệ thống mà đáp ứng xung của nó có vô hạn số mẫu khác 0 được gọi là hệ thống IIR (Hệ thống với đáp ứng xung có chiều dài vô hạn).

Một hệ thống IIR có thể là hệ thống ổn định hoặc không ổn định.

Ví dụ1.10: Xét một hệ thống có đáp ứng xung là h(n) = a^n u(n), ta có:

$$S = \sum_{n=\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n \qquad (1.52)$$

Nếu |a| < 1, thì S hội tụ và S = 1/(1-|a|) vì vậy hệ thống có tính ổn định.

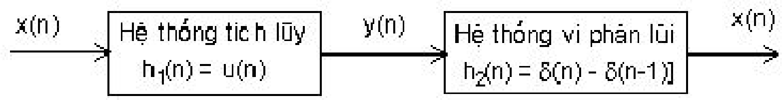
Nếu |a| ≥ 1, thì S → ∞ và hệ thống không ổn định.

1.4.3.4. Hệ thống đảo (Inverse systems)

Định nghĩa: Một hệ thống LTI có đáp ứng xung là h(n), hệ thống đảo của nó , nếu tồn tại, có đáp ứng xung là $h_i(n)$ được định nghĩa bởi quan hệ:

$$h(n)*h_i(n) = h_i(n)*h(n) = \delta(n) \qquad (1.53)$$

Ví dụ 1.11: Xét một hệ thống gồm hai hệ thống con mắc nối tiếp như hình 1.8:



Hình 1.8

Đáp ứng xung của hệ thống tương đương là:

$$h(n) = u(n)*[\delta(n) - \delta(n - 1)] = u(n) - u(n - 1) = \delta(n) \qquad (1.54)$$

Kết quả đáp ứng xung của hệ thống tương đương là xung đơn vị, nghĩa là đáp ứng của hệ thống luôn bằng với tác động, vì $x(n)*\delta(n) = x(n)$, nên hệ thống vi phân lùi là hệ thống đảo của hệ thống tích lũy và ngược lại, do tính giao hoán của tổng chập, hệ thống tích lũy là hệ thống đảo của hệ thống vi phân lùi.

Hai hệ thống đảo của nhau mắc nối tiếp, có đáp ứng xung tương đương là δ(n), nên được gọi là hệ thống đồng dạng (Identity systems).

1.5.PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG

(LCCDE: Linear Constant-Coefficient Difference Equations)

1.5.1. Khái niệm:

Một hệ thống bất kỳ khi mô tả toán học đều có thể viết: $\sum_{k=0}^{N} a_k(n)y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r(n)x(n-r)$

Phương trình mô tả trên gọi là phương trình sai phân. Khi a_k và b_r là các hăng số thì có khái niệm phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng.

Một hệ thống LTI mà quan hệ giữa tác động x(n) và đáp ứng y(n) của nó thỏa mãn phương trình sai phân truyến tính hệ số hằng bậc N dưới dạng:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) \qquad (1.55)$$

được gọi là hệ thống có phương trình sai phân truyến tính hệ số hằng (LCCDE). Trong đó, các hệ số ak và br là các thông số đặc trưng cho hệ thống.

Hệ thống LTI có LCCDE là một lớp con quan trọng của hệ thống LTI trong xử lý tín hiệu số. Ta có thể so sánh nó với mạch R_L_C trong lý thuyết mạch tương tự (được đặc trưng bằng phân trình vi tích phân tuyến tính hệ số hằng).

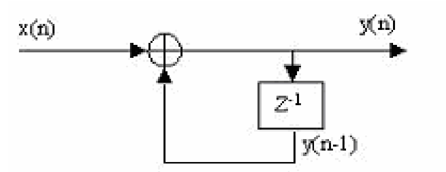
Ví dụ 1.12: Xét hệ thống tích lũy, như ta biết, đây là một hệ thống LTI, vì vậy có thể biểu diễn bởi một LCCDE. Thậy vậy, ta xem lại hình 1.8, trong đó y(n) là đáp ứng của hệ thống tích lũy ứng với tín hiệu vào x(n), và y(n) đóng vai trò tín hiệu vào của hệ thống vi phân lùi. Vì hệ thống vi phân lùi là hệ thống đảo của hệ thống tích lũy nên:

$$y(n) - y(n-1) = x(n) \qquad (1.56)$$

Pt(1.56) chính là LCCDE của một hệ thống tích lũy, với N=1, a_0 =1, a_1=-1, M=0 và b_0 =1.

Ta viết lại: $y(n) = y(n-1) + x(n)$ (1.57)

Từ pt(1.57), ta thấy, với mỗi giá trị của n, phải cộng thêm vào x(n) một tổng được tích lũy trước đó y(n-1). Hệ thống tích lũy được biểu diễn bằng sơ đồ khối hình 1.9 và pt(1.57) là một cách biểu diễn đệ qui của hệ thống.



Hình 1.19- Sơ đồ khối hệ thống tích luỹ

1.5.2. Nghiệm của LCCDE

Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng là một dạng quan hệ vào ra mô tả hệ thống LTI. Trong phần này, ta sẽ tìm biểu thức tường minh của đáp ứng y(n) bằng phương pháp trực tiếp. Còn một phương pháp khác để tìm nghiệm của phương trình này là dựa trên biến đổi z sẽ được trình bày trong chương sau, ta gọi là phương pháp gián tiếp.

Tương tự như phương trình vi tích phân tuyến tính hệ số hằng của hệ thống liên tục theo thời gian. Trước tiên, ta tìm nghiệm của phương trình sai phân thuần nhất (homogeneous diference equation), đó là pt (1.55) với vế phải bằng 0**.** Đây chính là đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào x(n) = 0. Sau đó, ta tìm một nghiệm riêng (particular solution) của pt(1.55) với x(n)(0. Cuối cùng, nghiệm tổng quát (total solution) của LCCDE (1.55) là tổng nghiệm của phương trình sai phân thuần nhất với nghiệm riêng của nó. Thủ tục tìm nghiệm như sau:

1.5.2.1 Tìm nghiệm của phương trình sai phân thuần nhất (Đáp ứng của hệ thống khi tính hiệu vào bằng 0)

Phương trình sai phân thuần nhất có dạng: $\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = 0$ (1.58)

(Bằng cách chia 2 vế cho a0 để có dạng (1.58) với $a_0 = 1$)

Ta đã biết rằng, nghiệm của phương trình vi phân thường có dạng hàm mũ, vì vậy, ta giả sử nghiệm của phương trình sai phân thuần nhất có dạng:

$$y_h(n) = \lambda^n \quad (1.59)$$

Chỉ số h được dùng để chỉ rằng đó là nghiệm của phương trình thuần nhất.

Thay vào pt(1.58) ta thu được một phương trình đa thức:

hay: $\lambda^{n-N}(\lambda^N + a_1\lambda^{N-1} + a_2\lambda^{N-2} + \dots + a_{N-1}\lambda + a_N) = 0$ (1.60)

Đa thức trong dấu ngoặc đơn được gọi là đa thức đặc tính (characteristic polynomial) của hệ thống.

Nói chung, đa thức này có N nghiệm, ký hiệu là $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, có giá trị thực hoặc phức. Nếu các hệ số $a_1, a_2, \dots, a_N$ có giá trị thực, thường gặp trong thực tế, các nghiệm phức nếu có sẽ là các cặp liên hợp phức. Trong N nghiệm cũng có thể có một số nghiệm kép (mutiple-order roots).

Giả sử rằng, tất cả các nghiệm là phân biệt, không có nghiệm kép, thì nghiệm tổng quát của phương trình sai phân thuần nhất là :

$$y_h(n) = C_1\lambda^n_1 + C_2\lambda^n_2 + \ldots + C_N\lambda^n_N \qquad (1.61)$$

Ở đây, C_1 , C_2 ,…,C_N là các hằng số tuỳ định. Các hằng số này được xác định dựa vào các điều kiện đầu của hệ thống.

Ví dụ 1.13: Xác định đáp ứng với tín hiệu vào x(n) = 0 của một hệ thống được mô tả bởi LCCDE bậc 2 như sau:

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = 0 \qquad (1.62)$$

Giải:

Ta biết nghiệm của pt(1.62) có dạng: yh(n) = (n, thay vào pt(1.62), ta thu được:

$\lambda^n - 3\lambda^{n-1} - 4\lambda^{n-2} = 0$ hay $\lambda^{n-2}(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0$

và phương trình đặc tính là: $(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0$

Ta có 2 nghiệm $\lambda_1 = -1$ và $\lambda_2 = 4$, nghiệm của phương trình thuần nhất có dạng tổng quát là:

$$y_h(n) = C_1\lambda^n_1 + C_2\lambda^n_2 = C_1(-1)^n + C_2(4)^n \qquad (1.63)$$

Đáp của hệ thống với tín hiệu vào bằng 0 có thể thu được bằng cách tính giá trị các hằng số C_1 và C_2 dựa vào các điều kiện đầu. Các điều kiện đầu được cho thường là giá trị của đáp ứng ở các thời điểm n=-1; n = -2;...; n = -N. Ở đây, ta có N=2, và các điều kiện đầu được cho là y(- 1) và y(-2). Từ pt(1.62) ta thu được:

$$y(0) = 3y(-1) + 4y(-2)$$

$$y(1) = 3y(0) - 4y(-1) = 13y(-1) + 12y(-2)$$

Mặt khác, từ pt(1.63) ta có:

$$y(0) = C_1 + C_2$$

$$y(1) = -C_1 + 4C_2$$

Suy ra: $C_1 + C_2 = 3y(-1) + 4y(-2)$

$$-C_1 + 4C_2 = 13y(-1) + 12y(-2)$$

Giải hệ 2 phương trình trên ta được:

$$C_1 = (-1/5)y(-1) + (4/5)y(-2)$$

$$C_2 = (16/5)y(-1) + (16/5)y(-2)$$

Vậy đáp ứng của hệ thống khi tín hiệu vào bằng 0 là:

$$y_h(n) = [(-1/5)y(-1) + (4/5)y(-2)](-1)^n + [(16/5)y(-1) + (16/5)y(-2)](4)^n \qquad (1.64)$$

Giả sử, y(-2)=0 và y(-1)=5, thì C1=-1 và C2 =16. Ta được:

yh(n) = (-1)n+1 + B(4)n+2 , với n $\geq$ 0

Chú ý rằng, trong trường hợp phương trình đặc tính có nghiệm kép, pt(1.61) phải được sửa lại, chẳng hạn, nếu (1 là nghiệm kép bậc m, thì pt(1.61) trở thành:

$$y_h(n) = C_1\lambda^n_1 + C_2n\lambda^n_1 + C_3n^2\lambda^n_1 + \ldots + C_mn^{m-1}\lambda^n_1 + \ldots + C_{m+1}\lambda^n_{m+1} + \ldots + C_N\lambda^n_N \qquad (1.65)$$

1.5.2.2. Nghiệm riêng của phương trình sai phân

Tương tự như cách tìm nghiệm của phương trình thuần nhất, để tìm nghiệm riêng của phương trình sai phân khi tín hiệu vào $x(n) \neq 0$, ta đoán rằng nghiệm của phương trình có một dạng nào đó, và thế vào LCCDE đã cho để tìm một nghiệm riêng, ký hiệu $y_p(n)$. Ta thấy cách làm này có vẽ mò mẫm!. Nếu tín hiệu vào x(n) được cho bắt đầu từ thời điểm $n \geq 0$ (nghĩa là x(n)=0 khi n<0), thì dạng của nghiệm riêng thường được chọn là:

$$y_p(n) = Kx(n) \quad (1.66)$$

với K là một hằng số mà ta sẽ tính.

Ví dụ 1.14:

Tìm đáp y(n), với $n \geq 0$, của hệ thống được mô tả bởi LCCDE bậc hai như sau:

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1) \quad (1.67)$$

tín hiệu vào là: $x(n) = 4^n u(n)$. Hãy xác định nghiệm riêng của pt(1.67).

Giải:

Trong ví dụ 1.13, ta đã xác định nghiệm của phương trình sai phân thuần nhất cho hệ thống này, đó là pt(1.63), ta viết lại:

$$y_h(n) = C_1(-1)^n + C_2(4)^n \quad (1.68)$$

Nghiệm riêng của pt(1.63) được giả thiết có dạng hàm mũ: $y_p(n) = K(4)^n u(n)$. Tuy nhiên chúng ta thấy dạng nghiệm này đã được chứa trong nghiệm thuần nhất (1.68). Vì vậy, nghiệm riêng này là thừa (thế vào pt(1.67) ta không xác định được K). Ta chọn một dạng nghiệm riêng khác độc lập tuyến tính với các số hạng chứa trong nghiệm thuần nhất. Trong trường hợp này, ta xử lý giống như trường hợp có nghiệm kép trong phương trình đặc tính. Nghĩa là ta phải giả thiết nghiệm riêng có dạng: $y_p(n) = Kn(4)^n u(n)$. Thế vào pt(1.67):

$Kn(4)^n u(n) - 3K(n-1)(4)^{n-1}u(n-1) - 4K(n-2)(4)^{n-2}u(n-2) = (4)^n u(n) + 2(4)^{n-1}u(n-1)$Để xác định K, ta ước lượng phương trình này với mọi $n \geq 2$, nghĩa là với những giá trị của n sao cho hàm nhãy bậc đơn vị trong phương trình trên không bị triệt tiêu. Để đơn giản về mặt toán học, ta chọn n = 2 và tính được K = 6/5. Vậy:

$$y_p(n) = (6/5)n(4)^n u(n) \quad (1.69)$$

1.5.2.3. Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân:

Tính chất tuyến tính của LCCDE cho phép ta cộng nghiệm thuần nhất và nghiệm riêng để thu được nghiệm tổng quát. Ta có nghiệm tổng quát là:

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n) \quad (1.70)$$

Vì nghiệm thuần nhất yh (n) chứa một tập các hằng số bất định {Ci}, nên nghiệm tổng quát cũng chứa các hằng số bất định này, để xác định các hằng số này, ta phải có một tập các điều kiện đầu tương ứng của hệ thống.

Ví dụ 1.15: Tìm đáp ứng y(n), với $n \geq 0$, của hệ thống được mô tả bởi LCCDE bậc hai trong ví dụ 1.14 với điều kiện đầu là y(-1) = y(-2) = 0.

Giải:

Trong ví dụ 1.13 ta đã tìm được nghiệm thuần nhất, trong ví dụ 1.14 ta đã tìm được nghiệm riêng. Vậy nghiệm tổng quát của pt(1.67) là:

$y(n) = y_h(n) + y_P(n) = C_1(-1)n + C_2(4)n + (6/5)n(4)^n$, với $n \geq 0$ (1.71)

với các điều kiện đầu là các giá trị y(-1) = y(-2) = 0, tương tự như trong ví dụ 1.13, ta tính y(0) và y(1) từ các pt(1.67) và (1.71) và thành lập được hệ phân trình:

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$-C_1 + 4C_2 + 24/5 = 9$$

suy ra: C1 = -1/25 và C2 = 26/25.

Cuối cùng ta thu được đáp ứng y(n) của hệ thống với các điều kiện đầu bằng 0, với tín hiệu vào là x(n) = (4)nu(n) có dạng:

$$y(n) = -\frac{1}{25}(-1)^n + \frac{26}{25}(4)^n + \frac{6}{5}n(4)^n \qquad (1.72)$$

1.5.3. Hệ thống rời rạc đệ qui (RECURSIVE) và không đệ quy (NONRECURSIVE)

1.5.3.1. Hệ thống rời rạc đệ qui :

Một hệ thống rời rạc đệ qui là hệ thống mà đáp ứng y(n) ở mỗi thời điểm n phụ thuộc vào một số bất kỳ các giá trị y(n-1); y(n-2);...ở các thời điểm trước đó.

Ta thấy, một hệ thống đệ qui có thể được mô tả bằng một LCCDE có bậc N≥1. Để tìm nghiệm của LCCDE, ngoài phương pháp trực tiếp đã trình bày ở phần trên và phương pháp gián tiếp dùng biến đổi z sẽ trình bày trong chương sau, ta còn có thể xác định y(n) bằng phương pháp đệ qui, nghĩa là tính đáp ứng y(n) của hệ thống không chỉ dựa vào tín hiệu vào mà còn dựa vào các giá trị của đáp ứng ở các thời điểm đã tính được trước đó.

Giả sử các điều kiện đầu đã cho là y(-1), y(-2),..., y(-N), ta sẽ dùng phương pháp đệ qui để tính y(n) với $n \geq 0$ và với n < -N.

- Tính y(n) với n ≥ 0:

Phương trình 1.55 được viết lại : $a_0 y(n) + \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-k)$

Hay $y(n) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} \frac{b_r}{a_0} x(n-k)$ (1.73)

Ta thấy pt(1.73) biểu diễn y(n) theo tín hiệu vào và các giá trị của đáp ứng ở các thời điểm trước đó. Các mẫu y(n) được tính với n tăng dần, thủ tục này được gọi là phép đệ qui tiến.

Ví dụ 1.16: Xét một hệ thống được mô tả bởi LCCDE có dạng:

$$y(n) - ay(n-1) = x(n) \qquad (1.74)$$

và tín hiệu vào là x(n) = K((n), với a và K là các hằng số. Điều kiện đầu là y(-1) = c, c cũng là một hằng số.

Ta tính y(n) với n ≥ 0, bắt đầu với n = 0:

y(0) = a.c + K

$y(1) = a.y(0) + 0 = a.(a.c + K) = a^2c + a.K$

$y(2) = a.(a^2c + a.K) = a^3c + a^2 K$

$y(3) = a.(a^3c + a^2 K) = a^4c + a^3 K$

: :

: :

Từ các kết quả trên ta có thể tổng quát hóa thành công thức tính y(n)

$$y(n) = a^{n+1}c + a^n K, \quad \text{với } n \geq 0 \qquad (1.75)$$

- ***Tính y(n) với n < 0***

Trong trường hợp này Pt(1.55) được viết lại

$$a_N y(n-N) + \sum_{k=0}^{N-1} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-k) \text{ ,hay}$$

$$y(n-N) + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{a_N} y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} \frac{b_r}{a_N} x(n-k) \qquad (1.76)$$

Các giá trị của đáp ứng y(n) với $-N \leq n \leq -1$ đã được cho bởi các điều kiện đầu, và ta tính được lần lượt các giá trị y(-N -1), y(-N -2), y(-N - 3),... bằng cách thay lần lượt các giá trị n = -1, -2, -3,... vào pt(1.76). Các mẫu y(n) được tính với n giảm dần, thủ tục này được gọi là phép đệ qui lùi.

Ví du 1.17: Xét một hệ thống được mô tả bởi LCCDE (1.74) với cùng điều kiện đầu trong ví dụ 1.16 . Để xác định giá trị của đáp ứng với n < 0, ta viết lại phương trình (1.74) như sau:

$$y(n-1) = a^{-1} [y(n) - x(n)] \qquad (1.77)$$

áp dụng điều kiện đầu y(-1) = c, ta có thể tính y(n) với n <-1 một cách lần lượt như sau :

$$y(-2) = a^{-1}[y(-1) - x(-1)] = a^{-1} c$$

$$y(-3) = a^{-1} a^{-1} c = a^{-2} c$$

$$y(-4) = a^{-1} a^{-2} c = a^{-3} c$$

: :

: :

Từ các kết quả trên ta tổng quát hóa thành công thức tính y(n) với n < 0 như sau:

$$y(n) = a^{n+1} c \quad , \text{với } n < 0 \qquad (1.78)$$

Từ kết quả của 2 ví dụ 1.16 và 1.17, ta tổng kết thành công thức tính đáp ứng y(n) với mọi n của hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân (1.74), tín hiệu vào là x(n) = Kδ(n), với a và K là các hằng số, và điều kiện đầu là y(-1) = c, như sau:

$$y(n) = a^{n+1} c + a^n Ku(n), \text{ với mọi } n \qquad (1.79)$$

Nhận xét:

(1) Ta đã thực hiện thủ tục đệ qui để tính đáp ứng theo chiều dương và chiều âm của trục thời gian, bắt đầu với n = -1. Rõ ràng đây là một thủ tục không nhân quả.

(2) Khi K=0, tín hiệu vào luôn có giá trị bằng 0, nhưng đáp ứng có giá trị là $y(n)=a^{n+1}c$. Nhưng một hệ thống tuyến tính đòi hỏi rằng, nếu giá trị của tín hiệu vào bằng 0, thì giá trị của đáp ứng cũng bằng 0 (tính chất này được chứng minh như một bài tập). Vì vây, hệ thống này không tuyến tính.

(3) Nếu ta dịch tín hiệu vào n0 mẫu, tín hiệu vào lúc này là x1(n) = Kδ(n-n_0), ta tính lại đáp ứng theo thủ tục như trên, kết quả là:

$y_1(n) = a^{n+1}c + a^{n-n_0}Ku(n-n_0)$, với mọi n (1.80)

Ta thấy y1(n) ≠y(n-n_0), vậy hệ thống không bất biến theo thời gian.

Theo phân tích trên, hệ thống không phải là hệ thống LTI mà chúng ta mong đợi, ngoài ra nó cũng không có tính nhân quả. Sở dĩ như vậy là vì trong các điều kiện đầu đã cho không bao hàm các tính chất này. Trong chương 2, ta sẽ trình bày cách tìm nghiệm của LCCDE bằng cách dùng biến đổi z, ta sẽ ngầm kết hợp các điều kiện cho tính chất tuyến tính và bất biến, và chúng ta sẽ thấy, ngay cả khi các điều kiện bảo đảm tính chất tuyến tính và bất biến được đưa vào, nghiệm của phương trình sai phân cũng sẽ không duy nhất. Đặc biệt, cả hai hệ thống LTI nhân quả và không nhân quả có thể cùng được mô tả bởi một phương trình sai phân.

Nếu một hệ thống được mô tả bởi một LCCDE và thỏa mãn điều kiện đầu để hệ thống có các tính chất tuyến tính, bất biến và nhân quả thì nghiệm sẽ được xác định duy nhất. Điều kiện này thường được gọi là điều kiện nghỉ (initial-rest conditions) và nội dung của nó như sau: " Nếu tín hiệu vào x(n) = 0 khi n ≤ 0 thì đáp ứng phải bằng 0 với n ≤ 0".

Ta xét lại ví dụ 1.14 và 1.15, nhưng với điều kiện nghỉ, nghĩa là y(n) = 0 với n < 0, tương ứng với x(n) = Kδ(n) = 0 khi n < 0. Ta sẽ thấy hệ thống là một hệ thống LTI nhân quả.

1.5.3.2. Hệ thống rời rạc không đệ qui:

Một hệ thống mà đáp ứng y(n) chỉ phụ thuộc vào kích thích ở thời điểm hiện hành và ở các thời quá khứ là một hệ thống không đệ qui.

Ta thấy một hệ thống không đệ qui được biểu diễn bởi một LCCDE có bậc N = 0, đó là:

$$y(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-k) \qquad (1.81)$$

(Hệ số a_0 đã được đưa vào các hệ số b_r , bằng cách chia 2 vế cho a0).

Đáp ứng xung của hệ thống là:

$$h(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r \delta(n-k) = \begin{cases} b_n, 0 \le n \le M \\ 0, n\# \end{cases} \qquad (1.82)$$

Ta thấy đây là một hệ thống LTI có đáp ứng xung dài hữu hạn (FIR) và nhân quả.

1.6 TƯƠNG QUAN CỦA CÁC TÍN HIỆU RỜI RẠC

Tương quan của hai tín hiệu là một thuật toán đo lường mức độ giống nhau giữa hai tín hiệu đó. Nó được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khoa học kỹ thuật như: radar, sonar, thông tin số,. . .

Ví dụ như trong lĩnh vực radar, radar phát ra rín hiệu để tìm mục tiêu là x(n), tín hiệu này sau khi đập vào mục tiêu (như máy bay chẳng hạn) sẽ phản xạ trở lại . Radar thu lại tín hiệu phản xạ nhưng bị trễ một thời gian là D = n_0T_s (T_s là chu kỳ lấy mẫu), tín hiệu thu được sẽ bị suy giảm với hệ số suy giảm là a , tức là radar đã thu lại được tín hiệu ax(n-n_0). Ngoài tín hiệu phản xạ này còn có nhiễu cộng γ(n). Vậy tín hiệu mà radar thu được khi có mục tiêu là:

$$y(n) = ax(n-n_0) + \gamma(n)$$

Còn nếu không có mục tiêu trong không gian hoặc radar không phát hiện được mục tiêu thì radar chỉ thu được nhiểu cộng, khi đó:

$$y(n) = \gamma(n)$$

So sánh hai tín hiệu x(n) và y(n) ta sẽ phát hiện được có mục tiêu hay không, và xác định được thời gian trễ $D = n_0T_s$, từ đó ta xác định được khoảng cách từ mục tiêu đến radar.

1.6.1. Tương quan chéo (CROSSCORRELATION)

Xét 2 dãy x(n) và y(n), giả sử rằng ít nhất một trong hai dãy có năng lượng hữu hạn, khi đó tương quan chéo của x(n) và y(n) được định nghĩa như sau:

$$r_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k), n = 0,\pm1,\pm2.... \qquad (1.83)$$

Ví dụ 1.18: Hãy xác định tương quan chéo rxy(n) của 2 dãy sau:

x(n) = { …, 0, 0, 2, -1, 3, 7, 1, 2, -3, 0, 0, …}

y(n) = { …, 0, 0, 1, -1, 2, -2, 4, 1, -2, 5, 0, 0, …}

Giải: Theo định nghĩa ta tính rxy với từng giá trị n:

Với n=0, ta có: $r_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(k)$

- $v_0(k) = x(k)y(k)$ = {…, 0, 0, 2, 1, 6, -14, 4, 2, 6, 0, 0,…}

Sau đó lấy tổng tất cả các mẫu của $v_0(k)$, ta được: $r_{xy}(0) = 7$

- ***Với n > 0,*** ta dịch y(k) sang phải n mẫu, tính tích $v_n(k) = x(k)y(k-n)$ và sau đó cộng tất cả các mẫu của $v_n(k)$, ta thu được:

$r_{xy}(1) = 13$ $r_{xy}(2) = -18$ $r_{xy}(3) = 16$ $r_{xy}(4) = -7$

$r_{xy}(5) = 5$ rxy(6) = -3 và $r_{xy}(n) = 0$, với $n \geq 7$

- **Với n < 0,** ta dịch y(k) sang trái n mẫu, tính tích $v_n(k) = x(k)y(k-n)$ và sau đó cộng tất cả các mẫu của vn(k), ta thu được:

$r_{xy}(-1) = 0$ $r_{xy}(-2) = 33$ $r_{xy}(-3) = 14$ $r_{xy}(-4) = 36$

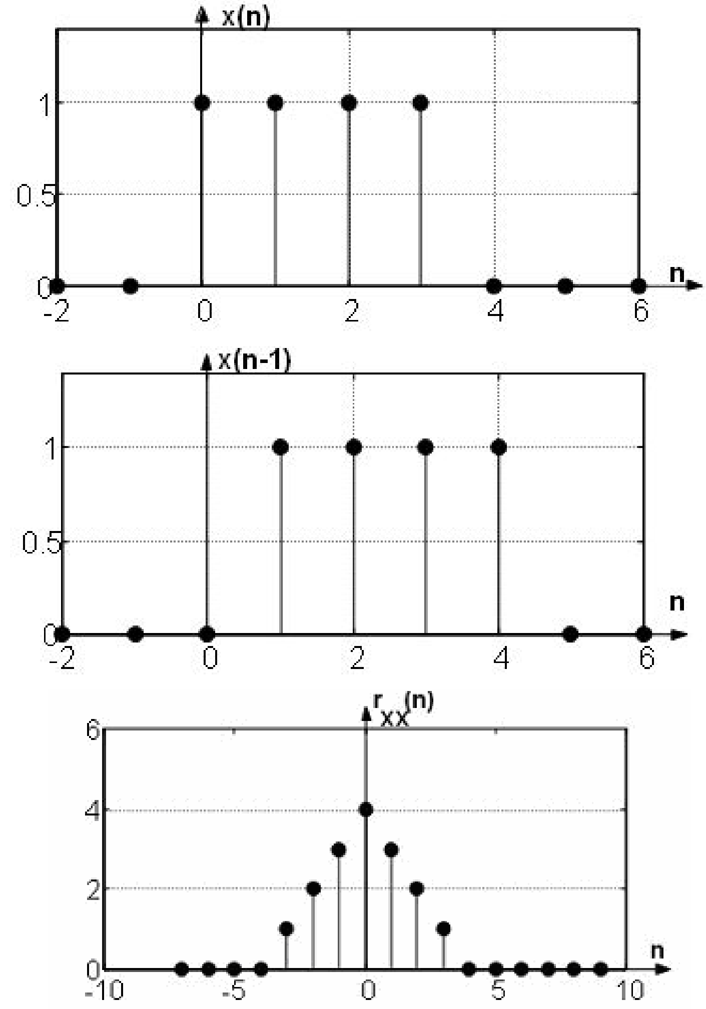
$r_{xy}(-5) = 19$ $r_{xy}(-6) = -9$ $r_{xy}(-7) = 10$ và $r_{xy}(n) = 0$, với $n \leq -8$

Kết quả tương quan chéo của hai dãy x(n) và y(n) là:

$r_{xy}(n)$ = {…, 0, 0, 10, -9, 19, 36, -14, 33, 0, 7, 13, -18, 16, -7, 5, -3, 0, 0,…}

1.6.2. Tự tương quan (AUTOCORRELATION)

Trong định nghĩa tương quan chéo, nếu x(n) = y(n) thì ta sẽ có tự tương quan. Vậy tự tương quan của dãy x(n) được định nghĩa như sau:



Hình 1.10 – Minh hoạ cách tính tự tương quan

$$r_{xx}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)x(k-n) \qquad (1.84)$$

Ví dụ 1.19: Tính tự tương quan của dãy x(n) = u(n) – u(n – 4).

Giải: Cách tính tự tương quan bằng đồ thị được trình bày trong hình 1.10

Ta thấy, tự tương quan của một dãy luôn luôn có giá trị cực đại tại n = 0, bởi vì một dãy bao giờ cũng giống chính nó.

1.6.3. Một số tính chất của tương quan chéo và tự tương quan:

Xét 2 dãy có năng lượng hữu hạn x(n) và y(n), nghĩa là:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) < \infty \text{ và } E_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y^2(n) < \infty \qquad (1.85)$$

Ta dễ dàng chứng minh được các tính chất sau đây (Phần chứng minh xem như bài *tập):*

(1) $E_x = r_{xx}(0)$ và $E_y = r_{yy}(0)$

(2) $r_{xy}(n) = r_{yx}(-n)$

(3) $r_{xx}(n) = r_{xx}(-n)$ (r_{xx} là một hàm chẵn)

(4) $\left|r_{xy}(n)\right| \le \sqrt{r_{xx}(0)r_{yy}(0)} = \sqrt{E_x E_y}$ suy ra $\left|r_{xx}(n)\right| \le r_{xx}(0) = E$

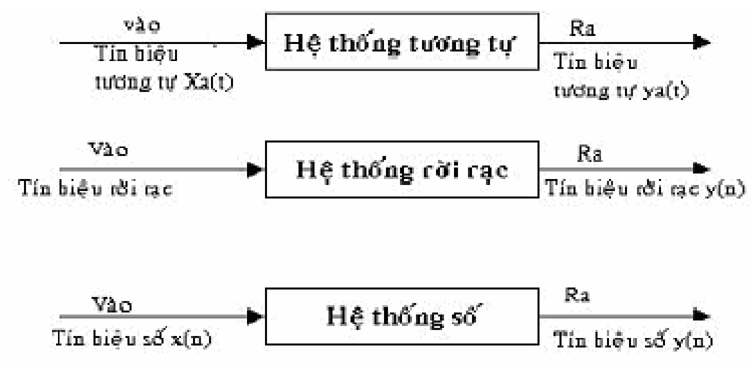
(5) Nếu $y(n) = \pm c_x(n-n0)$, c là một hằng số bất kỳ và n_0 là số nguyên, thì

$R_{xy}(n) = \pm cr_{xx}(n-n0)$ và $r_{yy}(0) = c2r_{xx}(0)$ và $-cr_{xx}(0) \le r_{xy}(n) \le cr_{xx}(0)$

1.7. XỬ LÝ SỐ TÍN HIỆU TƯƠNG TỰ

1.7.1. Các hệ thống xử lý tín hiệu:

Chúng ta có thể phân loại các hệ thống theo chính tín hiệu cần xử lý. Theo đó, ta có các loại hệ thống xử lý như các sơ đồ sau đây:

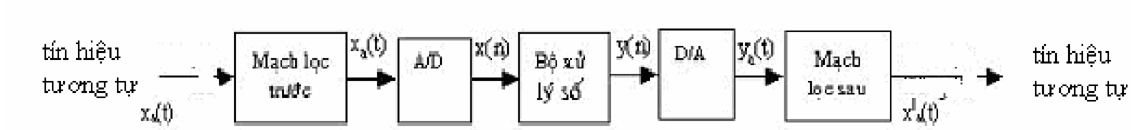


Hình 1.11- Các hệ thống xử lý tín hiệu

Chú ý rằng, vì tín hiệu số là một trường hợp riêng của tín hiệu rời rạc, nên hệ thống rời rạc cũng có thể xử lý tín hiệu số.

1.7.2. Hệ thống xử lý số tín hiệu tương tự:

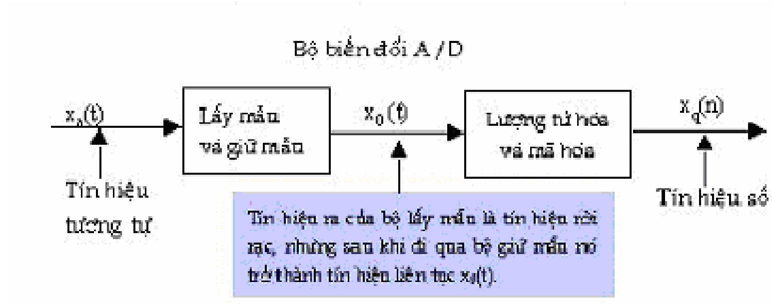
Xử lý số tín hiệu tương tự là xử lý tín hiệu tương tự bằng hệ thống số. Để thực hiện việc này, ta cần phải biến đổi tín hiệu tương tự thành tín hiệu số và sau khi xử lý dãy kết quả có thể được phục hồi trở thành tín hiệu tương tự. Ví dụ như trường hợp xử lý tín hiệu thoại. Trong nhiều trường hợp, mục tiêu của việc xử lý là trích lấy các tham số của tín hiệu hay các thông tin cần thiết từ tín hiệu. Khi đó, không cần chuyển đổi tín hiệu trở về dạng tương tự. Ví dụ : Xử lý tính hiệu radar hoặc sonar. Hệ thống xử lý số tín hiệu tương tự được trình bày trong hình 1.12.



Hình 1.12 - Hệ thống xử lý số tín hiệu tương tự

1.7.2.1. Biến đổi A/D (Analog-to-Digital Conversion)

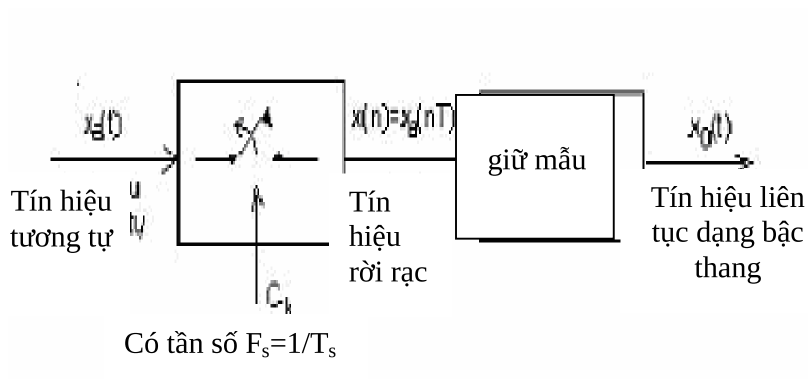
Biến đổi A/D là biến đổi tín hiệu tương tự thành tín hiệu số. Biến đổi A/D có sơ đồ khối như sau:



Hình 1.13 – Các thành phần của bộ biến đổi A/D

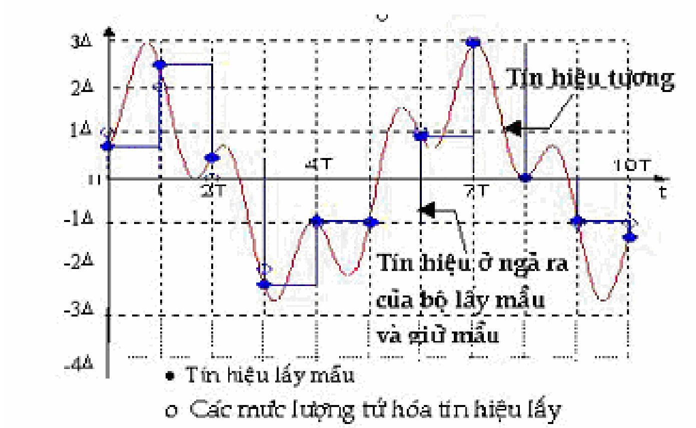
Lấy mẫu và giải mẫu (Sampling and hold)

Lấy mẫu là quá trình biến đổi liên tục(tương tự) sang tín hiệu rời rạc. Có nhiều cách để lấy mẫu một tín hiệu liên tục. Trong đó, thông dụng nhất là cách lấy mẫu tuần hoàn (periodic sampling), còn gọi là lấy mẫu đều (uniform sampling). Đó là cách lấy những mẫu biên độü tín hiệu liên tục tại những thời điểm rời rạc cách đều nhau một khoảng thời gian TS, mà ta gọi là chu kỳ lấy mẫu. Nếu xa(t) là tín hiệu tương tự ở ngõ vào bộ lấy mẫu thì tín hiệu rời rạc ở ngã ra của bộ lấy mẫu là $x_a(nT_S)$ (Gọi tắt là tín hiệu lấy mẫu), n là số nguyên. Mô hình vật lý của bộ lấy mẫu được minh họa trong hình 1.14.



Hình 1.14. Mô hình vật lý của bộ lấy mẫu

Trong đó, bộ phận lấy mẫu được mô tả như là một bộ khóa được điều khiển đóng mở bởi tín hiệu xung đồng hồ Ck có tần số là FS= 1/TS. Để xử lý bằng kỹ thuật số hoặc bằng máy tính, thông thường tín hiệu rời rạc cần phải được lượng tử hóa để có thể biểu diễn biên độ của các mẫu bằng một tập hữu hạn các mã nhị phân. Tuy nhiên, việc lượng tử hóa và mã hóa không thể thực hiện tức thời. Thông thường, tiến trình lượng tử hóa và mã hóa một mẫu được thực hiện trong khoảng thời gian TS. Vì vậy, giá trị của của một mẫu phải được duy trì trong thời gian TS. Đây là chức năng của bộ giữa mẫu. Bộ giữa mẫu tiêu biểu là Zero-order-*hold. Bộ lấy mẫu* và giữ mẫu kiểu zero-order-hlod này tương đương với một bộ điều chế dãy xung chữ nhật theo sau bởi một bộ lọc tuyến tính, mà tín hiệu ở ngã ra của nó (Gọi tắt là tín hiệu giữ mẫu) có dạng bậc thang hình *1.15*.



Hình 1.15 – Tín hiệu liên tục, tín hiệu lấy mẫu, tín hiệu giữ mẫu và 8 mức lượng tử, Δ , là khoảng cách giữa 2 mức

Lượng tử hóa và mã hóa (Quantizer and Coder)

Đây là bộ biến đổi tín hiệu rời rạc sang tín hiệu số có biên độ được biểu diễn bằng các mã nhị phân. Giá trị mỗi mẫu của tín hiệu lấy mẫu được gán bởi một giá trị được lựa chọn từ một tập *hữu hạn các gía trị*. Trong tiến trình mã hóa, mỗi giá trị rời rạc được gán bởi một mã nhị phân m bit, tương ứng có 2m mức lượng tử. Nếu biên độ của tín hiệu lấy mẫu được chuẩn hóa trong khoảng $-X_0 \leq x(n) \leq X_0$thì bước lượng tử hóa (khoảng cách giữa hai mức lượng tử kề nhau) sẽ là:

$$\Delta = 2X_0/2^m = X_0/2^{m-1} \qquad (1.86)$$

Ví dụ1.19: Với X0 = 1volt và m =3 bit, ta có 8 mức lượng tử và:

$\Delta = 1/4 = 0{,}25$ volt

Các mức lượng tử có thể được mã hóa theo hai loại mã nhị phân: Two's -complement code và Offset binary code như sau:

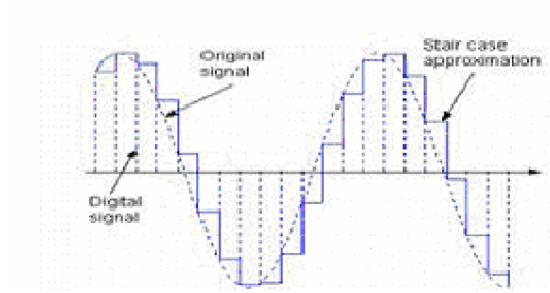
Giá trị của các mức lượng tử	Two's -complement code	Offset binary code
0.75	011	111
0.50	010	110
0,25	001	101
0	000	100
-0,25	111	011
-0,50	110	010
-0,75	101	001
-1	100	000

Độ sai biệt giữa những mẫu x(n) của tín hiệu rời rạc chưa được lượng tử hóa và tín hiệu lượng tử hóa xq(n) gọi là sai số *lượng tử* (quantization eror). Số bít mã hóa càng lớn thì số mức lượng tử càng nhiều, sai số lượng tử càng nhỏ.

1.7.2.2. Biến đổi D/A (Digital to Analog Conversion)

Trong nhiều ứng dụng thực tế, tín hiệu số sau khi được xử lý cần phải được phục hồi lại thành tín hiệu tương tự. Để hồi làm việc này, ta cần có bộ biến đổi số sang tương tự (D/A converter).

Nguyên tắc chung của biến đổi D/A là nối các điểm rời rạc bằng một phương pháp nội suy (Interpolation) nào đó. Hình 1.16 trình bày một kiểu biến đổi D/A đơn giản, kiểu xấp xỉ bậc thang (staircase approximation), còn được gọi là zero-order hold.



Hình 1.16 - Biến đổi A/D kiểu zero-oder - hold

Có nhiều kiểu biến đổi D/A khác, như: nội suy tuyến tính (linear interpolation), nội suy bậc hai (quadratic interpolation),.... Với một tín hiệu có băng tần hữu hạn, lý thuyết lấy mẫu sẽ xác định một hình thức nội suy tối ưu.

1.7.2.3. Hiện tượng hư danh (Aliasing)

Để minh họa, ta xét 2 tín hiệu tương tự hình sin lần lượt có tần số là F_1 = 10 Hz và F_2 = 50 Hz như sau:

$$x_1(t) = \cos 2\pi(10)t \quad \text{và} \quad x_2(t) = \cos 2\pi(50)t \qquad (1.87)$$

Hai tín hiệu này cùng được lấy mẫu với tần số F_S =40 Hz. Các tín hiệu rời rạc tương ứng là:

$$x_1(n) = \cos 2\pi(10)(n/40) = \cos(\pi/2)n$$

$$x_2(n) = \cos 2\pi(50)(n/40) = \cos(5\pi/2)n \qquad (1.88)$$

Tuy nhiên, vì $\cos(5\pi/2)n = \cos(2\pi n + \pi n/2) = \cos\pi n/2$, nên $x_1(n) = x_2(n)$. Vậy, hai tín hiệu rời rạc hình sin được lấy mẫu từ hai tín hiệu liên tục đã cho là không thể phân biệt được. Điều này có nghĩa là, khi phục hồi tín hiệu tương tự từ tín hiệu rời rạc $\cos(\pi/2)n$, ta không thể biết tín hiệu tương tự được khôi phục là $x_1(t)$ hay $x_2(t)$. Vì $x_2(t)$ cho một kết quả lấy mẫu đúng như của $x_1(t)$ ở tần số lấy mẫu F_S = 40 samples/second (sự trùng mẫu), ta nói thành phần tần số F_2=50Hz là một hư danh (alias) của thành phần tần số F_1=10Hz ở tần số lấy mẫu 40 samples/second.

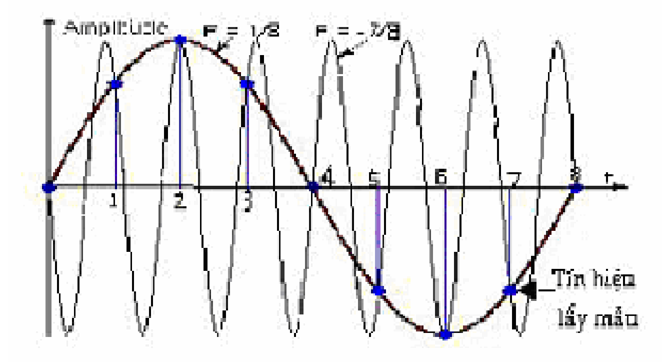
Thật ra, không chỉ có thành phần F_2 là hư danh của F_1 mà các thành phần tần số $F_k = (F_1 + 40k)$ cũng là hư danh của F_1 , với k là một số nguyên. Thật vậy, ta xét tín hiệu tương tự có tần số F_k là:

$$x_2(t) = \cos 2\pi F_k t = \cos 2\pi(F_1+40k)\,t \qquad (1.89)$$

Tín hiệu lấy mẫu của nó với cùng tốc độ F_S = 40Hz là:

$$x_k(n) = \cos 2\pi(F_1+ 40k)(n/40) = \cos(2\pi kn + \pi n/2)= \cos\pi n/2 = x_1(n)$$

Một ví dụ về hiện tượng hư danh được minh họa trong hình 1.17. Trong đó, 2 tín hiệu tương tự hình sin có tần số lần lượt là F_1 = 1/8Hz và F_k = -7/8 Hz có các mẫu đồng dạng khi được lấy mẫu ở tần số F_S = 1Hz. Từ pt(1.89), ta thấy, với k = -1 thì F1 = $F_k + F_S$ = (-7/8 + 1) Hz = 1/8Hz.



Hình 1.17 – minh hoạ aliasing

1.7.2.4. Định lý lấy mẫu:

Cho một tín hiệu tương tự bất kỳ, vấn đề là chọn chu kỳ lấy mẫu TS hay tần số lấy mẫu FS như thế nào cho hợp lý? Xu hướng chung là chọn tần số lấy mẫu thấp, bởi vì tần số lấy mẫu cao sẽ làm tăng số mẫu, từ đó lượng phép tính trong quá trình xử lý tín hiệu sẽ tăng lên, kéo dài thời gian xử lý, đồng thời lượng bộ nhớ cần thiết cũng tăng theo. Tuy nhiên, nếu tần số lấy mẫu quá thấp sẽ xãy ra hiện tượng biệt d../Anh, không thể khôi phục lại tín hiệu tương tự một cách chính xác. Chúng ta sẽ trở lại vấn đề này trong chương 3, khi phân tích tín hiệu trong miền tần số, từ đó chứng minh định lý lấy mẫu, mà ta sẽ phát biểu sau đây.

Tín hiệu liên tục trong thực tế có độ dài hữu hạn (tồn tại trong một khoảng thời gian hữu hạn) là tổ hợp tuyến tính của nhiều thành phần hình sin. Ta xét các tín hiệu có băng tần hữu hạn, nghĩa là tần số cao nhất trong băng tần có thể xác định. Ví dụ: tín hiệu thoại có các thành phần tần số từ vài trăm Hz đến 3KHz, tín hiệu hình có tần số cao nhất là 6MHz.

Nếu ta biết thành phần tần số cao nhất Fmax, ta có thể chọn tần số lấy mẫu thích hợp. Định lấy lấy mẫu được phát biểu như sau:

Định lý : Nếu tần số cao nhất chứa trong một tín *hiệu tương tự $x_a(t)$ là Fmax thì tín hiệu chỉ có thể được khôi phục một cách chính xác từ các mẫu của nó nếu tần số lấy mẫu $F_S \geq 2F_{max}$,.*

Để cho gọn, ta đặt F_{max} = B. Định lý trên cũng chỉ ra rằng $x_a(t)$ có thể được khôi phục từ các mẫu $x_a(nT_S)$ bằng cách dùng hàm nội suy:

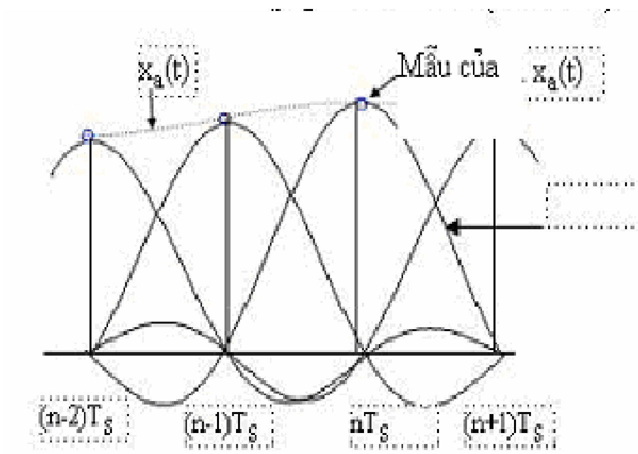
$$g(t) = \frac{\sin 2\pi Bt}{2\pi Bt} \qquad (1.90)$$

và $x_a(t)$ được xác định bởi biểu thức :

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) g\left(t - \frac{n}{F_s}\right) \qquad (1.91)$$

ở đây $x_a(n/F_S) = x_a(nT_S) = x(n)$ là các mẫu của $x_a(t)$. Nếu tần số lấy mẫu $F_S=2F_{max}=2B$, thì công thức khôi phục (1.91) trở thành:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{\sin 2\pi B(t - n/2B)}{2\pi B(t - n/2B)} \qquad (1.92)$$



Hình 1.18 – Minh hoạ phép nội suy
theo pt (1.92) của định lý lấy mẫu

Tần số lấy mẫu F_S =2B = 2F_{max} được gọi là tần số ***Nyquist***. *Hình 1.18* minh họa một cách biến đổi A/D lý tưởng dùng hàm nội suy (1.90).

Trong sơ đồ hình 1.12, mạch lọc trước có tác dụng chống hiện tượng hư danh. Đây là một mạch lọc thông thấp có chức năng lọc bỏ các thành phần tần số cao hơn FS/2, trong trường hợp phổ tần của tín hiệu vượt quá khả năng của bộ lấy mẫu (khi đó ta phải chấp nhận kết quả gần đúng của tín hiệu ra). Ngay cả khi thành phần tần số cao nhất của tín hiệu nhỏ hơn FS/2, nhiểu ở tần số cao cũng gây ra hiện tượng hư danh và cần phải lọc bỏ.

Mạch lọc sau sơ đồ trong hình 1.12 cũng là một mạch lọc thông thấp. Nó có chức năng làm trơn (smoothing) để sửa dạng tín hiệu tương tự thu được ở ngã ra chính xác hơn.

CHƯƠNG II
BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN Z

2.1 MỞ ĐẦU:

Chương 1 đã trình bày cách tính đáp ứng của một hệ thống trực tiếp từ đáp ứng xung của nó, bằng cách tính tổng chập của kích thích với đáp ứng xung. Cách tính tổng chập trực tiếp dựa vào công thức định nghĩa như đã làm tốn rất nhiều thời gian và công sức. Hơn nữa , trong thực tế số mẫu khác không của kích thích và đáp ứng xung là rất nhiều nên ta không thể 'tính bằng tay'. Tuy nhiên, phương pháp tính tổng chập bằng đồ thị như đã trình bày cho ta một thuật toán của chương trình tính tổng chập bằng máy tính. Việc giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng bằng phương pháp đệ qui cũng chỉ có ý nghĩa khi sử dụng máy tính.

Kỹ thuật biến đổi là một công cụ hữu hiệu để phân tích hệ thống LTI. Biến đổi Z đối với tín hiệu rời rạc có vai trò tương tự như biến đổi Laplace đối với tín hiệu liên tục, và chúng có quan hệ giống nhau với biến đổi Fourier. Tổng chập của hai dãy trong miền thời gian sẽ biến thành tích của hai biến đổi Z tương ứng trong miền biến phức z. Tính chất này sẽ làm đơn giản hóa việc tính đáp ứng của hệ thống với các tín hiệu vào khác nhau. Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng cũng được giải một cách dễ dàng hơn khi dùng công cụ biến đổi Z.

Như ta sẽ thấy trong các chương sau, biến đổi Fourier giữa vai trò chìa khóa trong trong việc biểu diễn và phân tích các hệ thống rời rạc. Tuy nhiên, trong một số trường hợp cần phải sử dụng dạng tổng quát hóa của biến đổi Fourier, đó là biến đổi Z.

2.2 CÁC KHÁI NIỆM VỀ BIẾN ĐỔI Z.

2.2.1. Biến đổi Z (THE Z - TRANSFORM):

Biến đổi z của một dãy x(n) được định nghĩa như là chuỗi lũy thừa:

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) Z^{-n} \qquad (2.1)$$

, với z là một biến phức.

Ta có thể coi biến đổi Z như là một toán tử (operator) mà nó biến một dãy thành một hàm, ký hiệu Z |.|, ta viết lại:

$$\text{ZT}\,[x(n)] = X(z) \qquad (2.2)$$

hay: $$x(n) \text{----Z---->} X(z) \qquad (2.3)$$

Biến đổi Z được định nghĩa bởi pt (2.1) được gọi là biến đổi Z hai phía (bilateral Z-transform) do biến n chạy từ -∞ đến ∞. Biến đổi Z một phía (unilateral Z-transform) được định nghĩa như sau:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} x(n) Z^{-n} \qquad (2.4)$$

trong trường hợp này biến n chạy từ 0 đến ∞.

Ta thấy biến đổi Z hai phía và một phía chỉ bằng nhau khi x(n) = 0 với mọi n ≤ 0 (x(n) là dãy nhân quả). Trong tài liệu này, khi nói đến biến đổi Z mà không xác định rõ là một phía hay hai phía, thì ta ngầm hiểu rằng đó là biến đổi Z hai phía.

Nếu biểu diễn Z theo tọa độ cực $z = r.e^{j\omega}$, pt (2.1) trở thành:

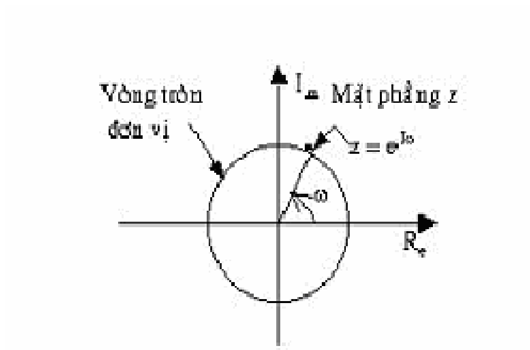
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(n)(re^{-j\omega})^{-n} \qquad (2.5)$$

Đặc biệt, nếu r =1 (nghĩa là |z| = 1), thì biến đổi Z trở thành biến đổi Fourier:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(n)(e^{-j\omega})^{-n} \qquad (2.6)$$

Ta sẽ đề cập đến ở chương sau.

Vì biến đổi Z là hàm của một biến phức, nên nó thường được biểu diễn trên mặt phẳng phức của biến z (hình 2.1). Ta thấy, biến đổi Z lấy trên vòng tròn đơn vị chính là biến đổi Fourier.



Hình 2.1 – Vòng tròn đơn vị trên mặt phẳng phức z

2.2.2. Miền hội tụ (ROC: Region of Convergence)

Pt (2.1) là một chuỗi lũy thừa, gọi là chuỗi Laurent, do đó không phải lúc nào biến đổi Z cũng hội tụ với mọi tín hiệu hay với mọi giá trị của z, vì vậy phải xét đến miền hội tụ của nó.

1/. Định nghĩa:

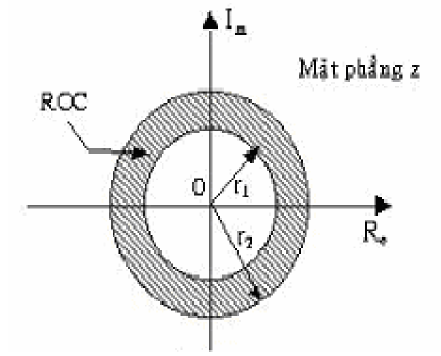
Với một dãy x(n) xác định, tập hợp các giá trị của z sao choĠ hội tụ được gọi là miền hội tụ (ROC) của X(z).

Định nghĩa trên hàm ý rằng: $|X(z)| < \infty$, với mọi z trong ROC.

Điều kiện đủ để biến đổi Z hội tụ là:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)||z|^{-n} < \infty \qquad (2.7)$$

Nếu một giá trị $z = z_1$ nào đó ở trong ROC, thì vòng tròn có bán kính là $|z|=|z_1|$ cũng nằm trong ROC. Điều này cho thấy rằng ROC là một miền hình vành khăn bao ***quanh gốc tọa độ (Hình 2.2).***



Hình 2.2 - Miền hội tụ ROC là hình vành khăn trong mặt phẳng z.

2/. Cực và zeros :

Một loại biến đổi Z thông dụng và quan trọng đó là biến đổi Z mà X(z) của nó có dạng là một hàm hữu tỉ với mọi z trong ROC, nghĩa là:

$$X(z) = P(z)/Q(z) \qquad (2.8)$$

Trong đó, P(z) và Q(z) là các đa thức biến z hay z^{-1}.

Các giá trị của z sao cho X(z) = 0 được gọi là các zeros của X(z), và các giá trị của z sao cho X(z) = ∞được gọi là các cực (poles) của X(z). Các cực là các nghiệm xác định của đa thức mẫu số Q(z) và thêm vào các giá trị z = 0 hay z = ∞.

Đồ thị cực-zero là đồ thị trên mặt phẳng phức, ta vẽ các điểm cực, ký hiệu x , và các điểm zero, ký hiệu o.

Ví dụ 2.1: Xét dãy x(n) = ((n). Thay vào pt (2.1), ta có:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = z^0 = 1 \qquad (2.9)$$

Miền hội tụ của X(z) trong trường hợp này là toàn bộ mặt phẳng z.

Ví dụ 2.2: Xét dãy x(n) = a^nu(n), a là một hằng số thực hoặc phức. Thay vào pt (2.1), ta có:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n \qquad (2.10)$$

Để X(z) hội tụ thì: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n < \infty$ (2.11)

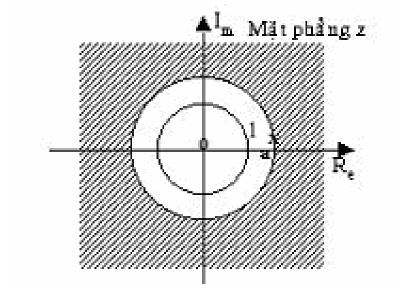
Ta thấy, ROC là miền mà z có giá trị sao cho |az-1| < 1 hay |z| > |a|, và trong ROC, X(z) hội tụ đến:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az)^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{1 - az} \text{ , với } |z| > |a| \qquad (2.11)$$

(Áp dụng công thức tính tổng vô hạn của chuỗi hình học).

Với a = 1, x(n) là dãy nhãy bậc đơn vị, có biến đổi Z là :

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{1 - z}\ \text{, với } |z| > |1| \qquad (2.12)$$



Hình 2.3 Miền hội tụ của
biến đổi Z

Hình 2.3 trình bày miền hội tụ của biến đổi Z trong ví dụ 2.2 với các vị trí của cực và zeros. Nếu |a| > 1, ROC không chứa vòng tròn đơn vị, điều này hàm ý rằng, với giá trị này của |a|, biến đổi Fourier của một dãy lũy thừa anu(n) là không hội tụ.

Ví dụ 2.3: Xét dãy x(n) = -anu(-n-1), thì:

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(-n-1) z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n z^{-n}$$

$$X(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} a^n z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n \qquad (2.14)$$

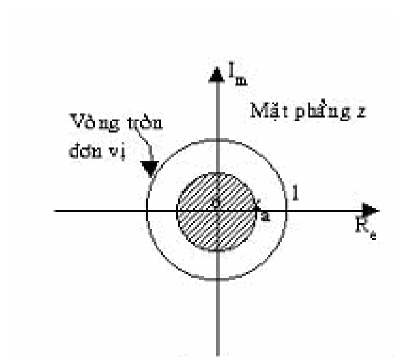
Nếu $|a^{-1} z| < 1$, hay |z| < |a|, thì tổng (2.14) hội tụ, và:

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} z} = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a} \qquad (2.15)$$

Đồ thị cực-zero và miền hội tụ của biến đổi Z trong ví dụ 2.2 được trình bày trong hình 2.4.

Nhận xét:

Hai dãy trong ví dụ 2.2 và 2.3 hoàn toàn khác nhau nhưng biểu thức X(z) và đồ thị cực-zero là như nhau. Như vậy khi nói đến biến đổi Z thì cần xác định cả biểu thức lẫn ROC.



Hình 2.4 Đồ thị cực zeros và miền hội
tụ của biến đổi Z trong ví dụ 2.3.

Ví dụ 2.4: Xét trường hợp tín hiệu là tổng của hai hàm mũ thực:

$x(n) = (1/2)^n u(n) - (-3)^n u(-n-1)$ (2.16)

Biến đổi Z sẽ là:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - (-3)^n u(-n-1) \right\} z^{-n}$$

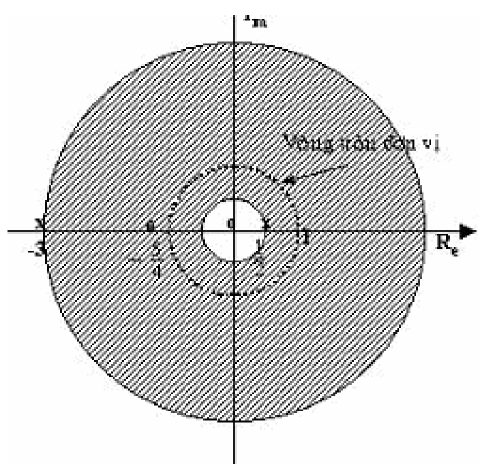
$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{-1} (-3)^n z^{-n} \quad (2.17)$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n + 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-3)^{-1} z\right]^n \quad (2.18)$$

Để X(z) hội tụ, hai tổng trong pt (2.18) phải hội tụ, điều kiện là:

$|(1/2)z^{-1}| < 1$ và $|(-3)^{-1-} z| < 1$ hay $|z| > 1/2$ và $|z| < 3$. Vì vậy, ROC là miền $1/2 < |z| < 3$. Đồ thị cực-zero và ROC được trình bày trong hình 2.5. Và:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{1}{1 + 3z^{-1}} = \frac{2z(z + \frac{5}{4})}{(z - \frac{1}{2})(z + 3)} \quad (2.19)$$



Hình 2.5

Nhận xét:

Từ các ví dụ trên ta thấy rằng: với các dãy lũy thừa dài vô hạn, biến đổi Z của nó có thể được biểu diễn bằng tỉ số của các đa thức biến z hay z^{-1}. Cách biểu diễn này đặc biệt thuận lợi.

Ví dụ 2.5 : Xét tín hiệu :

$$x(n) = \begin{cases} a^n, 0 \le n \le N-1 \\ 0, n\# \end{cases}$$

có biến đổi Z là:

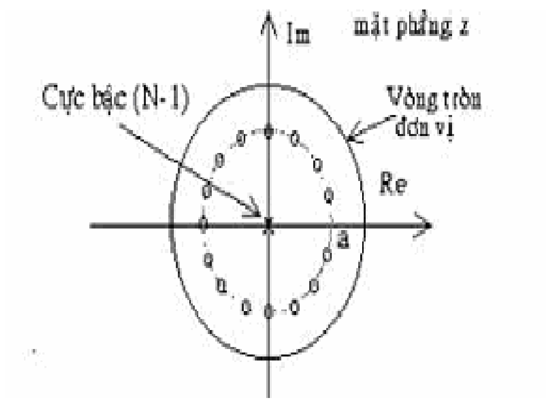
$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}a^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}\left(az^{-1}\right)^n=\frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}}=\frac{1}{z^{N-1}}\frac{z^N-a^N}{z-a} \qquad (2.20)$$

ROC được xác định bởi tập hợp các giá trị của z sao cho: $\sum_{n=0}^{N-1}\left|az^{-1}\right|^n<\infty$

Vì chỉ có một số hữu hạn các số hạn khác 0, nên tổng trong bất phương trình (2.21) sẽ hữu hạn khi |az-1| hữu hạn, điều này đòi hỏi rằng |a| là hữu hạn và z ≠ 0. Vì vậy, ROC bao gồm toàn bộ mặt phẳng z, ngoại trừ gốc tọa độ (z = 0).

Hình 2.6 là đồ thị cực-zero và ROC của ví dụ 2.4, với N =16 và a là một số thực và 0<a<1. *N* nghiệm của đa thức tử số của X(z) là:

$z_k = ae^{j(2(k/N)}$ với k = 0, 1, 2,. . ., N-1. (2.22)



Hình 2.6 - Cực và zeros
trong ví dụ 2.4

Zero ở k = 0 bị triệt tiêu bởi cực ở z = a, vì vậy, không có cực nào khác ngoài gốc tọa độ và còn lại (N-1) zero tương ứng với k = 1, 2,. . ., N-1.

3/. Tính chất của ROC:

Giả sử rằng x(n) có biên độ hữu hạn, ngoại trừ tại n = ±∞ và biểu thức của biến đổi Z có dạng hữu tỉ. Từ khảo sát thực tế, ta có thể tổng kết được các tính chất của ROC như sau:

(1) ROC không chứa các điểm cực, vì tại đó X(z) không hội tụ.

(2) Nếu x(n) có độ dài hữu hạn, thì ROC là toàn bộ mặt phẳng z, ngoại trừ các điểm z=0 hoặc z= ∞ (Ví dụ 2.5).

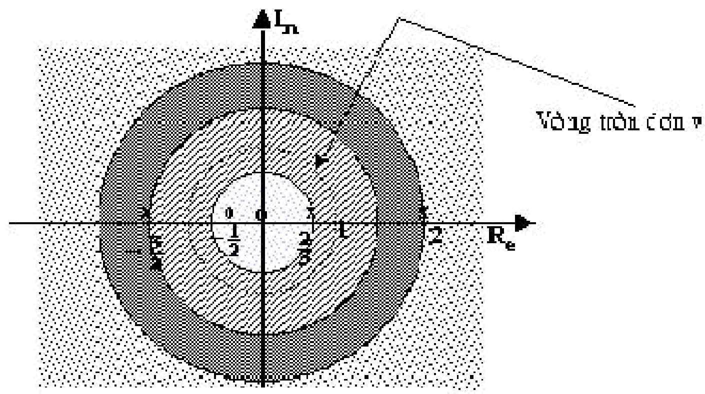
(3) Nếu x(n) là dãy bên phải (right-sided sequence), nghĩa là x(n) = 0 với mọi $n < N_1 < \infty$, thì ROC là miền bên ngoài của vòng tròn đi qua điểm cực hữu hạn ngoài cùng (Ví dụ 2.2).

(4) Nếu x(n) là dãy bên trái (left-sided sequence), nghĩa là x(n)=0 với mọi $n>N_2>-\infty$, thì ROC là miền bên trong của vòng tròn đi qua điểm cực trong cùng khác 0 (Ví dụ 2.3)

(5) Nếu x(n) là dãy hai bên (two-sided sequence) và có chiều dài vô hạn về phía phải cũng như về phía trái thì ROC có dạng hình vành khăn, các vòng tròn giới hạn trong và ngoài đi qua hai điểm cực trong các điểm cực của X(z) (Ví dụ 2.4)

(6) ROC phải là một miền không bị chia cắt.

Hình 2.7 minh họa các tính chất của ROC, cùng các vị trí của các cực (z_1=2/3, z_2=-3/2, z_3=2) và zeros (z_1=0, z2=-1/2) có thể đúng với 4 biến đổi z .



Hình 2.7. T ính chất của ROC

2.2.3. Biến đổi Z ngược . (The inverse Z -transform)

2..2.3.1. Định nghĩa:

Nếu X(z) là biến đổi Z của x(n), thì x(n) là biến đổi Z ngược của X(z), ta có cặp biến đổi Z:

$$x(n) \xleftrightarrow{\boxed{Z}} X(z)$$

Biến đổi Z ngược còn được định nghĩa là một thủ tục để biến đổi từ miền z sang miền thời gian. Về mặt toán học, biến đổi Z ngược là một toán tử mà nó biến một hàm X(z) thành dãy x(n).

Chú ý rằng, ta chỉ có thể xác định biến đổi Z ngược của X(z) khi miền hội tụ của X(z) được xác định.

Công thức để tính dãy x(n) từ X(z) được thành lập dựa vào định lý tích phân Cauchy.

1. **Định lý tích phân Cauchy,** được phát biểu bởi công thức sau:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C Z^{-k}\,dZ = \begin{cases} 1, k=1 \\ 0, k\#1 \end{cases} \qquad (2.23)$$

với C là đường cong kín có chiều ngược chiều kim đồng hồ và bao qu../Anh gốc tọa độ.

2.Thiết lập công thức tính biến đổi z ngược

Từ công thức định nghĩa của biến đổi z:

Nhân hai vế của công thức trên cho z^{k-1} và lấy tích phân trên đường cong kín C bao qu../Anh gốc tọa độ, ngược chiều kim đồng hồ và nằm trong miền hội tụ của X(z), ta được:

$$\frac{1}{2\pi j}\int_C X(z)z^{k-1}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \sum x(n)z^{-n+k-1}dz \qquad (2.24)$$

Vì tổng trong vế phải hội tụ, nên ta có thể hoán đổi vị trí của dấu tích phân và dấu tổng :

$$\frac{1}{2\pi j}\int_C X(z)z^{k-1}dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{-n+k-1}dz \qquad (2.25)$$

Áp dụng định lý Cauchy, pt(2.25) trở thành: $\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{k-1}dz = x(k)$ (2.26)

Đổi biến k thành biến n, ta được công thức biến đổi z ngược mong muốn.

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz \qquad (2.27)$$

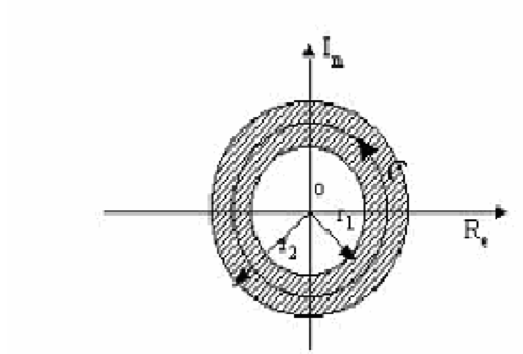
Tích phân đường trong pt(2.27) được tính bằng định lý giá trị thặng dư của Cauchy (Cauchy's residue theorem) như sau:

$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz = \sum$ (giá trị thặng dư của X(z)z^{n-1} tất cả các cực của nó trong C. (2.28)

Giá trị thặng dư (residue) tại một điểm cực d_0, bậc s của X(z)zn-1 , ký hiệu là $\mathrm{Re}\, s_{d_0}^{j}$, là : $\mathrm{Re}\, s_{d_0}^{j} = \lim \frac{1}{(s-1)!}\frac{d^{j-1}}{dz^{s-1}}\left[X(z)z^{n-1}(z-d_0)^j\right]$ (2.29)

Đối với các điểm cực đơn, pt(2.29) trở thành:

$$\mathrm{Re}\, s_{d_0}^{j} = \lim_{s\to d_0}\left|X(z)z^{n-1}(z-d_0)\right| \qquad (2.30)$$



Hình 2.8 Vòng tròn tích phân C

Ví du 2.6:

$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$, với $|z| > |a|$, tìm dãy x(n) tương ứng.

Giải:

Đường cong kín C nằm trong ROC của X(z) nên có bán kính lớn hơn |a|.

- Với n ≥ 0, C bao quanh một cực duy nhất tại z = a, ta có:

$$\operatorname{Re} s_a^1 = \lim_{s \to a} \left| X(z) z^{n-1} (z-a) \right| = \lim_{s \to a} \left| z^n \right| = a^n$$

kết quả là: $x(n) = a^n$

- Với n < 0 , có cực kép bậc n tại z = 0.
- Khi n = -1, có 2 cực trong C là z = a và z = 0

$$\operatorname{Re} s_a^1 = \lim_{s \to a} \left| X(z) z^{n-1} (z-a) \right| = \lim_{s \to a} \left| z^{-1} \right| = a^{-1}$$

$$\operatorname{Re} s_0^1 = \lim_{s \to 0} \left| X(z) z^{n-1} (z-0) \right| = \lim_{s \to a} \left[\frac{1}{(z-a)} \right] = -a^{-1}$$

Kết quả là x(-1) = a-1 - a-1 = 0

- Khi n = -2, có 1 cực đơn z = a và một cực kép bậc 2 tại z = 0 trong C.

$$\operatorname{Re} s_a^1 = \lim_{s \to a} \left| X(z) z^{n-1} (z-a) \right| = \lim_{s \to a} \left| z^{-2} \right| = a^{-2}$$

$$\operatorname{Re} s_0^1 = \lim_{s \to 0} \left| X(z) z^{n-1} (z-0)^2 \right| = \lim_{s \to a} \left[\frac{1}{(z-a)^2} \right] = -a^{-2}$$

Kết quả là x(-2) = 0

Tính tiếp tục với n = -3, -4, -5,… ta thấy x(n) = 0, với mọi n < 0.

Vậy, kết quả cuối cùng là: $x(n) = a^n u(n)$.

2.3 CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI Z

Giả sử ta có các cặp biến đổi Z như sau:

$$x(n) \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z) \text{ với ROC} = R_x$$

$$x_1(n) \overset{Z}{\longleftrightarrow} X_1(z) \text{ với ROC} = R_{x1}$$

$$x_2(n) \overset{Z}{\longleftrightarrow} X_2(z) \text{ với ROC} = R_{x2}$$

$$y(n) \overset{Z}{\longleftrightarrow} Y(z) \text{ với ROC} = R_y$$

Các ký hiệu ROC = Rx có nghĩa là rL < |z| < rH

ROC = R_{x1} có nghĩa là rL1 < |z| < r_{H1}

ROC = R_{x2} có nghĩa là r_{L2} < |z| < r_{H2}

trong đó r_L , r_H , r_{L1} , r_{H1}, r_{L2} , r_{H2} là các số thực dương, tương tự cho R_y.

Biến đổi Z có các tính chất như sau:

1. Tuyến tính (Linearity):

$$a\,x_1(n) + b\,x_2(n) \overset{Z}{\longleftrightarrow} a\,X_1(z) + b\,X_2(z) \qquad (2.31)$$

trong đó a và b là các hằng số bất kỳ. Tính chất này được chứng minh trực tiếp từ định nghĩa của biến đổi z (xem như một bài tập).

Miền hội tụ Ry của a $X_1(z)$ + b $X_2(z)$ nhỏ nhất là phần giao nhau giữa R_{x1} và R_{x2}. Nếu tổ hợp tuyến tính a $X_1(z)$ + b $X_2(z)$ phát sinh các điểm zeros khử đi một số điểm cực thì miền hội tụ Ry được mở rộng ra (Ta sẽ trở lại sự khử cực trong phần sau).

Ví dụ 2.Xác định biến đổi Z của tín hiệu:

(a) $x(n) = (\cos w_0 n)u(n)$

(b) $x(n) = (\sin w_0 n)u(n)$

Giải:

(a) Tín hiệu x(n) có thể được biểu diễn bởi các hàm mũ phức theo công thức Euler:

Ta thấy, x(n) là tổ hợp tuyến tính của 2 tín hiệu $e^{j\omega n}u(n)$ và $e^{-j\omega n}u(n)$, tính biến đổi Z của hai dãy này, ta có:

$$e^{j\omega_0 n}u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}, ROC: |z| > 1$$

$$e^{-j\omega_0 n}u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}, ROC: |z| > 1$$

Áp dụng tính chất tuyến tính, ta được:

$$X(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}$$ với ROC: $|z| > 1$

Cuối cùng ta có:

$$(\cos \omega_0 n)u(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1 - z^{-1}\cos\omega_0}{1 - 2z^{-1}\cos\omega_0 + z^{-2}}$$ với ROC: $|z| > 1$ (2.32)

(b) Tương tự , tín hiệu x(n) có thể được biểu diễn bởi các hàm mũ phức theo công thức Euler:

$$x(n) = (\sin\omega_0 n)u(n) = \frac{1}{2j}[e^{j\omega_0 n}u(n) - e^{-j\omega_0 n}u(n)]$$

Áp dụng tính chất tuyến tính, ta được:

$$X(z) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}\right)$$ với ROC: $|z| > 1$

Sau một số thao tác đại số được kết quả:

$$(\sin \omega_0 n)u(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1 - z^{-1}\sin\omega_0}{1 - 2z^{-1}\cos\omega_0 + z^{-2}}$$ với ROC: $|z| > 1$ (2.33)

2 . Dịch thời gian (Time shifting)

$$x(n-k) \xleftrightarrow{z} z^{-k}X(z)$$ (2.34)

ROC của z-k X(z) là Rx trừ ra z = 0 nếu k > 0 hoặc trừ ra z = ∞ nếu k < 0.

Chứng minh:

Đặt y(n)=x(n-k), ta có: $Y(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n-k)z^{-n}$, đổi biến m=n-k, ta được:

$$Y(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(m)z^{-(m+k)}=z^{-k}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)z^{-m}=z^{-k}X(z)$$

Nhận xét: Dịch phải k mẫu tức là làm trễ tín hiệu k mẫu sẽ tương ứng với nhân cho z^{-k} trong phép biến đổi z. Với k = 1, ta ký hiệu toán tử z^{-1} tương ứng với phép làm trễ một mẫu, đây là ký hiệu đã được dùng để biểu diễn phần tử làm trễ một mẫu.

Tính chất tuyến tính và tính chất dịch thời gian làm cho biến đổi z trở thành cực kỳ hữu dụng trong việc phân tích hệ thống LTI.

3/. Thay đổi thang đo trong miền z (Scaling in the z domain).

$$a^n x(n) \stackrel{Z}{\longleftrightarrow} X(z/a) \qquad (2.35)$$

với a là hằng số thực hoặc phức bất kỳ.

ROC của X(z/a) là $|a|.R_x = |a|.r_L < |z| < |a|.r_H$.

Chúng minh:

Từ định nghĩa của biến đổi Z ta có:

Vì ROC của X(z) là $R_x = r_L < |z| < r_H$ nên ROC của X(a-1z) là $r_L < |a^{-1}z| < r_H$ hay $|a|r_L < |z| < |a|r_H$.

Ví dụ 2.8: Xác định biến đổi Z của các tín hiệu:

(a) $x(n) = a^n(\cos\omega_0 n)u(n)$

(b) $x(n) = a^n(\sin\omega_0 n)u(n)$

Giải:

(a) Từ kết quả (2.32) trong ví dụ 2.7 kết hợp với tính chất (2.35) ta thu được kết quả một cách dễ dàng:

$$a^n(\cos\omega_0 n)u(n) \stackrel{z}{\longleftrightarrow} X(z)=\frac{1-az^{-1}\cos\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}} \quad \text{với ROC: } |z|>|a| \qquad (2.36)$$

(b) Tương tự, kết hợp (2.33) và (2.35), ta được:

$$a^n(\sin\omega_0 n)u(n) \stackrel{z}{\longleftrightarrow} X(z)=\frac{1-az^{-1}\sin\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}} \quad \text{với ROC: } |z|>|a| \qquad (2.37)$$

4/. Đảo thời gian (Time Reversal)

$$x(-n) \stackrel{Z}{\longleftrightarrow} X(z^{-1}) \qquad (2.38)$$

với k là số nguyên.

ROC của $X(z^{-1})$ là $\frac{1}{R_x}<|z|<\frac{1}{r_L}$

Chứng minh: từ định nghĩa biến đổi z ta có:

$$Z\{x(-n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)(z^{-1})^{-m}$$

Trong biểu thức trên ta đã đổi biến m = -n.

ROC của X(z-1) là : $r_L < |z^{-1}| < r_H$ hay $1/r_H < |z| < 1/r_L$

Ví du 2.9: Xác định biến đổi Z của tín hiệu x(n) = u(-n)

Giải: Ở ví dụ 2.2 ta đã biết :

$$u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-z^{-1}}, \text{ với ROC: } |z| > 1$$

Áp dụng pt (2.38) ta được :

$$u(-n) \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-z}, \text{ với ROC: } |z| < 1$$, với k là số nguyên.

5/. Vi phân trong miền z (Differentiation in the z-domain)

$$y(n) = nx(n) \overset{Z}{\longleftrightarrow} Y(z) = -z\frac{dX(z)}{dz} \qquad (2.39)$$

Với Ry = Rx (Ngoại trừ trường hợp thêm vào hay loại bỏ các điểm cực tại z = 0 hay z=∞.

Chứng minh:

Bằng cách lấy đạo hàm 2 vế của biểu thức định nghĩa biến đổi Z, ta có:

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(-n)z^{-n-1} = -z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[nx(n)]z^{-n} = -z^{-1}Z\{nx(n)\}$$

Ví dụ 2.10: Xác định biến đổi Z của tín hiệu $x(n) = na^n u(n)$.

Giải:

Đặt $x_1(n) = a^n u(n)$, ta được $x(n) = nx_1(n)$. Từ ví dụ 2.2 ta đã biết:

$$x_1(n) = a^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}; \text{ với ROC: } |z| > |a|$$

Áp dụng (2.39):

$$x(n) = na^n u(n) \leftrightarrow X(z) = -z\frac{dX_1(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$$, với $R_x=R_{x1}$, nghĩa là $|z|.>|a|$

Nếu a = 1, ta có biến đổi Z của dãy hàm đốc đơn vị (unit ramp signal).

$$x(n) = nu(n) \leftrightarrow X(z) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}, \text{ với } R_x = |z| > 1 \qquad (2.40)$$

6/. Tích Chập (Convolution)

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = X_1(z).X_2(z) \qquad (2.41)$$

với ROC R_x của X(z) nhỏ nhất là miền giao nhau của ROCx_1 và ROCx_2

Nếu có các zeros được sinh ra khử đi một số điểm cực thì miền hội tụ R_x được mở rộng ra.

Chứng minh:

Theo định nghĩa, tổng chập của 2 dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ là:

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k)$$

Biến đổi z của x(n) là:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k)\right]z^{-n}$$

Hoán đổi vị trí của 2 tổng và áp dụng tính chất dịch thời gian ta thu được :

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n-k)z^{-n}\right] = X_2\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)z^{-k} = X_1(z)X_2(z)$$

Ví dụ 2.11: Tính tổng chập x(n) của 2 dãy :

$$x_1(n) = \{1, \underset{\uparrow}{-2}, 1\}$$

và $x_2(n) = u(n) - u(n-6)$

Giải:

Từ định nghĩa ta tín được biến đổi Z của $x_1(n)$ và $x_2(n)$ như sau:

$X_1(z) = 1 - 2z^{-1} + z^{-2}$

$X_2(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5}$

Theo tính chất (2.41), ta nhân X1(z) với X2(z) và suy ra x(n) = x1(n)*x2(n):

$X_1(z). X_2(z) = 1 - z^{-1} - z^{-6} + z^{-7}$

Suy ra: $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, -1, 0, 0, 0, 0, -1, 1\}$

Tính chất được áp dụng để tính tổng chập một cách có hiệu quả.

7/. Tương quan (Correlation)

$$r_{x1x2}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(k-n) \xleftrightarrow{z} R_{x1x2}(z) = X_1(z)X_2(z^{-1}) \qquad (2.42)$$

Chứng minh: Ta nhắc lại định nghĩa của tương quan giữa 2 dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$, đó là:

$$r_{x_1x_2}(l) = x_1(l) * x_2(-l)$$

Áp dụng tính chất đảo thời gian và chập ta có:

$$R_{xx_2}(z) = Z\{x_1(l)\}Z\{x_2(-l)\} = X_1(z)X_2(z^{-1})$$

ROC của $R_{xx}(z)$ nhỏ nhất là phần giao của miền hội tụ của $X_1(z)$ và $X_2(z\text{-}1)$.

Giống như trường hợp tính tổng chập, tương quan giữa hai tín hiệu có thể tính một cách dễ dàng hơn bằng cách áp dụng tính chất (2.42), sau đó tìm biến đổi Z ngược để thu được kết quả.

8/ Tích cuả hai dãy (Multiplication of two Sequences)

$$x_3(n) = x_1(n)x_2(n) \stackrel{z}{\longleftrightarrow} X_3(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2(z/v)v^{-1}dv \tag{2.43}$$

Ở đây C là đường cong kín bao qu../Anh gốc tọa độ và nằm trong miền hội tụ của $X_1(v)$ and $X_2(1/v)$.

Chứng minh:

Đặt: $x_3(n) = x{=}(n).x_2(n)$, biến đổi Z của $x_3(n)$ là:

$$X_3(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_3(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(n)z^{-n}$$

thay thế biến đổi Z ngược của $x_1(n)$:

$$x_1(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)v^{n-1}dv$$

vào biểu thức $X_3(z)$ sau đó hoán chuyển vị trí của tổng và tích phân, ta thu được:

$$X_3(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)\left(\frac{z}{v}\right)^{-n}\right]v^{-1}dv$$

Tổng trong dấu ngoặc chính là biến đổi Z của $x_2(n)$ được lấy tại z/v, vậy:

$$X_3(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$$

đó là kết quả mong muốn.

Để thu được ROC của $X_3(z)$, ta chú ý rằng, nếu $X_1(v)$ hội tụ trong miền $r_{1L}<|v|<r_{1H}$ và $X_2(z)$ hội tụ trong miền $r_{2L}<|z|<r_{2H}$, thì ROC của $X_2(z/v)$ là: $r_{2L}<|z/v|<r_{2H}$, và miền hội tụ của $X_3(z)$ sẽ nhỏ nhất là:

$$R_{1L}.r_{2L}<|z/v|<r_{2H}.\ r_{1H} \tag{2.44}$$

9/. Định lý giá trị đầu (The initial value theorem):

Nếu x(n) là một dãy nhân quả (nghĩa là: x(n) = 0 với mọi n < 0), thì:

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z) \tag{2.45}$$

Chứng minh:

Vì x(n) là một dãy nhân quả, nên từ định nghĩa biến đổi z ta có:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \ldots$$

Rõ ràng, khi $z \to \infty$, thì $z^{-n} \to 0$ vì $n > 0$ và $X(z) \to x(0)$.

Tất cả các tính chất đã được trình bày ở trên sẽ được tổng kết trong bảng 2.1 để thuận tiện khi tham khảo.

Đến đây, ta đã tìm được hầu hết các cặp biến đổi Z cơ bản. Các cặp biến đổi Z này được tổng kết trong bảng 2.2.

Bảng 2.1: Các tính chất của biến đổi Z

Hàm gốc	**Hàm ảnh**	**Miền hội tụ**
$x(n)$	$X(z)$	$R_{x-} < \|z\| < R_{x+}$
$y(n)$	$Y(z)$	$R_{y-} < \|z\| < R_{y+}$
$a.x(n) + b.y(n)$	$a.X(z) + b.Y(z)$	$\text{Max}\left[R_{x-}, R_{y-}\right] < \|z\| < \min\left[R_{x+}, R_{y+}\right]$
$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$	$R_{x-} < \|z\| < R_{x+}$
$a^n x(n)$	$X(a^1 z)$	$\|a\| R_{x-} < \|z\| < \|a\| R_{x+}$
$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{R_{x+}} < \|z\| < \frac{1}{R_{x-}}$
$n.x(n)$	$-z.\frac{dX(z)}{dz}$	$R_{x-} < \|z\| < R_{x+}$
$x(n) * y(n)$	$X(z).Y(z)$	$\text{Max}\left[R_{x-}, R_{y-}\right] < \|z\| < \min\left[R_{x+}, R_{y+}\right]$
$x(n).y(n)$	$\frac{1}{j2\pi}\oint_C X(\frac{z}{v}).Y(v).v^{-1}.dv$	$\text{Max}\left[R_{x-}, R_{y-}\right] < \|z\| < \min\left[R_{x+}, R_{y+}\right]$
$x*(n)$	$X^*(z^*)$	$R_{x-} < \|z\| < R_{x+}$
$r_{xy}(m)$	$R_{xy}(z) = X(z).Y(z^{-1})$	$\text{Max}\left[R_{x-}, R_{y-}\right] < \|z\| < \min\left[R_{x+}, R_{y+}\right]$

Bảng 2.2: Các cặp biến đổi z cơ bản

Tín hiệu x(n)	Biến đổi z, X(z)	**ROC**
δ(n)	1	**Tất cả mặt phẳng z**
u(n)	$\frac{1}{1-Z^{-1}}$	|z| > 1
nu(n)	$\frac{z^{-1}}{(1-Z^{-1})^2}$	|z| > 1

$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-aZ^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$
$-n\,a^n u(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-aZ^{-1})^2}$	$\|z\| < \|a\|$
$(\cos\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$(\sin\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1-z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\sin\omega_0+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$(a^n\cos\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1-az^{-1}\cos\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$
$(a^n\sin\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1-az^{-1}\sin\omega_0}{1-2az^{-1}\sin\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$

2.4 CÁC PHƯƠNG PHÁP TÌM BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

Phương pháp dựa trên định lý tích phân Cauchy để tìm biểu thức của biến đổi z ngược đã định trình bày trong phần định nghĩa biến đổi z ngược. Phương pháp này có vẻ kinh điển, nhưng khá phức tạp. Bây giờ, ta sẽ trình bày một số phương pháp khác, đơn giản hơn, để tìm biến đổi z ngược từ một biểu thức X(z) kết hợp với một ROC xác định.

2.4.1. Phương pháp tra bảng:

Đây là phương pháp đơn giản và nhanh chóng nhất, để tìm biến đổi z ngược ta chỉ cần dựa vào bảng các cặp biến đổi z có sẵn (bảng 2.2).

Ví dụ 2.12:

Tìm biến đổi z ngược của $X(z)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$,với $|z| > 1/2$

Ta tra bảng, tìm được cặp biến đổi:

$$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| > |a|$$

áp dụng công thức biến đổi này với a = ½ , ta được $x(n) = (1/2)^n\, u(n)$.

2.4.2. Phương pháp triển khai thành các phân thức tối giản.

(PARTIAL FRACTION EXPANSION)

Trường hợp X(z) không có sẵn một cách tường minh trong bảng các cặp biến đổi z. Ta có thể biến đổi biểu thức X(z) thành tổng của các số hạng đơn giản có thể tra bản. Đây là trường hợp X(z) có dạng hữu tỉ, nghĩa là X(z) = P(z)/Q(z), với P(z) và Q(z) là các đa thức theo biến z hay z-1, bởi vì trong trường hợp này ta có thể khai triển X(z) thành các phân thức hữu tỉ đơn giản.

Giả sử rằng X(z) được biểu diễn bằng tỉ số của 2 đa thức của z-1, như sau:

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + ... + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + ... + a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \quad (2.46)$$

Biến đổi z có dạng này thường gặp khi nghiên cứu hệ thống tuyến tính bất biến pt (2.46) có thể viết lại:

$$X(z) = \frac{z^N}{z^M} \frac{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + b_2 z^{M-2} + ... + b_M}{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{M-2} + ... + a_N} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \quad (2.47)$$

Pt (2.47) chỉ ra rằng, sẽ có M zeros và N cực ở các vị trí khác 0 trên mặt phẳng phức. Thêm vào, cũng sẽ có M-N cực ở z = 0 nếu M > N hay có N-M zeros ở z=0 nếu N > M. Nói khác đi, biến đổi z có dạng pt(2.46) luôn luôn có số cực và zero bằng nhau trong mặt phẳng z hữu hạn, và không có cực và zero ở z = ∞.

Pt (2.46) còn có thể biểu diễn ở dạng:

$$X(z) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^{M} (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^{N} (1 - d_k z^{-1})} \quad (2.48)$$

Ở đây, c_k là các zeros khác 0 và dk là các cực khác 0 của X(z).

- **Trường hợp M < N,** bằng cách chia đa thức tử số cho đa thức mẫu số ta có thể đưa X(z) về dạng:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{M-N} c_k z^{-k} + X_{ht}(z) \quad (2.49)$$

Trong đó, ta có thể dễ dàng tìm biến đổi z ngược của đa thức bằng cách tra bảng kết hợp với áp dụng tính chất tuyến tính và tính chất dịch thời gian; còn $X_{ht}(z)$ là một hàm hữu tỉ có bậc của tử số nhỏ hơn bậc của mẫu số, Các hàm hữu tỉ có dạng như $X_{ht}(z)$ được gọi là hàm hữu tỉ thật sự (Proper rational function). Vậy, vấn đề là tìm biến đổi z ngược của các hàm hữu tỉ thật sự.

- **Trường hợp M > N, X(z) là hàm hữu tỉ thật sư và có N cực khác 0 phân biệt (không có cực kép):**

Khi đó X(z) có thể viết lại:

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} \quad (2.50)$$

với A_k là các hệ số mà ta cần phải tính. Để tính các hệ số A_k, ta nhân hai vế phương trình (2.49) với $(1 - d_k z^{-1})$ và cho $z = d_k$, ta tính được các hệ số A_k :

$$A_k = (1 - d_k x^{-1}) \left. X(z)/z \right|_{z = d_k}$$

Ví dụ 2.13: Giả sử x(n) có biến đổi z là:

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)} \qquad (2.52)$$

với ROC là |z| > 1. Tìm x(n).

Giải:

Từ ROC của X(z), ta thấy x(n) là một dãy bên phải. Vì M = N và tất cả các cực đều là bậc nhất. Ta có thể biểu diễn X(z) dưới dạng:

Hệ số b_0 được tìm bởi phép chia đa thức tử số cho đa thức mẫu số:

$$\begin{array}{l|l} \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1 & \quad 2 \\ \hline & z^{-2} + 2z^{-1} + 1 \\ & -z^{-2} + 3z^{-1} - 2 \\ \hline & 5z^{-1}\text{-}1 \end{array}$$

X(z) được viết lại: $X(z) = 2 + \dfrac{-1 + 5z^{-1}}{\left(a - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)}$

Đặt $X_{ht}(z) = \dfrac{-1 + 5z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)}$, ta sẽ khai triển $X_{ht}(z)$ thành tổng của 2 phân thức đơn giản, các hệ số

A_1 và A_2 được tính bằng cách áp dụng pt(2.51), như sau:

$$A_1 = \left.\frac{-1 + 5z^{-1}}{(1 - z^{-1})}\right|_{z = \frac{1}{2}} = 9$$

$$A_2 = \left.\frac{-1 + 5z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}\right|_{z = 1} = 8$$

X(z) trở thành : $X(z) = 2 - \dfrac{9}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} + \dfrac{8}{(1 - z^{-1})}$

Tra bảng ta được: $2 \longleftrightarrow 2(n)$

$$\frac{9}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} \longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$\frac{8}{(1-z^{-1})} \longleftrightarrow u(n)$$

Áp dụng tính chất tuyến tính, ta được:

$$x(n) = 2*(n) – 9\,(1/2)^n u(n) + 8\, u(n)$$

- Trường hợp M > N, X(z) là hàm hữu tỉ thật sư và có N cực khác 0, trong đó có cực képï:

Pt(2.47) có thể được viết lại:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{b_0 z^{N-1} + b_1 z^{N-2} + b_2 z^{N-3} + ... + b_M z^{N-M-1}}{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + ... + a_N} \qquad (2.53)$$

Sau đó khai triển X(z)/z thành tổng các phân thức hữu tỉ đơn giản. Giả sử, X(z) có cực kép bậc s tại d_j. Pt(2.53) sẽ được triển khai dưới dạng:

$$\frac{X(z)}{z} = \sum_{k=lk-j}^{N} \frac{A_k}{z-d_k} + \sum_{m=l}^{s} \frac{C_m}{(z-d_j)^m} \qquad (2.54)$$

Từ pt(2.54), ta viết lại X(z) dưới dạng:

$$X(z)= \sum_{k=lk-j}^{N} \frac{A_k}{1-d_k z^{-1}} + \sum_{m=l}^{s} \frac{C_m}{(z-d_j)^m} \qquad (2.55)$$

Các hệ số A_k được tính như trên, ta có thể tìm công thức tổng quát để tính các hệ số Cm , tuy nhiên công thức này khá phức tạp. Trong thực tế, để thực hiện một hệ thống lớn, người ta thường liên kết nhiều hệ thống bậc 2. Vì vậy, để đơn giản, ta chỉ cần khảo sát trường hợp nghiệm kép bậc 2 như trong ví dụ 2.14. Sau khi tìm được các hệ số A_k và C_m, ta áp dụng phương pháp tra bảng kết hợp với các tính chất tuyến tính và tính chất vi phân trong miền z để tìm biến đổi z ngược.

Ví dụ 2.14: Hãy xác định dãy nhân quả x(n) có biến đổi z là:

$$X(z)=\frac{1}{\left(1+z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)^2} \quad \text{Với ROC:} |z| > 1$$

Giải: Ta thấy X(z) có một nghiệm kép bậc 2 tại z = 1, ta viết lại X(z) dưới dạng:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{A}{z+1} + \frac{C_1}{z-1} + \frac{C_2}{(z-1)^2}$$

Các hệ số A và C_2 có thể tính được một cách dễ dàng như sau:

$$A = (z+1)\frac{X(z)}{z}\bigg|_{z=-1} = \frac{1}{4}$$

$$C_2 = (z-1)^2 \frac{X(z)}{z}\Bigg|_{z=1} = \frac{1}{2}$$

Để tính C_1, ta viết lại:

$$(z-1)^2 \frac{X(z)}{z} = (z-1)^2 \frac{A}{z+1} + (z-1)C_1 + C_2$$

Và lấy đạo hàm 2 vế của phương trình và cho z=1, ta được:

$$C_1 = \frac{d}{dz}\left[(z-1)^2 \frac{X(z)}{z}\right]\Bigg|_{z=1} = \frac{3}{4}$$

Thay các hệ số đã tính được và biểu thức của X(z)/z:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{4(z+1)} + \frac{3}{4(z-1)} + \frac{1}{2(z-1)^2}$$

Cuối cùng X(z) được khai triển thành các phân thức hữu tỉ đơn giản, như sau:

$$X(z) = \frac{1}{4}\frac{1}{1+z^{-1}} + \frac{3}{4}\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

Áp dụng phương pháp tra bảng kết hợp với các tính chất tuyến tính, vi phân trong miền z, với x(n) là một dãy nhân quả, ta thu được:

$$x(n) = \tfrac{1}{4}(-1)^n u(n) + \tfrac{3}{4}u(n) + \tfrac{1}{2}n\,u(n) = [\tfrac{1}{4}(-1)^n + \tfrac{3}{4} + n/2]u(n)$$

2.4.3. Phương pháp triển khai thành chuỗi luỹ thừa (POWER SERRIES EXPANSION)

Từ định nghĩa của biến đổi z, ta thấy X(z) là môt chuỗi lũy thừa, trong đó x(n) chính là hệ số của z-n . Ta viết lại:

$$\text{X(z)} = \sum_{n=\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \ldots + x(-2)z^2 + x(-1)z^1 + x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \ldots \quad (2.56)$$

Vậy, nếu ta có thể đưa X(z) về dạng này, ta sẽ xác định được giá trị của x(n) tương ứng với giá trị của n.

1/. Khai triển một tích số:

Ví dụ 2.15: Hãy xác định dãy x(n) mà biến dổi z của nó là:

$$\text{X(z)} = z^2(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1+z^{-1})(1-z^{-1})$$

Ta thấy X(z) cũng có dạng hàm hữu tỉ, nhưng chỉ có một cực là z = 0, Ta có thể khai triển thành một chuỗi lũy thừa như sau:

$$\text{X(z)} = z^2 - \frac{1}{2}z - 1 + \frac{1}{2}z^{-1}$$

Vậy x(n) là: $\text{x(n)} = \left|\ldots,0,0,1,-\frac{1}{2},\underset{\uparrow}{-1},\frac{1}{2},0,0,\ldots\right|$

2/. Khai triển Taylor

Phương pháp này thường được áp dụng khi X(z) có dạng logarit, sin, hyperbolic, hàm mũ. Ta nhắc lại công thúc Taylor của một hàm f(x) tại điểm x = x_0, như sau:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (2.57)$$

trong đó, c nằm giữa x và x_0.

Nếu trong công thức (2.54), ta cho x0 = 0, ta được:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x)^{n+1} \quad (2.58)$$

trong đó, c nằm giữa 0 và x, công thức (2.58) được gọi là công thức Mac Laurin.

Ví dụ 2.16:

Hãy xác định dãy x(n) có biến đổi z là: X(z) = ln(1 + az^{-1}), với ROC là |z| > |a|.

Giải:

Khai triển Taylor của X(z) theo z^{-1} , với n n $\rightarrow \infty$, ta có:

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^x z^{-x}}{n}$$

Vậy:

$$x(n) = \begin{cases} (-1)^{n+1} a^n / n & n>0 \\ 0 & n \le 0 \end{cases}$$

3/. Khai triển bằng phép chia:

Phương pháp này thường được thực hiện khi X(z) có dạng hữu tỉ: X(z) = P(z)/Q(z). Ta có thể thực hiện phép chia đa thức P(z) cho Q(z) để có được một chuỗi lũy thừa, từ đó, nhận được từng mẫu của dãy x(n).

Ví dụ 2.17: Hãy xác định biến đổi Z ngược của:

$$X(z) = \frac{1}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

khi: (a) ROC là |z| > 1 (b) ROC là |z| < 0.5

Giải:

(a) Từ ROC của X(z) ta thấy x(n) là một dãy bên phải. Vì vậy , ta sẽ tìm một khai triển chuỗi lũy thừa với số mũ âm. Bằng cách chia tử cho mẫu xếp theo số mũ âm dần, ta được:

$$X(z) = \frac{1}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}} = 1 + \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{7}{4}z^{-2} + \frac{15}{8}z^{-3} + \frac{31}{16}z^{-4} + ...$$

So sánh với pt(2.56), ta được:

$$x(n) = \{\ldots, 0, 1, 3/2, 7/4, 15/8, 31/16, \ldots\}$$
$$\uparrow$$

(b) Từ ROC của X(z), ta thấy x(n) là một dãy bên trái. Vì vậy, ta phải thực hiện phép chia sao cho thu được khai triển lũy thừa dương của z. Muốn vậy, ta xếp các đa thức tử số và mẫu số theo thứ tự sao cho lũy thừa của z-1 giảm dần (tức số mũ ít âm dần cho đến 0). Ta thực hiện phép chia như sau:

$$0,5z^{-2} - 1,5z^{-1} + 1 \quad \Big| \quad 1 \qquad \overline{2z^2 + 6z^3 + 14z^4 + 30z^5 + 62z^6 + \ldots}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{1 - 3z + 2z^2} \\
\quad 3z - 2z^2 \\
\quad \underline{3z - 9z^2 + 6z^3} \\
\qquad 7z^2 - 6z^3 \\
\qquad \underline{7z^2 - 21z^3 + 14z^4} \\
\qquad\quad 15z^3 - 14z^4 \\
\qquad\quad \underline{15z^3 - 45z^4 + 30z^5} \\
\qquad\qquad 31z^4 - 30z^5 \\
\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Ta thu được:

$$X(z) = \frac{1}{0.5z^{-2} - 1.5z^{-1} + 1} = 2z^2 + 6z^3 + 14z^4 + 30z^5 + 62z^6 + \ldots$$

Trong trường hợp này, $x(n) = 0$ với $n \geq 0$. So sánh với pt(2,52), ta được kết quả:

$$x(n) = \{\ldots, 62, 30, 14, 6, 2, 0, 0, \ldots\}$$
$$\uparrow$$

2.5 GIẢI PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG DÙNG BIẾN ĐỔI Z MỘT PHÍA

2.5.1. Biến đổi Z một phía (UNILATERAL Z-TRANSFORM)

▪ **Định nghĩa:**

Biến đổi z một phía của tín hiệu x(n) đã được định nghĩa ở pt(2.4), ta nhắc lại:

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \qquad (2.59)$$

Nó khác với biến đổi z hai phía ở chỗ chỉ tính các giá trị x(n) với n (0, giới hạn dưới của tổng là 0.

Ta thấy, nếu x(n) là một tín hiệu nhân quả (nghĩa là x(n) = 0 với mọi n < 0) thì biến đổi z một phía và biến đổi z hai phía là đồng nhất, ngược lại, nếu x(n) (0 khoi n < 0 thì chúng khác nhau.

ROC của tất cả các biến đổi z một phía là |z| > r_H (r_H là một số thực dương), với biến đổi z một phía có dạng hữu tỉ thì rH là modul của cực xa gốc tọa độ nhất. Vì vậy, khi sử dụng biến đổi z một phía, người ta thường không đề cập đến ROC .

Ví dụ 2.18: Xét tín hiệu x(n) =δ(n)

Biến đổi Z hai phía: $X(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = 1$

Biến đổi Z một phía: $X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = 1$

Ta thấy, vì x(n) = 0 với mọi n < 0 nên biến đổi z hai phía và một phía là giống nhau.

Ví dụ 2.19: Xét tín hiệu x(n) = δ (n + 1)

Trong trường hợp này, xung đơn vị xuất hiện ở thời điểm n = -1.

Biến đổi z hai phía: $X(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n+1) z^{-n} = z$

Biến đổi Z một phía: $X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n+1) z^{-n} = 0$

Ta thấy, vì x(n) không nhân quả, nên biến đổi z hai phía và một phía là phân biệt nhau.

- **Tính chất:**

Hầu hết các tính chất của biến đổi z hai phía đều đúng với biến đổi z một phía.

• Tính chất dịch thời gian:

Khi dịch trễ dãy x(n) đi k mẫu thì hàm ảnh Z của nó được nhân thêm thừa số z^{-k}

Nếu : ZT[x(n)] = X(n) với $RC[X(z)]: R_{x-} < |z| < R_{x+}$

Thì : Y(z) = ZT[y(n)=x(n-k)] = z^{-k}X(z) [2.60]

Với RC[Y(z)] = RC[X(z)] , trừ điểm z = 0 nếu k >0 và điểm z = ∞ nếu k < 0

Chứng minh : Theo biểu thức biến đổi Z thuận [2.1-1] có :

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-k).z^{-n} = z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-k).z^{-(n-k)} = z^{-k} X(n)$$

Tính chất trễ thường được sử dụng để tìm biến đổi Z của các dãy trễ .

Ví dụ 2.20:

Đáp ứng xung của một hệ thống LTI nghỉ là h(n) = a^nu(n), với |a| < 1. Hãy xác định đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào là tín hiệu nhảy bậc đơn vị khi n $\to \infty$.

Giải: Đáp ứng của hệ thống là:

$$y(n) = h(n)*x(n)$$

với : x(n) = u(n). Rõ ràng, nếu ta kích thích một hệ thống nhân quả với một tín hiệu vào nhân quả thì tín hiệu ra cũng nhân quả. Vì x(n), h(n) và y(n) đều là các dãy nhân quả, nên biến đổi Z một phía và biến đổi Z hai phía là đồng nhất. Áp dụng tính chất chập ta được:

$$Y(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z^2}{(z-1)(z-a)} \qquad \text{ROC:} |z|>|a|$$

Suy ra: $(z-1)Y(z)=\frac{z^2}{(z-a)}$

Vì |a| < 1 nên ROC của (z-1)Y(z) chứa vòng tròn đơn vị. Áp dụng định lý giá trị cuối, ta được:

$$\lim_{n\to\infty} y(n)=\lim_{z\to 1}\frac{z^2}{z-a}=\frac{1}{1-a}$$

2.5.2. Giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng:

Một công dụng quan trọng của biến đổi z một phía là phân tích hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng không có điều kiện nghỉ. Vì kích thích được đưa vào ở một thời gian xác định, ta coi như n = 0, nên tín hiệu vào cũng như tín hiệu ra chỉ được khảo sát ở các thời điểm n ≥ 0, điều này không có nghĩa là các tính hiệu ra bằng 0 ở các thời điểm n < 0. Ta thấy, biến đổi z một phía là một công cụ thích hợp trong trường hợp này. Ta xét ví dụ sau đây:

Ví dụ 2.21: Xác định đáp ứng nhảy bậc đơn vị của hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân sau:

y(n) = ay(n-1) + x(n)   , với –1 < a < 1

với điều kiện đầu là: y(-1) = 1.

Giải: Lấy biến đổi Z một phía hai vế của phương trình sai phân ta được:

$$Y^+(z) = a[z^{-1}Y^+(z) + y(-1)] + X^+(z)$$

Với x(n) = u(n) ta có $X^+(z)$ = 1/(1-z-1). Thay thế y(-1) và $X^+(z)$ vào phương trình trên và sắp xếp lại ta được:

$$Y^+(z)=\frac{a}{1-az^{-1}}+\frac{1}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})}$$

Tìm biến đổi Z ngược bằng phương pháp khai triển thành các phân thức hữu tỉ đơn giản, ta được:

2.6 PHÂN TÍCH HỆ THỐNG LTI TRONG MIỀN Z

2.6.1. Hàm truyền đạt của hệ thống LTI

2.6.1.1. Hàm truyền đạt (hàm hệ thống)

Từ chương I, ta đã thấy rằng một hệ thống LTI hoàn toàn có thể đặc trưng trong miền thời gian bởi đáp ứng xung h[n] của nó, với tín hiệu vào x[n], đáp ứng của hệ thống được tính bởi tổng chập:

y[n] = x(n) * h(n) (2.64)

Chúng ta cũng thấy được các khó khăn khi xác định đáp ứng của hệ thống trực tiếp bằng tổng chập.

Gọi X(z) và H(z) lần lượt là biến đổi z của x(n) và h(n), áp dụng tính chất chập của biến đổi Z, ta được biến đổi Z của y(n) như sau:

Y(z) = X(z).H(z) (2.65)

với một miền hội tụ thích hợp.

Vậy, thông qua phép biến đổi Z, tổng chập của hai dãy đã biến thành phép nhân đơn giản. Sau khi có được Y(z), ta dùng phép biến đổi Z ngược để tính đáp ứng y(n). Cách làm này rõ ràng là dễ dàng hơn cách tính trực tiếp từ tổng chập.

Pt(2.65) có thể được viết lại: H(z)= $\frac{Y(z)}{X(z)}$ (2.66)

H(z) được gọi là hàm hệ thống (System function) hay hàm truyền đạt (Transfer function). Vì H(z) và h(n) là một cặp duy nhất, nên một hệ thống LTI bất kỳ hoàn toàn có thể được đặc tả bởi hàm hệ thống của nó.

2.6.1.2. Hàm truyền đạt của một hệ thống được đặc trưng bởi LCCDE

Xét một hệ thống LTI mà quan hệ vào ra của nó thỏa mãn phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng (LCCDE) như sau:

$$\sum_{K=0}^{N} a_K y(n-K) = \sum_{K=0}^{M} b_K y(n-K) \qquad (2.67)$$

Chúng ta cũng đã biết rằng, từ phương trình sai phân (2.67) ta có thể tìm được y(n) theo phương pháp độ qui. Nếu điều kiện ban đầu nghỉ được thỏa mãn, hệ thống sẽ là tuyến tính, bất biến và nhân quả.

Áp dụng biến đổi Z cho cả hai vế của pt(2.67) và để ý đến tính chất tuyến tính, dịch thời gian của biến đổi Z, ta

Thu được : $$\sum_{K=0}^{N} a_K z^{-K} Y(z) = \sum_{K=0}^{M} b_K z^{-K} X(z)$$

Hay: $$\left(\sum_{K=0}^{N} a_K z^{-K}\right) Y(z) = \left(\sum_{K=0}^{M} b_K z^{-K}\right) X(z) \qquad (2.68)$$

Suy ra hàm truyền đạt của hệ thống có dạng:

$$H(z)\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{K=0}^{M} b_K z^{-K}}{\sum_{K=0}^{N} a_K z^{-K}} \qquad (2.69)$$

Từ các điều kiện đầu của LCCDE, nếu ta xác định được ROC của H(z) thì H(z) đặc tả duy nhất một hệ thống.

Một cách biểu diễn khác:

$$H(z)=\left(\frac{b_0}{a_0}\right)\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-c_K z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_K z^{-1})} \qquad (2.70)$$

Mỗi thừa số ($1-c_k z^{-1}$) trong tử số góp vào một zero ở $z=c_k$. Tương tự, mỗi thừa số ($1-d_k z^{-1}$) trong mẫu số đóng góp vào một cực ở $z=d_k$.

Có một mối quan hệ rõ ràng giữa phương trình sai phân và biểu thức đại số của hàm truyền đạt tương ứng. Như ta thấy, trong đa thức tử số của pt(2.69) có cùng các hệ số với vế phải của pt(2.67) và đa thức mẫu số của pt(2.69) có cùng các hệ số với vế trái của phương trình (2.67). Như vậy, biết hàm truyền đạt ta có thể suy ra phương trình sai phân và ngược lại.

Ví dụ 2.22: Giả sử rằng hàm truyền đạt của hệ thống LTI là:

$$H(z)=\frac{\left(1+z^{-1}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)} \qquad \text{với ROC: } |z|>\frac{3}{4} \qquad (2.71)$$

Từ ROC của H(z), ta thấy đây là một hệ thống nhân quả.

Để tìm phương trình sai phân biểu diễn hệ thống, ta đưa H(z) về dạng của pt(2.69):

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}}=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

Suy ra: $$\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}\right)Y(z)=\left(1+2z^{-1}+z^{-2}\right)X(z)$$

và phương trình sai phân là:

$$y(n)+\frac{1}{4}y(n-1)-\frac{3}{8}y(n-2)=x(n)+2x(n-1)+x(n-2) \qquad (2.72)$$

Vì đây là hệ thống LTI nhân quả nên pt(2.72) thỏa điều kiện đầu nghỉ.

Ví dụ 2.23: Hãy xác định hàm truyền đạt H(z) của hệ thống mô tả bởi LCCDE:

$$y(n)=\frac{1}{2}y(n-1)+2x(n)$$

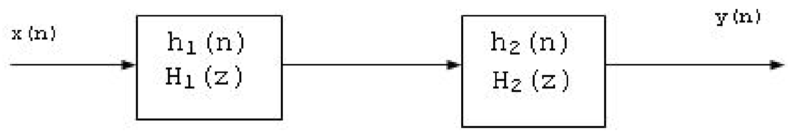
Nếu điều kiện đầu chưa xác định, LCCDE hoặc H(z) đã cho có thể mô tả bao nhiêu hệ thống khác nhau? Trong mỗi trường hợp hãy tính đáp ứng xung tương ứng (xem như bài tập).

2.6.1.3. Sự kết nối của các hệ thống LTI

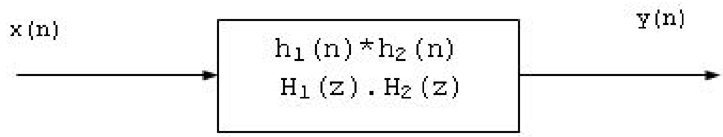
Có hai loại kết nối cơ bản: kết nối liên tiếp (cascade) và kết nối song song. Ở chương I ta đã định nghĩa các phần tử cơ bản của một hệ thống rời rạc như: cộng, nhân, nhân với hệ số, trễ một mẫu và cũng đã xác định đáp ứng xung của hệ thống tương đương của hai hệ thống mắc liên tiếp hoặc mắc song song. Ở đây, ta sẽ mô tả hệ thống tương đương bằng hàm truyền đạt.

Cho hai hệ thống có đáp ứng xung là h1(n) và h_2(n), hàm truyền đạt tương ứng là H_1(z) và H_2(z) với các miền hội tụ xác định.

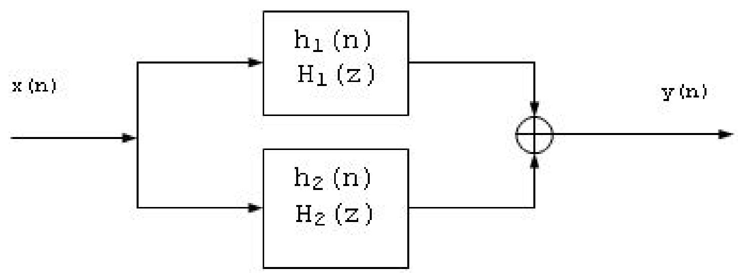
- Mắc liên tiếp (Cascade):



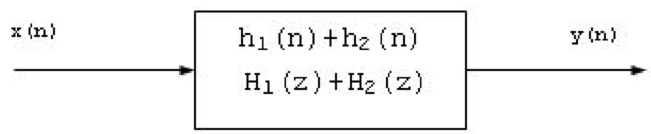
hệ thống tương đương:



Mắc song song (parallel)

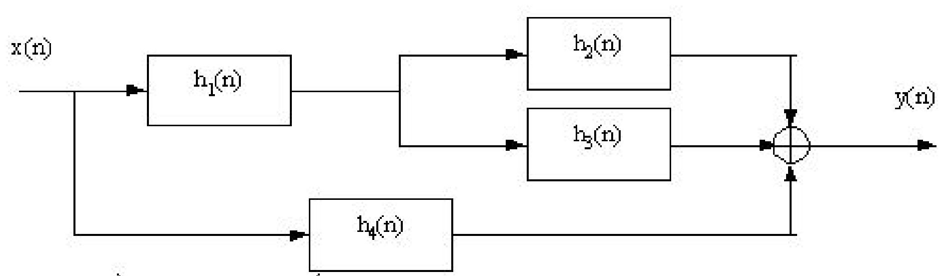


Hệ thống tương đương:



Từ 2 kết nối cơ bản trên ta có thể cấu trúc 1 hệ thống phức tạp. Ngược lại ta có thể phân chia 1 hệ thống lớn, phức tạp thành nhiều hệ thống nhỏ hơn kết nối nhau để tiện thiết kế.

Ví dụ 2.24: Hãy xác định hàm truyền đạt của hệ thống tương đương của hệ thống được kết nối bởi các hệ thống con như sau:



Hàm truyền đạt của hệ thống tương đương là:H(z) = H4(z)+H1(z)[H2(z)+H3(z)]

2.6.2. Đáp ứng của hệ thống cực-zero nghỉ

Xét một hệ thống cực- zero có thể được mô tả bởi LCCDE và hàm truyền đạt của nó là:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \qquad (2.73)$$

Giả sử tín hiệu vào x(n) có biến đổi Z là X(z) có dạng hữu tỉ:

$$X(z) = \frac{N(z)}{Q(z)} \qquad (2.74)$$

(Hầu hết các tín hiệu trong thực tế mà ta quan tâm thường có dạng hữu tỉ).

Nếu hệ thống ta xét là một hệ thống nghỉ, các điều kiện đầu của phương trình sai phân bằng 0, nghĩa là, y(-1) = y(-2) = ... =y(-N) = 0. Biến đổi Z của tín hiệu ra là:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{B(z).N(z)}{A(z).Q(z)} \qquad (2.75)$$

Để tránh trường hợp cực kép, ta giả sử rằng H(z) chỉ có các cực đơn $p_1, p_2, ..., p_N$ và tín hiệu vào cũng chỉ có cực đơn $q_1, q_2, ..., q_L$, sao cho thoả điều kiện p_k (q_m với tất cả k = 1,2,...,N và m=1,2,...,L . Để tránh sự khử cực, ta giả sử các zero của B(z) và N(z) cũng không trùng với các cực $\{p_k\}$ và $\{q_m\}$. Như vậy, các cực và zero không khử nhau. Khi đó Y(z) sẽ được khai triển thành các phân thức hữu tỉ đơn giản:

$$Y(z) = \sum_{K=1}^{N} \frac{A_K}{1 - p_K z^{-1}} + \sum_{K=1}^{L} \frac{Q_K}{1 - q_K z^{-1}} \qquad (2.76)$$

Thực hiện biến đổi Z ngược, ta được tín hiệu ra có dạng (chú ý điều kiện nghỉ):

$$y(n) = \sum_{K=1}^{N} A_K \left(p_K\right)^n u(n) + \sum_{K=1}^{L} Q_K (q_K)^n u(n) \qquad (2.77)$$

Ta thấy y(n) có thể chia làm 2 phần:

- Phần thứ nhất là hàm của các cực p_K của hệ thống được gọi là đáp ứng tự nhiên (natural response) của hệ thống. Sự ảnh hưởng của tín hiệu vào lên phần này thông qua các thừa số $\{A_k\}$.

- Phần thứ hai là hàm của các cực $\{q_K\}$ của tín hiệu vào, được gọi là đáp ứng ép (forced response) của hệ thống. Ảnh hưởng của hệ thống lên phần đáp ứng này thông qua các thừa số $\{Q_k\}$.

Chú ý:

- Các thừa số $\{A_k\}$ và $\{Q_k\}$ là hàm của cả hai tập cực $\{p_k\}$ và $\{q_k\}$ (xem lại cách tính các thừa số này).

- Đáp ứng tự nhiên của hệ thống khác với đáp ứng của hệ thống khi kích thích bằng 0. Thật vậy, nếu tín hiệu vào x(n) = 0 thì X(z) = 0, suy ra Y(z) = 0 và kết quả đáp ứng của hệ thống là y(n) = 0.

- Đáp ứng tự nhiên của một hệ thống cũng phụ thuộc vào kích thích. Điều này thể hiện ở chỗ các thừa số $\{A_k\}$ là hàm của cả hai tập cực $\{p_K\}$ và $\{q_K\}$.

Khi X(z) và H(z) có chung một hoặc nhiều cực, hay khi X(z) và/hoặc H(z) có cực kép, thì Y(z) sẽ có cực kép. Kết quả là khai triển phân thức hữu tỉ của Y(z) sẽ chứa các thừa số có dạng, với k=1,2,...,s. Ở đây s là bậc của cực kép pi . Biến đổi Z ngược của các số hạng có chứa thừa số này sẽ chứa các thừa số có dạng $n^{k-1}p_i^n$.

2.6.3. Đáp ứng của hệ thống cực-zero với điều kiện đầu khác 0.

Giả sử tín hiệu x(n) được đưa vào hệ thống cực-zero ở thời điểm n=0. Như vậy, tín hiệu x(n) đã được giả sử là nhân quả. Ảnh hưởng của các tín hiệu vào trước đó lên hệ thống được phản ánh qua các điều kiện đầu y(-1),y(-2),y(-3),... , y(-N). Vì tín hiệu vào là nhân quả và ta chỉ quan sát tín hiệu ra y(n) ở các thời điểm n ≥ 0, nên chúng ta phải dùng biến đổi Z một phía.

Tín hiệu ra có dạng (ta luôn luôn có thể đưa LCCDE về dạng này):

$$y(n)=\sum_{K=1}^{N}a_K\,y(n-K)+\sum_{K=0}^{M}b_K\,x(n-K)$$

và biến đổi Z một phía của nó là:

$$Y^+(z)=-\sum_{K=1}^{N}a_K z^{-K}\left[Y^+(z)+\sum_{n=1}^{K}y(-n)z^n\right]+\sum_{K=0}^{M}b_K z^{-K}X^+(z)$$

$$Y^+(z)=\frac{\sum_{K=0}^{M}b_K z^{-1}}{\sum_{K=0}^{N}a_K z^{-1}}X(z)-\frac{\sum_{K=0}^{N}a_K z^{-1}\sum_{n=1}^{K}y(-n)z^n}{1+\sum_{K=0}^{N}a_K z^{-K}}$$

(Vì x(n) nhân quả nên $X^+(z) = X(z)$)

$$Y^+(z)=H(z).X(z)+\frac{N_0(z)}{A(z)} \qquad (2.78)$$

Với: $$N_0(z)=\sum_{K=1}^{N}a_K z^{-1}\sum_{n=1}^{K}y(-n)z^n$$

Từ pt(2.78) ta thấy đáp ứng của hệ thống với điều kiện đầu khác 0 có thể được chia làm 2 phần:

- Phần thứ nhất là: $Y_{zs}(z) = H(z)X(z)$ được gọi là đáp ứng trạng thái zero (zero - state response) của hệ thống. Đây chính là đáp ứng của hệ thống khi nó thỏa điều kiện nghỉ.

- Phần thứ hai là:Ġ được gọi là đáp ứng tín hiệu vào zero (zero - input response) của hệ thống.

Đáp ứng tổng được xác định bởi biến đổi Z ngược $y_{zs}(n)$ của $Y_{zs}(z)$ và $y_{zi}(n)$ của $Y_{zi}(z)$, đó là:

$$y(n) = y_{zs}(n) + y_{zi}(n).$$

Vì mẫu số của Y_{zi}^+, $A(z)$, có các cực là p1,p2,…,pN. Kết quả, đáp ứng tín hiệu vào zero có dạng:

$$y_{zi}(n) = \sum_{K=1}^{N} D_K (p_K)^n u(n) \qquad (2.79)$$

Kết quả này được thêm vào pt(2.77) và các số hạng có chứa các cực {p_K} có thể được liên kết để đáp ứng tổng có dạng:

$$y(n) = \sum_{K=1}^{N} A'_K (p_K)^n u(n) + \sum_{K=1}^{L} Q_K (q_K)^n u(n) \qquad (2.80)$$

Ở đây,A_k = A_k+D_k

Từ những gì đã trình bày ở trên, ta thấy rằng ảnh hưởng của điều kiện đầu làm thay đổi đáp ứng tự nhiên của hệ thống thông qua việc làm thay đổi các thừa số {A_K}, không có các cực mới được đưa vào với điều kiện đầu khác 0, hơn nữa không có sự ảnh hưởng đến đáp ứng ép của hệ thống.

Ví du 2.25: Xác định đáp ứng với hàm nhảy bậc đơn vị của hệ thống được mô tả bởi phương trình LCCDE sau:

y(n)=0,9y(n-1) - 0,81y(n-2) + x(n)

với các điều kiện đầu như sau:
(a) y(-1) = y(-2) = 0
(b) y(-1) = y(-2) = 1

Giải:

Hàm hệ thống $H(z) = \dfrac{1}{1-0.9z^{-1}+0.8z^{-2}}$, hệ thống này có hai cực phức $p_1 = 0.9e^{\frac{j\pi}{3}}$ và $p_2 = 0.9\dfrac{-j\pi}{3}$.

Hàm hệ thống : $H(z)\dfrac{1}{1-0,9z^{-1}+0,8z^{-2}}$ Hệ thống này có hai cực có hai cực phức ở : $P_1 = 0,9e^{\frac{jx}{3}}$ và $P_2 = 0,9e^{\frac{-jx}{3}}$

Biến đổi z của hàm nhảy bậc đơm vị u(n) là: $X(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}}$

Vậy: $Y(z) = \dfrac{1}{\left(1-0,9e^{\frac{jx}{3}}\right)\left(1-0,9e^{\frac{-je}{3}}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}$

(đáp ứng trạng thái zero:

$$y_z(n) = \left[1,099 + 1,089(0,9)^n \cos(\frac{\pi}{3}n - 5,2^{\circ 0})\right]u(n)$$

(a) Vì điều kiện đầu bằng 0 nên y(n) = y_{zs}(n).

(b) Với điều iện đầu y(-1) = y(-2) = 1, thành phần thêm vào trong biến đổi z là:

$$Y_{zi}(z) = \frac{N_0(z)}{A(z)} = \frac{0,09 - 0,81z^{-1}}{1 - 0,9z^{-1} + 0,81z^{-5}}$$

$$= \frac{0,26 + j0,4936}{1 - 0,9e^{\frac{jz}{3}} z^{-1}} + \frac{0,026 + j0,4936}{1 - 0,9e^{\frac{-jz}{3}} z^{-1}}$$

Kết quả, đáp ứng tín hiệu vào bằng 0 là:

Trong trường hợp này, đáp ứng tổng có biến đổi z là:

$Y(z) = Y_{zs}(z) + Y_{zi}(z)$

Lấy biến đổi z ngược ta có đáp ứng tổng:

$$y(n) = 1,099u(n) + 1,44(0,9)^n \cos(\frac{\pi}{3}n - 38^0)u(n)$$

2.6.4. Đáp ứng quá độ (TRANSIENT RESPONSE) và đáp ứng xác lập (STEADY - STATE RESPONSE)

Như ta đã trình bày ở phần trước, đáp ứng của hệ thống với một tín hiệu vào xác định có thể được tách ra làm 2 phần, đáp ứng tự nhiên và đáp ứng ép. Đáp ứng tự nhiên của một hệ thống nhân quả có dạng:

$$y_{nr}(n) = \sum_{K=1}^{N} A_K (p_K)^n u(n) \qquad (2.81)$$

Trong đó, $\{p_K\}, k = 1,2,..., N$

là các cực của hệ thống và A_K là các thừa số tùy thuộc vào tính chất của kích thích và điều kiện đầu.

Nếu $p_k < 1$ với mọi k, thì $y_{nr}(n)$ sẽ hội tụ đến 0. Khi $n \to \infty$. Trong trường hợp này, ta gọi đáp ứng tự nhiên là đáp ứng quá độ (transient respone). Tốc độ giảm phụ thuộc vào độ lớn của các cực. Nếu tất cả các cực nhỏ, tốc độ suy giảm nhanh. Ngược lại, nếu có một hoặc nhiều cực ở gần vòng tròn đơn vị, thì đáp ứng quá độ được duy trì trong một thời gian dài.

Đáp ứng ép của hệ thống có dạng:

$$y_n(n) = \sum_{l=1}^{L} Q_1 (q_1)^n u(n) \qquad (2.82)$$

Ở đây, $\{q_K\}, k = 1,2,..., L$

là các cực trong biến đổi z của tín hiệu vào và Q_k là các thừa số phụ thuộc

đặc tính của hệ thống và tín hiệu vào. Nếu tất cả các cực của tín hiệu nằm trong vòng tròn đơn vị, $y_{fr}(n)$ giảm về 0 khi $n \to \infty$,như trong trường hợp đáp ứng tự nhiên. Ta không nên ngạc nhiên vì tín hiệu vào cũng là 1 tín hiệu quá độ. Ngược lại, khi tín hiệu vào là một tín hiệu nhân quả hình sin, các cực sẽ nằm trên vòng tròn đơn vị, và kết quả là đáp ứng ép là một tín hiệu điều hòa (sin) khi $n \geq 0$. Trong trường hợp này đáp ứng ép được gọi là đáp ứng xác lập (steady-state respone) của hệ thống. Vì vậy, để duy trì đáp ứng xác lập với $n \geq 0$, tín hiệu vào cũng phải được duy trì trong suốt thời gian đó.

Ví dụ 2.26: Xác định đáp ứng quá độ và đáp ứng xác lập của hệ thống được mô tả bởi LCCDE:

$$y(n)=0{,}5y(n-1)+x(n)$$

Khi tín hiệu vào $x(n) = 10\cos(\frac{\pi n}{4})u(n)$

Hệ thống thỏa điều kiện nghỉ.

Giải:

Hàm truyền đạt: $H(z) = \frac{1}{1-0{,}5z^{-1}}$

Suy ra hệ thống có cực ở z=0,5

Biến đổi z của kích thích có dạng:

Vì Y(z) = H(z)X(z) , suy ra:

$$Y(z) = \frac{\left[10(1-\frac{1}{\sqrt{2}})z^{-1}\right]}{\left(1-0{,}5z^{-1}\right)\left(1-e^{\frac{j\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-e^{\frac{-j\pi}{4}}z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{6{,}3}{1-0{,}5z^{-1}} + \frac{6{,}78e^{-j28{,}7}}{1-e^{\frac{j\pi}{4}}z^{-1}} + \frac{6{,}78e^{j28{,}7^0}}{1-e^{\frac{j\pi}{4}}z^{-1}}$$

Đáp ứng tự nhiên hay đáp ứng quá độ là: $y_{nr}(n)=6{,}3(0{,}5)^n u(n)$

Đáp ứng ép hay đáp ứng xác lập là:

ta thấy đáp ứng xác lập tồn tại trong suốt thời gian n ≥0 khi tín hiệu vào tồn tại.

2.6.5. Hệ thống ổn định và nhân quả.

Khi thành lập pt(2.69) từ pt(2.67) chúng ta đã giả sử rằng hệ thống là LTI, nhưng đã không đề cập đến tính chất ổn định và nhân quả. Tương ứng, từ phương trình sai phân ta có thể thu được biểu thức đại số của hàm truyền đạt, nhưng không thu được miền hội tụ. Điều này phù hợp với thực tế, như đã thấy trong chương I, đó là phương trình sai phân không xác định một cách duy nhất đáp ứng xung của hệ thống LTI, khi chưa xác định điều kiện đầu. Vì vậy, hàm truyền đạt như phương trình (2.69) hay (2.70), sẽ có nhiều sự chọn lựa khác nhau cho miền hội tụ tương ứng với cùng một phương trình sai phân.

Tuy nhiên, nếu chúng ta giả sử rằng hệ thống có tính nhân quả, nghĩa là h[n] là một dãy bên phải và vì vậy ROC của H(z) phải ở bên ngoài của vòng tròn đi qua điểm cực ngoài cùng.

Nếu chúng ta giả sử hệ thống là ổn định, nghĩa là đáp ứng xung phải thỏa mãn

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)| < \infty \qquad (2.83)$$

pt(2.83) đồng nghĩa với $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)| < \infty$ ở tại $|z| = 1$ (2.84)

vậy:

Điều kiện ổn định là ROC của H(z) chứa vòng tròn đơn vị, vậy, tổng hợp lại điều kiện để hệ thống ổn định và nhân quả là tất cả các điểm cực phải nằm trong vòng tròn đơn vị.

Ví dụ 2.27: Xét một hệ thống LTI có LCCDE như sau:

$$y(n) - \frac{5}{2}y(n-1) + y(n-2) = x(n) \qquad (2.85)$$

H(z) được cho bởi: $H(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}} = \dfrac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)}$ (2.86)

Đồ thị cực-zero của H(z) được vẽ ở hình 2.9, có 3 khả năng để chọn ROC:

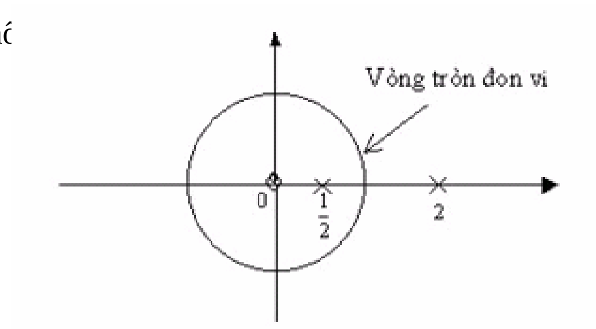
- Nếu hệ thống được giả sử là hệ nhân quả, thì ROC: $|z| > 2$

Trong trường hợp này hệ thống không ổn định vì ROC không chứa vòng tròn đơn vị.

- Nếu hệ thống được giả sử là ổn định, thì ROC:

- Nếu chọn ROC:

thì hệ thố .



Hình 2.9: Đồ thị cực-zero trong ví dụ 2.27

2.7 THỰC HIỆN CÁC HỆ THỐNG RỜI RẠC

2.7.1. Mở đầu:

Như ở mục 2.6.2 ta thấy rằng một hệ thống LTI có hàm truyền đạt hữu tỉ thì có thể được biểu diễn bởi một phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng (LCCDE). Phương trình sai phân này có thể suy ra một cách trực tiếp từ hàm truyền đạt, ngược lại, nếu cho trước LCCDE ta có thể suy ra hàm truyền đạt.

Để thực hiện các hệ thống rời rạc, từ hàm truyền đạt hay LCCDE ta sẽ biểu diễn cấu trúc hệ thống bằng sơ đồ khối hoặc giản đồ (graph), bao gồm sự kết nối của các phần tử cơ bản là cộng, nhân, nhân với hằng số và phép trễ đơn vị.

Các phép trễ hàm ý rằng cần phải lưu trữ các giá trị của dãy trong quá khứ và vì vậy chúng là các thanh ghi hay bộ nhớ.

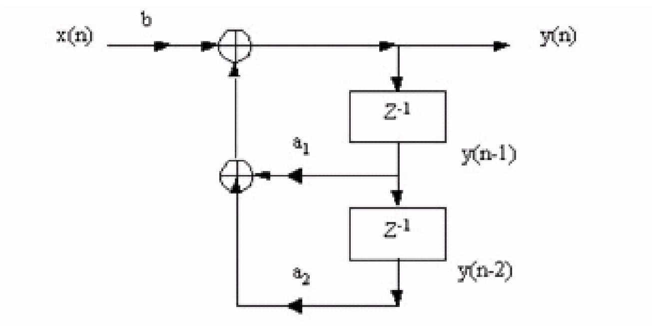
Ví dụ: 2.28: Ta xét hệ thống có phương trình sai phân:

y(n)=a_1y(n-1)+a_2y(n-2)+bx(n) (2.87)

Sẽ tương ứng với một hàm truyền đạt là:

$$H(z)=\frac{b}{1-a_1z^{-1}-a_2z^{-2}} \quad (2.88)$$

Sơ đồ khối biểu diễn hệ thống được trình bày trong hình *2.10. Đây là một* hệ thống bậc 2.



Hình 2.10: Sơ đồ khối biểu diễn hệ thống trong ví dụ 2.28

Một sơ đồ khối là cơ sở để xác định cấu trúc phần cứng cho một hệ thống hay để xây dựng một thuật toán cho phần mềm.

2.7.2. Hệ thống IIR

1. Dạng trực tiếp I (Direct form I)

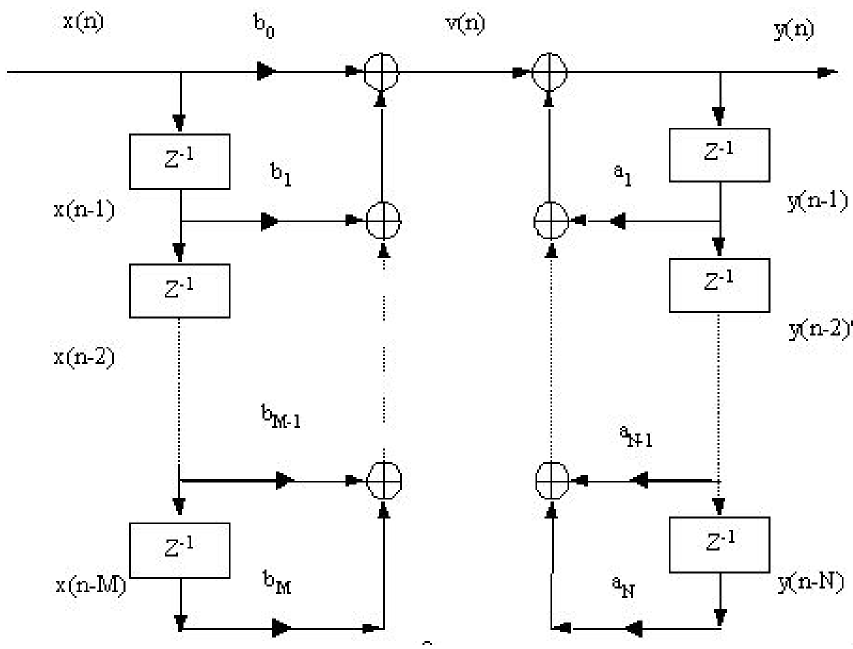
$$y(n)-\sum_{K=1}^{N}a_K y(n-k)=\sum_{K=0}^{M}b_K x(n-k) \quad (2.89)$$

Với hàm truyền đạt tương ứng: $$H(z)=\frac{\sum_{K=0}^{M}b_K z^{-K}}{1-\sum_{K=1}^{M}a_k z^{-K}}$$

Pt(2.89) được viết lại dưới dạng công thức truy hồi:

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N}a_K y(n-k)+\sum_{K=0}^{M}b_k x(n-k) \quad (2.91)$$

Sơ đồ khối hình 2.11 biểu diễn bằng hình ảnh của pt(2.91)



Hình 2.11 : dạng trực tiếp I , sơ đồ khối của hệ thống có phương trình sai phân bậc N

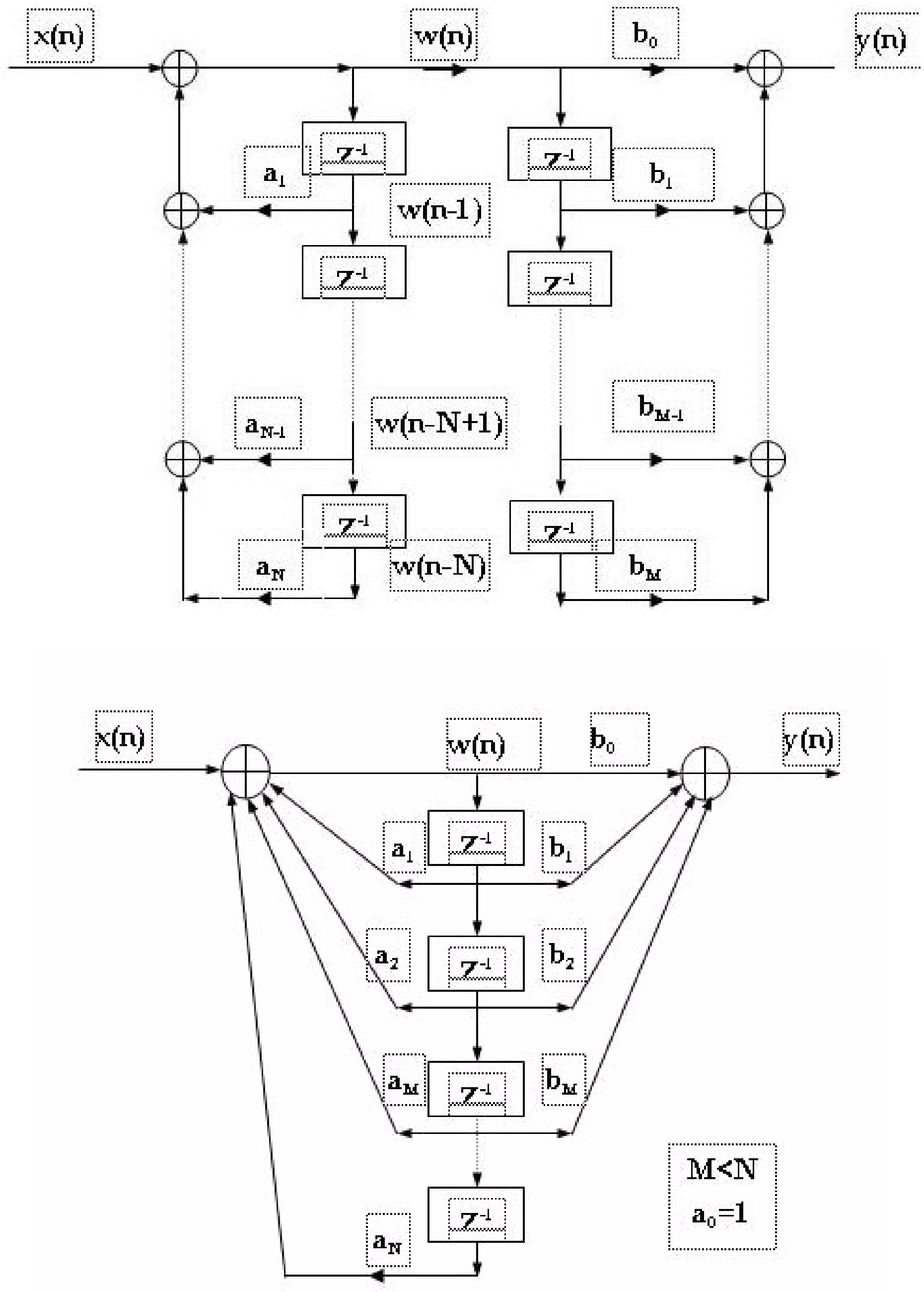
2. Dạng trực tiếp II (Direct form II)

Pt(2.90) có thể viết lại: $H(z)\left(\dfrac{1}{1-\sum_{k=1}^{N} a_K z^{-k}}\right)\left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\right)= H_2(z)H_1(z)$ (2.92)

Pt(2.92) cho thấy rằng ta có thể xem hệ thống như là gồm hai hệ thống con (phần bên trái và phần bên phải) mắc liên tiếp nhau. Do tính giao hoán ta có thể hoán chuyển vị trí của hai hệ thống con, ta có cách biểu diễn trực tiếp II (dirrect form II) như hình *2.12.*

3. Dạng chuẩn tắc (Canonic Direct form)

Ta thấy ở các sơ đồ hình 2.11 và 2.12 có (N+M) phần tử trễ một mẫu. Để tiết kiệm các phần tử trễ, ta có thể thực hiện sơ đồ hình *2.13, gọi là dạng chuẩn tắc* (canonic dirrect form) (giả sử N >M)Rõ ràng, dạng chuẩn tắc chỉ cần N phần tử trễ (nếu N > M) hoặc M phần tử trễ (nếu M > N), ta tiết kiệm được bộ nhớ cũng như thời gian dịch chuyển tín hiệu trên đường trễ so với dạng trực tiếp I và II.



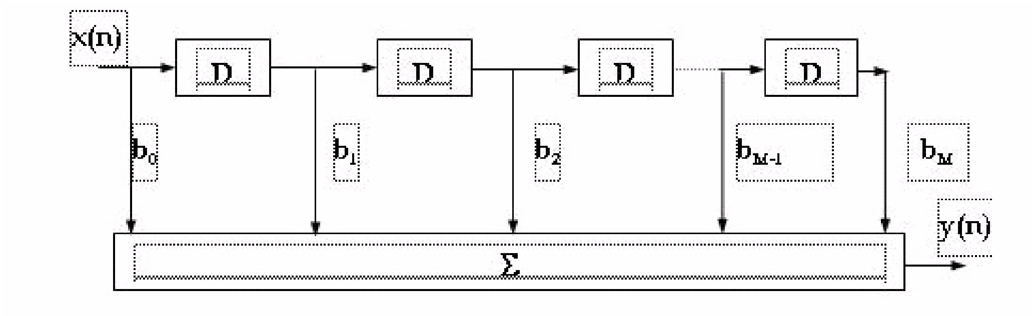
Hình 2.13: Dạng chuẩn tắc

2.7.3. Hệ thống FIR

Đối với hệ thống FIR không đệ qui, với phương trình sai phân biểu diễn hệ thống là:

$$y(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) \qquad (2.93)$$

Ta có sơ đồ như hình 2.14 :



Hình 2.14 : Hệ thống FIR không đệ quy

Trong thực tế, đối với các mạch đệ qui, ít khi người ta thực hiện cả một sơ đồ có bậc N > 2, vì khi đó mạch dễ mất tính ổn định do sai số. Mặt khác, thiết kế các khâu bậc 2 có phần thuận lợi hơn. Vì vậy, người ta chia hệ thống ra thành nhiều mạch con có bậc lớn nhất là 2 mắc liên tiếp hoặc song song với nhau. Một hệ thống bậc 2 đã được trình bày trong ví dụ 2.28.

CHƯƠNG III
PHÂN TÍCH TẦN SỐ CỦA TÍN HIỆU

3.1 MỞ ĐẦU

Phân tích tần số (còn gọi là phân tích phổ) của một tín hiệu là một dạng biểu diễn tín hiệu bằng cách khai triển tín hiệu thành tổ hợp tuyến tính của các tín hiệu hình sin hay hàm mũ phức.

Cách khai triển này rất quan trọng trong việc phân tích hệ thống LTI, bởi vì đối với hệ thống này, đáp ứng của một tổ hợp tuyến tính các tín hiệu hình sin cũng là tổ hợp tuyến tính các tín hiệu hình sin có cùng tần số, chỉ khác nhau về biên độ và pha.

Công cụ để phân tích tần số một tín hiệu là chuỗi Fourier (cho tín hiệu tuần hoàn) và biến đổi Fourier (cho tín hiệu không tuần hoàn có năng lượng hữu hạn).

3.2 TẦN SỐ CỦA TÍN HIỆU RỜI RẠC

Khái niệm tần số của tín hiệu tương tự rất quen thuộc đối với chúng ta. Tuy nhiên, khái niệm tần số của tín hiệu rời rạc có một số điểm cần lưu ý. Đặc biệt, ta cần làm rõ mối quan hệ giữa tần số của tín hiệu rời rạc và tần số của tính hiệu liên tục. Vì vậy, trong mục này ta sẽ khởi đầu bằng cách ôn lại tần số của tín hiệu liên tục tuần hoàn theo thời gian. Mặt khác, vì tín hiệu hình sin và tín hiệu hàm mũ phức là các tín hiệu tuần hoàn cơ bản, nên ta sẽ xét hai loại tín hiệu nầy.

3.2.1. Tín hiệu tương tự tuần hoàn theo thời gian

Một dao động đơn hài (simple harmonic) được mô tả bỏi một tín hiệu tương tự (liên tục) hình sin:

$$x_a(t) = A\cos(\Omega t+\theta) \quad \text{với} \quad -\infty < t < \infty \qquad (3.1)$$

Trong đó, A là biên độ; Ω là tần số góc (rad/s); θ là pha ban đầu (rad). Ngoài ra, với ký hiệu: F là tần số (cycles/second hay Hertz) và T_p là chu kỳ (second), ta có:

$$\Omega = 2\pi F = 2\pi/T_p \qquad (3.2)$$

Tín hiệu liên tục hình sin có các tính chất sau:

1) *Với mỗi giá trị xác định bất kỳ của F hay Tp , xa(t) là một tín hiệu tuần hoàn.* Thật vậy, từ tính chất của các hàm lượng giác, ta chứng minh được:

$$x_a(t + T_p) = x_a(t).$$

F được gọi là tần số cơ bản (fundamental frequency) và Tp là chu kỳ cơ bản (fundamental period) của tín hiệu liên tục. F và T_p có thể có các giá trị không giới hạn (từ 0 đến ∞).

2) *Các tín hiệu liên tục hình sin có tần số cơ bản khác nhau luôn phân biệt với nhau.*

3) *Khi tần số F tăng thì tốc độ dao động của tín hiệu tăng, nghĩa là có nhiều chu kỳ hơn trong một khoảng thời gian cho trước.*

Ta cũng có thể biểu diễn một tín hiệu hình sin bằng hàm mũ phức:

$$x_a(t) \quad = \quad Ae^{j(\Omega T+\theta)} \qquad (3.3)$$

Ta có thể thấy được mối quan hệ này qua các công thức Euler:

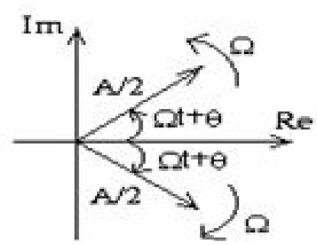
$$\begin{cases} e^{j\Phi} = \cos\Phi + j\sin\Phi \\ e^{-j\Phi} = \cos\Phi - j\sin\Phi \\ = e^{j\Phi} - e^{-j\Phi} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos\Phi = \dfrac{1}{2}(e^{j\Phi} + e^{j\Phi}) \\ \sin\Phi = \dfrac{1}{2}(e^{j\Phi} - e^{j\Phi}) \end{cases} \qquad (3.4)$$

Theo định nghĩa, tần số là một đại lượng vật lý dương, bởi vì tần số là số chu kỳ trên một đơn vị thời gian. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp, để thuận tiện về mặt toán học, khái niệm tần số âm được thêm vào. Để rõ hơn, pt(3.1) được viết lại:

$$X_a(t)=A\cos(\Omega t+\theta)=\frac{A}{2}e^{j(\Omega t+\theta)}+\frac{A}{2}e^{-(\Omega t+\theta)} \qquad (3.5)$$

Ta thấy, tín hiệu hình sin có thể thu được bằng cách cộng hai tín hiệu hàm mũ phức liên hợp có cùng biên độ, còn được gọi là phasor. Hình 3.1 biểu diễn bằng đồ thị trong mặt phẳng phức, 2 đại lượng phasor quay quanh góc tọa độ theo hai chiều ngược nhau với các vận tốc góc là ±Ω(rad/s). Vì tần số dương tương ứng với chuyển động quay đều ngược chiều kim đồng hồ, nên tần số âm tương ứng với chuyển động quay theo chiều kim đồng hồ.

Để thuận tiện về mặt toán học, ta sử dụng khái niệm tần số âm, vì vậy khoảng biến thiên của tần số sẽ là $-\infty < F < \infty$.



Hình 3.1. Biểu diễn bằng đồ thị của $X_a(t)$

3.2.2. Tín hiệu rời rạc tuần hoàn hình sin

Một tín hiệu rời rạc hình sin được biểu diễn bởi:

$$x(n) = A\cos(\omega n+\theta) \quad \text{với } -\infty < n < \infty \qquad (3.6)$$

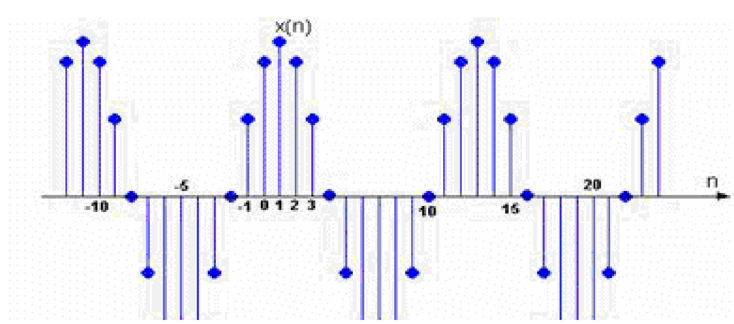
So sánh với tín hiệu liên tục, ta thấy t được thay bởi biến nguyên n, gọi là số *mẫu (sample number); tần số góc Ω (rad/second) được thay bằng ω*(rad/sample); pha và biên độ giống như tín hiệu liên tục.

Gọi f là tần số của tính hiệu rời rạc, ta có: $\omega = 2\pi f$ (3.7)

Pt(3.6) trở thành: $x(n) = A\cos(2\pi fn+\theta)$ với $-\infty < n < \infty$ (3.8)

Tần số f có thứ nguyên là chu kỳ/mẫu (cycles/sample).

Tín hiệu hình sin có tần số ω = π/6 radians/sample (f =1/12 cycles/sample) và pha ban đầu ω=π/3 rad được biểu diễn bằng đồ thị hình 3.2.



Hình 3.2. Tín hiệu rời rạc hình sin x(n) = 2sin$\left(\frac{\pi}{6}n+\frac{\pi}{3}\right)$

Khác với tín hiệu tương tự, tín hiệu rời rạc hình sin có các thuộc tính như sau:

1. Một tín hiệu rời rạc hình sin là tuần hoàn nếu và chỉ nếu tần số f của nó là một số hữu tỉ.

Từ định nghĩa, một tín hiệu rời rạc x(n) tuần hoàn với chu kỳ N (N > 0) nếu và chỉ nếu x(n+N) = x(n) với mọi n, giá trị nhỏ nhất của N thỏa điều kiện này được gọi là chu kỳ cơ bản. Để một tín hiệu hình sin có tần số f0 là tuần hoàn chúng ta phải có:

$$\cos[2\pi f_0(N + n) + \theta] = \cos(2\pi f_0 n + \theta)$$

Quan hệ này chỉ đúng nếu và chỉ nếu tồn tại một số nguyên k sao cho:

$$2\pi f_0 N = 2k\pi \qquad \text{hay} \qquad f_0 = k/N \qquad (3.9)$$

Theo pt(3.9), một tín hiệu hình sin rời rạc chỉ tuần hoàn khi chỉ khi f0 là tỉ số của hai số nguyên, hay nói cách khác f_0 là một số hữu tỉ.

Để xác định chu kỳ cơ bản N của một tín hiệu hình sin, ta biểu điễn tần số f0 dưới dạng hữu tỉ tối giản, khi đó chu kỳ cơ bản N của tín hiệu hình sin bằng với mẫu số. Ví dụ: nếu f_1 = 31/60 có nghĩa là N_1 =60; trong khi đó, nếu f_2 = 30/60 thì N_2 = 2.

2. Các tín hiệu rời rạc hình sin mà các tần số góc của chúng sai khác nhau bội số nguyên của 2π thì đồng dạng.

Để chứng minh, ta so sánh một tín hiệu hình sin có tần số ω_0 với tín hiệu hình sin có tần số (ω_0 + 2kπ), ta thấy:

$$\cos[(\omega_0 + 2k\pi) n + \theta)] = \cos(\omega_0 n + 2\pi kn + \theta) = \cos(\omega_0 n + \theta) \qquad (3.10)$$

Như vậy, tất cả các dãy hình sin : $x_k(n) = \cos(\omega_k n + \theta)$, ở đây,

$\omega_k = \omega_0 + 2k\pi$ với $0 < \omega_0 < 2\pi$ và k =0, 1, 2,…là là đồng nhất.

Điều này hàm ý rằng, một tín hiệu hình sin bất kỳ được xác định duy nhất bởi một tần số góc cơ bản duy nhất ở trong khoảng [0 2π], tương ứng tần số f của nó ở trong khoảng [0 1].

Từ nhận xét trên, ta có một kết luận quan trọng: Đối với tín hiệu rời rạc tuần hoàn, ta chỉ cần khảo sát trong khoảng tần số $0 \le \omega \le 2\pi$ (hay $0 \le f \le 1$). Vì với các tần số ngoài khoảng này, chỉ là các mẫu chồng lấp (alias) của các tín hiệu có tần số trong khoảng $0 \le \omega \le 2\pi$.

3. Một dao động được biểu diễn bởi một tính hiệu hình sin, nó có tốc độ dao động cao nhất khi tín hiệu này có tần số góc là ω = π, tương ứng với f = ½ .

Để minh họa tính chất này, ta xét dãy $x(n) = \cos\omega_0 n$ khi tần số (biến thiên từ 0 đến π. Ta xét các giá trị ω_0 = 0, π/8, π/4, π/2 và π , tương ứng với f = 0, 1/16 , 1/8, 1/4, 1/2 và dãy tuần hoàn với các chu kỳ N = ∞, 16, 8, 4, 2 (xem đồ thị trong hình 3.3). Chú ý rằng, tốc độ dao động tăng khi chu kỳ giảm hay tần số tăng.

Ta xem những gì xãy ra khi $\pi \le \omega_0 \le 2\pi$, xét tần số $\omega_1 = \omega_0$ và $\omega_2 = 2\pi - \omega_0$ Ta thấy khi ω_1 tăng từ π đến 2π thì ω_2 giảm từ π đến 0 và:

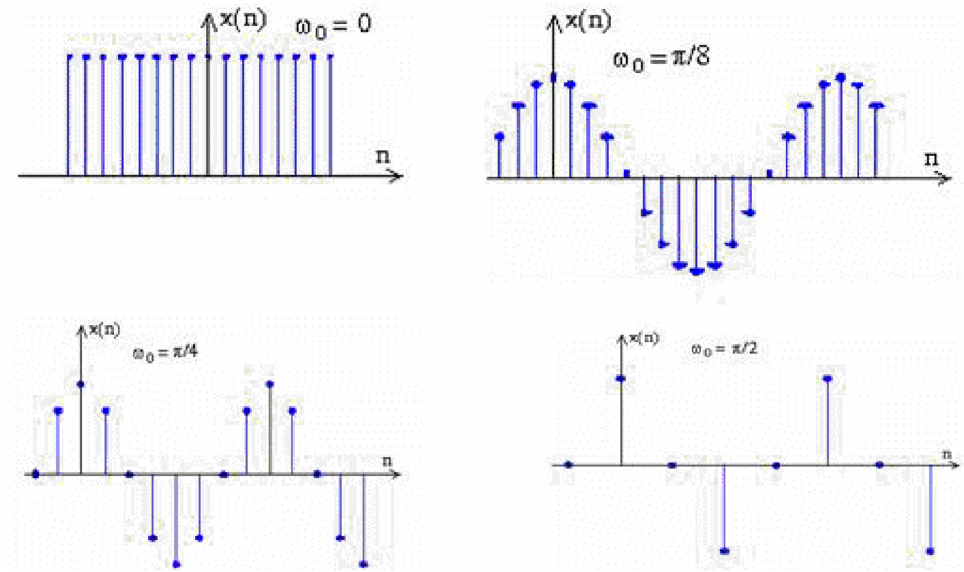
$$x_1(n) = A\cos\omega_1 n = A\cos\omega_0 n$$

$$x_2(n) = A\cos\omega_2 n = A\cos(2\pi - \omega_0)n \qquad (3.11)$$

$$= A\cos(-\omega_0 n) = x_1(n)$$

Vậy, dãy có tần số ω_2 trùng với dãy có tần số ω_1, nếu ta thay hàm cos bằng hàm sin thì kết quả cũng giống như vậy, ngoại trừ sự lệch pha 1800 giữa $x_1(n)$ và $x_2(n)$. Trong mọi trường hợp, khi ta tăng tín hiệu rời rạc hình sin từ πđến 2π, tốc độ dao động sẽ giảm, khi $\omega_0 =$ 2π ta có tín hiệu hằng giống như khi

$\omega_0 = 0$. Rõ ràng, khi $\omega_0 = \pi$ thì tốc độ dao động cao nhất.



Hình 3.3. Tín hiệu x(n) = cos $\omega_0 n$ với các giá trị khác nhau ω_0

Như tín hiệu tương tự, khái niệm tần số âm cũng được đưa vào tín hiệu rời rạc. Vì vậy, ta cũng sử dụng công thức Euler:

$$X(n) = A\cos(\omega tn + \theta) = \frac{A}{2} e^{j(\omega n+\theta)} + \frac{A}{2} e^{-(\omega n+\theta)} \qquad (3.12)$$

Vì tín hiệu tuần hoàn rời rạc với các tần số sai khác nhau bội số nguyên của 2π thì hoàn toàn giống nhau. Ta thấy rằng, các tần số trong một dải rộng 2π bất kỳ (nghĩa là $\omega_1 \le \omega \le \omega_1 + 2\pi$, với ω_1 bất kỳ) có thể mô tả tất cả các tín hiệu rời rạc hình sin hay hàm mũ phức. Vì vậy, khi khảo sát một tính hiệu tuần hoàn rời rạc ta chỉ cần xét trong một khoảng tần số rộng 2π, thông thường ta chọn dải tần $0 \le \omega \le 2\pi$ (ứng với $0 \le f \le 1$) hoặc là $-\pi \le \omega \le \pi$ (ứng với $-1/2 \le f \le 1/2$), dải tần này được gọi là dải tần cơ bản (fundamental range).

3.2.3 Mối liên hệ của tần số F của tín hiệu tương tự $x_a(t)$ và tần số f của tín hiệu rời rạc x(n) được lấy mẫu từ $x_a(t)$

Để thiết lập mối quan hệ giữa F và f, ta xét tín hiệu tương tự hình sin

$$x_a(t) = A\cos(2\pi Ft + \theta) \qquad (3.13)$$

Gọi TS là chu kỳ lấy mẫu , ta có tín hiệu lấy mẫu

$$x(n) = x_a(nT_S) = A\cos(2\pi FnT_S + \theta)$$

$$X(n) = A\cos(2\pi \frac{F}{Fs} n + \theta) \qquad (3.14)$$

Mặt khác tín hiệu hình sin rời rạc được biểu diễu theo tần số f là:

$$x(n) = A\cos(2\pi fn + \theta) \qquad (3.15)$$

Từ pt(3.14) và pt(3.15) ta được:

$$f = F/F_S \quad \text{hay} \quad \omega = \Omega T_S \qquad (3.16)$$

Từ pt(3.16), ta thấy f chính là tần số chuẩn hóa (normalized frequency) theo FS còn được gọi là tần số tương đối (relative frequency). Pt(3.16) còn hàm ý rằng: từ tần số của tín hiệu rời rạc f, chúng ta chỉ có thể xác định tần số F của tín hiệu liên tục tương ứng nếu và chỉ nếu tần số lấy mẫu FS được biết.

Chúng ta đã biết khoảng biến thiên của biến tần số F hay Ω của tín hiệu liên tục theo thời gian là:

$$-\infty < F < \infty \quad \text{hay} \quad -\infty < \Omega < \infty \qquad (3.17)$$

và khoảng biến thiên của biến tần số f hay ω của tín hiệu rời rạc theo thời gian là: $- 1/2 \le f \le 1/2$ hay $-\pi \le \omega \le \pi$ (3.18)

Từ pt(3.16), (3.17) và (3.18) ta tìm được mối quan hệ giữa tần số F của tín hiệu hình sin liên tục theo thời gian với tần số lấy mẫu F_S :

$$-\frac{F_S}{2} \le F \le \frac{F_S}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2T_S} \le F \le \frac{1}{2T_S} \qquad (3.19)$$

Hay: $$-\pi F_S \le \Omega \le \pi F_S \Leftrightarrow -\frac{\pi}{T_S} \le \Omega \le \frac{\pi}{T_S} \qquad (3.20)$$

Các mối quan hệ này được tổng kết trong bảng 3.1

Từ các mối quan này chúng ta thấy rằng, sự khác nhau cơ bản giữa tín hiệu rời rạc và tín hiệu liên tục là khoảng giá trị của các biến tần số f và F, hay Ω và ω. Sự lấy mẫu tuần hoàn một tín hiệu liên tục theo thời gian tương đương với một phép ánh xa từ một dải tần vô hạn của biến F (hay ω) vào dải tần hữu hạn của biến f (hayω). Vì tần số cao nhất của tín hiệu rời rạc là ω = π hay f = 1/2, với tốc độ lấy mẫu là F_S, giá trị cao nhất tương ứng của F và Ω là:

$F_{max} = F_S / 2 = 1/ 2T_S$ vaì $\Omega_{max} = \pi / F_S = \pi / T_S$ (3.21)

Kết luận này phù hợp với định lý lấy mẫu đã phát biểu ở chương 1 và sẽ được chứng minh trong chương này. Bảng 3.1 tổng kết mối quan hệ giữa F và f.

Tín hiệu tương tự		Tín hiệu rời rạc
$\Omega = 2\pi F$		$\omega = 2\pi$ f
Ω (Radians/sec) F(hertz)		ω (Radians/sample) f (cycles/sample)
$-\infty < \Omega < \infty$	$\omega = \Omega T_S$	$-\pi \le \omega \le \pi$
$-\infty < F < \infty$	$f = F / F_S$	$-1/2 \le f \le 1/2$
$-\pi / T_S \le \Omega \le \pi / T_S$	$\Omega = \omega / T_S$	
$-\frac{F}{2} \le F \le \frac{F_S}{2}$	$F = f.F_S$	

Bảng 3.1. Mối quan hệ giũa tần số F và tần số f**.**

3.2.4. Các tín hiệu hàm mũ phức có quan hệ hài

Tín hiệu hình sin và tín hiệu hàm mũ phức (điều hòa phức) đóng vai trò quan trọng trong việc phân tích tín hiệu và hệ thống. Trong nhiều trường hợp, ta xử lý với một tập hợp các tín hiệu hàm mũ phức (hay tín hiệu hình sin) có quan hệ hài. Đó là các tập các hàm mũ phức tuần hoàn có tần số là bội số của cùng một tần số dương. Mặc dù ta đã không đề cập nhiều đến tín hiệu hàm mũ phức, nhưng rõ ràng chúng thỏa mãn tất cả các tính chất của tín hiệu hình sin. Ta sẽ xét tín hiệu hàm mũ phức có quan hệ hài trong cả hai trường hợp liên tục và rời rạc theo thời gian.

1/. Tín hiệu hàm mũ liên tục

Các tín hiệu hàm mũ phức có quan hệ hài liên tục theo thời gian có dạng cơ bản là:

$$s_k(t) = e^{jk\Omega_0 t} = e^{j2\pi kF_0 t} \quad \text{với } k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots \qquad (3.22)$$

Chú ý rằng, với mỗi giá trị của k, sk(t) là một tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ cơ bản là $1/(kF_0)$ = Tp/k hay tần số cơ bản là kF_0. Vì một tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ T_p/k thì cũng tuần hoàn với chu kỳ $k(T_p/k) = T_p$, với k là một số nguyên dương bất kỳ, nên tất cả các tín hiệu sk(t) đều có một chu kỳ cơ bản chung T_p. Hơn nữa, với tín hiệu tuần hoàn liên tục, tần số F_0 có thể lấy giá trị bất kỳ và tất cả các thành viên trong tập $s_k(t)$ là phân biệt với nhau, nghĩa là, nếu $k_1 \neq k_2$ thì $s_{k1}(t) \neq s_{k2}(t)$.

Từ các tín hiệu cơ bản ở pt(3.22), ta có thể xây dựng một tổ hợp tuyến tính các hàm mũ phức có quan hệ hài dưới dạng:

$$x_a(t) = \sum_{k\to-\infty}^{\infty} c_k s_k(t) = \sum c_k e^{ik\Omega_0 t} \qquad (3.23)$$

với ck là một hằng số phức bất kỳ. Tín hiệu sa(t) cũng là một tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ cơ bản là $T_p = 1/F_0$ và tổng trong pt(1.23) gọi là chuỗi Fourier của $x_a(t)$. Các hằng phức ck được gọi là các hệ số của chuỗi Fourier và các tín hiệu $s_k(t)$ được gọi là hài thứ k của $x_a(t)$.

2/. Tính hiệu hàm mũ rời rạc

Vì tín hiệu hàm mũ phức rời rạc là tuần hoàn khi tần số f là một số hữu tỉ, ta chọn f_0 =1/N và định nghĩa một tập các hàm mũ phức có quan hệ hài như sau:

$$S_k(n) = e^{j2\pi kf_o n}, \text{ với } k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots \quad (3.24)$$

Ngược lại với tín hiệu liên tục theo thời gian, ta chú ý rằng:

$$S_{k+N}(n) = e^{j2\pi(k+N)f_o N} = e^{j2\pi n} S_k(n) = S_k(n)$$

Điều này có nghĩa là chỉ có N hàm mũ phức tuần hoàn phân biệt trong tập các hàm mũ phức được mô tả bởi pt(3.24) Hơn nữa, tất cả các thành viên trong tập nầy có một chu kỳ chung là N samples. Rõ ràng, ta có thể chọn N hàm mũ phức bất kỳ liên tiếp nhau (nghĩa là từ k = n_0 đến k = n_0 + N – 1) để thành lập một tập các quan hệ hài với tần số cơ bản là f_0 = 1/N. Thông thường, để thuận tiện, ta chọn tập này tương ứng với n_0 = 0, ta có:

$$S_k(n) = e^{j2\pi knfN}, \text{ với } k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots \qquad (3.25)$$

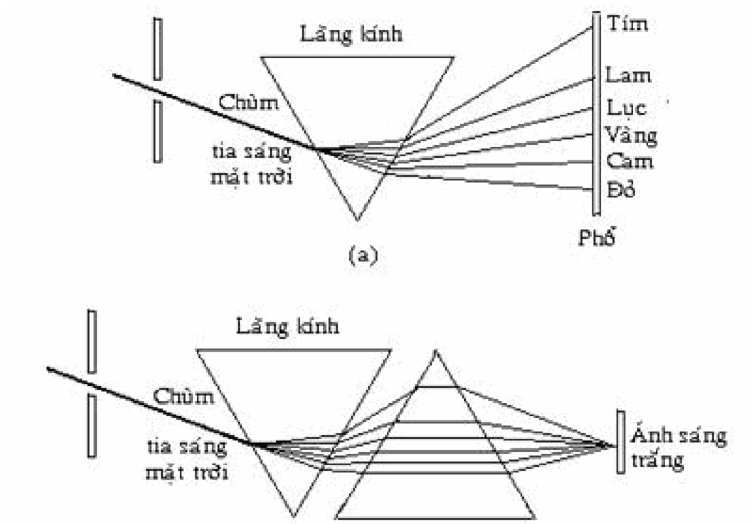
Như trong trường hợp tín hiệu liên tục, rõ ràng, tổ hợp tuyến tính được thành lập như sau:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k s_k(n) = \sum^{N-1} c_k e^{i2\pi kn/N} \qquad (3.26)$$

cũng là một tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ cơ bản là N. Như chúng ta sẽ thấy trong các chương sau, tổng trong pt(3.26) là chuỗi Fourier của tín hiệu rời rạc tuần hoàn theo thời gian với {ck} là các hệ số Fourier. Dãy $s_k(n)$ được gọi là *hài thứ k của x(n).*

3.3 PHÂN TÍCH TẦN SỐ CỦA TÍN HIỆU LIÊN TỤC

Ánh sáng trắng có thể được phận tích thành một phổ ánh sáng màu bởi một lăng kính. Ngược lại, tổng hợp tất cả các thành phần ánh sáng màu đó với một tỉ lệ như khi đã phân tích được ta sẽ khôi phục được ánh sáng trắng (Hình 3.4). Ta cũng biết rằng, mỗi ánh sáng màu (ánh sáng đơn sắc) tương ứng với một sóùng điện từ đơn hài. Đây là một sự minh họa cho sự phân tích phổ của một tín hiệu, trong đó vai trò của lăng kính được thay bằng công cụ phân tích Fourier.



Hình 3.4. (a) phân tích (b) tổng hợp ánh sáng mặt trời dùng lăng kính

3.3.1. Phân tích tần số của một tín hiệu liên tục tuần hoàn theo thời gian – chuỗi fourier

Ta đã biết một tín hiệu liên tục tuần hoàn bất kỳ có thể phân tích thành tổ hợp tuyến tính của các tín hiệu hình sin hay hàm mũ phức. Ở đây, ta chỉ nhắc lại một cách tóm lược.

Xét một tín hệu tuần hoàn x(t) với chu kỳ cơ bản làĠ được khai triển bởi chuỗi Fourier như sau :

$$X(t) = \sum^{\infty} X_k e^{j2\pi kF_s t} \quad \text{(Công thức tổng hợp)} \qquad (3.27)$$

$$X_k = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi kF_p t} dt \quad \text{(Công thức phân tích)} \qquad (3.28)$$

Trong đó, k = 0, $\pm 1, \pm 2, \pm 3$......

Tổng quát, các hệ số Fourier X_k có giá trị phức, đặc trưng cho biên độ và pha của các thành phần tần số F = kF_p . Nếu tín hiệu tuần hoàn là thực, thì X_k và X-k là các liên hợp phức, ta có thể biểu diễn dưới dạng phasor.

$$X_k = |X_k| e^{j\theta_k} \quad \text{và} \quad X_k = |X_k| e^{-j\theta_k}$$

Kết quả là chuỗi Fourier (3.27) có thể biểu diễn dưới dạng lượng giác :

$$x(t) = X_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |X_k| Cos(2\pi k F_p t + \theta_k)$$

hay: $$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k Cos 2\pi k F_p t - b_k Sin 2\pi k F_p t) \qquad (3.29)$$

Ở đây : $a_0 = X_0$ (có giá trị thực)

$$a_k = 2|X_k| Cos\theta_k$$

$$b_k = 2|X_k| Sin\theta_k \qquad (3.30)$$

Điều kiện để tồn tại chuỗi Fourier

- Điều kiện đủ để một tín hiệu tuần hoàn có thể khai triển thành chuỗi Fourier là tín hiệu này có bình phương khả tích trên một chu kỳ, nghĩa là :

$$\int_{T_p} |x(t)|^2 dt < \infty \qquad (3.31)$$

- Một tập các điều kiện khác cho sự tồn tại của chuỗi Fourier của một tín hiệu tuần hoàn x(t) được gọi là điều kiện Dirichlet. Đó là :

(1) x(t) có một số hữu hạn điểm bất liên tục trong một chu kỳ của nó.

(2) x(t) có một số hữu hạn các cực đại và cực tiểu trong một chu kỳ của nó.

(3) Tích phân của |X(t)| trong một chu kỳ là hữu hạn, nghĩa là :

$$\int_{Y_P} |x(t)| dt < \infty \qquad (3.32)$$

3.3.2. Phổ mật độ công suất của tín hiệu tuần hoàn

Quan hệ Parseval:

Một tín hiệu hoàn có công suất trung bình được tính bởi :

$$P_x = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} |x(t)|^2 dt \qquad (3.33)$$

Lấy liên hợp phức của phương trình (3.27) và thay vào phương trình (3.33) ta được :

$$P_x = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) x^{\wedge}(t) dt = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^* \, e^{-j2\pi kFt} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^* \left[\frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi kFt} dt \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 \qquad (3.34)$$

Ta đã thiết lập được quan hệ :

$$P_x = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 \qquad (3.35)$$

Pt(3.35) được gọi là quan hệ Parseval.

Để minh họa ý nghĩa vật lý của pt(3.35), ta giả sử rằng x(t) bao gồm chỉ một thành phần tần số $F_k = kF_p$ (các hệ số Fourier khác bằng 0):

$$x(t) = X_k\, e^{j2\pi k F_0 t}$$

Rõ ràng, nếu x(t) bao gồm nhiều thành phần tần số, thì chính là công suất của thành phần thứ k của tín hiệu. Vì vậy, công suất trung bình tổng của một tín hiệu tuần hoàn đơn giản là tổng công suất trung bình của tất cả các thành phần tần số của tín hiệu đó.

Phổ mật độ công suất – Phổ biên độ – Phổ pha:

$|X_k|^2$ là một dãy rời rạc theo tần số $F_k = kF_p$, k = 0, ±1, ±2, ..., được gọi là phổ mật độ công suất của tín hiệu tuần hoàn x(t). Ta thấy, phổ mật độ công suất có dạng rời rạc, khoảng cách giữa 2 mẫu kề nhau là nghịch đảo của chu kỳ cơ bản T_p.

Nói chung, vì các hệ số của chuỗi Fourier có giá trị phức nên ta thường biểu diễn dưới dạng phasor như sau :

$$X_k = |X_k| e^{j\theta_k} \qquad \text{Trong đó : } \theta_k = \angle X_k \qquad (3.36)$$

Thay vì vẽ mật độ phổ công suất, ta có thể vẽ phổ biên độ $\{|X_k|\}$và phổ pha như là một hàm của tần số. Rõ ràng phổ mật độ công suất là bình phương của phổ biên độ. Thông tin về pha không xuất hiện trong phổ mật độ công suất.

Nếu tín hiệu tuần hoàn là tín hiệu thực, các hệ số của chuỗi Fourier thỏa mãn điều kiện

$$X_{-k} = X_k$$

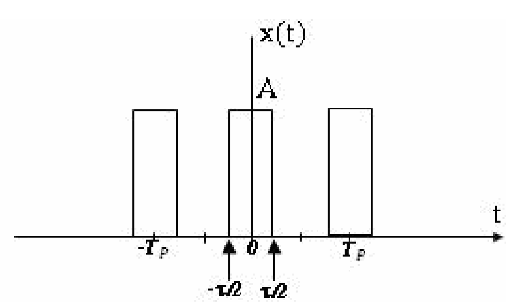
Kết quả là : $|X_k|^2 = |X_k^*|^2 = |X_{-k}|^2$ (3.37)

Khi đó , phổ mật độ công suất và phổ biên độ là các hàm đối xứng chẵn (đối xứng qua trục tung), phổ pha là một hàm đối xứng lẻ (đối xứng qua gốc tọa độ). Do tính chất đối xứng, ta chỉ cần khảo sát phổ của một tín hiệu tuần hoàn thực trong miền tần số dương. Ngoài ra, tổng năng lượng trung bình có thể biểu diễn như sau :

$$P_x = X_0^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |X_k|^2 \qquad (3.38)$$

$$= X_0^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \qquad (3.39)$$

Ví dụ 3.1 : Xác định chuỗi Fourier và phổ mật độ công suất của một chuỗi xung hình chữ nhật (hình 3.5)



Hình 3.5. chuỗi xung hình chữ nhật tuần hoàn theo thời gian

Giải :

Tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ cơ bản là T_p, rõ ràng thỏa mãn các điều kiện Dirchlet. Vì vậy, ta có thể biểu diễn tín hiệu bằng chuỗi Fourier (3.27) với các hệ số xác định bởi pt(3.28).

Vì tín hiệu x(t) là một hàm chẳn (nghĩa là x(t) = x(-t)) nên để thuận tiện, ta chọn giới hạn của tích phân từ đến(T_p /2) theo pt(3.28).

Với k= 0, ta có: $X_0 = \frac{1}{T_p}\int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t)dt = \frac{1}{T_p}\int_{\frac{-\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Adt = \frac{A\tau}{T_P}$ (3.40)

Cho $k \neq 0$:

$$X_k = \frac{1}{T_p}\int_{\frac{-T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} Ae^{-j2\pi kF_p} dt = \frac{Ae^{-j2\pi kF_p\tau}}{T_p - j2\pi kF_p t}\Bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{A}{\pi F_p kT_p}\frac{e^{j\pi kF_p\tau} - e^{\pi kF_p\tau}}{2j}$$

$= A\tau Sin\pi kF_P\tau$, k = $\pm 1, \pm 2$... (3.41)

Vì x(t) là hàm chẳn và có giá trị thực, nên các hệ số Fourier X_k có giá trị thực. Phổ pha cũng có giá trị thực, nó có giá trị là 0 khi X_k dương và là π khi X_k âm.

Thay vì vẽ phổ biên độ và phổ pha tách rời nhau, ta vẽ đồ thị của X_k (Hình *3.6)*. Ta thấy X_k là các mẫu của tín hiệu liên tục theo tần số F:

$X(F) = \frac{A\tau}{T_P}\frac{\text{sinF}}{\text{F}}$, với chu kỳ lấy mẫu là: $T_s = \pi F_p\tau = \frac{\pi\tau}{T_P}$ (3.42)

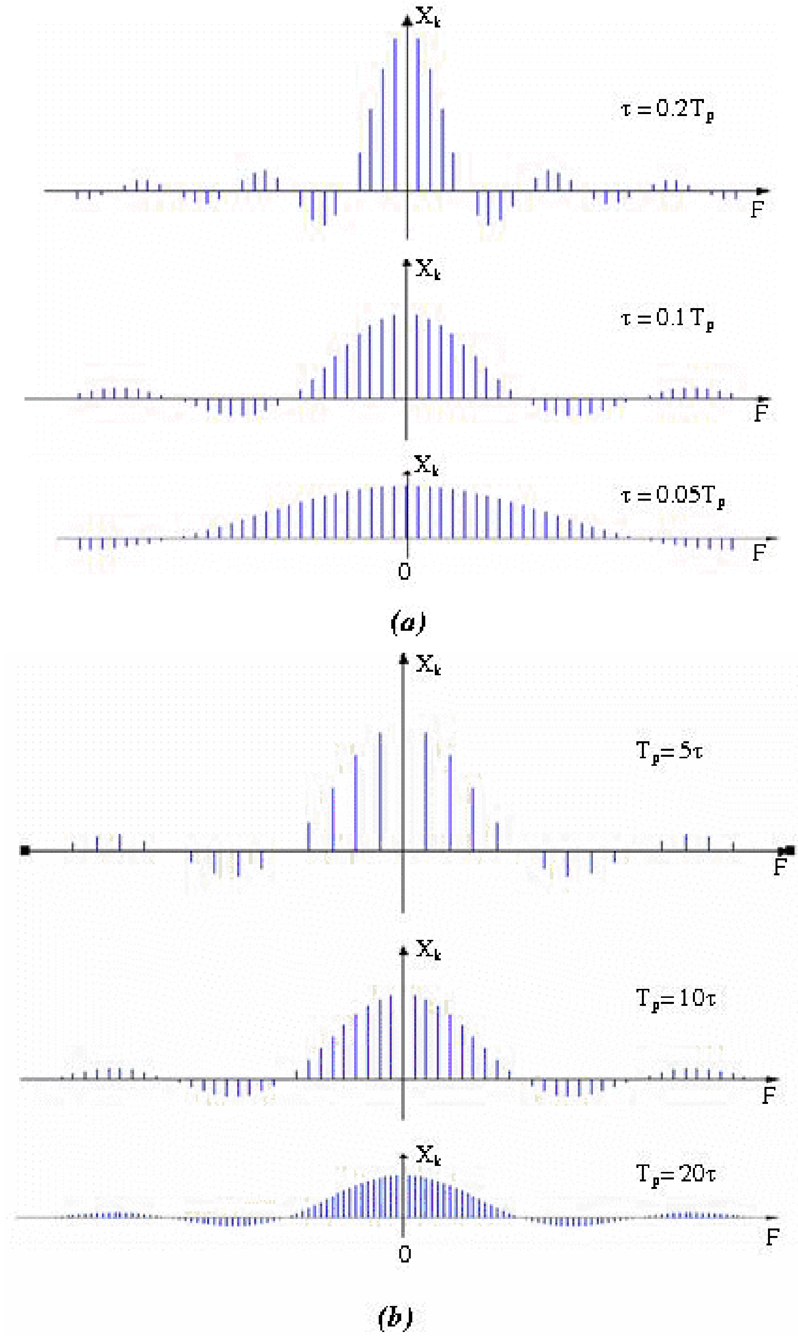
Hình 3.6.a vẽ dãy X_k (các hệ số Fourier), với chu kỳ không đổi T_p = 0,25s hay $F_p = \frac{1}{T_p} = 4Hz$ và các giá trị τ khác nhau lần lượt là : τ = 0,05T_p; τ = 0,1T_p và τ=0,2T_p.

Ta thấy khi tăng τ và giữ T_p không đổi thì công suất của tín hiệu sẽ trải dài ra trên trục tần số.

Hình 3.6.b vẽ dãy X_k với τ không đổi và thay đổi chu kỳ T_p, với T_p = 5τ;T_p=10τ và T_p=20τ. Trong trường hợp này khoảng cách giữa hai vạch phổ giảm khi chu kỳ T_p tăng. Khi $T_p \rightarrow \infty$ và τ không đổi) tín hiệu chỉ là một xung chữ nhật duy nhất (không tuần hoàn), lúc tín hiệu không còn là tín hiệu *công suất (power signal) mà là tín hiệu năng lượng (energy signal), các* hệ số Fourier $X_k \rightarrow 0$, công suất trung bình của nó bằng 0. Phổ của một tín hiệu có năng lượng hữu hạn sẽ được khảo sát trong phần sau .

Phổ mật độ công suất của chuỗi xung chữ nhật là :

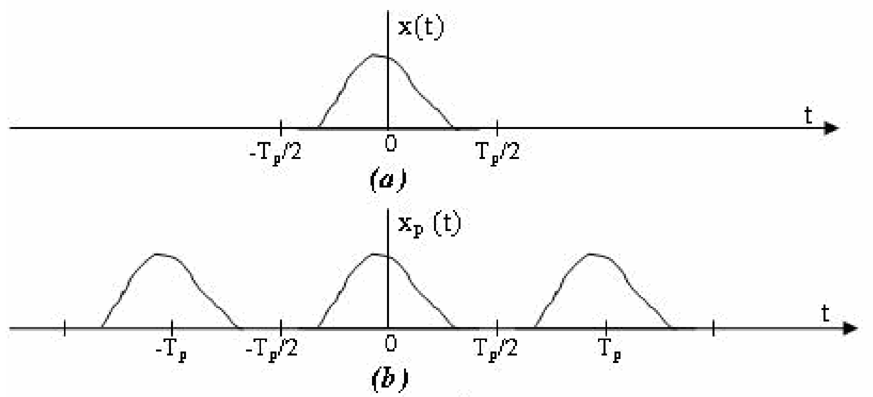
$$|X_k|^2 = \begin{cases} \left(\dfrac{A\tau}{T_p}\right)^2 \\ \left(\dfrac{A\tau}{T_p}\right)^2 \left(\dfrac{\sin \pi k F_p \tau}{\pi k F_p \tau}\right)^2, k = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\ldots \end{cases} \quad (3.43)$$



Hình 3.6. phổ của dãy xung chữ nhật, biên độ A = 1.
(a) chu kỳ T = 0.25 không đổi, (b) thay đổi

3.3.3. Phân tích tần số của tín hiệu liên tục không tuần hoàn – biến đổi fourier

Xét một tín hiệu không tuần hoàn có độ dài hữu hạn (finite duration) x(t) như được minh họa trong hình 3.7.a. Từ tín hiệu không tuần hoàn này, ta có thể tạo ra một tín hiệu tuần hoàn $x_p(t)$ chu kỳ T_p bằng cách lặp lại tín hiệu x(t) với chu kỳ T_p (hình 3.7.b). Rõ ràng, khi $T_p \to \infty$ thì $x_p(t) = x(t)$.



Hình 3.7.(a)tín hiệu tuần hoàn x(t)
(b) tín hiệu tuần hoàn $x_p(t)$ được tạo ra bằng cách lặp lại x(t) với chu kỳ T_p

Cách biểu diễn này hàm ý rằng ta có thể thu được phổ của x(t) từ phổ của $x_p(t)$ bằng cách cho $T_p \to \infty$.

Chuỗi Fourier của tín hiệu tuần hoàn $x_p(t)$ là :

$$x_P(t) = \sum X_k e^{j2\pi k F_p \tau}, F_p = \frac{1}{T_p} \qquad (3.44)$$

với $$X_k = \int_{\frac{-T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x_p(t) e^{j2\pi k F_p \tau} dt \qquad (3.45)$$

Vì x(t) = 0, khi $|t| > \frac{T_p}{2}$ nên ta có thể thay $x_p(t)$ bằng x(t) và giới hạn tích phân trong pt(3.45) từ - ∞ đến +∞, ta có:

$$X_k = \frac{1}{T_P} \int_{-\infty}^{\infty} x_P(t) e^{-j2\pi k F_p \tau} dt \qquad (3.46)$$

Định nghĩa : Biến đổi Fourier của tín hiệu liên tục không tuần hoàn x(t) **là** một hàm X(F) của biến tần số liên tục F như sau :

$$x(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi F t} dt \qquad (3.47)$$

So sánh pt(3.46) và pt(3.47) ta thấy các hệ số của chuỗi Fourier X_k chính là các mẫu của X(F) ở các giá trị F = kF_p khi chia cho T_p , ta có:

$$X_k = \frac{1}{T_P} X(kF_p) \text{ hay } \quad X_k = \frac{1}{T_p} X\left(\frac{k}{T_P}\right) \qquad (3.48)$$

Thay pt(3.48) vào pt(3.44), ta được :

$$x_p(t) = \frac{1}{T_p} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{T_P}\right) e^{j2\pi k F_P t}$$

Để có giới hạn của pt(3.48) khi $T_p = \rightarrow \infty$, trước tiên ta đặt:

$$\Delta F = \frac{1}{T_P}$$

sau đó thay vào pt(3.48) ta được :

$$x_P(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta F) e^{j2\pi \Delta F t} \Delta F \qquad (3.49)$$

Rõ ràng khi $T_p = \rightarrow \infty$ thì $x_p(t) \rightarrow x(t)$, ΔF trở thành vi phân dF và kΔF trở thành biến tần số liên tục F, tổng trong pt(3.49) biến thành tích phân với biến tần số F và pt(3.49) trở thành :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(F) e^{j2\pi F t} dt \qquad (3.50)$$

Quan hệ (3.50) được gọi là biến đổi Fourier ngược.

Tóm lại, ta có cặp biến đổi Fourier của tín hiệu liên tục không tuần hoàn có độ dài hữu hạn là :

- Công thức tổng hợp (biến đổi Fourier ngược)

$$\text{x(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(F) e^{i2\pi F t} dt \qquad (3.51)$$

- Công thức phân tích (biến đổi Fourier thuận)

$$\text{X(F)} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-i2\pi F t} dt \qquad (3.52)$$

Thay F = và dF = vào phương trình (3.51) và phương trình (3.52) ta được cặp công thức biến đổi Fourier theo tần số góc.

$$\text{X(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \qquad (3.53)$$

$$\text{X}(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{j\Omega t} dt \qquad (3.54)$$

Điều kiện để biến đổi Fourier tồn tại là tích phân trong phương trình (3.54) phải hội tụ. Tích phân này sẽ hội tụ nếu :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \qquad (3.55)$$

Một tín hiệu x(t) thỏa pt (3.55) là tín hiệu có năng lượng hữu hạn (Finite energy).

Một tập điều kiện khác để cho biến đổi Fourier tồn tại được gọi là điều kiện *Dirichlet.*

Bao gồm :

(1) Tín hiệu x(t) có một số hữu hạn các điểm bất liên tục.

(2) Tín hiệu x(t) có mố hữu hạn các cực đại và cự tiểu.

(3) Tín hiệu x(t) khả tích tuyệt đối, nghĩa là :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| \; dt < \infty \qquad (3.56)$$

3.3.4. Phổ mật độ năng lượng của tín hiệu không tuần hoàn

Xét một tín hiệu x(t) có năng lượng hữu hạn và có biến đổi Fourier là X(F).

Năng lượng của nó là :

$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X^{\wedge}(F)e^{-j2\pi Ft}dF\right]dt$ hay $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} X^{*}(F)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft}dt\right]dF$

Với x*(t) là liên hợp phức của x(t).

Quan hệ Parseval:

Lấy liên hợp phức của pt(3.51) và thay vào ta có :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X^{\wedge}(F)e^{-j2\pi Ft}dF\right]dt$$

hay $$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} X^{*}(F)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft}dt\right]dF$$

Suy ra:

$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(F)|^2 dF$

Kết quả là : $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(t)|^2 dt = E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(F)|^2 dF$ (3.57)

Pt(3.57) được gọi là quan hệ Parseval của tín hiệu không tuần hoàn, chính là nguyên lý bảo toàn năng lượng trong miền thời gian và miền tần số.

Phổ biên độ – Phổ pha:

Phổ X(F) của tín hiệu nói chung có giá trị phức, do đó thường được biểu diễn theo tọa độ cực :

$$X(F) = |X(F)|e^{j\theta(F)} \text{ với } \theta(F) = \angle X(F)$$

Trong đó, là phổ biên độ và θ(F) là phổ pha.

Phổ mật độ năng lượng:

Mặt khác, đại lượng: $S_{xx}(F) =$ (3.58)

biểu diễn sự phận bố năng lượng theo tần số, được gọi là phổ mật độ năng *l*ượng (energy density spectrum) của x(t).

Tích phân của $S_{xx}(F)$ lấy trên toàn trục tần số là tổng năng lượng của tín hiệu. Ta cũng dễ dàng thấy rằng, nếu x(t) là tín hiệu thực thì :

$$|X(-F)| = |X(F)| \tag{3.59}$$

$$\angle X(-F) = -\angle X(F) \tag{3.60}$$

Và $$S_{xx}(-F) = S_{xx}(F) \tag{3.61}$$

Như vậy phổ mật độ năng lượng của tín hiệu thực có tính đối xứng chẵn.

Ví dụ 3.2 :

Hãy xác định biến đổi Fourier và phổ mật độ năng lượng của tín hiệu xung chữ nhật được định nghĩa như sau :

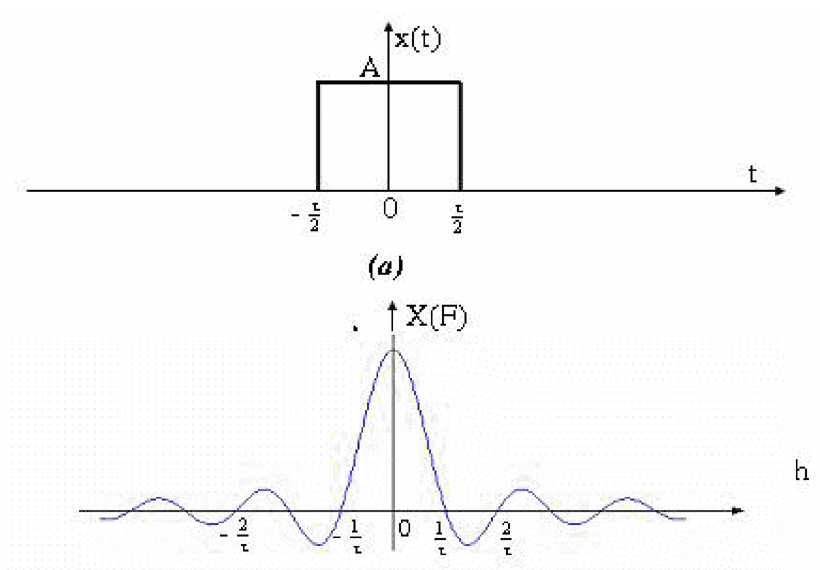
$$x(t) = \begin{cases} A & |t| \le \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$, được minh hoạ trong hình (3.8a)

Giải :

Rõ ràng tín hiệu này là không tuần hoàn và thỏa mãn điều Dirichlet.

$$X(F) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-j2\pi F\tau} dt = A\tau \frac{Sin\pi F\tau}{\pi F\tau} \tag{3.63}$$

Áp dụng pt(3.52) :



Hình 3.8.a.tín hiệu xung chữ nhật
b.biến đổi fourier của tín hiệu xung chữ nhật

Ta thấy X(F) có giá trị thực, và phổ biên độ có dạng hàm $S_a = \frac{\sin\theta}{\theta}$. Vì vậy phổ của tín hiệu chữ nhật x(t) là đường bao của phổ rời rạc của tín hiệu tuần hoàn có được bằng cách lặp lại tín hiệu xung chữ hiệu này với chu kỳ Tp như hình 3.6. Các hệ số X_k của chuỗi Fourier của tín hiệu tuần hoàn xp(t) chính là các mẫu của X(F) ở các tần số F = kF_p = như đã đề cập ở pt(3.48).

Từ pt(3.63), ta thấy rằng đồ thị của X(F) đi qua điểm 0 ở các giá trị F = $\frac{k}{\tau}$ với k = ±1, ±2, ... (*hình 3.8.b*).

Ngoài ra, ta thấy dải tần số chính $\left(-\frac{1}{\tau} \le F \le \frac{1}{\tau}\right)$ tập trung hầu hết năng lượng của tín hiệu. Khi độ rộng xung τ giảm, dải tần chính mở rộng ra và năng lượng phân bố lên vùng tần số cao hơn và ngược lại.

Phổ mật độ năng lượng của tín hiệu xung chữ nhật là :

$$S_{xx}(F) = (A\tau)^2 \left(\frac{Sin\pi F\tau}{\pi F\tau}\right)^2 \qquad (3.64)$$

3.4 PHẤN TÍCH TẦN SỐ CỦA TÍN HIỆU RỜI RẠC

Như đã trình bày trong phần trước, chuỗi Fourier của một tín hiệu liên tục tuần hoàn có thể bao gồm một số vô hạn các thành phần tần số, và hai thành phần tần số liên tiếp có tần số lệch nhau $1/T_p$, với T_p là chu kỳ cơ bản của tín hiệu. Vì dải tần của tín hiệu liên tục trải rộng từ -∞ đến +∞ nên nó có thể chứa đựng vô số các thành phần tần số. Ngược lại, dải tần của tín hiệu rời rạc giới hạn trong khoảng [-π, π] hay là [0, 2π]. Một tín hiệu rời rạc có chu kỳ cơ bản là N có thể bao gồm các thành phần tần số cách nhau radian hay f= cycles. Kết quả là chuỗi Fourier biểu diễn một tín hiệu rời rạc tuần hoàn sẽ bao gồm nhiều nhất là N thành phần tần số. Đây là sự khác biệt cơ bản giữa chuỗi Fourier của tín hiệu rời rạc và tín hiệu liên tục tuần hoàn.

3.4.1. Chuỗi fourier của tín hiệu rời rạc tuần hoàn

Xét một tín hiệu rời rạc tuần hoàn $x_p(n)$ có chu kỳ N. $x_p(n)$ có thể biểu diễn tổ hợp tuyến tính của các hàm mũ phức có quan hệ hài :

$$x_P(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_P(k) e^{j2\pi kn/N} \qquad (3.65)$$

Pt(3.65) được gọi là chuỗi Fourier của tín hiệu rời rạc tuần hoàn $x_p(n)$. Ta sẽ tìm tập các hệ số của chuỗi Fourier $\{X_p(k)\}$.

Ta bắt đầu với các hàm mũ phức : $e^{j2\pi kn/N}$, với k = 0, 1, ..., N-1

Đây cũng là các hàm tuần hoàn với chu kỳ N và trực giao nhau được, cụ thể như sau :

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi kn/N} = \begin{cases} N & \text{với } k = 0, \pm N, \pm 2N \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases} \qquad (3.66)$$

Pt(3.66) có thể được chứng minh bằng cách dựa vào công thức tính tổng của một chuỗi hình học, đó là :

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N & \text{Nếu } a = 1 \\ \dfrac{1-a^N}{1-a} & \text{Nếu } a \neq 1 \end{cases}$$

Bước tiếp theo là nhân hai vế của pt(3.65) cho $e^{-j2\pi rn/N}$ với r là một số nguyên và lấy tổng từ n = 0 đến n = N-1, ta có :

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j2\pi rn/N} = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j2\pi(k-\tau)n/N}$$

Đổi vị trí các tổng ở vế phải :

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_P(n) e^{-j2\pi rn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} X_P(k) \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(k-\tau)n/N} \qquad (3.67)$$

Áp dụng pt(3.66) ta có :

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(k-r)n/N} = \begin{cases} N & \text{khi } k - r = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases}$$

Vì vậy, vế phải của pt(3.67) rút gọn về $NX_p(r)$ và :

$$X_P(r) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi rn/N} \quad \text{, với r = 0,1,2,…,N-1} \qquad (3.68)$$

Các pt(3.65) và pt(3.68) là các công thức phân tích tần số của tín hiệu rời rạc. Ta viết lại :

Công thức tổng hợp :

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_P(k) e^{j2\pi kn/N} \qquad (3.69)$$

Công thức phân tích :

$$X_P(k) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} \qquad (3.70)$$

Nhận xét :

- Các hệ số Fourier $X_p(k)$ khi vượt ra ngoài khoảng k = [0, N-1] cũng tuần hoàn với chu kỳ N. Từ pt(3.70) ta dễ dàng chứng minh được :

$$X_p(k+N) = X_p(k) \qquad (3.71)$$

Kết luận: *Phổ của một tín hiệu $x_p(n)$ tuần hoàn với chu kỳ N cũng là một dãy tuần hoàn với chu kỳ N. Vậy N mẫu liên tiếp bất kỳ của tín hiệu tuần hoàn mô tả nó một cách đầy đủ tín hiệu trong miền thời gian, hay N mẫu liên tiếp bất kỳ của phổ của tín hiệu này mô tả nó một cách đầy đủ trong miền tần số.*

- Trong thực tế ta thường khảo sát trong một chu kỳ ứng với k = 0, 1, 2, ..., N-1, tương ứng với dải tần cơ bản $0 \leq \omega_k = 2\pi/N < 2\pi$.. Bởi vì, nếu khảo sát trong dải tần $-\pi < \omega_k = 2\pi/N \leq \pi$ tương ứng vớiĠ sẽ gặp bất tiện khi N lẻ.

Ví dụ 3.3:

Hãy xác định phổ của tín hiệu : : x(n) = Cos ω_0 n,khi: **(a)** $\omega_0 = \sqrt{2}\pi$, **(b)** $\omega_0 = \pi/3$

Giải :

(a) Với $\omega_0 = \sqrt{2\pi}$ ta có $f_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Vì f_0 không là một số hữu tỉ, nên tín hệu x(n) không tuần hoàn. Kết quả là ta không thể khai triển x(n) bằng chuỗi Fourier. Tuy nhiên tín hiệu này có một phổ riêng của nó, phổ của nó chỉ gồm một thành phần tần số duy nhất ở $\omega = \omega_0 = \sqrt{2\pi}$

(b) Với $\omega_0 = \pi/3$, ta có f_0 =, vậy x(n) tuần hoàn với chu kỳ N = 6.

Từ pt(3.70) ta có :

$$X_P(k) = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x(n)e^{-j2\pi kn/6}, \qquad k = 0, 1, ..., 5$$

Tuy nhiên, x(n) có thể biểu diễn như sau :

$$x(n) = \cos\frac{2\pi n}{6} = \frac{1}{2}\left(e^{j2\pi\frac{n}{6}} + e^{-j2\pi\frac{n}{6}}\right)$$

Điều này có nghĩa là : $X_p(-1) = X_p(5)$ phù hợp với pt(3.71). Nghĩa là $X_p(k)$ tuần hoàn với chu kỳ N = 6. Phổ của x(n) trong một chu kỳ là :

$X_p(0) = X_p(2) = X_p(3) = X_p(4) = 0$; $X_p(1) = 1/2$; $X_p(5) = 1/2$

và được minh họa trong hình 3.9

3.4.2. Phổ mật độ công suất của tín hiệu rời rạc tuần hoàn

Quan hệ Parseval:

Công suất trung bình của một tín hiệu rời rạc tuần hoàn với chu kỳ N được định nghĩa là :

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2 \qquad (3.72)$$

Bằng các thao tác toán học tương tự như khi thiết lập quan hệ Parseval cho tín hiệu liên tục, nhưng ở đây tích phân được thay bằng tổng, ta được quan hệ Parseval cho tín hiệu rời rạc :

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1}|X_P(k)|^2 \qquad (3.73)$$

Pt(3.73) là quan hệ Parseval của tín hiệu rời rạc tuần hoàn. Ta thấy công suất trung bình của tín hiệu bằng tổng các công suất của riêng từng thành phần tần số.

Phổ mật độ công suất – Phổ biên độ – Phổ pha:

Dãy $|X_P(k)|^2$ với k = 0, 1, ... , N-1 biểu diễn sự phân bố năng lượng theo tần số được gọi là phổ mật độ công suất của tín hiệu rời rạc tuần hoàn.

Nếu $x_p(n)$ là tín hiệu thực (nghĩa là $\hat{x}_P(n) = X_P(n)$) cũng tương tự như trong tín hiệu liên tục ta có :

$$X_P^*(k) = X(-k) \qquad (3.74)$$

Pt(3.74) tương đương với : phổ biên độ $|X_P(-k)| = |X_P(k)|$ (đối xứng chẵn) và : phổ pha $-\angle X_p(-k) = \angle X_p(k)$ (đối xứng lẻ)

Các tính chất đối xứng này của phổ biên độ và phổ pha liên kết với tính chất tuần hoàn cho ta một kết luận quan trọng về việc mô tả tín hiệu trong miền tần số. Cụ thể hơn ta có thể kiểm chứng lại tính chất đối xứng như sau:

$$|X_p(0)| = |X_p(N)| \qquad \angle X_p(0) = -\angle X_p(N)$$

$$|X_p(1)| = |X_p(N-1)| \qquad \angle X_p(1) = -\angle X_p(N-1) \qquad (3.75)$$

$$\left|X_p(\frac{N}{2})\right| = \left|X_p(\frac{N}{2})\right| \qquad \angle X_p(\frac{N}{2}) = 0 \quad \text{(Nếu N chẵn)}$$

$$\left|X_p\left[\frac{(N-1)}{2}\right]\right| = \left|X_p\left[\frac{(N+1)}{2}\right]\right| \quad \angle X_p\left[\frac{(N-1)}{2}\right] = -\angle X_p\left[\frac{(N+1)}{2}\right] \qquad \text{(Nếu N lẻ)}$$

Như vậy, với một tín hiệu thực, phổ $X_p(k)$, với k = 0, 1, 2, ..., cho N chẵn hay k = 0,1,2, ..., cho N lẻ, hoàn toàn có thể đặc tả được tín hiệu trong miền tần số, với $0 \le k \le$ thì $0 \le \omega_k = \le \pi$.

Cũng từ tính chất đối xứng của các hệ số Fourier của một tín hiệu thực. Chuỗi Fourier (3.69) có thể biểu diễn với dạng khác như sau :

$$x(n) = X_P(0) + 2\sum_{k=1}^{M}|X_P(k)|\cos\left(\frac{2\pi}{N}kn + \theta_k\right) \qquad (3.76)$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{M}\left(a_k Cos\frac{2\pi}{N}kn - b_k Sin\frac{2\pi}{N}kn\right) \qquad (3.77)$$

Với $a_0 = X_p(0)$; $a_k = 2|X_p(k)|\cos($k và $b_k = 2|Xp(k)|\sin\theta k$ và M =N/2 nếu N chẵn, M=(N-1)/2 nếu N lẻ.

Ví dụ 3.4

Hãy xác định các hệ số chuỗi Fourier và phổ mật độ công suất của tín hiệu tuần hoàn được trình bày trong hình 3.10

Giải :

Áp dụng pt(3.70), ta có :

$$X_P(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j2\pi kn/N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}Ae^{-j2\pi\frac{kn}{N}} \text{, với k= 0,1,…,N-1}$$

Áp dụng công thức tính tổng hữu hạn của một chuỗi hình học ta được :

$$X_p(k) = \frac{A}{N}\sum_{n=0}^{L-1}(e^{-j2\pi\frac{L}{N}}) = \begin{cases} \dfrac{AL}{N}, k = 0 \\ \dfrac{A}{N}\dfrac{1-e^{j2\pi k\frac{L}{N}}}{1-e^{j2\pi\frac{k}{N}}}, k = 1,2,...N-1 \end{cases}$$

Chú ý rằng :

$$\frac{1-e^{-j2\pi\frac{kL}{N}}}{1-e^{-j2\pi\frac{k}{N}}} = \frac{e^{-l\pi\frac{kL}{N}}}{e^{-j\pi\frac{k}{N}}}\times\frac{e^{j\pi\frac{kL}{N}-}-e^{-j\pi\frac{kL}{N}}}{e^{j\pi\frac{k}{N}}-e^{-l\pi\frac{k}{N}}}$$

$$=e^{-j\pi\frac{k(L-1)}{N}}\frac{Sin\left(\pi\frac{kL}{N}\right)}{Sin\left(\pi\frac{k}{N}\right)}$$

Do đó : $$X_P(k)=\begin{cases}\frac{AL}{N}, k=0,\pm N,\pm 2N... \\ \frac{A}{N}e^{-j\pi\frac{k(L-1)}{N}}\frac{Sin\left(\pi\frac{kL}{N}\right)}{Sin\left(\pi\frac{k}{N}\right)}, k\neq 0,\pm N,\pm 2N...\end{cases} \quad (3.78)$$

Phổ mật độ công suất của tín hiệu tuần hoàn này là :

$$\left|X_p(k)\right|^2=\begin{cases}\left(\frac{AL}{N}\right)^2, k=0,\pm N,\pm 2N... \\ \left(\frac{A}{N}\right)^2\left(\frac{Sin\pi\frac{kL}{N}}{Sin\pi\frac{k}{N}}\right)^2, k\neq 0,\pm N,\pm 2N...\end{cases} \quad (3.79)$$

Hình 3.11 vẽ đồ thị của $\left|X_P(k)\right|^2$ với L = 5; N = 10 và A = 1

3.4.3. Phân tích tần số của tín hiệu rời rạc không tuần hoàn – biến đổi fourier

Tương tự như trong tín hiệu liên tục không tuần hoàn, phân tích tần số của một tín hiệu rời rạc không tuần hoàn có năng lượng hữu hạn là biến đổi Fourier.

3.4.3.1. Định nghĩa biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc

Trong chương 2 ta đã đề cập đến biến đổi Fourier của một tín hiệu rời rạc, đó là trường hợp đặc biệt của biến đổi Z, khi biến đổi Z được lấy trên đường tròn đơn vị, nghĩa là Z = $e^{j\omega}$. Ta có biến đổi Fourier của một dãy x(n) là :

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n} \quad (3.80)$$

Nhật xét :

Biến đổi Fourier của một tín hiệu rời rạc và biến đổi Fourier của một tín hiệu liên tục có 2 sự khác nhau cơ bản:

- Dải tần số của biến đổi Fourier của tín hiệu liên tục (hay phổ của nó) trải rộng từ -∞ đến +∞, trong khi đó dải tần của biến đổi Fourier rời rạc là [-π, π](hay [0,2 π]), vượt ra ngoài dải tần này X(ω) tuần hoàn với chu kỳ 2 π.

Thật vậy : $X(\omega + 2\pi k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega+2\pi k)n}$

Hay $X(\omega + 2\pi k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}e^{-j2\pi kn}$

Ta được : $X(\omega + 2\pi k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = X(\omega)$ (3.81)

Vậy X(ω) tuần hoàn với chu kỳ 2π. Do đó, các tần số bất kỳ bên ngoài khoảng [-π, π] hay [0, 2π]) là tương đương với một tần số trong khoảng này.

- Trong biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc, tổng được thay thế cho tích phân, và vì X(ω) là một hàm tuần hoàn theo biến ω, nó có dạng giống như một khai triển chuỗi Fourier, các hệ số của chuỗi Fourier này là giá trị của dãy x(n).

3.4.3.2. Biến đổi Fourier ngược

Từ công thức biến đổi Z ngược $x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)x^{n-1}dz$ ta thay z = ej$^{\omega}$ và dz=je$^{j\omega}$dω.

Ta có biến đổi Fourier ngược như sau :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \qquad (3.82)$$

Tóm lại , ta có cặp biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc như sau :

Công thức biến đổi ngược :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-x}^{x} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \qquad (3.83)$$

Công thức biến đổi thuận :

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \qquad (3.84)$$

3.4.3.3. Điều kiện để tồn tại biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc

X(ω) tồn tại khi vế phải của phương trình (3.84) hội tụ. Ta cũng đã đề cập trong chương 2, biến đổi Fourier tồn tại khi biến đổi Z chứa vòng tròn đơn vị.

Bây giờ ta xét cụ thể hơn, điều kiện để X(ω) tồn tại là :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)e^{-j\omega n}\right| < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right| < \infty \qquad (3.85)$$

Vì $\left|e^{-j\omega n}\right| = 1$

Một tín hiệu rời rạc thỏa mãn điều kiện (3.85) (gxọi là khả tổng tuyệt đối) là tín hiệu có năng lượng hữu hạn. Thậy vậy :

Năng lượng của tín hiệu rời rạc x(n) được định nghĩa như sau :

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|^2 \qquad (3.86)$$

Ta có: $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$

Vì $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$ nên năng lượng E_x của tín hiệu hữu hạn.

3.4.4. Phổ mật độ năng lượng của tín hiệu không tuần hoàn

Quan hệ Parseval:1

Ta xác định mối qua2n hệ giữa E_x và X(ω)

Ta có : $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(\omega)e^{-j\omega n}d\omega\right]$

Hoán đổi vị trí tổng và tích phân :

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(\omega)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\omega n}\right]d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Ta có mối quan hệ giữa x(n) và X(ω) là :

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega \qquad (3.87)$$

Phương trình (3.87) là quan hệ *Parseval* cho tín hiệu rời rạc không tuần hoàn có năng lượng hữu hạn.

Phổ biên độ - Phổ pha - Phổ mật độ năng lượng:

Nói chung, X(ω) là một hàm phức của tần số. Vì vậy ta có thể biểu diễn bởi một đại lượng phasor.

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\theta(\omega)} \qquad (3.88)$$

Trong đó : là *phổ biên độ* và θ(ω) = ∠X(ω) là phổ pha.

Tương tự như trong trường hợp tín hiệu tương tự đại lượng:

$S_{xx}(\omega) =$ (3.89)

biểu diễn sự phân bố năng lượng theo tần số được gọi là phổ mật độ năng lượng của x(n). Rõ ràng, $S_{xx}(\omega)$ không chứa thông tin về pha.

Đặc biệt, nếu x(n) là tín hiệu thực thì :

$X^*(\omega) = X(-\omega)$ (3.90)

hay (đối xứng chẵn) (3.91)

và : ∠X(-ω) = -∠X(ω) (đối xứng lẻ) (3.92)

Từ pt(3.89) ta cũng có :

$S_{xx}(-\omega) = S_{xx}(\omega)$ (đối xứng chẵn) (3.93)

Do tín đối xứng ta chỉ cần khảo sát tính hiệu rời rạc trong dải tần $0 \le \omega \le \pi$.

Ví dụ 3.5

Xác định và vẽ phổ mật độ năng lượng $S_{xx}(\omega)$ của tín hiệu :

$x(n) = a^n u(n)$ với $-1 < a < 1$, cụ thể : a = 0,5 và a = -0,5

Giải :

Biến đổi Z của x(n) là: $X(z) = \dfrac{1}{1 - az^{-1}}$, với ROC : $|z| > |a|$ (3.94)

Vì |a|< 1 nên ROC của X(z) chứa vòng tròn đơn vị, vì vậy biến đổi Fourier tồn tại. Ta thay $z = e^{j\omega}$ để có được biến đổi Fourier của x(n), đó là :

$$X(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \qquad (3.95)$$

$$S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2 = X(\omega)X^*(\omega) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - ae^{j\omega})}$$

Hay: $S_{xx} = \dfrac{1}{1 - 2a\cos\omega + a^2}$ (3.96)

Mật độ phổ năng lượng :

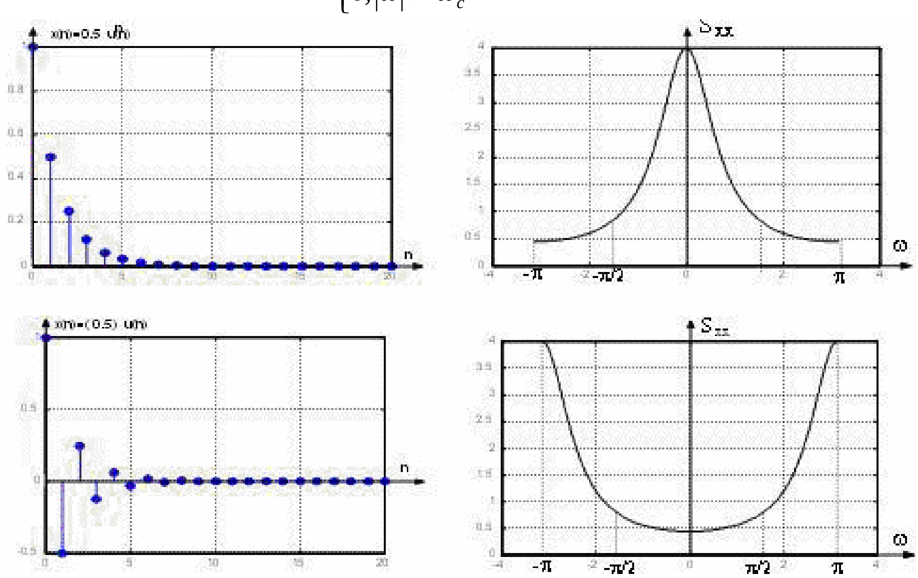
Ta thấy $S_{xx}(-\omega) = S_{xx}(\omega)$, phù hợp với pt(3.93).

Hình 3.12 vẽ tín hiệu x(n) và phổ tương ứng với a = 0,5 và a = -0,5. Ta thấy với a=-0,5 tín hiệu biến đổi nh../Anh hơn và kết quả là phổ của nó tập trung ở vùng tần số cao.

Ví dụ 3.6:

Xác định tín hiệu x(n), biết rằng phổ của nó là :

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, |\omega| \le \omega_c \\ 0, |\omega| > \omega_c \end{cases} \qquad (3.97)$$



Hình 3.12. Dãy x(n) = $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ u(n) và x(n) = $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ u(n)

(b) phổ mật độ năng lượng của chúng

Giải :

Từ pt(3.83) ta có :

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\omega)e^{j\omega\pi}d\omega=\frac{1}{2\pi\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{j\omega\pi}d\omega}=\frac{\omega_c}{\pi}\frac{Sin\omega_c}{\omega_c n},n\neq 0$$

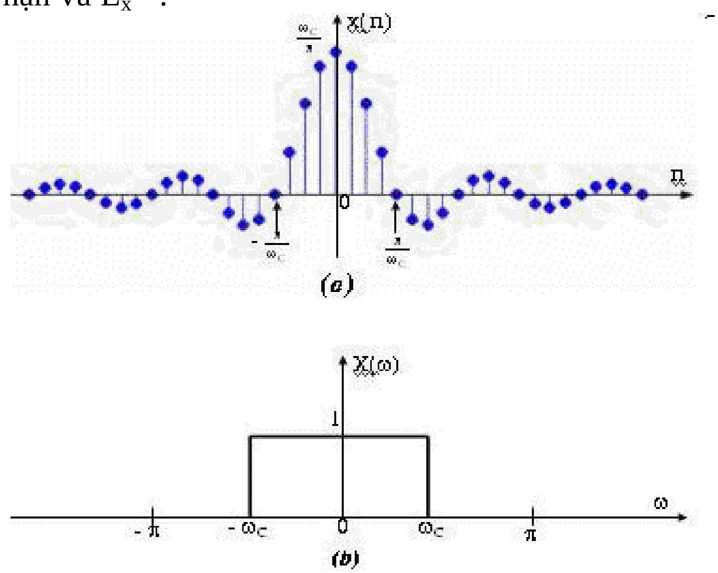
Khi n = 0, ta có :

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}d\omega=\frac{\omega_c}{\pi}$$

$$x(n)=\begin{cases}\frac{\omega_c}{\pi},n=0\\ \frac{\omega_c}{\pi}\frac{Sin\omega_c n}{\omega_c n},n\neq 0\end{cases} \qquad (3.98)$$

Vậy:

Cặp biến đổi Fourier được minh họa trong hình 3.13. Ta thấy, x(n) là một tín hiệu có năng lượng hữu hạn và E_x =.



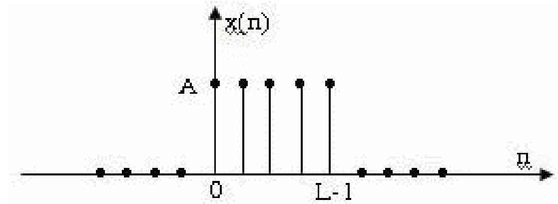
Hình 3.13. cặp biến đổi fourier trong ví dụ 3.6

Ví dụ 3.7 :

Xác định biến đổi Fourier và phổ mật độ năng lượng của dãy

$$x(n)=\begin{cases}A,0\leq n\leq L-1\\ 0,\neq n\end{cases} \qquad (3.99)$$

Đồ thị của tín hiệu này được vẽ trong hình 3.14



Hình 3.14.tín hiệu rời rạc xung chữ nhật

Giải : Tín hiệu đã cho là tín hiệu khả tổng tuyệt đối thật vậy :

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} |x(n)| = \sum_{x=0}^{L-1} |A| = L|A| < \infty$$

Do đó biến đổi Fourier của nó tồn tại. Hơn nữa, đây là một tín hiệu có năng lượng hữu hạn, ta tính được $E_x = |A|^2 L$

Biến đổi Fourier của tín hiệu có thể được tính như sau :

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} Ae^{-j\omega n} = A\frac{1-e^{-j\omega L}}{1-e^{-j\omega}} \quad \text{hay} \quad X(\omega) = Ae^{-j(\omega/2)(L-1)}\frac{Sin(\omega L/2)}{Sin(\omega/2)} \quad (3.100)$$

Cho ω = 0, ta có X(0) = AL (dùng qui tắc L'Hospital)

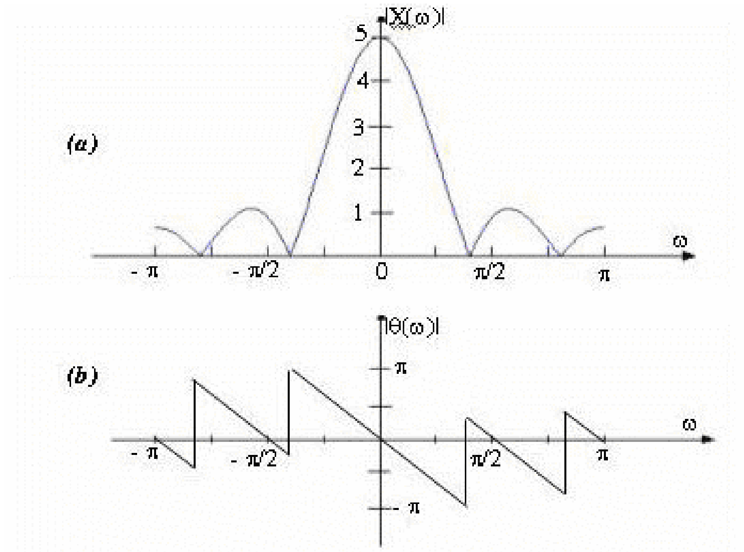
Phổ biên độ của x(n) là :

$$|X(\omega)| = \begin{cases} |A|L, \omega = 0 \\ |A|\left|\dfrac{Sin\left(\dfrac{\omega L}{2}\right)}{Sin\left(\dfrac{\omega}{2}\right)}\right|, \omega \neq 0 \end{cases} \quad (3.101)$$

$$\angle X(\omega) = \angle A - \frac{\omega}{2}(L-1) + \angle\frac{Sin\left(\dfrac{\omega L}{2}\right)}{Sin\left(\dfrac{\omega}{2}\right)} \quad (3.102)$$

Ta nhớ rằng, pha của một số thực là 0 nếu đó là một số thực dương và là (nếu đó là số thực âm.

Hình 3.15 trình bày phổ biên độ và phổ pha của tín hiệu (3.99) với A = 1 *và* L=5 phổ mật độ năng lượng chỉ là bình phương của phổ biên độ.



Hình 3.15.(a) phổ biên độ và (b) phổ pha của biến đổi fourier của tín hiệu rời rạc xung chữ nhật

Nhận xét :

Cho ω các giá trị tần số rời rạc có quan hệ hài với nhau, nghĩa là :

$$\omega = \omega_k = , k = 0,1, \ldots N\text{-}1$$

Ta có :

$$X((2\pi/N)k) = Ae^{-j\left(\frac{\pi}{N}\right)k(L-1)} \frac{Sin\left[\left(\frac{\pi}{N}\right)kL\right]}{Sin\left[\left(\frac{\pi}{N}\right)k\right]}$$

So sánh với chuỗi Fourier, pt(3.78) dãy hệ số của chuỗi xung chữ nhật tuần hoàn ở ví dụ 3.4 ta thấy rằng : X() = NX_p(k), k = 0, 1, ... N-1

Ở đây ta đã xét một tín hiệu xung chữ nhật bằng với một chu kỳ của chuỗi xung chữ nhật tuần hoàn có chu kỳ N. Giá trị của biến đổi Fourier ở các tần số ω = , k = 0,1, ... N-1 chính là tích của chu lỳ N với các hệ số của chuỗi Fourier {X_p(k)} ở các hài tương ứng. Hay nói ngược lại các hệ số X_p(k) của chuỗi Fourier bằng với mẫu thứ k của biến đổi Fourier X(ω)(được lấy mẫu đều với chu kỳ lấy mẫu l nhân cho N).

3.4.5. Các tính chất của biến đổi fourier của tín hiệu rời rạc theo thời gian

Vì biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc là trường hợp đặc biệt của biến đổi Z. Nên các tính chất của biến đổi Z cũng đúng với biến đổi Fourier. Ngoài ra, biến đổi Fourier còn có một tính chất riêng của nó.

Trước tiên ta sẽ tóm tắt các tính chất đã được trình bày trong phần biến đổi Z (xem bảng 3.2 ở trang sau). Sau đó, ta sẽ phân tích thêm một số tính chất khác của biến đổi Fourier.

Một số tính chất khác của biến đổi Fourier

1. Định lý Wiener - Khintchine

Nếu x(n) là một tín hiệu thực thì

$$r_{xx}(1) \overset{F}{\longleftrightarrow} S_{xx}(\omega) \qquad (3.104)$$

Định lý này là một trường hợp đặc biệt của tính chất tương quan, theo đó, phổ mật độ năng lượng của một tín hiệu năng lượng là biến đổi Fourier của dãy tự tương quan của nó.

Đây là một hệ quả quan trọng, nó hàm ý rằng, dãy tự tương quan của một tín hiệu và mật độ phổ năng lựng của nó chứa cùng một thông tin về tín hiệu. Vì vậy, nó không chứa thông tin về pha (giống như mật độ phổ năng lượng), ta không thể phục hồi tín hiệu một cách duy nhất từ dãy tự tương quan hay phổ mật độ năng lượng của nó.

STT	Tính chất	**Miền thời gian**	**Miền tần số**
	Ký hiệu	x(n) $x_1(n)$ $x_2(n)$	$X(\omega)$ $X_1(\omega)$ $X_2(\omega)$
1	Tuyến tính	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$
2	Dịch trong miền thời gian	x(n-k)	$e^{-j\omega k}X(\omega)$
3	Đảo trục thời gian	x(-n)	$X(-\omega)$
4	Vi phân trong miền tần số	n x(n)	$j\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
5	Chập	$x_1(n)* x_2(n)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$
6	Tương quan	$r_{x_1x_2}(l) = x_1(l) * x_2(-$	$R_{x_1x_2}(\omega) = X_1(\omega)X_2(-\omega)$ $=X_1(\omega)X_2^*(\omega)$
7	Nhân	$x_1(n).x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)X_2(\omega-\lambda)d\lambda$
8	Liên hợp phức	$x^*(n)$	$X^*(-\omega)$
9	Định lý Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega)X_2^*(\omega)d\omega$	

Bảng 3.2 : Một số tính chất của biến đổi Fourier rời rạc

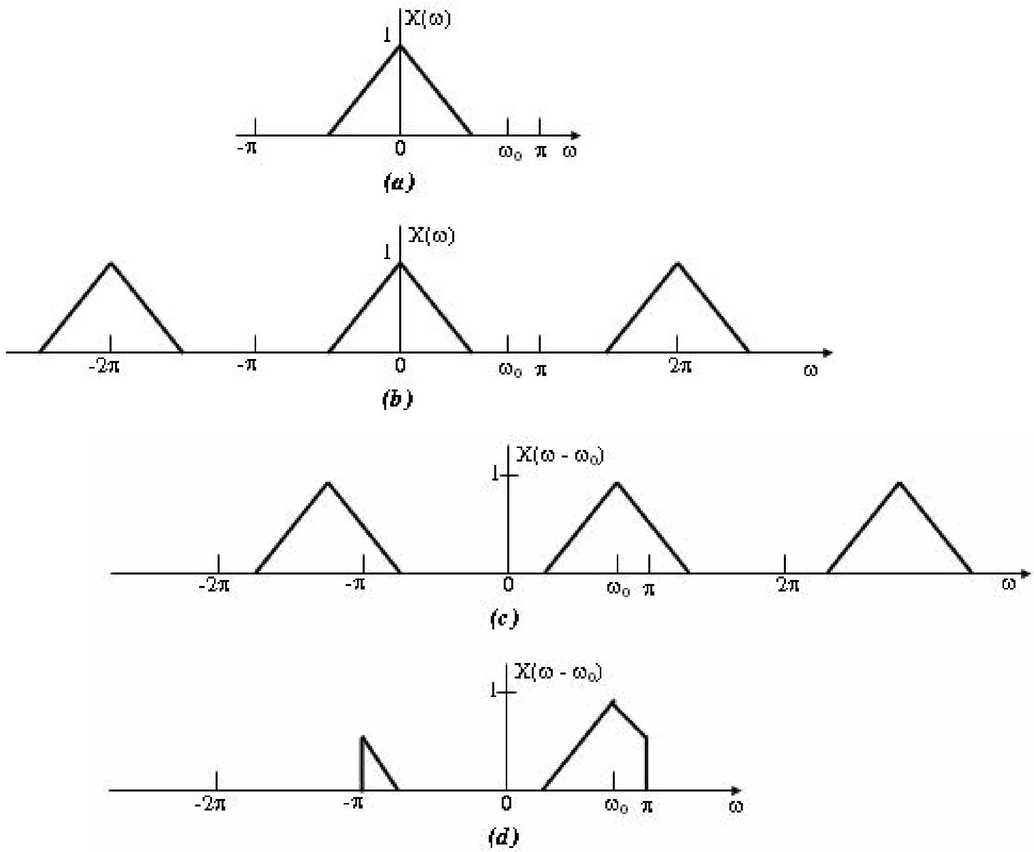
2. Dịch trong miền tần số (Frequency Shifting)

$$e^{j\omega_0 n}x(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega-\omega_0) \qquad (3.105)$$

Tính chất này được chứng minh một cách dễ dàng bằng cách thay $e^{j\omega_0 n}$ x(n) trực tiếp vào công thức phân tích (3.84). Theo tính chất này, việc nhân dãy x(n) với $e^{j\omega_0 n}$ tương đương với sự dịch chuyển trong miền tần số của phổ $X(\omega)$ một khoảng ω_0. Sự dịch chuyển này được minh họa trong hình 3.16. Vì phổ của $X(\omega)$ là tuần hoàn, nên ta chỉ cần khảo sát trong một chu kỳ (hình *3.16d*)

3. Định lý biến điệu (Modulation Theorem)

$$x(n)\cos\omega_0 n \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}X(\omega+\omega_0)+\frac{1}{2}X(\omega-\omega_0) \qquad (3.106)$$



Hình 3.16.Minh họa tính chất dịch trong miền tần số của biến đổi fourier

Để chứng minh định lý biến điệu, ta biểu diễn $\cos\omega_0 n$ dưới dạng :

$$\cos\omega_0 n = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right)$$

Và áp dụng tính chất dịch trong miền tần số. Định lý biến điệu được minh họa trong *hình 3.17*

4. Tính chất đối xứng

Các tính chất đối xứng của biến đổi Fourier rất hữu dụng, giúp ta có thể tính toán hoặc biểu diễn phổ của tín hiệu một cách đơn giản hơn.

Tổng quát, cả 2 tín hiệu $x(n)$ và $X(\omega)$ đều có giá trị phức. Ta có thể biểu diễn các tín hiệu này dưới dạng :

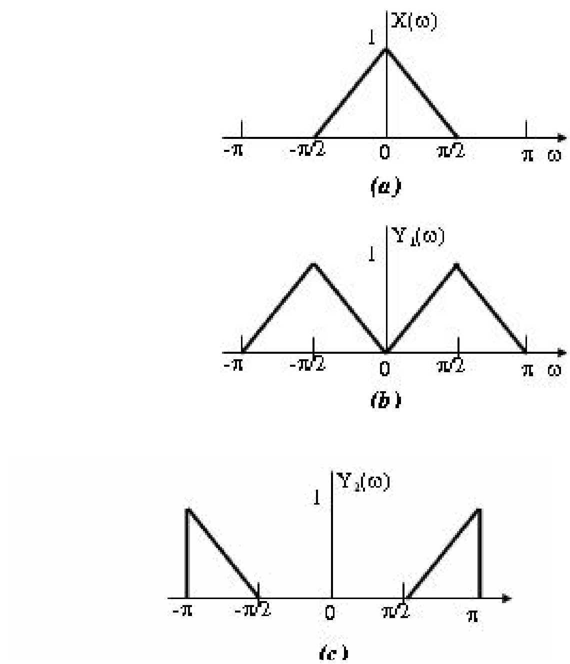
$$x(n) = x_R(n) + jx_I(n) \qquad (3.107)$$

$$X(\omega) = X_R(\omega) + jX_I(\omega) \qquad (3.108)$$

Thay pt(3.107) và $e^{-j\omega n}$ = cosωn - jsinωn vào công thức biến đổi Fourier thuận (3.84) ta thu được :

$$X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_R(n)\cos\omega n + x_I(n)\sin\omega n \qquad (3.109)$$

$$X_I(\omega) = -\sum x_R(n)\sin\omega n - x_I(n)\cos\omega n \qquad (3.110)$$



Hình 3.17. đồ thị minh họa định lý biến điện
(a) phổ của tín hiệu x(n)
(b) phổ của tín hiệu $y_1(n) = x(n)\cos\frac{\pi}{2}n$
(c) phổ của tín hiệu $y_2(n) = x(n)\cos\pi n$

Tương tự, thay pt(3.108) và $e^{j\omega n}$ = cosωn + j sinωn vào công thức biến đổi Fourier ngược (3.83) ta thu được :

$$X_R(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left[X_R(\omega)\cos\omega n - X_I(\omega)\cos\omega n\right]d\omega \qquad (3.111)$$

$$X_I(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left[X_R(\omega)\cos\omega n + X_I(\omega)\sin\omega n\right]d\omega \qquad (3.112)$$

➢ **Đặc biệt, nếu x(n) là tín hiệu thực, nghĩa là $x_R(n) = x(n)$ và $x_I(n) = 0$. Khi** đó pt(3.109) và pt(3.110) trở thành :

$$X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cos\omega n \qquad (3.113)$$

$$X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\sin\omega n \qquad (3.114)$$

Vì cos(-ω) n = cos ωn và sin(-ω) n = -sin ωn

Nên : $X_R(-\omega) = X_R(\omega)$ (đối xứng chẵn) (3.115)

$X_I(-\omega) = -X_I(\omega)$ (đối xứng lẻ) (3.116)

■ ***Nếu x(n) là tín hiệu thực và lẻ***

Nếu x(n) là tín hiệu thực và lẻ (nghĩa là x(-n) = -x(n)) thì x(n)cosωn là hàm lẻ và x(n)sinωn là hàm chẵn.

Từ pt(3.113), pt(3.114) ta thu được :

$$X_R(\omega) = x(0) = 0 \qquad (3.117)$$

vì x(0) = -x(-0) = -x(0) = 0

$$X_I(\omega) = -2\sum_{n=1}^{\infty} x(n)\sin\omega n \qquad (3.118)$$

$$X(n) = -\frac{1}{\pi}\int (X_I(\omega)\sin\omega n)d\omega \qquad (3.119)$$

■ ***Nếu x(n) là tín hiệu thuần ảo***

Trong trường hợp này $x_R(n) = 0$ và $x(n) = jx_I(n)$. Khi đó pt(3.109), pt(3.110) trở thành

$$X_R(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} X_I(n)\sin\omega n \quad \text{(lẻ)} \qquad (3.120)$$

$$X_I(\omega) = -\sum_{-\infty}^{\infty} X_I(n)\cos\omega n \quad \text{(chẵn)} \qquad (3.121)$$

$$X_I(n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[X_R(\omega)\sin\omega n + X_I(\omega)\cos\omega n\right]d\omega \qquad (3.122)$$

Nếu $x_I(n)$ lẻ nghĩa là $x_I(-n) = x_I(n)$) thì

$$X_R(\omega) = 2\sum_{n=1}^{\infty} X_I(n)\sin\omega n \quad \text{(lẻ)} \qquad (3.123)$$

$$X_I(\omega) = 0 \qquad (3.124)$$

$$X_I(n) = \frac{1}{\pi}\int X_R(\omega)\sin\omega n \; d\omega \qquad (3.125)$$

Nếu $x_I(n)$ chẳn nghĩa là $x_I(-n) = x_I(n)$) thì :

$$X_R(\omega) = 0$$

$$X_I(\omega) = X_I(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} X_I(n)\cos\omega n \quad \text{(chẵn)} \qquad (3.126)$$

$$X_I(n)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} X_I(\omega)\cos\omega n \; d\omega \qquad (3.127)$$

Ví dụ 3.8: Xác định biến đổi Fourier của tín hiệu:

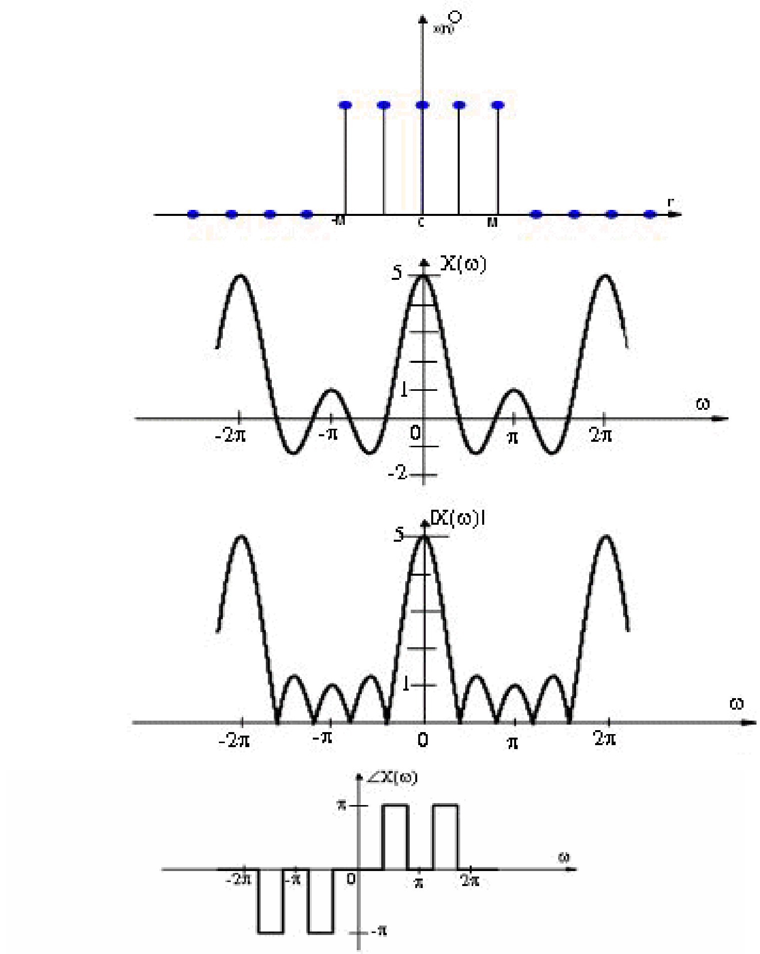
$$X(n)=\begin{cases} A, -M \le n \le M \\ 0, \ne n \end{cases} \qquad (3.128)$$

Giải : Rõ ràng x(-n) = x(n). Vậy x(n) là một tín hiệu thực và chẵn. ta được

$$X_R(\omega) = A\left(1+2\sum_{n=1}^{M}\cos\omega n\right) = A\left[1+\sum_{n=1}^{M}\left(e^{j\omega n}+e^{-j\omega n}\right)\right] = A\left[1+\sum_{n=1}^{M}e^{j\omega n}+\sum_{n=1}^{M}e^{-j\omega n}\right]$$

$$= A\left[1+\frac{e^{j\omega}-e^{j\omega(M+1)}}{1-e^{j\omega}}+\frac{e^{-j\omega}-e^{-j\omega(M+1)}}{1-e^{-j\omega}}\right] = A\left[1-\frac{e^{-j\frac{\omega}{2}}(e^{j\omega}-e^{j\omega(M+1)})}{e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}}+\frac{e^{j\frac{\omega}{2}}(e^{-j\omega}-e^{-j\omega(M+1)})}{e^{j\frac{\omega}{2}}}\right]$$

$$= A\frac{e^{j\omega(M+\frac{1}{2})}-e^{-j\omega(M+\frac{1}{2})}}{e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}} = A\frac{Sin\left(M+\frac{1}{2}\right)\omega}{Sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \qquad (3.129)$$



Hình 3.18. Đặc tính phổ của tín hiệu xung chữ nhật trong ví dụ 3.7

Vì X(ω) là thực, nên phổ biên độ và pha được tính như sau :

$$|X(\omega)| = \left| A \frac{Sin\left(M + \frac{1}{2}\right)\omega}{Sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right| \qquad (3.130)$$

Và $$\angle X(\omega) = \begin{cases} 0, X(\omega) > 0 \\ \pi, X(\omega) < 0 \end{cases} \qquad (3.131)$$

Hình 3.18 trình bày đồ thị của tín hiệu x(n), biến đổi Fourier X(ω) phổ biên độ và phổ pha của nó.

Bảng 3.3: Một số cặp biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc không tuần hoàn thông dụng.

Miền thời gian x(n)	Miền tần số X()
$x(n) = \delta(n)$	$X(\omega) = 1$
$x(n) = \begin{cases} A, \lvert n\rvert \le L \\ 0, \lvert n\rvert > L \end{cases}$	$X(\omega) = A\frac{\sin(L+\frac{1}{2})\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}$
$x(n) = \begin{cases} \frac{\omega 0}{\pi}, n = 0 \\ \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, n \neq 0 \end{cases}$	$X(\omega) \begin{cases} 1, \lvert\omega\rvert < \omega_c \\ 0, \omega_c \le \lvert\omega\rvert \le \pi \end{cases}$
$x(n) = \begin{cases} a^n, n \ge 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$	$X(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$

3.5 LẤY MẪU TÍN HIỆU TRONG MIỀN THỜI GIAN VÀ MIỀN TẦN SỐ

Như đã đề cập ở chương 1, lấy mẫu tín hiệu trong miền thời gian là khâu quan trọng trong việc xử lý tín hiệu tương tự bằng kỹ thuật xử lý tín hiệu số. Mặt khác, tín hiệu cũng có thể được xử lý trong miền tần số. Trong trường hợp tín hiệu được xử lý là tín hiệu không tuần hoàn có năng lượng hữu hạn, phổ của nó là liên tục. Vì vậy cũng cần phải lấy mẫu trong miền tần số.

3.5.1. Lấy mẫu trong miền thời gian và khôi phục tín hiệu tương tự.

Gọi $x_a(t)$ là tín hiệu tương tự cần xử lý. Giả sử tín hiệu này được lấy mẫu tuần hoàn với chu kỳ lấy mẫu là T_S, tín hiệu rời rạc thu được là :

$$x(n) = x_a(nT_S) , -\infty < n < \infty \quad (3.132)$$

Các mẫu sau đó được lượng tử hóa trở thành tín hiệu số. Trong các khảo sát sau này, ta giả sử số mức lượng tử đủ lớn để có thể bỏ qua sai số lượng tử trong quá trình biến đổi A/D.

Ta sẽ nghiên cứu mối quan hệ giữa phổ của tín hiệu liên tục $x_a(t)$ và phổ của *tín hiệu rời rạc x(n).*

Nếu $x_a(t)$ là một tín hiệu không tuần hoàn có năng lượng hữu hạn, thì phổ của nó được cho bởi công thức biến đổi Fourier.

$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j2\pi Ft}dt \qquad (3.133)$$

Ngược lại, tín hiệu $x_a(t)$ có thể được phục hồi từ phổ của nó bằng biến đổi Fourier ngược :

$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F)e^{-j2\pi Ft}dF \qquad (3.134)$$

Chú ý rằng, việc tính toán được thực hiện trên tất cả các thành phần tần số trong một dải tần vô hạn - ∞ < F < ∞ là cần thiết cho sự khôi phục tín hiệu tương tự, nếu tín hiệu có băng tần không giới hạn.

Phổ của tín hiệu rời rạc x(n) được cho bởi :

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Hay:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi fn} \qquad (3.135)$$

Dãy x(n) có thể được khôi phục từ phổ X(ω) hoặc X(f) bằng biến đổi ngược:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-x}^{x} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega$$

Hay $$x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f)e^{j2\pi fn}df \qquad (3.136)$$

Quan hệ giữa các biến thời gian t và n trong sự lấy mẫu tuần hoàn là :

$$t = nT_S \qquad (3.137)$$

Tương ứng ta có mối quan hệ giữa các biến tần số F và f.

$$x(n) \equiv x_a(nT_S) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F)e^{j2\pi n\frac{F}{F_S}}dF \qquad (3.138)$$

Suy ra :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f)e^{j2\pi fn}df = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F)e^{j2\pi n\frac{F}{F_S}}dF \qquad (3.139)$$

Từ mối quan hệ giữa F và f, đó là f =, ta thực hiện một sự biến đổi đơn giản cho vế trái của pt(3.139) và thu được :

$$\frac{1}{F_S}\int_{-\frac{F_S}{2}}^{\frac{F_S}{2}} X(\frac{F}{F_S})e^{j2\pi n\frac{F}{F_S}}dF = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F)e^{j2\pi n\frac{F}{F_S}}dF \qquad (3.140)$$

Tích phân trong vế phải của pt(3.140) có thể viết dưới dạng tổng vô hạn của các tích phân được lấy trong khoảng F_S, ta có :

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_a(\frac{F}{F_S})e^{j2\pi n\frac{F}{F_s}}dF = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{(k-1/2)F_s}^{(k+1/2)F_s} X_a(F)e^{j2\pi n\frac{F}{F_s}}dF \qquad (3.141)$$

Ta thấy rằng $X_a(F)$ trong khoảng tần số $\left[(k-1/2)F_S(k+1/2)F_S\right]$ bằng với $X_a(F - kF_S)$ trong khoảng $\left[-\frac{F_0}{2},\frac{F_0}{2}\right]$, kết hợp với tính tuần hoàn của hoàn mũ phức: $e^{j2\pi n\frac{(F+kF_s)}{F_S}} = e^{j2\pi n\frac{F}{F_s}}$ ta được kết quả là :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{(k-\frac{1}{2})F_s}^{(k+\frac{1}{2})F_s} X_a(F)e^{j2\pi n\frac{F}{F_S}}dF = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{F_S}{2}}^{\frac{F_S}{2}} X_a(F-kF_S)e^{j2\pi n\frac{F}{F_S}}dF$$
$$= \int_{-\frac{F_S}{2}}^{\frac{F_S}{2}}\left[\sum_{(k-\frac{1}{2})F_s}^{(k+\frac{1}{2})F_S} X_a(F-kF_s)\right]e^{j2\pi n\frac{F}{F_s}}dF \qquad (3.142)$$

Liên kết các pt(3.142), pt(3.141) và pt(3.140) ta thu được :

$$X(\frac{F}{F_S}) = F_S\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F-kF_S) \qquad (3.143)$$

Hay: $$X(F) = F_S\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left[(F-k)F_S\right] \qquad (3.144)$$

Từ pt(3.143) hay pt(3.144) ta thấy được mối quan hệ giữa phổ $X(F/F_s)$ hay X(f) của tín hiệu rời rạc với phổ $X_a(F)$ của tín hiệu liên tục. Vế phải của các phương trình này bao gồm sự lặp lại một cách tuần hoàn của $F_sX_a(F)$ với chu kỳ F_s. Sự tuần hoàn này là hợp lý, bởi vì như ta đã biết, phổ X(f) hay $X(F/F_s)$ của tín hiệu rời rạc là tuần hoàn với chu kỳ $f_p = 1$ hay $F_p = F_S$.

Giả sử phổ $X_a(F)$ của một tín hiệu có băng tần giới hạn $x_a(t)$ được trình bày trong hình 3.19a. Theo đó, phổ bằng 0 khi|F|.

Nếu tần số lấy mẫu được chọn $F_s > 2B$ thì phổ $X(F/F_s)$ của tín hiệu rời rạc sẽ xuất hiện như hình 3.19b. Vậy, nếu tần số lấy mẫu F_s được chọn lớn hơn tần số Nyquist (2B) thì :

$$X(F/F_s) = F_SX_a(F)\ ,\ |F| \le F_s/2 \qquad (3.145)$$

Trong trường hợp này không có sự biệt hư danh(aliasing), và do đó phổ tín hiệu rời rạc đồng dạng với phổ của tín hiệu tương tự nhân với thừa số F_s trong dải tần cơ bảnF| ≤F_s /2 (tương đương với |F| ≤F_s /2).

Ngược lại, nếu tần số FS được chọn sao cho $F_s < 2B$ thì sự xếp chồng tuần hoàn của $X_a(F)$ sẽ đưa đến sự chồng lấp phổ (spectral ovelap) (hình *3.19c* và d). Do đó, phổ của $X(F/F_s)$ của tín hiệu rời rạc chứa các thành phần tần số biệt hư danh(aliasing) của phổ $X_a(F)$ của tín hiệu tương tự. Hiện tượng biệt hư danhxuất hiện và ta không thể khôi phục tín hiệu tương tự từ các mẫu của nó.Cho một tín hiệu rời rạc x(n) với phổ là $X(F/F_s)$ (hình 3.19b), không có hiện tượng biệt d../Anh, ta có thể khôi phục lại tín hiệu tương tự từ các mẫu x(n).

Ta có:

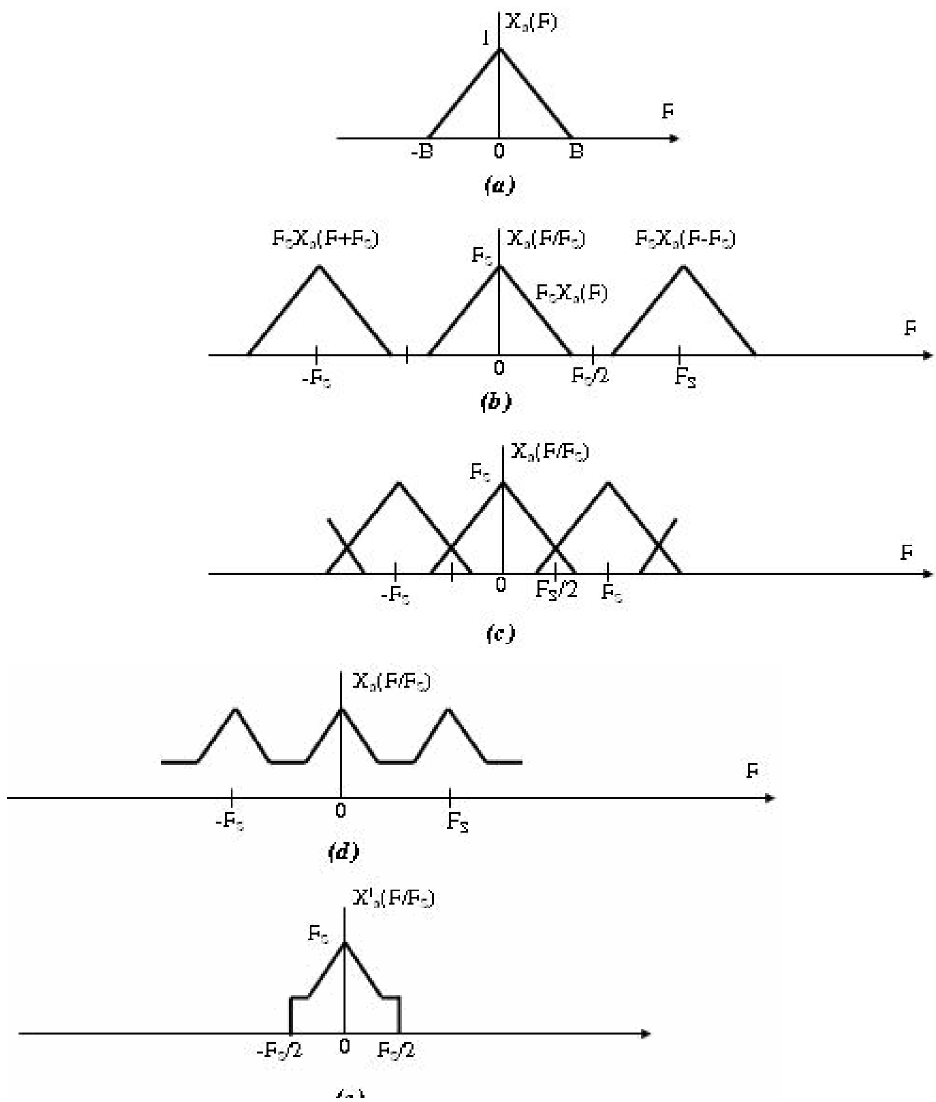
$$X_a(F)=\begin{cases}\dfrac{1}{F_S}X(\dfrac{F}{F_S}),|F|\le\dfrac{F_S}{2}\\ 0,|F|>\dfrac{F_S}{2}\end{cases} \qquad (3.146)$$

Với X(F/F_s) là: $$X(\frac{F}{F_S})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{j2\pi n\frac{F}{F_S}} \qquad (3.147)$$

Biến đổi ngược của X_a(F) là :

$$X_a(t)=\int_{\frac{F_S}{2}}^{\frac{F_S}{2}}X_a(F)e^{j2\pi nF_S}dF \qquad (3.148)$$

Giả sử rằng F_s = 2B thay thế phương (3.156) và phương trình (3.147) vào phương trình (3.148) ta được :



Hình 3.19.Sự lấy mẫu của một tín hiệu có băng tần giới hạn và hiện tượng biệt danh

$$_a(t) = \frac{1}{F_S}\int_{-\frac{F_S}{2}}^{\frac{F_S}{2}}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{j2\pi n\frac{F}{F_S}}\right] e^{j2\pi n} dF$$

$$\text{X } X_a(t) = \frac{1}{F_S}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\int_{-\frac{F_S}{2}}^{\frac{F_S}{2}} e^{-j2nF(1-\frac{n}{F_S})} dF \qquad (3.149)$$

$$X_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_S)\frac{\sin\left[\left(\frac{\pi}{T_S}\right)(t-nT)\right]}{\left(\frac{\pi}{T_S}\right)(t-nT)}$$

Trong đó : $x(n) = x_a(nT_s)$ và $T_S = \frac{1}{F_S} = \frac{1}{2B}$ là thời khoảng lấy mẫu. Pt(3.149) được gọi là công thức nội suy lý tưởng (ideal interpolation formula) dùng để khôi phục $x_a(t)$ từ các mẫu của nó.

Hàm: $$g(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T_S}\right)t}{\left(\frac{\pi}{T_S}\right)t} \qquad (3.150)$$

được gọi là hàm nội suy, như đã đề cập ở chương 1.

Công thức (3.149) là cơ sở cho định lý lấy mẫu đã được phát biểu ở chương 1, đó là:

Một tín hiệu liên tục có băng tần hữu hạn, với tần số cao nhất là B Hz, có thể được khôi phục một cách duy nhất từ các mẫu của nó mà đã được lấy mẫu với tốc độ lấy mẫu là $F_S \geq 2B$ mẫu/giây.

Vừa rồi, ta đã thảo luận về vấn đề lấy mẫu và khôi phục các tín hiệu tương tự có băng tần hữu hạn. Vấn đề này sẽ như thế nào đối với tín hiệu có băng tần vô hạn, ta hãy xét trường hợp này trong ví dụ sau đây.

Ví dụ 3.9 : Sự lấy mẫu một tín hiệu có băng tần không giới hạn

Xét tín hiệu liên tục: $x_a(t) = x_a(t) = e^{-A|t|}$; $A > 0$

Phổ của nó được cho bởi : $$X_a(F) = \frac{2A}{A^2 + (2\pi F)^2}$$

Hãy xác định phổ của tín hiệu lấy mẫu : $x(n) \equiv x_a(nT)$

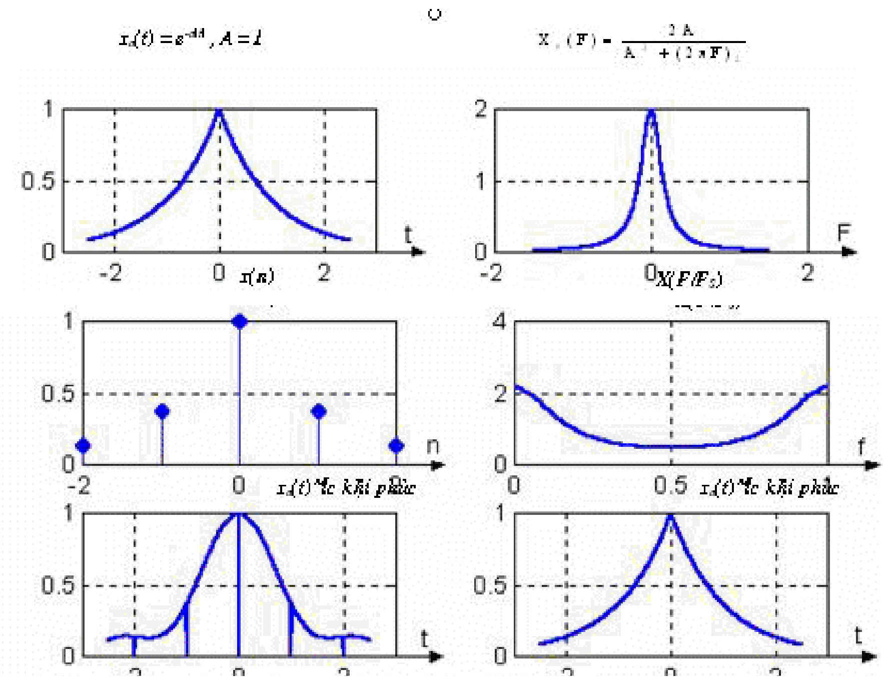
Giải :

Nếu ta lấy mẫu $x_a(t)$ với tần số lấy mẫu là $F_s = 1/T_s$, ta có :

$$x(n) = x_a(nT_S) = e^{-AT_s|n|} = (e^{-AT_s})^{|n|} \ ; -\infty < n < \infty$$

Phổ của x(n) tìm được một cách dễ dàng bằng cách áp dụng trực tiếp công thức biến đổi Fourier. Ta tính được :

$$X(\frac{F}{F_S}) = \frac{1 - e^{-2aT_S}}{1 - 2e^{-AT_S}\cos 2\pi FT_S + e^{-2AT_S}}$$



Hình 3.20.(a) tín hiệu tương tự $X_a(t)$ và phổ của nó $X_a(F)$
(b) và phổ của X(n) với A =1, Fs = 1
(c) tín hiệu được khôi phục $X_a(t)$ với Fs =1
(d) tín hiệu được khôi phục $X_a(t)$ với Fs =20

tuần hoàn với chu kỳ F_s.

Vì $X_a(F)$ không được giới hạn băng tần, nên không thể tránh được hiện tượng biệt d../Anh, phổ của tín hiệu được khôi phục : (t) là :

$$X_a^{'}(F) = \begin{cases} T_S X(\frac{F}{F_S}); |F| \le \frac{F_S}{2} \\ 0; |F| > \frac{F_S}{2} \end{cases}$$

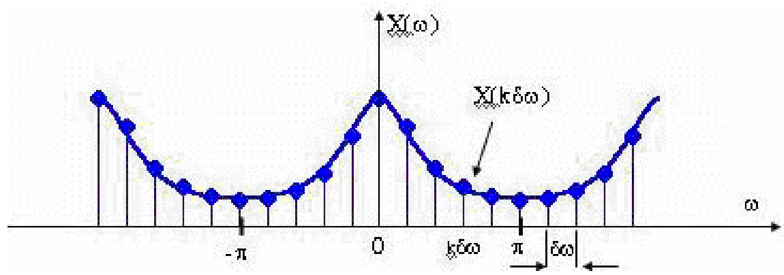
Hình 3.20a vẽ tín hiệu nguyên thủy $x_a(t)$ và phổ $X_a(t)$ của nó với A = 1. Tín hiệu x(n) và phổ X() của nó được vẽ trong hình 3.20b, với F_s=1Hz. Méo dạng do biệt hư danh(aliasing) rõ ràng là đáng chú ý trong miền tần số. Tín hiệu được khôi phục X_a được vẽ trong hình 3.20c. Sự méo dạng do chồng phổ được làm giảm một cách đáng kể khi tăng tần số lấy mẫu. Chẳng hạn tăng tần số lấy mẫu lên đến F_s = 20 Hz, tín hiệu được khôi phục có dạng gần giống với tín hiệu nguyên thủy được vẽ trong hình 3.20d.

3.5.2. Lấy mẫu trong miền tần số và khôi phục tín hiệu rời rạc theo thời gian

Nhắc lại rằng, tín hiệu năng lượng hữu hạn không tuần hoàn có phổ liên tục. Ta xét một tín hiệu rời rạc không tuần hoàn x(n) có biến đổi Fourier là :

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \qquad (3.151)$$

Giả sử ta lấy mẫu X(ω) một cách tuần hoàn trong miền tần số với khoảng cách lấy mẫu là δω (radians). Vì X(ω) tuần hoàn với chu kỳ 2π nên chỉ cần khảo sát các mẫu trong một chu kỳ cơ bản, ta lấy N mẫu cách đều trong khoảng $0 \le \omega < 2\pi$, khoảng cách lấy mẫu tương ứng làP (hình 3.21)



Hình 3.21 lấy mẫu trong miền tần số của biến đổi fourier

Giá trị của X(ω) ở các tần số ω_k = là :

$$X(2\pi k/N)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j2\pi\frac{kn}{N}},k=0,1,...,N-1 \tag{3.152}$$

Tổng trong pt(3.152) có thể chia thành tổng của vô số tổng con như sau :

$$X(2\pi k/N)=...+\sum_{n=-N}^{-1}x(n)e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}+\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}+\sum_{n=N}^{2N-1}x(n)e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}$$

$$X(2\pi k/N)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{n=lN}^{lN+N-1}x(n)e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}$$

Đổi biến m = n - lN hay n = m + lN, ta được:

$$X(\frac{2\pi}{N}k)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{N-1}x(m+lN)e^{-j2\pi\frac{km}{N}}e^{-j2\pi kl}=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{N-1}x(m+lN)e^{-j2\pi\frac{km}{N}}$$

Hoán đổi vị trí của 2 tổng và thay lại ký hiệu biến m bằng n, ta được :

$$X(\frac{2\pi k}{N})=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty}x(n+lN)\right]e^{-j2\pi\frac{km}{N}} \tag{3.153}$$

Với k = 0, 1, 2, ... , N-1

Đặt:

$$x_P(n)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}x(n+lN) \tag{3.154}$$

Tín hiệu xp(n) thu được bằng phép lặp tuần hoàn x(n) với mỗi đoạn N mẫu, rõ ràng nó tuần hoàn với chu kỳ N. Vì vậy, nó có thể khai triển thành chuỗi Fourier.

$$x_P(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X_k e^{j2\pi\frac{kn}{N}},n=0,1,2,...,N-1 \tag{3.155}$$

Với các hệ số của chuỗi Fourier được xác định bởi :

$$X_k=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x_P(n)e^{-j2\pi\frac{kn}{N}};k=0,1,2,...,N-1 \tag{3.156}$$

So sánh pt(3.156) với pt(3.153) ta thu được :

$$X_k = \frac{1}{N} X(\frac{2\pi}{N} k) \text{ ; k = 0, 1, 2, ..., N-1} \quad (3.157)$$

Do đó:

$$x_P(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(\frac{2\pi}{N} k) e^{j2\pi\frac{kn}{N}}; n = 0,1,2,..., N-1 \quad (3.158)$$

Quan hệ (3.158) cho phép ta khôi phục $x_p(n)$ từ các mẫu của phổ X(ω). Tuy nhiên, nó chưa cho ta thấy khả năng khôi phục X(ω) hay x(n) từ các mẫu của X(ω).

Để thiết lập công thức nội suy khôi phục X(ω) hoặc x(n) từ các mẫu của X(ω)ta xét mối quan hệ giữa x(n) và $x_p(n)$.

Vì $x_p(n)$ là sự mở rộng tuần hoàn của x(n) từ pt(3.154), nên ta có thể khôi phục x(n) từ $x_p(n)$ nếu không có sự biệt hư danhhay chồng mẫu trong miền thời gian . Xét trường hợp x(n) là một dãy có độ dài hữu hạn và nhỏ hơn chu kỳ N của $x_p(n)$. Trường hợp này được minh họa trong hình 3.22 (không làm mất đi tính tổng quát), giả sử các mẫu khác 0 của x(n) nằm trong khoảng 0 ≤ n ≤ L-1 và L ≤ N thì :

$$x(n) = x_p(n) \text{ ; } 0 \le n \le N-1$$

Vì vậy x(n) có thể khôi phục từ xp(n) mà không bị nhầm lẫn.

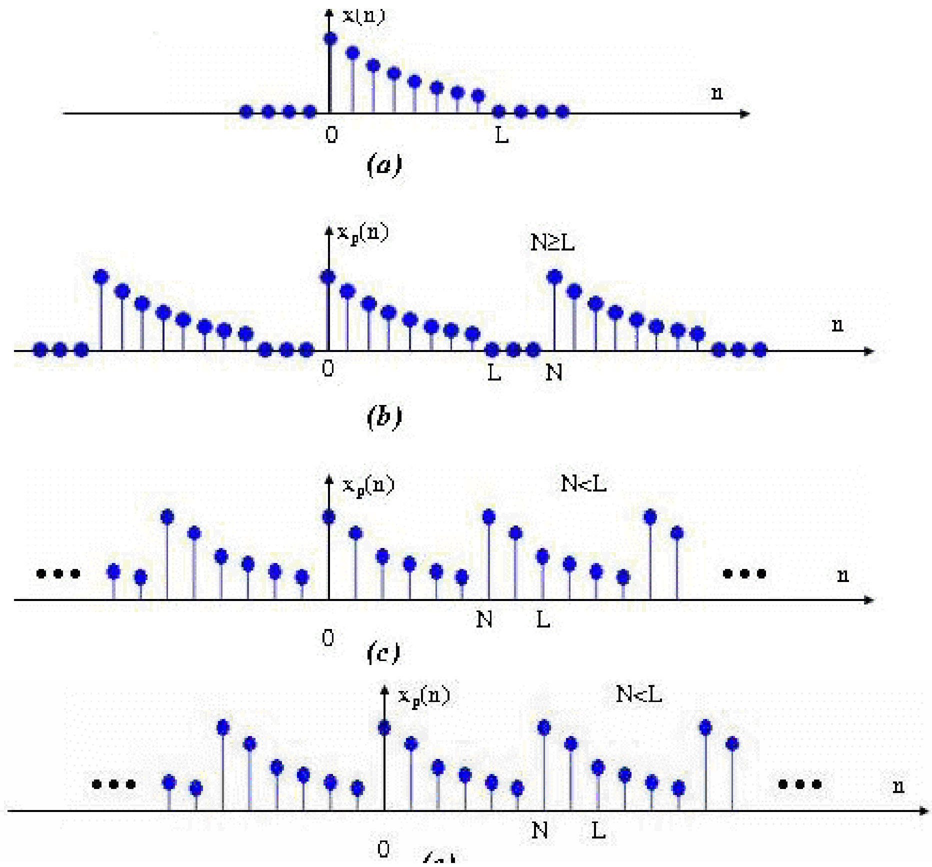
Ngược lại nếu L > N, chiều dài của dãy x(n) lớn hơn chu kỳ của $x_p(n)$ ta không thể khôi phục x(n) từ $x_p(n)$ bởi vì có sự chồng mẫu trong miền thời gian.

Kết luận : Phổ của một tín hiệu rời rạc không tuần hoàn có độ dài hữu hạn x(n) hay chính x(n) có thể được khôi phục một cách chính xác từ các mẫu của phổ ở các tần số, nếu chiều dài L của x(n) nhỏ hơn N, N là số mẫu được lấy trong khoảng tần số 2π.

Khi đó $x_p(n)$ được tính từ phương (3.168) và x(n) được khôi phục như sau :

$$x(n) = \begin{cases} x_P(n); 0 \le n \le N-1 \\ 0; n \ne \end{cases} \quad (3.159)$$

Sau cùng X(ω) có thể được tính từ pt(3.161)



Hình 3.22 (a) dãy x(n) nguyên thủy không hoàn toàn có độ dài L
(b) dãy mở rộng tuần hoàn $x_p(n)$ với N>L không chồng mẫu
(c) dãy mở rộng tuần hoàn $x_p(n)$ với N<L có chồng mẫu

Phổ X(ω) được xem như là một tín hiệu liên tục theo ω, nó có thể được biểu diễn bằng các mẫu X() của nó k = 0, 1, ..., N-1. Giả sử rằng N≥L, khi đó $x(n) = x_p(n)$ với $0 \le n \le N-1$, từ pt(3.158) ta có :

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi\frac{kn}{N}}; 0 \le n \le N-1 \qquad (3.160)$$

Thay pt(3.160) và pt(3.151) ta được :

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi\frac{kn}{N}}\right] e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\omega - 2\pi k/N)n}\right] \qquad (3.161)$$

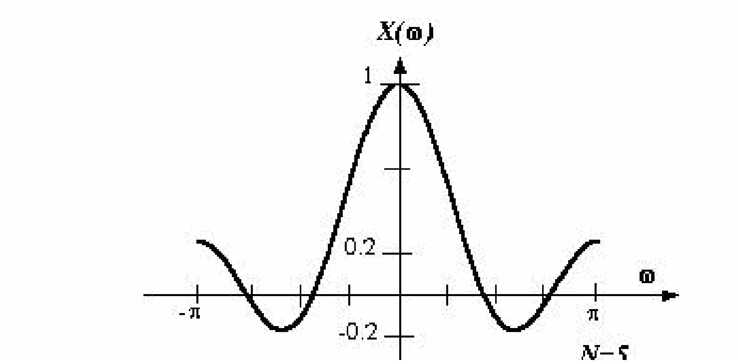
Tổng bên trong dấu ngoặc của pt(3.171) là một hàm nội suy cơ bản được dịch trong mieàn taàn soá. Thật vậy ta định nghĩa hàm:

$$P(\omega) = \frac{1}{N\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n}} = \frac{1}{N}\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{\sin\left(\omega\frac{N}{2}\right)}{N\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\omega(N-1)/2} \qquad (3.162)$$

Pt(3.160) được viết lại :

$$X(\omega)=\sum_{k=0}^{N-1} X(\frac{2\pi}{N}k)P(\omega-\frac{2\pi}{N}k) \qquad (3.163)$$

Pt(3.173) là công thức nội suy dùng để khôi phục X(ω) từ các mẫu của nó.



Hình 3.23 đồ thị của hàm khi N =5

Hàm nội suy P(ω) có dạng đồ thị được vẽ trong hình 3.23

Ví dụ 3.10 :

Xét tín hiệu : $x(n) = a^n u(n)$, 0 < a < 1 phổ của tín hiệu này được lấy mẫu ở các tần số (k =, k = 0, 1, ..., N-1. Xác định phổ được khôi phục với a=0,8 khi N=5 và N = 50.

Giải :

Biến đổi Fourier của dãy x(n) là :

$$X(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} \quad = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

Thay a = 0,8 và ω = ω_k = , ta được :

$$X_k = X(\frac{2\pi k}{N}) = \frac{1}{1-0{,}8e^{-j2\pi\frac{k}{N}}}$$

Dãy tuần hoàn $x_p(n)$ tương ứng với các mẫu X(), k = 0, 1, ..., N-1 thu được từ pt(3.158), và:

$$x(n)=x_p(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(\frac{2\pi k}{N})e^{j2\pi\frac{kn}{N}} \qquad \text{, vớin = 0, 1, ..., N-1}$$

Kết quả được minh họa trong hình 3.24 với N = 5 và N = 50. Để có sự so sánh, dãy nguyên thủy x(n) và phổ của nó cũng được vẽ. Ảnh hưởng của hiện tượng chồng mẫu khá rõ trong trường hợp N = 5. Trong trường hợp N=50 ảnh hưởng do sự chồng mẫu rất yếu và kết quả x'(n) ≈ x(n), với n=0, 1, 2, ..., N-1.

3.6 BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC (DFT DISCRETE FOURIER TRANFORM)

3.6.1. Khái niệm

Trong phần trước, ta đã trình bày về sự lấy mẫu trong miền tần số của một tín hiệu có năng lượng hữu hạn không tuần hoàn. Nói chung, các mẫu X() của biến đổi Fourier X(ω), với k = 0,1, ... N-1 không đặc trưng cho sự duy nhất của dãy x(n) khi x(n) là một dãy có độ dài vô hạn. Thay vào đó, các mẫu tần số X() này lại tương ứng với một dãy tuần hoàn $x_p(n)$ có chu kỳ N. Ở đây, $x_p(n)$ là dãy được tạo ra từ sự xếp chồng tuần tuần của x(n). Như đã được xác định bởi phương trình (3.154) đó là :

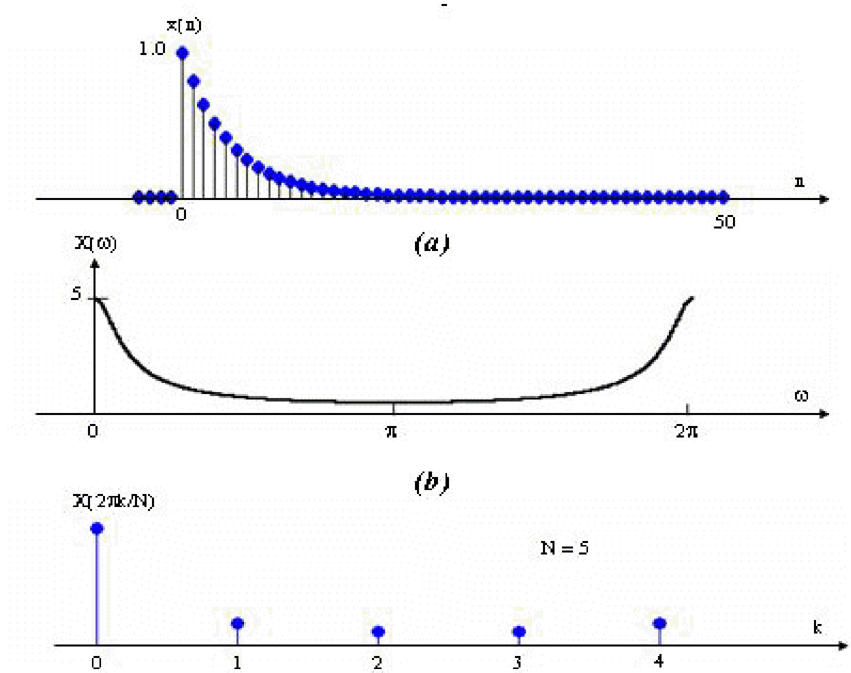
$$x_P(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN) \qquad (3.164)$$

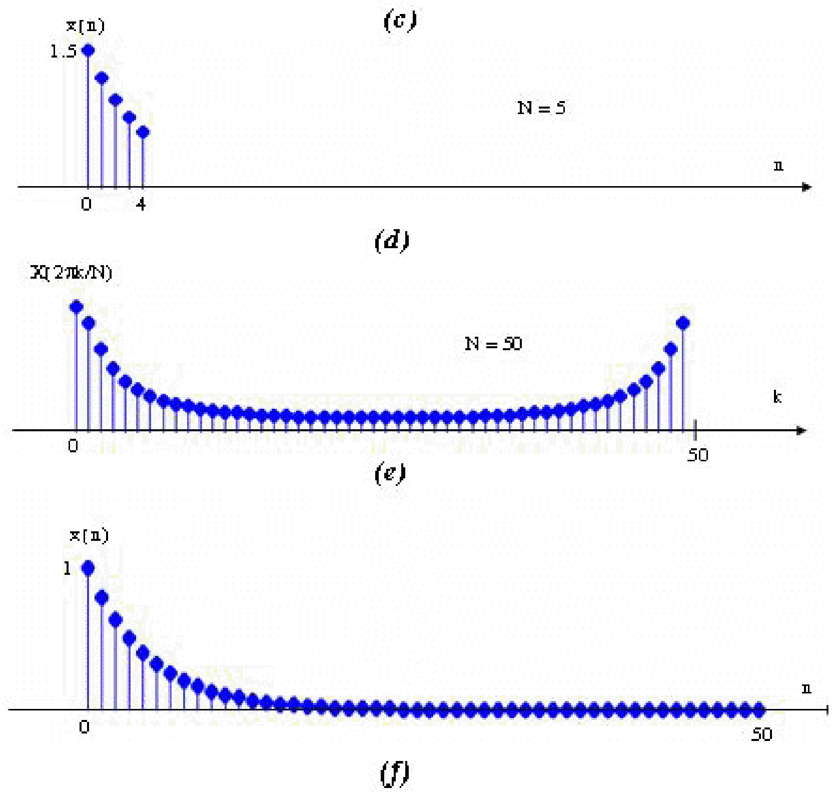
Khi x(n) có chiều dài hữu hạn L ≤ N thì $x_p(n)$ chính là sự lặp lại tuần hoàn của x(n), trong một chu kỳ $x_p(n)$ được xác định bởi :

$$x_P(n) = \begin{cases} x(n); 0 \le n \le L-1 \\ 0; L \le n \le N-1 \end{cases} \qquad (3.165)$$

Ngược lại, dãy x(n) có thể được khôi phục lại từ xp(n) bằng cách cắt lấy một chu kỳ của $x_p(n)$ nghĩa là :

$$x(n) = \begin{cases} x_P(n); 0 \le n \le L-1 \\ 0; n \ne \end{cases} \qquad (3.166)$$





Hình 3.24 : (a) Đồ thị dãy $x(n)=0.8^n u(n)$
(b) Biến đổi Fourier của x(n)
(c) Biên độ của X(ω) được lấy mẫu với N=5
(d)Tín hiệu rời rạc được khôi phục bị méo dạng đáng kể do aliasing (e) & (f) Ảnh hưởng của aliasing không đáng kể với N=50

Cần khẳng định lại rằng x(n) chỉ có thể khôi phục lại từ $x_p(n)$ khi L ≤ N và lúc này ta coi như x(n) có độ dài N bằng cách thêm vào các mẫu có giá trị 0 ở các thời điểm L ≤ n ≤ N-1. Khi đó, trong miền tần số các mẫu của X(ω) là X(), với k = 0,1, ... N-1, biểu diễn một cách duy nhất dãy có độ dài hữu hạn x(n).

Ta có thể được khôi phục X(ω) từ các mẫu

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n) e^{-j\omega n}; 0 \le \omega \le 2\pi$$

bằng công thức nội suy (3.163).

Tóm lại, một dãy x(n) có độ dài hữu hạn có biến đổi Fourier là :

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n) e^{-j\omega n}; 0 \le \omega \le 2\pi \qquad (3.167)$$

Trong đó các chỉ số trên và dưới của tổng hàm ý rằng x(n) = 0 với các giá trị của n ở ngoài khoảng [0, L–1].

Khi ta lấy mẫu X(ω) tại những tần số cách đều nhau ω_k =,
với k = 0,1,... N-1 với N ≤ L ta được :

$$X(K) = X(2\pi k/N) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n) e^{-j2\pi\frac{kn}{N}} \qquad (3.168)$$

Để thuận tiện, chỉ số trên của tổng có thể được tăng lên từ L-1 đến N-1, vì x(n)=0, khi n $\geq$ L.

Ta có :

$$X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi\frac{kn}{N}} \qquad (3.169)$$

Quan hệ (3.169) là công thức biến đổi một dãy {x(n)} có độ dài L ≤ N trong miền thời gian thành dãy {X(K)} có độ dài N trong miền tần số. Vì các mẫu tần số này thu được bằng cách tính biến đổi Fourier X(ω) ở một tập N tần số rời rạc (cách đều nhau), nên quan hệ (3.169) được gọi là biến đổi Fourier rời rạc (DFT) của x(n). Ngược lại, quan hệ (3.158) cho phép ta khôi phục x(n) từ các mẫu tần số X(K)

$$x(n) = \frac{1N}{L} \sum_{n=0}^{N-1} X(k) e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}; n = 0,1,2...., N-1 \qquad (3.170)$$

Pt(3.170) được gọi là biến đổi Fourier rời rạc ngược (IDFT: Inverse DFT). Khi x(n) có chiều dài L < N, IDFT N điểm sẽ cho kết quả x(n)=0 với L≤n≤N-1. Như vậy, ta có cặp công thức biến đổi DFT như sau :

Ví dụ 3.11 :

Xét một dãy có chiều dài hữu hạn L được định nghĩa như sau :

$$x(n) = \begin{cases} 1; 0 \leq n \leq L-1 \\ 0; n \neq \end{cases}$$

Xác định DFT N điểm của dãy này với N ≥ L

Giải :

Biến đổi Fourier của dãy này là :

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{L-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega L}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{Sin\left(\frac{\omega L}{2}\right)}{Sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\omega\frac{(L-1)}{2}}$$

Biên độ và pha của X(ω) được vẽ trong hình 3.25 với L = 10. DFT N điểm của x(n) đơn giản là giá trị của X(ω) tại tập N tần số ωk =, k = 0,1, ..N-1 , vậy

$$X(k) = \frac{1 - e^{j2\pi\frac{kL}{N}}}{1 - e^{j2\pi\frac{kN}{L}}} = \frac{Sin\left(\frac{\pi kL}{N}\right)}{Sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)} e^{-j\pi\frac{k(L-1)}{N}}; k = 0,1,..., N-1$$

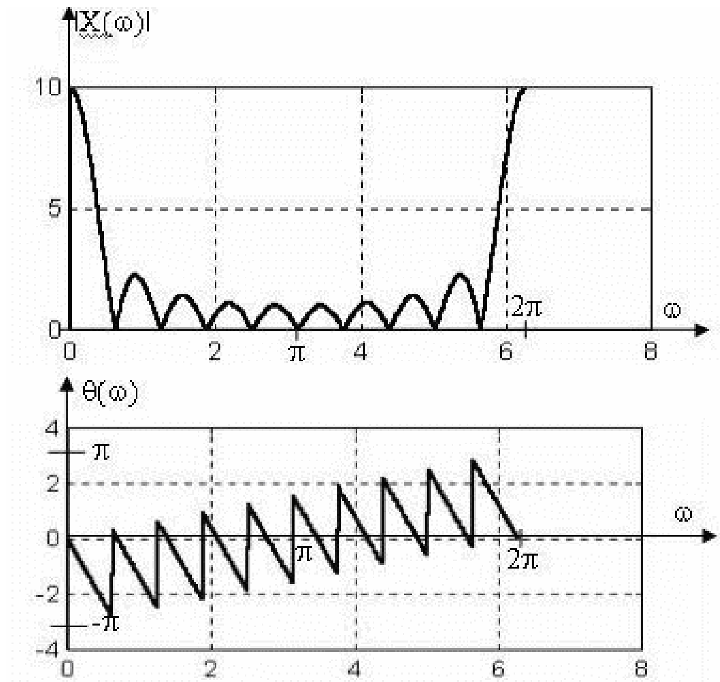
Nếu N được chọn sao cho N = L, thì DFT trở thành :

$$X(k) = \begin{cases} L; k = 0 \\ 0; k = 1,2,\ldots, L-1 \end{cases}$$

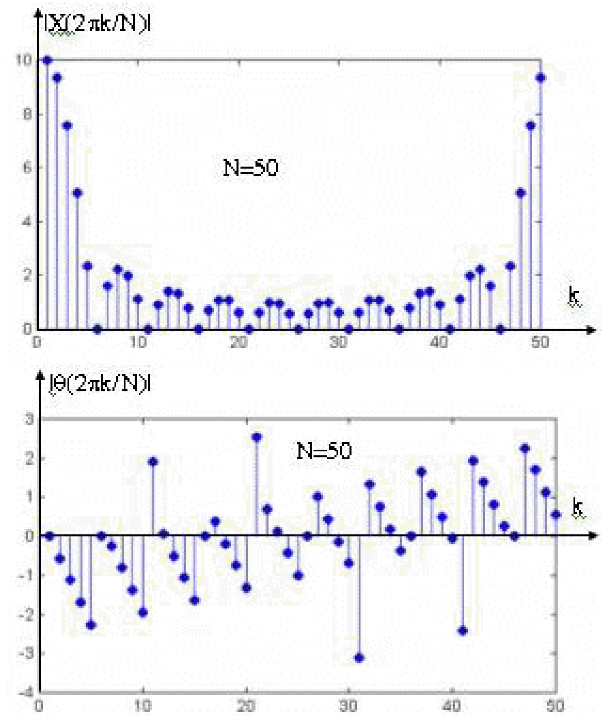
Ta thấy, trong trường hợp này chỉ có một giá trị khác 0 trong DFT. Ta có thể kiểm tra lại rằng x(n) có thể được khôi phục từ X(K) bằng cách thực hiện biến đổi IDFT L điểm.

Mặc dù DFT L điểm đủ để đặc trưng một cách duy nhất cho dãy x(n) trong miền tần số, nhưng rõ ràng nó không cung cấp đủ chi tiết để có một hình ảnh tốt về đặc tính phổ của x(n). Nếu muốn có một hình ảnh tốt hơn, ta phải ước lượng X(ω) ở các tần số có khoảng cách gần nhau hơn, nghĩa là ω_k = , với N > L. Ta thấy cách tính này tương đương với sự kéo dài chiều dài của dãy x(n) bằng cách thêm vào N - L mẫu có giá trị bằng 0.

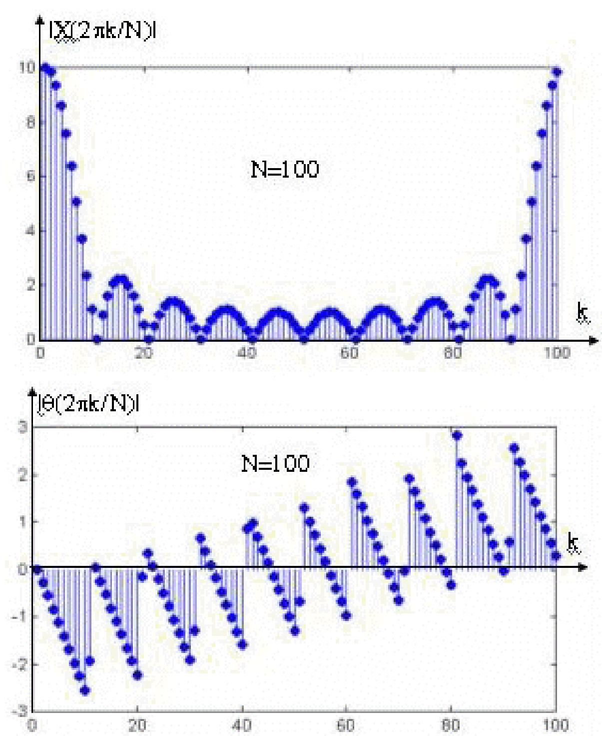
Hình 2.26 vẽ đồ thị của DFT N điểm, biên độ và pha với L = 10, N = 50 và N = 100. Ta thấy đặc tính phổ của dãy rõ ràng hơn.



Hình 3.25. đặc tuyến biến đổi biên độ và pha của biến đổi fourier trong ví dụ 3.11(với N=10)



Hình 3.26a Biên độ và pha của DFT N điểm trong ví dụ 3.11 với L=10 và N=50



Hình 3.26 b : Biên độ và pha của DFT N điểm trong ví dụ 3.11 với L=10 và N =100

DFT và IDFT là các biến đổi tuyến tính trên các dãy {x(n)} và {X(K)}.

Để thấy được tính chất này ta định nghĩa một vectơ $X_N(n)$ của các mẫu tần số và một ma trận W_N bậc N x N như sau :

$$x_N = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ . \\ . \\ x(N-1) \end{bmatrix} \qquad X_N = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ . \\ . \\ X(N-1) \end{bmatrix} \qquad (3.183)$$

$$W_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & .... & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & .... & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & .... & W_N^{2(N-1)} \\ . & . & . & .... & . \\ . & . & . & .... & . \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & .... & W_N^{(n-1)(N-1)} \end{bmatrix} \qquad (3.184)$$

Với các định nghĩa này DFT N điểm có thể được biểu diễn dưới dạng ma trận như sau : $X_N = W_N X_N$ (3.185)

Ở đây W_N là một ma trận của sự biến đổi tuyến tính . Ta thấy W_N là một ma trận đối xứng. Giả sử rằng nghịch đảo của W_N tồn tại thì pt(3.185) có thể viết lại như sau :

$$x_N = W_N^{-1} X_N \qquad (3.186)$$

Đây chính là biểu thức cho IDFT

Thực ra, IDFT chobởi phương trình (3.182) có thể biểu diễn dưới dạng ma trận :

$$X_N = \frac{1}{N} W_N^* X_N \qquad (3.187)$$

Ở đây W_N^* là ma trận liên hợp phức của W_N. So sánh pt(3.187) và pt(3.156) ta suy ra :

$$W_N^{-1} = \frac{1}{N} W_N^* \qquad (3.188)$$

Pt(3.188) hàm ý rằng : $W_N W_N^* = NI_N$

Với I_N là ma trận đồng dạng (đơn vị) bậc N x N. Do đó ma trận W_N là một ma trận trực giao. Hơn nữa ma trận đảo của nó tồn tại và bằng W_N^*/N

DFT và IDFT đóng vai trò rất quan trọng trong nhiều ứng dụng của xử lý tín hiệu số như: phân tích phổ, ước lượng phổ mật độ công suất, phân tích tương quan, lọc tuyến tính …Có nhiều thuật toán có hiệu quả để tính DFT và IDFT một cách nhanh chóng và chính xác. Trong đó thuật toán được sử dụng rộng rãi gọi là biến đổi fourier nhanh (FFT : Fast Fourier Transform) (Tham khảo [11], [4], [7]).

3.6.2. Quan hệ giữa DFT và các biến đổi khác

Trong phần này ta sẽ tổng kết lại mối quan hệ của DFT với một số biến đổi khác.

3.6.2.1. Quan hệ giữa DFT với các hệ số chuỗi Fourier của dãy tuần hoàn

Một dãy tuần hoàn $x_p(n)$ với chu kỳ N có thể biểu diễn bằng chuỗi Fourier, ta viết lại:

$$x_P(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j2\pi kn/N}, \text{ với } \infty < n < \infty \qquad (3.189)$$

Trong đó, các hệ số của chuỗi Fourier được cho bởi biểu thức:

$$X_P(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}, \text{ với } k = 0,1, \dots, N-1 \qquad (3.190)$$

để so sánh, ta viết lại cặp biến đổi DFT:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi \frac{kn}{N}}, n = 0,1,2,\dots, N-1 \qquad (3.191)$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}, k = 0,1,\dots, N-1 \qquad (3.192)$$

Ta thấy các hệ số của chuỗi Fourier có cùng dạng với DFT. Thật vậy, nếu ta định nghĩa một dãy x(n) bằng một chu kỳ của dãy tuần hoàn $x_p(n)$, thì DFT của dãy này là:

$$X(k) = N.X_p(k) \qquad (3.193)$$

Hơn nữa, pt(3.189) có dạng của IDFT. Vậy, DFT cho ta sự liên kết đặc tính tần số giữa tín hiệu tuần hoàn và tín hiệu không tuần hoàn có độ dài hữu hạn.

Ghi chú: DFT của một dãy rời rạc tuần hoàn

Từ định nghĩa, ta thấy DFT của một dãy có độ dài hữu hạn x(n) là các mẫu X(k) của biến đổi Fourier X(ω) của tín hiệu rời rạc x(n). Để đi đến định nghĩa này, ta đã dựa vào mối quan hệ giữa X(k) và các hệ số của chuỗi Fourier của dãy tuần hoàn $x_p(n)$, với $x_p(n)$ được thành lập bằng cách xếp chồng tuần hoàn x(n) với chu kỳ N. Ngược lại, với một dãy tuần hoàn $x_p(n)$ bất kỳ, N mẫu trong một chu kỳ có thể biểu diễn tín hiệu này một cách đầy đủ trong miền thời gian, và DFT của dãy có chiều dài bằng một chu kỳ (có quan hệ với các hệ số của chuỗi Fourier theo pt(3.193)) cũng có thể biểu diễn tín hiệu một cách đầy đủ trong miền tần số. Vì vậy, các công thức định nghĩa DFT (3.191) và (3.192) cũng được áp dụng cho tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ N.

3.6.2.2. Quan hệ giữa DFT với phổ của của dãy có độ dài hữu hạn

Xét một dãy x(n) không tuần hoàn có năng lượng hữu hạn, biến đổi Fourier của nó là:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-i\omega n} \qquad (3.194)$$

nếu X(ω) được lấy mẫu ở N tần số cách đều nhau, $\omega_k = 2\pi k/N$, k=0,1,…,N-1, thì:

$$X(k) = X(\omega)\Big|_{\omega = 2\pi k/N} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi kn/N}, k = 0,1,\dots, N-1 \qquad (3.195)$$

Các thành phần phổ {X(k)} tương ứng với phổ của một dãy tuần hoàn chu kỳ N, đó là:

$$x_P(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n - lN) \qquad (3.196)$$

Nếu x(n) là tín hiệu năng lượng hữu hạn, nhưng có độ dài vô hạn, thì x(n) không thể khôi phục chính xác từ một chu kỳ của $x_p(n)$. Nếu x(n) là một dãy có độ dài L hữu hạn và L ≤ N, thì ta có thể khôi phục chính xác x(n) từ $x_p(n)$ như sau:

$$x(n) = \begin{cases} x_P(n); 0 \le n \le N-1 \\ 0; n \ne \end{cases}$$

Trong trường hợp này, IDFT của {X(k)} đúng là dãy nguyên thủy x(n).

3.6.2.3. Quan hệ giữa DFT và biến đổi Z

Xét một dãy x(n) có biến đổi Z: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$, với ROC chứa vòng tròn đơn vị. Nếu X(z) được lấy mẫu ở N điểm cách đều nhau trên vòng tròn đơn vị $z_k = e^{j2\pi k/N}$, k = 0, 1, 2, …, N-1, ta thu được:

$$X(k) = X(z)\Big|_{z=e^{j2\pi kn/N}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi nk/N}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \qquad (1.198)$$

Ta thấy X(k) trong pt(1.198) đồng dạng với biến đổi Fourier X(ω) được lấy mẫu ở N tần số cách đều nhau $\omega_k = 2\pi k/N$, k = 0, 1, 2, …, N-1, ngoại trừ chỉ số trong tổng được lấy trong khoảng vô hạn.

Nếu dãy x(n) có chiều dài N hữu hạn, biến đổi Z của nó có thể biểu diễn như là một hàm của DFT X(k). Đó là:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N} \right] z^{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{j2\pi k/N_z - 1} \right)^n$$

$$X(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - e^{j2\pi k/N_z - 1}} \qquad (1.199)$$

Vì biến đổi Fourier là biến đổi Z lấy trên vòng tròn đơn vị, ta có:

$$X(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - e^{-j(\omega - 2\pi k/N)}} \qquad (1.200)$$

pt(1.200) chính là công thức nội suy để khôi phục X(ω) từ DFT.

Ta đã thiết lập được các mối quan hệ giữa DFT với chuỗi fourier, biến đổi Fourier và biến đôi Z của tín hiệu rời rạc theo thời gian. DFT là một dạng biểu diễn đặc biệt của các biến đổi này, nên nó có các tính chất tương tự như biến đổi Fourier và chuỗi Fourier, tuy nhiên, cũng tồn tại một vài sự khác biệt quan trọng.

Trước khi trình bày các tính chất của DFT, ta cần tham khảo một số khái niệm sau đây.

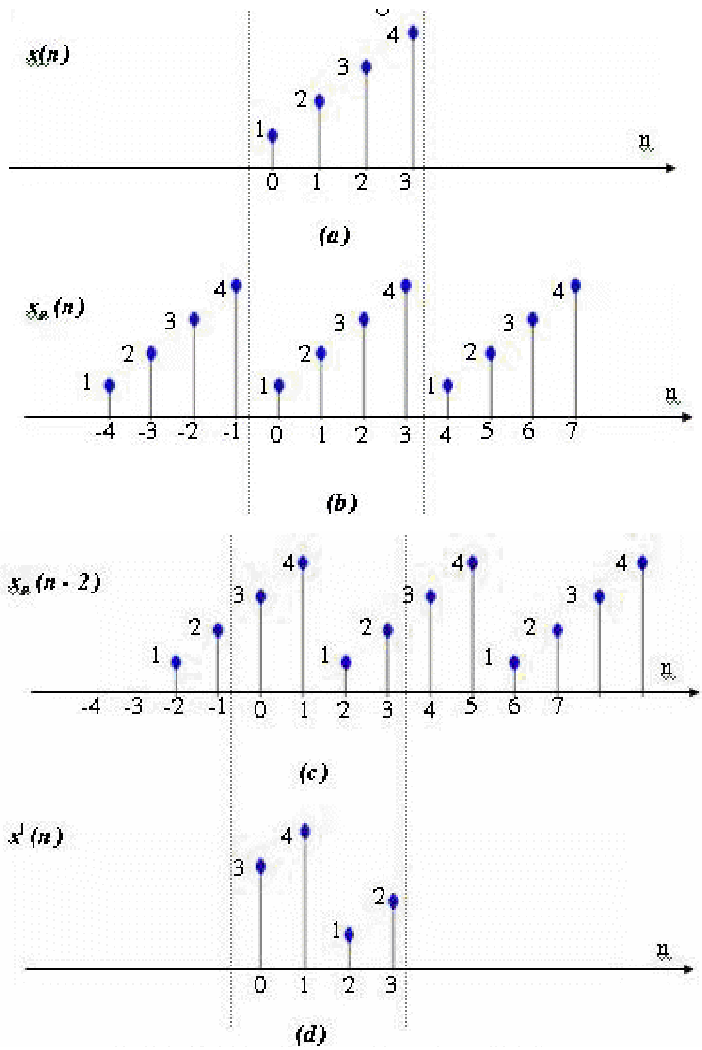
3.6.3.1. Phép dịch vòng và tính đối xứng vòng của một dãy:

Như ta đã biết, DFT- N điểm của một dãy x(n) có chiều dài hữu hạn L, với L≤N, tương đương với DFT – N điểm của dãy tuần hoàn $x_p(n)$, chu kỳ N, mà nó được thành lập bằng cách xếp tuần hoàn dãy x(n) với chu kỳ N theo pt(3.196). Bây giờ, giả sử $x_p(n)$ được dịch phải k mẫu, dãy tuần hoàn thu được sẽ là:

$$x_p(n) = x_P(n-k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-k-lN) \qquad (3.201)$$

Vì ta vẫn khảo sát tín hiệu trong khoảng 0 ≤ n ≤ N – 1, nên dãy có chiều dài hữu hạn tương ứng là:

x|(n) quan hệ với dãy nguyên thủy x(n) bởi phép dịch vòng. Hình 3.27 minh họa phép dịch vòng với N = 4.



Hình 3.27 minh họa sự dịch vòng một dãy

Định nghĩa phép dịch vòng: dịch vòng chỉ số modulo N (ta sẽ gọi tắt là dịch vòng modulo N) một dãy x(n) có chiều dài hữu hạn L, với L ≤ N là phép dịch mà theo đó các mẫu ra khỏi khoảng [0,N-1] sẽ quay vòng lại đầu kia.

Nếu x|(n) là tín hiệu thu được trong phép dịch vòng k mẫu modulo N của dãy x(n) , ta ký hiệu:

$$x^{|}(n) = x(n - k,(\text{mod } N)) \qquad (3.203)$$

Ví dụ: nếu k = 2 và N = 4, ta có:

$$x^{|}(n) = x(n - 2,(\text{mod } 4))$$

cụ thể là: $x|(0) = x(-2,(\text{mod } 4)) = x(2)$

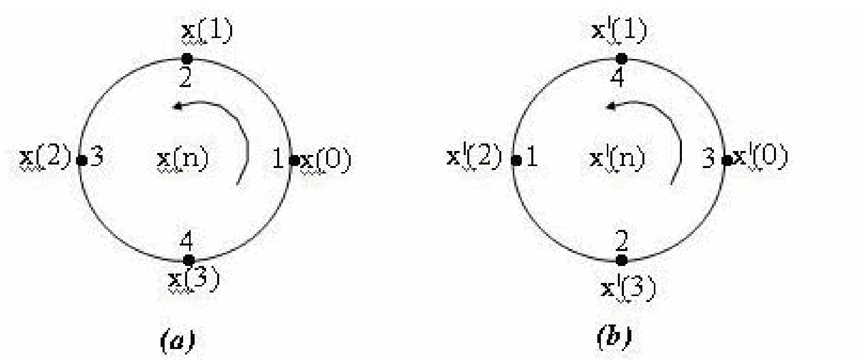
$$x^{|}(1) = x(-1,(\text{mod } 4)) = x(3)$$

$$x^{|}(2) = x(0, (\text{mod } 4)) = x(0)$$

$$x^{|}(3) = x(1, (\text{mod } 4)) = x(1)$$

Một cách hình ảnh, ta có thể coi phép dịch vòng như là các mẫu thu được trong một cửa sổ có chiều dài N đứng yên khi dãy tuần hoàn $x_p(n)$ được dịch ngang qua cửa sổ này.

Thay vì biểu diễn N mẫu, từ 0 đến N – 1, dọc theo một trục nằm ngang, để thuận tiện ta xếp chúng trên một vòng tròn và chọn một chiều dương. Ở đây, ta chọn chiều dương là ngược chiều kim đồng hồ. Các mẫu của dãy x(n) (hay x|(n)) và giá trị của chúng được ghi bên cạnh các điểm tương ứng (Hình 3.28). Ta thấy, nếu giữ cố định các điểm và quay tập các giá trị k mẫu (theo chiều dương khi k>0, ngược chiều dương khi k<0) ta thu được dãy x|(n) trong phép dịch vòng k mẫu modulo N.



Hình 3.28 (a) dãy x(n) trong hình 3.27a được xếp lại trên vòng tròn
(b) dãy x(n) trong hình 3.27d được xếp lại trên vòng tròn

Từ việc sắp xếp một dãy có chiều dài hữu hạn theo N điểm trên vòng tròn, ta có các định nghĩa khác về sự đối xứng chẵn, đối xứng lẻ và đảo thời gian của một dãy.

- Một dãy N điểm được gọi là chẵn nếu nó đối xứng xung qu../Anh điểm không trên vòng tròn. Điều này có nghĩa là:

$$x(N - n) = x(n) \quad \text{với} \quad 0 \le n \le N-1 \qquad (3.204)$$

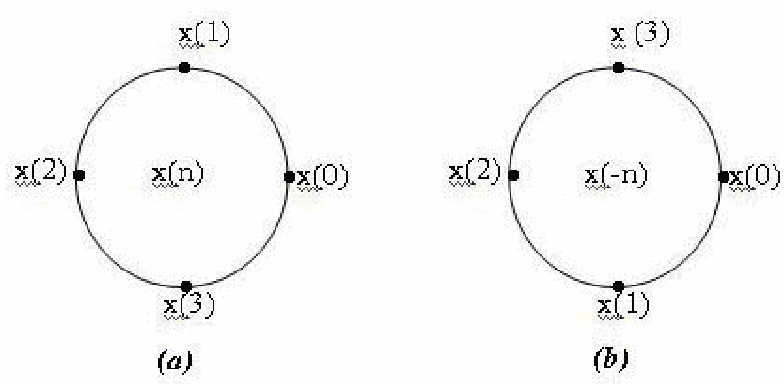
- Một dãy N điểm được gọi là lẻ nếu nó phản đối xứng xung qu../Anh điểm không trên vòng tròn. Điều này có nghĩa là:

$$x(N - n) = -x(n) \quad \text{với} \quad 0 \le n \le N-1 \qquad (3.205)$$

- Đảo thời gian của một dãy N điểm là một dãy thu được bằng cách nghịch đảo các mẫu xung qu../Anh điểm không trên vòng tròn. Nếu ta ký hiệu dãy đảo thời gian chỉ số modulo N là x(-n,(mod N)), thì định nghĩa này hàm ý rằng:

$$x(-n, (\text{mod } N)) = x(N - n) \quad \text{với} \quad 0 \le n \le N-1 \qquad (3.206)$$

Phép đảo thời gian tương đương với việc xếp x(n) theo ngược chiều kim đồng hồ trên vòng tròn (Hình 3.29.(b)).



Hình 3.29 dãy N điểm x(n) và x(-n)

3.6.3.2. Chập vòng của 2 dãy:

Chập vòng chỉ số modulo N của 2 dãy x1(n) và x2(n), ký hiệu là: $x_1(n) \, Ⓝ \, x_2(n)$, được định nghĩa như sau:

Ghi chú: Các khái niệm về phép dịch vòng, tính đối xứng vòng và phép chập vòng đã được định nghĩa cho các dãy trong miền thời gian n cũng được sử dụng cho các dãy trong miền tần số rời rạc k.

3.6.3.3. Các tính chất của DFT

Trong giáo trình này, ta sẽ trình bày các tính chất của DFT mà không chứng minh.

$$x_1(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X_1(k)$$

Để khảo sát các tính chất đặc biệt của DFT, ta ký hiệu cặp DFT-N điểm x(n) và X(k), như sau:

1/. Tính chất tuyến tính

Nếu $\quad x_1(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X_1(k)$ và $x_2(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X_2(k)$

thì $\quad a_1.x_1(n) + a_2x_2(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} a_1X_1(k) + a_2X_2(k) \qquad (3.208)$

Nếu

trong đó a_1 và a_2 là các hằng số bất kỳ có giá trị thực hoặc phức.

2/. Tính chất đảo thời gian:

Nếu $\quad x(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X(k)$

thì $\quad x(-n, (\text{mod } N)) = x(N - n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X(-k, (\text{mod } N)) \qquad (3.209)$

3/. Tính chất dịch vòng thời gian

Nếu $x(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X(k)$

thì $x(n - l, (\mathrm{mod}\ N)) \xleftrightarrow[N]{DFT} X(k)e^{-j2\pi kl/N}$ (3.210)

4/. Tính chất dịch vòng tần số

Nếu $x(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X(k)$

thì $x(n)\, e^{j2\pi ln/N} \xleftrightarrow[N]{DFT} X(k - l, (\mathrm{mod}\ N))$ (3.211)

5/. Tính chất liên hợp phức

Nếu $x(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X(k)$

thì $x^*(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X^*(-k, (\mathrm{mod}\ N)) = X^*(N - k)$ (3.212)

6/. Tính chất chập vòng

Nếu $x_1(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X_1(k)$ và $x_2(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X_2(k)$

thì $x_1(n)\, \textcircled{N}\, x_2(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X_1(k).X_2(k)$ (3.213)

7/. Tính chất tương quan vòng

Nếu $x(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X(k)$ và $y(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} Y(k)$

thì $r^o_{xy}(n) = x(n)\, \textcircled{N}\, y^*(-n) \xleftrightarrow[N]{DFT} R^o_{xy}(k) = X(k).Y^*(k)$ (3.214)

8/. Tính chất nhân hai dãy

Nếu $x_1(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X_1(k)$ và $x_2(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X_2(k)$

thì $x_1(n).x_2(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} (1/N)[X_1(k)\ \textcircled{N}\, X_2(k)]$ (3.215)

9/. Định lý Parseval

Nếu $x(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X(k)$ và $y(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} Y(k)$

thì $$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)$$ (3.216)

và $$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$ (3.219)

10/. Tính chất đối xứng của DFT

Các tính chất đối xứng của DFT có thể thu được bằng các thao tác toán học như đã dùng ở phần 3.4.5 cho biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc.

Tổng quát, ta xét trường hợp dãy N điểm x(n) và DFT X(k) của nó là các dãy giá trị phức. Ta có thể biểu diễn các tín hiệu này dưới dạng :

$$x(n) = x_R(n) + jx_I(n) \qquad (3.220)$$

$$X(k) = X_R(k) + jX_I(k) \qquad (3.221)$$

Thay pt(3.220) vào công thức DFT (3.181) ta thu được :

$$X_I(k) = \sum_{x=0}^{N-1}\left[x_k(n)\cos\frac{2\pi kn}{N} + x_I(n)\sin\frac{2\pi kn}{N}\right] \qquad (3.222)$$

$$X_I(n) = -\sum_{x=0}^{N-1}\left[x_k(n)\sin\frac{2\pi kn}{N} - x_I(n)\cos\frac{2\pi kn}{N}\right] \qquad (3.223)$$

Tương tự, thay pt(3.221) vào công thức IDFT (3.182) ta thu được :

$$x_R(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[X_R(k)\cos\frac{2\pi kn}{N} - X_I(k)\sin\frac{2\pi kn}{N}\right] \qquad (3.224)$$

$$x_I(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[X_R(k)\sin\frac{2\pi kn}{N} + X_I(k)\cos\frac{2\pi kn}{N}\right] \qquad (3.225)$$

➢ **Đặc biệt, nếu x(n) là dãy thực, theo pt(3.181) ta có :**

$$X(N-k) = X^*(k) = X(-k) \qquad (3.226)$$

Kết quả là |X(N – k)| = |X(k)| và ∠X(N – k) = - ∠X(k).. Hơn nữa, $x_I(n) = 0$ và vì vậy x(n) có thể xác định bằng pt(3.224). Đây là một dạng khác của IDFT.

▪ ***Nếu x(n) là dãy thực và chẵn***

Nếu x(n) là tín hiệu thực và chẵn, nghĩa là $x_I(n) = 0$ và x(n) = x(N - n), với 0≤ n ≤ N-1. Thay vào pt(3.223) ta có $X_I(k) = 0$. Vì vậy công thức DFT trở thành:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cos\frac{2\pi kn}{N}, 0 \le n \le N-1 \qquad (3.227)$$

Ta thấy X(k) cũng thực và chẵn. Hơn nữa, vì $X_P(k) = 0$, nên công thức IDFT trở thành:

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\cos\frac{2\pi kn}{N}, 0 \le k \le N-1 \qquad (3.228)$$

▪ ***Nếu x(n) là dãy thực và lẻ***

Nếu x(n) là tín hiệu thực và lẽ, nghĩa là $x_I(n) = 0$ và x(n) = -x(N - n), với

0≤ n ≤ N-1. Thay vào pt(3.222) ta có $X_R(k) = 0$. Vì vậy công thức DFT trở thành:

$$X(k) = -j\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\sin\frac{2\pi kn}{N}, 0 \le k \le N-1 \qquad (3.229)$$

Ta thấy X(k) là thuần ảo và lẻ. Hơn nữa, vì $X_R(k) = 0$, nên công thức IDFT trở thành:

$$x(n) = j\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\sin\frac{2\pi kn}{N}, 0 \le n \le N-1 \qquad (3.230)$$

- ***Nếu x(n) là dãy thuần ảo***

Trong trường hợp này $x_R(n) = 0$ và $x(n) = jx_I(n)$. Khi đó pt(3.222) và pt(3.223) trở thành :

$$X_R(k) = \sum_{n=0}^{N-1}\left[x_1(n)\sin\frac{2\pi kn}{N}\right] \qquad (3.231)$$

$$X_I(k) = \sum_{n=0}^{N-1}\left[x_1(n)\cos\frac{2\pi kn}{N}\right] \qquad (3.232)$$

Ta thấy $X_R(k)$ là lẻ và $X_I(k)$ là chẵn.

Nếu $x_I(n)$ là lẻ, thì $X_I(k) = 0$ và vì vậy X(k) là thuần thực. Ngược lại, nếu

$X_I(n)$ là chẳn, thì $X_I(k) = 0$ và vì vậy X(k) là thuần ảo. Tính chất đối xứng được tổng kết trong bảng 3.4.

x(n)	**X(k)**
Thực	Phần thực là chẵn Phần ảo là lẻ
Ảo	Phần thực là lẻ Phần ảo là chẵn
Thực và chẵn	Thực và chẵn
Thực và lẻ	Ảo và lẻ
Ảo và chẵn	Ảo và chẵn
Ảo và lẻ	Thực và lẻ

CHƯƠNG IV
BIỂU DIỄN, PHÂN TÍCH HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ

4.1 CÁC ĐẶC TÍNH CỦA HỆ THỐNG LTI TRONG MIỀN TẦN SỐ

Để khảo sát đặc tính của hệ thống LTI trong miền tần số, ta sẽ bắt đầu bằng cách xét đáp ứng của hệ thống đối với các kích thích cơ bản, đó là tín hiệu mũ phức và tín hiệu hình sin.

4.1.1. Đáp ứng tần số của hệ thống LTI

Trong miền thời gian, một hệ thống LTI được đặc trưng bởi đáp ứng xung h(n) của nó. Với một tín hiệu vào x(n) bất kỳ, đáp ứng của hệ thống được xác định bởi công thức tổng chập :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k).x(n-k) \qquad (4.1)$$

Hoặc phương trình sai phân tuyến tính hệ số bằng:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k.y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k.x(n-k) \qquad (4.2)$$

với các điều kiện đầu xác định.

Trong miền z, hệ thống được đặc trưng bởi hàm truyền đạt H(z) và đáp ứng y(n) được tính thông qua biến đổi Z, Y(z), của nó :

$$Y(z) = H(z)\, X(z) \qquad (4.3)$$

với : H(z) hàm truyền đạt của hệ thống và X(z) biến đổi z của tín hiệu vào.

Bây giờ, để nghiên cứu đặc trưng của hệ thống trong miền tần số, ta xét trường hợp kích thích là tín hiệu mũ phức, đó là :

$$x(n) = Ae^{j\omega n}\ ; -\infty < n < \infty \qquad (4.4)$$

với A là biên độ và (là tần số được giới hạn trong khoảng [-π, π].

Thay phương trình (4.4) vào phương trình (4.1) ta được :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [Ae^{j\omega(n-k)}]h(k) \qquad (4.5.a)$$

hay:

$$y(n) = A\,[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k).e^{-j\omega k}].e^{j\omega n} \qquad (4.5.b)$$

4.1.1.1. Đáp ứng tần số

Ta thấy, thừa số trong dấu ngoặc của phương trình (4.5.b) là một hàm của biến tần số ω. Đây chính là biến đổi Fourier của đáp ứng xung h(k) của hệ thống. Ta đặt :

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k).e^{-j\omega k} \qquad (4.6)$$

Rõ ràng H(ω) tồn tại nếu hệ thống ổn định, nghĩa là:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)| < \infty$$

H(ω) cũng chính là hàm truyền đạt H(z) khi z được lấy trên vòng tròn đơn vị

H(ω) được gọi là đáp ứng tần số của hệ thống LTI

Phương trình (4.5) được viết lại :

$$y(n) = A\, H(\omega)e^{j\omega n} \qquad (4.7)$$

Ta thấy, đáp ứng với tín hiệu vào là hàm mũ phức cũng là một hàm mũ phức có cùng tần số với tín hiệu vào nhưng có biên độ và pha thay đổi (do nhân với H(ω))

4.1.1.2. Hàm riêng (eigenfunction) và trị riêng (eigenvalue) của hệ thống

Xét một tín hiệu vào x(n) sao cho đáp ứng y(n) thỏa điều kiện :

$$y(n) = \beta\, x(n) \qquad (4.8)$$

Với β là một hằng đối với biến n.

Khi đó x(n) được gọi là hàm riêng của hệ thống và thừa số β được gọi là trị riêng của hệ thống.

Từ phương trình (4.7) ta thấy tín hiệu hàm mũ phức x(n) = Aej(n chính là hàm riêng của hệ thống LTI và H(ω) được xác định ở tần số của tín hiệu vào chính là trị riêng tương ứng.

Ví dụ 4.1 :

Hãy xác định tín hiệu ra của hệ thống có đáp ứng xung là :

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \qquad (4.9)$$

Với tín hiệu vào là 1 dãy hàm mũ phức : $x(n) = A.e^{jx\frac{n}{2}}$; $-\infty < n < \infty$

Giải :

Đáp ứng tần số :

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \qquad (4.10)$$

Tại tần số: $\omega = \frac{\pi}{2}$,ta có : $H(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{1+j\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.e^{-j26.6}$

Tín hiệu ra là :

$$y(n) = A\left(\frac{2}{\sqrt{5}}.e^{-j26.6^0}\right)e^{jx\frac{n}{2}}$$

$$y(n) = A\frac{\sqrt{2}}{5}.e^{j\left(x\frac{n}{2}-26.6^0\right)} \;;\; -\infty < n < \infty \qquad (4.11)$$

Ta thấy y(n) có cùng tần số với x(n) có biên độ thay đổi bởi tần số $\frac{\sqrt{2}}{5}$ và pha dịch là $-26,6^0$.

4.1.1.3. Đáp ứng biên độ và đáp ứng pha

Nói chung, H(ω) là một hàm có giá trị phức của biến tần số. Vì vậy nó có thể biểu diễn dưới dạng cực :

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\theta(\omega)} \qquad (4.12)$$

Trong đó |H(ω)| là biên độ và pha, $\theta = \angle H(\omega)$ là sự dịch pha được truyền vào tín hiệu vào ở tần số ω.

Để làm nổi các múi bên (sidelobes) hay các gợn sóng (ripples) trên đặc tuyến biên độ, người ta dùng giai logarit hay decibel (dB) cho trục biên độ, còn trục tần số vẫn theo giai số tuyến tính. Biên độ theo dB được định nghĩa như sau :

$$|H(\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|H(\omega)|$$

Nhận xét:

(1) H(ω) là một hàm tuần hoàn với chu kỳ là 2π. Đây là một tính chất quan trọng của H(ω).

Thậy vậy, từ định nghĩa (4.6) với một số nguyên m bất kỳ ta có :

$$H(\omega + 2\pi m) = H(\omega)$$

(2) Từ công thức biến đổi Fourier ngược ta có :

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-x}^{x} H(\omega)e^{j\omega n}d\omega \qquad (4.13)$$

(3) Vì H(ω) là biến đổi Fourier của ‘tín hiệu’ rời rạc h(n) nên nó thỏa mãn các tính chất của biến đổi Fourier đã trình bày trong chương 3.

(4) Vì H(ω) là biến đổi Z của h(n) với z trên vòng tròn đơn vị nên các phương trình của H(z) cũng có thể áp dụng cho H(ω), nếu miền hội tụ của H(z) chứa vòng tròn đơn vị (hệ thống ổn định) và thay $z = e^{J\omega}$.

Ví dụ 4.2 :

Hãy xác định biên độ và pha của H(ω) cho một hệ thống trung bình di động ba điểm được biểu diễn bởi quan hệ vào ra như sau :

$$y(n) = \frac{1}{3}\left[x(n+1) + x(n) + x(n-1)\right]$$

Và vẽ đồ thị của 2 hàm này với $0 \le \omega \le \pi$.

Giải :

Đáp ứng xung của hệ thống là :

$$h(n) = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$$

Đáp ứng tần số (sử dụng tính chất dịch trong miền thời gian)

$$H(\omega) = \frac{1}{3}(e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}) = \frac{1}{3}(1 + 2\cos\omega)$$

Kết quả :

Biên độ: $\quad |H(\omega)| = \frac{1}{3}|1 + 2\cos\omega|$

Pha : $$\theta(\omega) = \begin{cases} 0 \; : 0 \le \omega < \dfrac{2\pi}{3} \\ \\ \pi : \dfrac{2\pi}{3} \le \omega < \pi \end{cases} \qquad (4.14)$$

Hình 4.1 vẽ giản đồ biên độ và pha của H(ω), ta thấy |H(ω)| đối xứng chẵn và θ(ω)đối xứng lẻ. Rõ ràng, từ đặc tuyến đáp ứng tần số H(ω) ta thấy hệ thống trung bình động ba điểm này là một mạch lọc làm trơn (smooth) tín hiệu vào, điều này cũng có thể hiện trong quan hệ vào ra. Nói chung các hệ thống trung bình di động là các mạch lọc làm trơn.

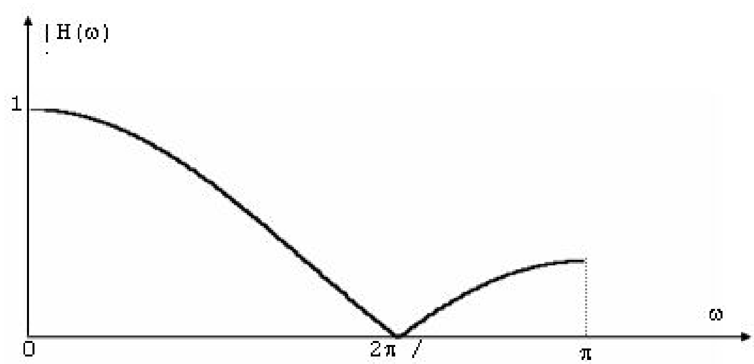
Bây giờ ta xét đáp ứng của hệ thống LTI với tín hiệu vào có dạng sin. Vì tín hiệu dạng sin là tổng hay hiệu của các hàm mũ phức. Vì vậy đáp ứng của hệ thống LTI đối với tín hiệu vào hình sin có dạng giống như đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào là hàm mũ phức.

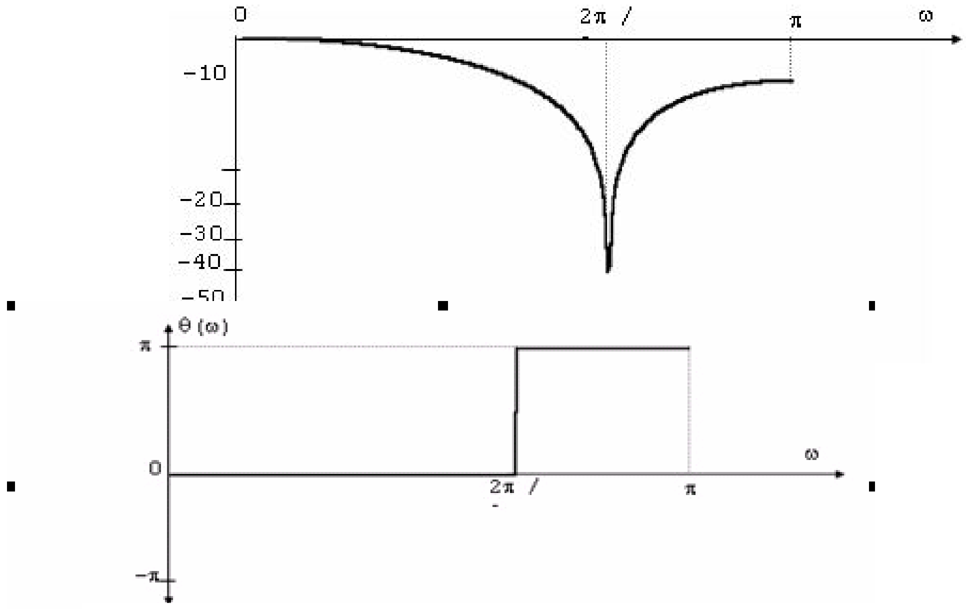
Thậy vậy, nếu tín hiệu vào là : $\quad x_1(n) = Ae^{j\omega n}$

Tín hiệu ra là : $\quad y_1(n) = A|H(\omega)|e^{j\theta(\omega)}e^{j\omega n}$

Nếu tín hiệu vào là : $\quad x_2(n) = Ae^{-j\omega n}$

Tín hiệu ra là : $\quad y_2(n) = A|H(-\omega)|e^{j\theta(-\omega)}e^{-j\omega n} = A|H(\omega)|e^{-j\theta(\omega)}e^{-j\omega n}$





Hình 4.1: Đáp ứng biên độ và pha của hệ thống trung bình di động

Trong biểu thức của $y_2(n)$, ta đã dùng tính chất đối xứng

$$|H(\omega)| = |H(-\omega)| \text{ và } \theta(\omega) = -\theta(-\omega).$$

Áp dụng tính chất tuyến tính

Nếu tín hiệu vào là : $x(n) = \frac{1}{2}[x_1(n) + x_2(n)] = A\cos\omega n$

Thì đáp ứng của hệ thống là :

$$y(n) = \frac{1}{2}[y_1(n) + y_2(n)] = A|H(\omega)|\cos[\omega n + \theta(\omega)] \qquad (4.14)$$

Nếu tín hiệu vào là: $x(n) = \frac{1}{2j}[x_1(n) - x_2(n)] = A\sin\omega n$

Đáp ứng của hệ thống là: $y(n) = \frac{1}{2j}[y_1(n) - y_2(n)]$

$$= A|H(\omega)|\sin[\omega n + \theta(\omega)] \qquad (4.15)$$

Nhận xét :

- Từ các kết quả trên ta thấy đối với hệ thống LTI, tín hiệu vào là tín hiệu sin thì tín hiệu ra cũng là tín hiệu sin có cùng tần số, chỉ thay biên độ và pha.

- Đáp ứng tần số $H(\omega)$, tương đương với nó là đáp ứng biên độ $|H(\omega)|$và đáp ứng pha$\theta(\omega)$, đặc trưng một cách đầy đủ cho tác dụng của hệ thống với tín hiệu vào hình sin có tần số bất kỳ.

Ví dụ 4.3 :

Hãy xác định đáp ứng của hệ thống trong ví dụ 4.1 với tín hiệu vào là :

$$x(n) = 10 - 5\sin\frac{\pi}{2}n + 20\cos\pi n \ ; \ -\infty < n < \infty$$

Giải :

Đáp ứng tần số của hệ thống đã được cho trong phương trình (4.10)

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

Số hạng đầu tiên của tín hiệu vào là một tín hiệu hằng, có tần số ω = 0, ở tần số này:

$$H(0) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

Số hạng thứ hai trong x(n) có tần số $\frac{\pi}{2}$, $H(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{-j26,6^0}$

Vậy đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào x(n) là :

$$y(n) = 20 - \frac{10}{\sqrt{5}}\sin(\frac{\pi}{2}n - 26,6^0) + \frac{40}{3}\cos\pi n \qquad ; -\infty < n < \infty$$

Ví dụ 4.4 :

Một hệ thống LTI được mô tả bởi phương trình sai phân như sau :

$$y(n) = a_y(n-1) + b_x(n), \ 0 < a < 1$$

(a) Xác định biên độ và pha của đáp ứng tần số của hệ thống.

(b) Chọn tham số b sao cho giá trị cực đại của |H(ω)| là đơn vị, vẽ đồ thị |H(ω)| và ∠ H(ω) với a = 0,9.

(c) Xác định đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào là :

$$x(n) = 5 + 12\sin\frac{\pi}{2}n - 20\cos(\pi n + \frac{\pi}{4})$$

Giải :

Đáp ứng xung của hệ thống là :

$$h(n) = ba^n u(n)$$

Vì |a|< 1, nên hệ thống là BIBO, vì vậy H(ω) tồn tại

(a) Đáp ứng tần số: $H(\omega) = \frac{b}{1 - ae^{-j\omega}}$

Vì $1 - ae^{-j\omega} = (1 - a\cos\omega) + j.a.\sin\omega$

Suy ra : $\left|1 - ae^{-j\omega}\right| = \sqrt{(1 - a\cos\omega)^2 + (a\sin\omega)^2} = \sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\omega}$

Và $\angle(1 - ae^{-j\omega}) = \tan^{-1}\frac{a\sin\omega}{1 - a\cos\omega}$

Do đó : $\left|H(\omega)\right| = \dfrac{|b|}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega}}$ và $\angle\left|H(\omega)\right| = \theta(\omega) = \angle b - \tan^{-1}\dfrac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}$

(b) Vì tham số a là dương, mẫu số của |H(ω)| cựa tiểu khi ω = 0. Vậy |H(ω)| sẽ cựa đại tại ω = 0. Ở tần số này ta có :

$$\left|H(0)\right| = \frac{|b|}{1-a} = 1$$

Điều này hàm ý rằng $b = \pm(1-a)$

Ta chọn b= 1- a, kết quả là : $\left|H(\omega)\right| = \dfrac{1-a}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega}}$

Và $$\theta(\omega) = -\tan^{-1}\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}$$

Đáp ứng biên độ và đáp ứng pha được vẽ trong hình 4.2. Ta thấy, đây là hệ thống làm suy giảm tín hiệu ở tần số cao.

(c) Tín hiệu vào gồm các thành phần tần số $0, \dfrac{\pi}{2}$ và π

Cho $\omega = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \left|H(\dfrac{\pi}{2})\right| = \dfrac{1-a}{\sqrt{1+a^2}} = 0{,}074$

$$\theta(\frac{\pi}{2}) = -\tan^{-1} a = -42^0$$

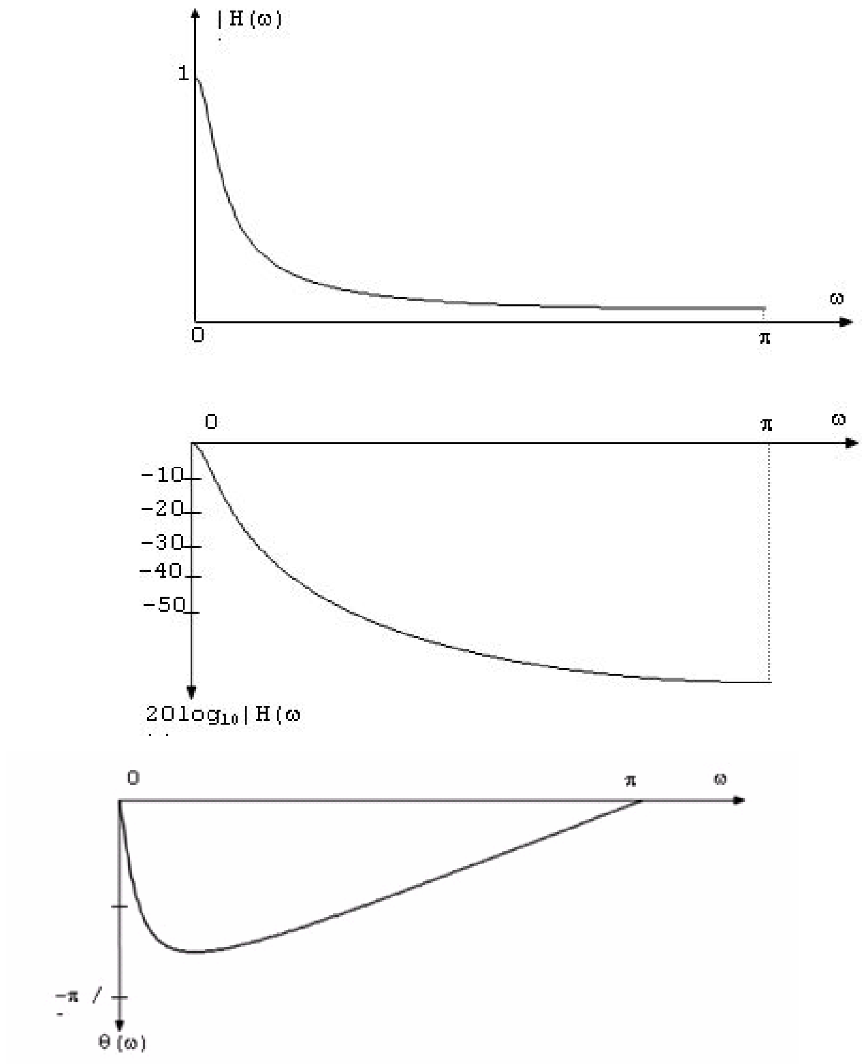
Cho $\omega = \pi \Rightarrow \left|H(\dfrac{\pi}{2})\right| = \dfrac{1-a}{1+a} = 0{,}053$

$$\theta(\pi) = 0$$

Tín hiệu ra của hệ thống là :

$$y(n) = 5\left|H(0)\right| + 12\left|H(\frac{\pi}{2})\right|\sin\left[\frac{\pi}{2}n + \theta(\frac{\pi}{2})\right] - 20\left|H(\pi)\right|\cos\left[\pi n + \frac{\pi}{4} + \theta(\pi)\right]$$

$$= 5 + 0{,}888\sin(\frac{\pi}{2}n - 42^0) - 1{,}06\cos(\pi n + \frac{\pi}{4}) \qquad ;\text{với } -\infty < n < \infty$$



Hình 4.2: Đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của hệ thống trong ví dụ 4.4,với a=0.9

Trường hợp tổng quát :

Tín hiệu vào là một tổ hợp tuyến tính của các tín hiệu sin có dạng như sau

$$x(n) = \sum_{i=1}^{L} A_i \cos(\omega_i n + \phi_i) \qquad ; -\infty < n < \infty$$

Trong đó : A_i và ϕi là các biên độ và pha của thành phần hình sin có tần số ω_i

Đáp ứng của hệ thống là :

$$y(n) = \sum_{i=1}^{L} A_i \left|H(\omega_i)\right| \cos(\omega_i n + \phi_i + \theta(\omega_i)) \qquad (4.16)$$

Rõ ràng, tùy thuộc vào đáp ứng tần số H(ω) của hệ thống, các tín hiệu hình sin có tần số khác nhau sẽ bị tác động một các khác nhau bởi hệ thống. Ví dụ : Một số thành phần tần số hình sin có thể bị nén hoàn toàn, nếu H(ω) = 0 ở các thành phần tần số này. Các thành phần tần số khác có thể thu được ở ngã ra mà không bị làm suy giảm (hay có thể được khuếch đại) bởi hệ thống. Về mặt tác dụng, ta có thể coi hệ thống LTI như một mạch lọc đối với các thành phần hình sin có tần số khác nhau. Bài toán thiết kế các mạch lọc số cơ bản bao gồm việc xác định các tham số của hệ thống LTI để thu được đáp ứng tần số H(ω) mong muốn.

4.1.2. Đáp ứng quá độ và đáp ứng xác lập với tín hiệu hình sin

Trong các phần trước, ta đã xác định đáp ứng của một hệ thống LTI với tín hiệu vào là tín hiệu hàm mũ phức hoặc tín hiệu sin mà nó đã được đưa vào hệ thống ở thời đểm rất lâu trước đó (n = -∞). Ta thường gọi các tín hiệu này là các tín hiệu hàm mũ hay sin thường xuyên (eternal). Trong trường hợp này, đáp ứng mà chúng ta khảo sát ở ngã ra của hệ thống là đáp ứng xác lập. Không có đáp ứng quá độ trong trường hợp này.

Ngược lại, nếu tín hiệu sin hay hàm mũ phức được cung cấp ở một thời điểm xác định nào đó, gọi là thời điểm n = 0, đáp ứng của hệ thống bao gồm 2 thành phần, đáp ứng quá độ và đáp ứng xác lập.

Để chỉ rõ các đáp ứng này, ta xét một hệ thống được mô tả bởi một phương trình sai phân bậc nhất (như là một ví dụ):

$$y(n) = a_y(n - 1) + x(n), \text{ a là một hằng số.} \qquad (4.17)$$

Tín hiệu vào được cung cấp ở thời điểm n = 0. Ta sẽ dùng thủ tục đệ qui tiến để xác định đáp ứng y(n) và thu được :

$$y(n) = a^{n+1}y(-1) + \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k) \text{ ;n} \geq 0 \qquad (4.18)$$

Với y(-1) là điều kiện đầu.

Bây giờ, ta giả sử tín hiệu vào là hàm mũ phức :

$$x(n) = Ae^{j\omega n} \text{ ; } n \geq 0 \qquad (4.19)$$

Thay vào pt(4.18), ta được :

$$y(n) = a^{n+1}y(-1) + A\sum_{k=0}^{n} a^k e^{j\omega n(n-k)}$$

$$= a^{n+1}y(-1) + A\left[\sum_{k=0}^{n}(ae^{-j\omega})^k\right]e^{jwn}$$

$$= a^{n+1}y(-1) + A\frac{1-a^{n+1}e^{-j\omega(n+1)}}{1-ae^{-j\omega}}e^{j\omega n} \qquad \text{;n} \geq 0$$

$$= a^{n+1}y(-1) - \frac{Aa^{n+1}e^{-j\omega(n+1)}}{1-ae^{-j\omega}}e^{j\omega n} + \frac{A}{1-ae^{-j\omega}}e^{j\omega n} \qquad \text{;n} \geq 0 \qquad (4.19)$$

Ta cũng đã biết rằng, hệ thống ổn định nếu |a| < 1. Trong trường hợp này, hai số hạng có chứa an+1 sẽ giảm về 0 khi n → ∞

Kết quả, ta tách ra được đáp ứng xác lập (ký hiệu y_{xl})

$$y_{x1}(n) = \lim_{n\to\infty} y(n) = \frac{A}{1-ae^{-j\omega}}e^{j\omega\pi}$$

$$y_{x1}(n) = AH(\omega)e^{j\omega n} \qquad (4.20)$$

Các số hạng còn lại trong pt[4.19] là đáp ứng quá độ của hệ thống, đó là:

$$y_{qd}(n) = a^{n+1}y(-1) - \frac{\mathrm{Aa}^{n+1}e^{-j\omega(n+1)}}{1-ae^{-j\omega}}e^{j\omega n} \qquad (4.21)$$

với n ≥ 0

Ta thấy $y_{qd} \to 0$ khi $n \to \infty$

Số hạng đầu tiên trong đáp ứng quá độ (4.21) là đáp ứng tín hiệu vào bằng không (zero - input response) của hệ thống, số hạng thứ hai là đáp ứng quá độ được sinh ra bởi tín hiệu vào hàm mũ.

4.1.3. Đáp ứng xác lập với tín hiệu vào tuần hoàn.

Giả sử tín hiệu vào x(n) là một tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ cơ bản là N và hệ thống LTI có tính ổn định. Vì tín hiệu tồn tại với thời gian -∞ < n < ∞. Đáp ứng tổng của hệ thống ở một thời điểm n bất kỳ bằng với đáp ứng xác lập.

Để xác định đáp ứng y(n) của hệ thống ta sử dụng chuỗi Fourier của tín hiệu tuần hoàn, đó là :

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k(k)e^{j2n\frac{kn}{N}} \qquad ;k=0,1,2,\ldots,N-1 \qquad (4.22)$$

Trong đó : là các hệ số của chuỗi Fourier. Ta xét tín hiệu vào có dạng hàm mũ phức:

$$x_k(n) = X(k)e^{j2n\frac{kn}{N}} \qquad ;k=0,1,\ldots,N-1$$

Thì $$y_k(n) = X(k)H\left(\frac{2\pi}{N}k\right)e^{j2\pi\frac{kn}{N}} \qquad ;\ k=0,1,\ldots,N-1 \qquad (4.23)$$

Ở đây: $$H\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = H(\omega)\Big|_{\omega=2\pi\frac{k}{N}} \qquad ;\ k=0,1,\ldots,N-1$$

Áp dụng tính chất tuyến tính của hệ thống LTI, ta thu được đáp ứng của hệ thống đối với tín hiệu tuần hoàn x(n)

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)H\left(\frac{2\pi}{N}k\right)e^{j2\pi\frac{kn}{N}} \qquad ;-\infty < n < \infty \qquad (4.24)$$

Kết quả này hàm ý rằng đáp ứng của hệ thống với tín hiệu tuần hoàn x(n) cũng tuần hoàn với cùng chu kỳ N. Các hệ số chuỗi Fourier của y(n) là :

$$Y(k) = X(k)H\left(\frac{2\pi}{N}k\right) \qquad ;\ k=0,1,\ldots,N-1 \qquad (4.25)$$

Ta thấy, hệ thống LTI có thể làm thay đổi dạng sóng của tín hiệu vào tuần hoàn thông qua việc thay đổi thang biên độ và sự dịch pha của các thành phần tần số trong chuỗi Fourier nhưng không ảnh hưởng đến chu kỳ (hay tần số) của tín hiệu vào.

4.2. PHÂN TÍCH HỆ THỐNG LTI TRONG MIỀN TẦN SỐ

Trong phần trước, phương pháp trong miền tần số đã được dùng để xác định đáp ứng xác lập của hệ thống LTI ổn định với tín hiệu vào tuần hoàn, phương pháp này có thể được tổng quát hóa để giải các bài toán tính đáp ứng trạng thái không của tín hiệu có năng lượng hữu hạn không tuần hoàn. Công cụ toán học được dùng là biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc.

4.2.1. Quan hệ vào-ra trong miền tần số.

Xét một hệ thống LTI có đáp ứng xung h(n) được kích thích bởi tín hiệu có năng lượng hữu hạn x(n). Đáp ứng của hệ thống là :

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k) \qquad (4.26)$$

Áp dụng tính chất tích chập, ta thu được:

$$Y(\omega)=H(\omega)X(\omega) \qquad (4.27)$$

Pt(4.27) chính là quan hệ vào - ra trong miền tần số. Theo đó, phổ của tín hiệu ra bằng phổ của tín hiệu vào nhân với đáp ứng tần số của hệ thống.

Quan hệ này có thể được viết được dưới dạng cực :

$$Y(\omega)=|H(\omega)|e^{j\theta_n(\omega)}|X(\omega)|e^{j\theta x(\omega)}$$

$$=|H(\omega)||X(\omega)|e^{j[\theta x(\omega)+\theta n(\omega)]} \qquad (4.28)$$

Kết quả, biên độ và pha của Y(ω) là :

$$|Y(\omega)|=|H(\omega)|\,|X(\omega)| \qquad (4.29)$$

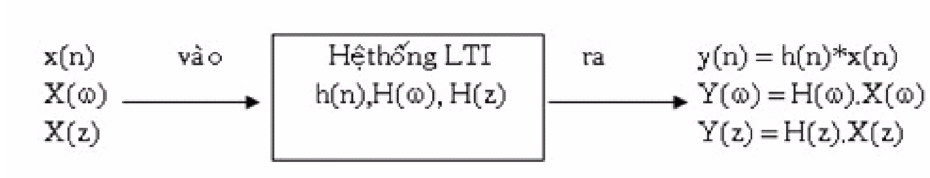
và $\angle Y(\omega) = \angle X(\omega) + \angle H(\omega)$ (4.30)

hay $\theta_y(\omega) = \theta_x(\omega) + \theta_h(\omega)$ (4.31)

Về bản chất, tín hiệu không tuần hoàn có năng lượng hữu hạn có phổ bao gồm một dải tần liên tục. Hệ thống LTI thông qua hàm đáp ứng tần số của nó, làm suy giảm một số thành phần tần số nào đó của tín hiệu vào đồng thời có thể khuếch đại các thành phần tần số khác. Đồ thị của |H(ω)| có thể cho ta biết được các vùng tần số này. Mặt khác, góc pha của H(ω) xác định sự dịch pha của tín hiệu vào khi đi qua hệ thống như một hàm của tần số.

Ta thấy, tín hiệu ra của một hệ thống LTI không chứa các thành phần tần số mà nó không có trong tín hiệu vào. Nghĩa là, hệ thống không sinh ra các thành phần tần số mới (hệ thống biến đổi theo thời gian hoặc phi tuyến tính sẽ sinh ra các thành phần tần số không chứa trong tín hiệu vào)

Hình 4.3 minh họa một hệ thống LTI ổn định (BIBO)-nghỉ với các phương pháp phân tích trong miền thời gian và miền tần số. Ta thấy, phân tích trong miền thời gian xử lý bằng tổng chập giữa tín hiệu vào và đáp ứng xung để thu được đáp ứng của hệ thống trong miền thời gian, ngược lại, phân tích trong miền tần số, ta sẽ xử lý phổ X(ω) của tín hiệu và đáp ứng tần số H(ω) thông qua phép nhân để thu được phổ của tín hiệu ở ngã ra của hệ thống. Một cách tương đương, ta có thể dùng biến đổi Z của tín hiệu vào X(z) và hàm truyền đạt H(z) để thu được biến đổi Z của tín hiệu ra Y(z) và tìm đáp ứng y(n) qua biến đổi Z ngược.



Hình 4.3 : Mối quan hệ vào ra trong miền tần số và miền thời gian của hệ thống LTI nghỉ

Trở lại quan hệ (4.27), giả sử rằng ta đã có Y(ω), ta sẽ tìm biểu thức của tín hiệu ra trong miền thời gian bằng biến đổ Fourier ngược.

$$y(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-x}^{x} Y(\omega)e^{j\omega n}d\omega \qquad (4.32)$$

Từ quan hệ vào-ra (4.28), bình phương biên độ của 2 vế, ta được

$$|Y(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 |X(\omega)|^2$$

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) \qquad (4.33)$$

Ở đây $S_{yy}(\omega)$ và $S_{xx}(\omega)$ lần lượt là phổ mật độ năng lượng của y(n) và x(n) ta có quan hệ Parseral cho năng lượng của tín hiệu ra, đó là :

$$E_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-x}^{x}|Y(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-x}^{x}|H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega)d\omega \qquad (4.34)$$

Ví dụ 4.6 :

Cho một hệ thống LTI được đặc tả bởi đáp ứng xung :

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Xác định phổ và phổ mật độ năng lượng của tín hiệu ra, khi hệ thống được kích thích bởi tín hiệu :

$$x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

<u>Giải :</u>

Đáp ứng tần số của hệ thống là (xem ví dụ 4.1): $H(\omega) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$

Biến đổi Fourier của tín hiệu vào: $X(\omega) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$

Phổ của tín hiệu ra là: $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$

Phổ mật độ năng lượng tương ứng:

$$S_{yy}(\omega) = |Y(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 |X(\omega)|^2$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{5}{4}-\cos\omega\right)\left(\frac{17}{16}-\frac{1}{2}\cos\omega\right)}$$

4.2.2. Tính hàm đáp ứng tần số.

Nếu đáp ứng xung h(n) của hệ thống LTI đã được biết, hàm đáp ứng tần số H(ω) được tính từ công thức biến đổi Fourier

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \qquad (4.35)$$

Nếu hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân tuyến tính hệ số bằng :

$$y(n) = -\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \qquad (4.36)$$

H(ω) thu được bằng cách tính H(z) trên vòng tròn đơn vị :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \qquad (4.37)$$

Suy ra:

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-j\omega k}} \qquad (4.38)$$

Ta thấy H(ω) chỉ phụ thuộc vào các hệ số $\{a_k\}$ và $\{b_k\}$ của phương trình sai phân.

Đặc biệt đối với hệ thống thuần zero (FIR) nghĩa là ak = 0, k = 1,2, ... N thì H(ω) có dạng :

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega n} \qquad (4.39)$$

Điều này phù hợp với hệ thống FIR đã đề cập ở chương 1, có đáp ứng xung là:

$$h(n) = \begin{cases} b_n & ; n = 0,1,\ldots,M \\ 0 & n \neq \end{cases} \qquad (4.40)$$

Nếu hệ thống thuần cực hay thuần đệ qui nghĩa là b_k = 0, k = 1,2, ..., M; H(ω) có dạng :

$$H(\omega) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-j\omega n}} \qquad (4.41)$$

Nếu hệ thống là hệ cực - zero, được mô tả bởi phương trình sai phân (4.36). Hàm truyền đạt H(z) có thể viết dưới dạng tích :

$$H(z) = Gz^{-M+N} \frac{(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2)\ldots(z - p_N)} \qquad (4.42)$$

Trong đó z_1, z_2 ... z_M là M zero khác không của H(z) và p_1, p_2, ... p_N là N cực khác không của H(z). G là một hằng số.

Hàm đáp ứng tần số H(ω) có được bằng cách tính H(z) trên vòng tròn đơn vị (thay z = $e^{j\omega}$). Ta có :

$$H(\omega) = Ge^{j\omega(N-M)}\frac{(e^{j\omega}-z_1)(e^{j\omega}-z_2)\ldots(e^{j\omega}-z_M)}{(e^{j\omega}-p_1)(e^{j\omega}-p_2)\ldots(e^{j\omega}-p_N)} \qquad (4.43)$$

Mỗi thừa số trong (4.43) có thể biểu diễn dưới dạng cực như sau:

$$e^{j\omega} - z_k = V_k(\omega)e^{j\theta_k(\omega)} \qquad (4.44)$$

Và
$$e^{j\omega} - p_k = U_k(\omega)e^{j\theta_k(\omega)} \qquad (4.45)$$

với
$$V_k(\omega) = \left|e^{j\omega} - z_k\right| \;\; ; \theta_k(\omega) = \angle(e^{j\omega} - z_k) \qquad (4.46)$$

Khi đó, biên độ của H(ω) là :

$$|H(\omega)| = |G|\frac{V_1(\omega)\ldots V_M(\omega)}{U_1(\omega)U_2(\omega)\ldots U_N(\omega)} \qquad (4.48)$$

(vì biên độ của $e^{j\omega(N-M)}$ = 1)

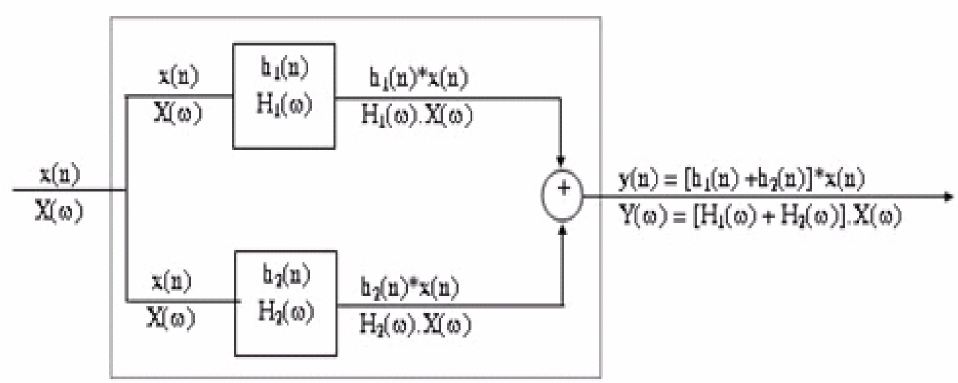
Pha của H(ω) là tổng pha của các thừa số ở tử số trừ cho tổng pha của các thừa số ở mẫu số cộng cho pha của G và cộng ω (N - M). Ta có :

$$\angle H(\omega) = \angle G + \omega(N - M) + \theta_1(\omega) + \theta_2(\omega) + \ldots + \theta_M(\omega) - [\phi_1(\omega) + \phi_2(\omega) + \ldots + \phi_N(\omega)] \qquad (4.49)$$

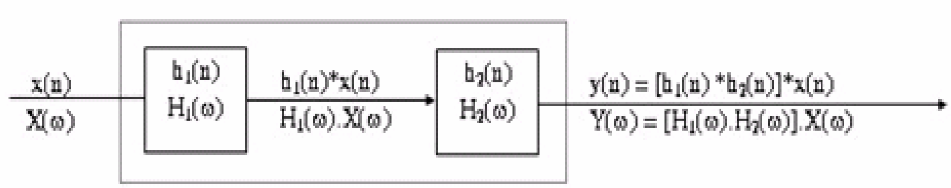
Trong đó, pha của G là 0 khi G dương và là π khi G âm.

Rõ ràng, khi biết được các cực và zero của hàm hệ thống H(z), ta có thể tính đáp ứng tần số từ các pt(4.48) vàpt(4.49), cách tính này rõ ràng là khá phức tạp, nhưng nó thuận lợi khi tìm thuật toán cho một chương trình máy tính.

Hình 4.4 trình bày cách biểu diễn tương đương của các hệ thống mắc song song và mắc liên tiếp trong miền thời gian và miền tần số.



(a)



(b)

Hình 4.4: Các hệ thống LTI

a) Mắc song song

b) Mắc nối tiếp

Ví dụ 4.7 : Lọc Hanning

Xác định và vẽ đồ thị đáp ứng biên độ, đáp ứng pha của hệ thống FIR được đặc tả bởi phương trình sai phân (hệ thống trung bình di động).

$$y(n) = \frac{1}{4}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{1}{4}x(n-2)$$

Giải :

Áp dụng phương trình (4.39) ta được :

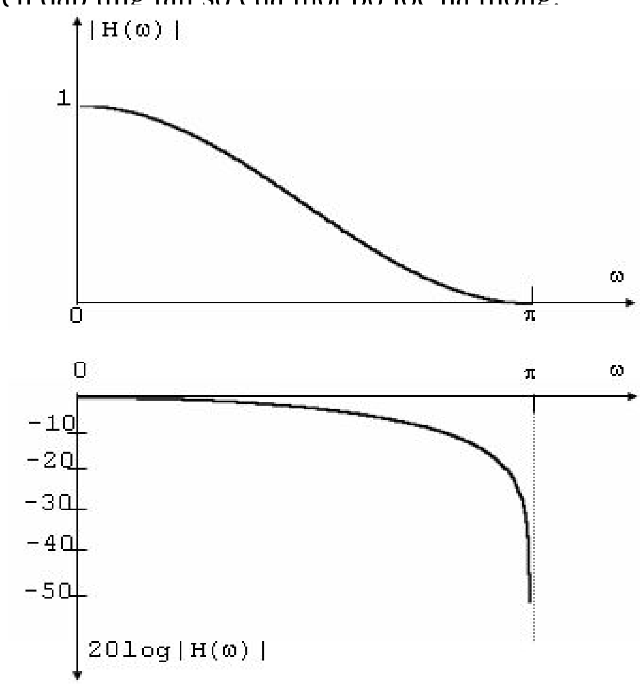
$$H(\omega) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\omega}$$

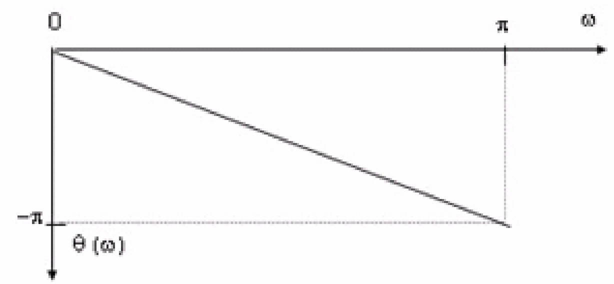
Hay $$H(\omega) = \frac{1}{4}e^{-j\omega}(e^{j\omega} + 2 + e^{-j2\omega})$$

Suy ra $$H(\omega) = \frac{1}{2}(1+\cos\omega)e^{-j\omega}$$

Kết quả $$|H(\omega)| = \frac{1}{2}(1+\cos\omega) \qquad (4.50)$$

Hình 4.5 vẽ đồ thị của đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của hệ thống này. Ta thấy lọc Hanning có đặc tuyến đáp ứng tần số của một bộ lọc hạ thông.





Hình 4.5 Đáp ứng biên độ và pha của mạch lọc Hamming

Đáp ứng biên độ bằng 1 ở ω = 0 (dc) và suy giảm đến 0, ở ω =π. Đáp ứng pha của nó là một hàm tuyến tính theo tần số. Bộ lọc đơn giản này được dùng để 'làm trơn' (smooth) dữ liệu trong nhiều ứng dụng.

4.3. HỆ THỐNG LTI VÀ MẠCH LỌC SỐ.

Trong xử lý tín hiệu số, hệ thống phổ biến nhất là lọc số (digital filter). Lọc số có thể là một mạch điện tử (phần cứng) hoặc chương trình (phần mềm) hoặc kết hợp cả hai. Như vậy, lọc số thật ra chưa hẳn là một mạch điện hay một thiết bị cụ thể, nhưng để thuận tiện ta vẫn gọi là mạch lọc hay bộ lọc. Cũng giống như các mạch lọc tương tự, tác động của mạch lọc gồm lọc bỏ và lọc chọn các thành phần tần số khác nhau trong tín hiệu vào để tạo một tín hiệu ra có phổ khác với phổ của tín hiệu vào. Bản chất của tác động lọc này được xác định bởi đặc tuyến của đáp ứng tần số H(ω). Đặc tuyến này phụ thuộc vào sự chọn lựa các tham số của hệ thống (ví dụ : các hệ số hằng $\{a_k\}$ và $\{b_k\}$ trong phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng). Như vậy bằng cách chọn một tập các tham số hệ thống, ta có thể thiết kế một mạch lọc chọn tần.

Như ta đã thấy trong một số ví dụ ở phần trước, hệ thống LTI có tác động lọc tần số. Tổng quát, một hệ thống LTI biến đổi một tín hiệu vào có phổ là X(ω) theo đáp ứng tần số H(ω) của nó để cho một tín hiệu ra có phổ là Y(ω) = H(ω)X(ω). Theo cách tiếp cận này, H(ω) tác động như là một hàm sửa dạng *phổ (spectral shaping function) của tín hiệu vào. Động tác sửa dạng phổ đồng* nghĩa với chọn lựa tần số, vì vậy một hệ thống LTI có thể coi như là một mạch lọc chọn tần. Mạch lọc được dùng phổ biến trong xử lý tín hiệu số với nhiều cức năng khác nhau. Ví dụ như : loại bỏ nhiễu trong tín hiệu, sửa dạng phổ trong xử lý tín hiệu âm thanh, hình ảnh hay sự cân bằng các kênh truyền thông; tách tín hiệu trong radar, sonar và truyền dữ liệu; thực hiện phân tích phổ của tín hiệu, ...

4.3.1. Lọc chọn tần lý tưởng.

Trong nhiều ứng dụng thực tế, ta phải giải quyết bài toán tách các tín hiệu mà phổ của chúng không có sự chồng lấp với yêu cầu là tín hiệu mong muốn không bị méo dạng bởi tác động của các mạch lọc được dùng. Bài toán này thường nảy sinh trong truyền tin, nơi mà nhiều tín hiệu được ghép kênh theo cách chia tần và được truyền trên một kênh chung (chẳng hạn như cáp đồng trục, cáp quang, hay kênh truyền vệ tinh) ở đầu cuối thu nhận của hệ thống truyền tin, tín hiệu phải được tách ra bởi các mạch lọc chọn tần và được truyền đi đến đích cuối cùng của chúng. Mạch lọc chọn tần phải được thiết kế sao cho sự méo dạng không đáng kể khi tín hiệu đi qua nó.

Xét tín hiệu x(n) có băng tần là $\omega_1 < \omega < \omega_2$ nghĩa là : $X(\omega) = 0$ khi $\omega \geq \omega_2$ và $\omega \leq \omega_1$

Giả sử tín hiệu đi qua mạch lọc có đáp ứng tần số là :

$$H(\omega) = \begin{cases} Ce^{-j\omega k} & ;\omega_1 < \omega < \omega_2 \\ 0 & ;\text{n khác} \end{cases} \quad (4.51)$$

Ở đây C và k là các hằng số dương

Tín hiệu ra của mạch lọc có phổ là :

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

$$= C\,X(\omega)e^{-j\omega k} \;;\omega_1 < \omega < \omega_2 \quad (4.52)$$

Áp dụng tính chất dịch trong miền thời gian của biến đổi Fourier như sau :

$$x(n-k) \leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega k}$$

$$y(n) = Cx(n-k) \quad (4.53)$$

Kết quả, tín hiệu ra của mạch lọc đơn giản là một bản sao của tín hiệu vào được dịch k mẫu và thay đổi thang biên độ bởi thừa số C. Một phép trễ thuần túy không làm méo tín hiệu. Vì vậy mạch lọc được đặc trưng bởi hàm truyền (4.51) được gọi là mạch lọc lý tưởng. Phổ biên độ là một hằng, đó là :

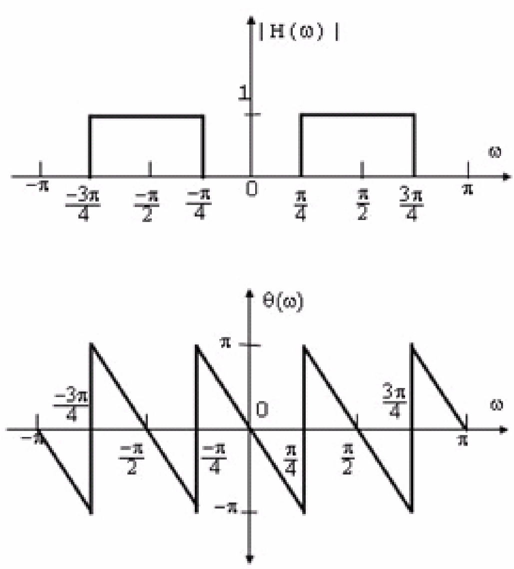
$$|H(\omega)| = C \;;\; \omega_1 < \omega < \omega_2$$

và phổ pha là một hàm tuyến tính của tần số :

$$\theta(\omega) = -\omega k$$

Đặc tuyến của đáp ứng tần số được minh họa trong hình 4.6

với C=1, k=4, $\omega_1 = \frac{\pi}{4}$ và $\omega_2 = \frac{3\pi}{4}$



Hình 4.6: Đặc tuyến biên độ và pha của mạch lọc dải thông lý tưởng

Một cách tổng quát mọi sự sai lệch của đặc tuyến (của đáp ứng) tần số của một mạch lọc tuyến tính so với đặc tuyến tần số lý tưởng là sự méo dạng. Nếu một mạch lọc có đặc tuyến của đáp ứng biên độ biến đổi theo tần số trong băng tần mong muốn của tín hiệu thì mạch lọc tạo ra một sự méo dạng biên độ (amplitude distortion). Nếu đặc tuyến pha không tuyến tính trong băng tần mong muốn thì tín hiệu bị một sự méo pha (phase distortion) vì sự lệch pha theo tần số đồng nghĩa với sự trễ, nên độ trễ của tín hiệu được định nghĩa như là một hàm của tần số đó là :

$$\tau(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} \tag{4.54}$$

Ta thấy rằng, một mạch lọc pha tuyến tính có độ trễ là một hằng số, độc lập với tần số. Như vậy, một mạch lọc mà nó gây ra một sự méo pha thì có độ trễ biến thiên theo tần số. Ta nói mạch lọc đã đưa vào một sự méo trễ (delay distortion). Vì vậy, sự méo trễ là đồng nghĩa với sự méo pha.

Giống như trong mạch tương tự, mạch lọc cũng được phân loại theo đặc tuyến của đáp ứng tần số, ta có các loại mạch lọc như sau :

- Lọc thông thấp lý tưởng, có đáp ứng tần số là :

$$H(\omega) = \begin{cases} Ce^{-j\omega k} & ; |\omega| \le \omega_c \\ 0 & ;\text{ngược lại} \end{cases} \tag{4.55}$$

Ở đây ω_c được gọi là tần số cắt.

- Lọc thông cao lý tưởng, có đáp ứng tần số là :

$$H(\omega) = \begin{cases} Ce^{-j\omega k} & ; |\omega| \ge \omega_c \\ 0 & ;\text{ngược lại} \end{cases} \tag{4.56}$$

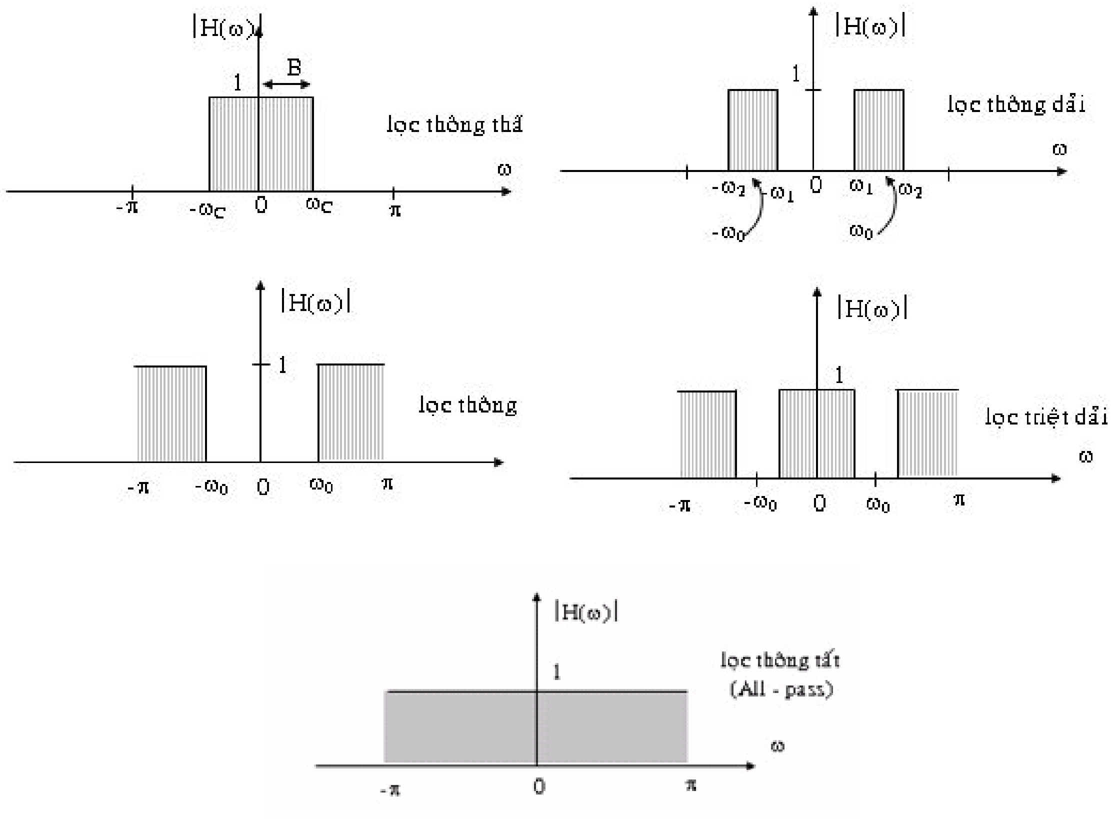
- Lọc thông dải lý tưởng, có đáp ứng tần số là :

$$H(\omega) = \begin{cases} Ce^{-j\omega k} & ; \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ 0 & ;\text{ngược lại} \end{cases} \tag{4.57}$$

- Lọc triệt dải lý tưởng, có đáp ứng tần số là :

$$H(\omega) = \begin{cases} Ce^{-j\omega k} & ; |\omega| \le \omega_1 \text{ và } |\omega| \le \omega_c \\ 0 & ; \omega_1 < |\omega| < \omega_2 \end{cases} \tag{4.58}$$

Đặc tuyến của đáp ứng tần số của các mạch lọc này được minh họa trong *hình4.7*



Hình 4.7: Các loại mạch lọc

4.3.2. Tính không khả thi của bộ lọc lý tưởng.

Trong thực tế, ta có thể thực hiện một bộ lọc lý tưởng hay không? Để trả lời câu hỏi này, ta hãy khảo sát đáp ứng xung h(n) của một bộ lọc thông thấp lý tưởng có đáp ứng tần số là :

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \omega_c \\ 0 & \omega_c < \omega \le \pi \end{cases} \tag{4.57}$$

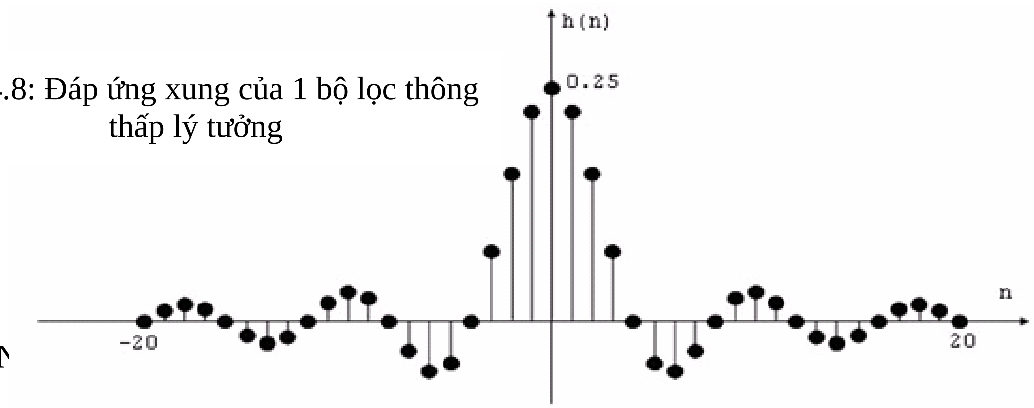
Đáp ứng xung của bộ lọc này là:

$$H(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\omega_c}{\pi} & ;n=0 \\ \dfrac{\omega_c}{\pi}\dfrac{\sin\omega_c n}{\omega_c n} & ;n \neq 0 \end{cases} \tag{4.58}$$

Đồ thị của h(n) với $\omega_c = \dfrac{\pi}{4}$ được vẽ trong hình 4.8

Rõ ràng bộ lọc thông thấp lý tưởng là không nhân quả. Hơn nữa h(n) có chiều dài vô hạn và không khả tổng tuyệt đối. Vì vậy, nó không thể thực hiện được trong thực tế.

Chúng ta cũng quan sát thấy rằng, độ rộng của múi chính (main lobe) của h(n) là tỉ lệ nghịch với bằng tần ω_c của bộ lọc. Khi băng tần của bộ lọc tăng, đáp ứng xung trở nên hẹp hơn. Khi $\omega_c = \pi$, bộ lọc trở thành bộ lọc thông tất (All-pass) và đáp ứng xung trở thành xung đơn vị.



Hình 4.8: Đáp ứng xung của 1 bộ lọc thông thấp lý tưởng

N ến tính,

$$h(n-n_0) \xleftrightarrow{\xi} H(\omega)e^{-j\omega n_0}$$

Ta có thể chọn một độ trễ n0 khá lớn (một cách tùy ý) để cho có thể coi như h(n)=0 với n < n0. Tuy nhiên, hệ thống thu được sẽ không có đáp ứng tần số lý tưởng nữa.

Kết luận trên cũng đúng cho tất cả các bộ lọc lý tưởng khác. Tóm lại, tất cả các bộ lọc lý tưởng đều không thể thực hiện về mặt vật lý.

4.3.3. Mạch lọc thực tế

Mặc dù bộ lọc lý tưởng là điều chúng ta mong muốn, nhưng trong ứng dụng thực tế, không nhất thiết phải có sự chính xác tuyệt đối như vậy. Ta có thể thực hiện các bộ lọc nhân quả có đáp ứng tần số xấp xĩ với mạch lọc lý tưởng mà ta mong muốn. Đặc biệt, không nhất thiết phải có biên độ $|H(\omega)|$ là hằng trên toàn bộ dãi thông của bộ lọc. Một lượng gợn sóng nhỏ trong dải thông (hình 4.9) thường có thể chấp nhận được. Tương tự, không cần thiết $|H(\omega)|$ phải bằng 0 trong dải chặn (stopband), một giá trị nhỏ hay một lượng gợn sóng nhỏ cũng có thể chấp nhận.

Biên độ $|H(\omega)|$cũng không thể giảm đột ngột từ 1 xuống 0 ở tần số cắt. Như vậy phải có một dải tần quá độ giữa dải thông và dải chặn, ta gọi là dải quá độ (transition band) hay vùng chuyển tiếp (transition region) của bộ lọc (hình 4.9).

Từ đặc tuyến của đáp ứng biên độ của một bộ lọc thực tế (hình (4.9)) ta định nghĩa các thông số sau :

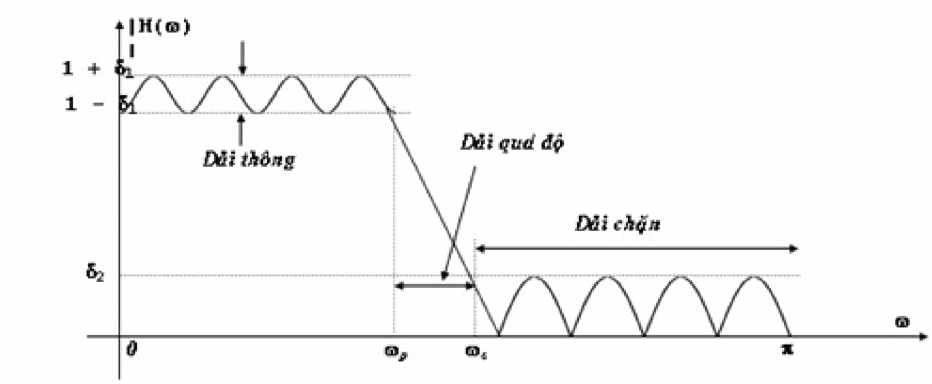
ω_1: là biên độ của gợn sóng dải thông gọi tắt là gợn sóng dải thông (passband ripple)

$\omega2$: là biên độ của gợn sóng dải chặn gọi tắt là gợn sóng dải chặn (stopband ripple)

ω_p : tần số cạnh dải thông.

ω_s: tần số cạnh dải chặn.

ω_s - ω_p : độ rộng của dải quá độ.



Hình 4.9: Đặc tuyến đáp ứng biên độ của bộ lọc
thực tế

Băng tần của một mạch lọc chính là độ rộng của dải thông. Trong mạch lọc thông thấp này, ta thấy, biên độ H(ω)| dao động trong khoảng $1 \pm \delta_1$

Trong các bài toán thiết kế mạch lọc, ta cần xác định các chi tiết kỹ thuật sau:

(1) Gợn sóng dải thông cực đại có thể chấp nhận.

(2) Gợn sóng dải chặn cực đại có thể chấp nhận.

(3) Tần số cạnh của dải thông.

(3) Tần số cạnh của dải chặn.

Nhắc lại rằng, một hệ thống LTI được mô tả bởi phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng :

$$y(n) = -\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \qquad (4.59)$$

Có thể là một hệ thống nhân quả và có thể thực hiện trong thực tế. Đáp ứng tần số của nó là :

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}} \qquad (4.60)$$

Từ các chỉ tiêu được nêu ở trên, ta chọn các hệ số $\{a_k\}$ và $\{b_k\}$ để có một mạch loạc với đáp ứng tần số H(ω) tương ứng.

Mức độ xấp xỉ của H(ω) với các chi tiêt kỹ thuật trên tuỳ thuộc vào các tiêu chuẩn chọn lựa các hệ số $\{a_k\}$ và $\{b_k\}$ cũng như M và N.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Quách Tuấn Ngọc - XỬ LÍ TÍN HIỆU SỐ - NXB Giáo Dục - 1995.

[2] Nguyễn Quốc Trung - XỬ LÝ TÍN HIỆU VÀ LỌC SỐ TẬP 1- NXB Khoa Học Kỹ Thuật - 1999.

[3] Nguyễn Quốc Trung - XỬ LÝ TÍN HIỆU VÀ LỌC SỐ TẬP II- NXB Khoa Học Kỹ Thuật - 2001.

[4] Doãn Hòa Minh, Xử lý tín hiệu số, Đại học Cần Thơ – 2000.

[5] Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer - DISCRETE-TIME SIGNAL PROCESSING - Prentice-Hall, Inc. - 1989 .

[6] C. Sidney Burrus, James H. McClellan, Alan V. Oppenheim, Thomas W. Parks, Ronald W. Schafer, Hans W. Schuessler - COMPUTER-BASED EXERCICES FOR SIGNAL PROCESSING USING MATLAB - Prentice Hall International, Inc. - 1994.

[7] Emmanuel C. Ifeachor - Barrie W. Jervis - DIGITAL SIGNAL PROCESSING A PRACTICAL APPROACH - Prentice Hall - 2002.

[8] William D. Stanley - Gary R. Dougherty - Ray Dougherty - DIGITAL SIGNAL PROCESSING - Reston Publishing Company, Inc. - 1984.

PHỤ LỤC
MỘT SỐ CHƯƠNG TRÌNH MẪU DÙNG NGÔN NGỮ MATLAB TRONG XỬ LÝ TÍN HIỆU SỐ

Các chương trình được viết trong phụ lục này nhằm mục đích minh họa và giúp sinh viên làm quen với ngôn ngữ MATLAB cũng như các tiện ích của nó dành cho xử lý tín hiệu số. Để chương trình đơn giản và dễ dàng thấy được thuật toán của nó, ta sẽ không thực hiện giao diện cho người dùng và chương trình được viết theo cách đối thoại trực tiếp trên cửa sổ lệnh (Command Window) của MATLAB, bằng cách dùng các lệnh disp và input. Hầu hết các chương trình sau đây được viết dưới dạng Script và lưu vào các M-file cùng tên của chương trình. Sau khi nhập vào một thư mục nào đó của MATLAB và tạo đường dẫn (nếu thư mục này chưa có sẵn đường dẫn), để chạy chương trình, ta chỉ cần nhập tên chương trình vào, trên Command Window, và gõ Enter. Nếu chương trình được viết dưới dạng Function, người sử dụng cần nắm được các thông số vào, ra, để nhập lệnh đúng cú pháp.

1. dsp13

% Nhập vào vector biến thời gian và biểu thức của tín hiệu, vẽ các loại tín hiệu: tương tự, rời rạc, số.

```
%-------------------------------------------------
t=input('Nhap khoang thoi gian, VD:0:0.1:40, t= ');
y=input('Nhap ham so muon ve co bien t, VD:sin(t/4+1), y= ');
loai=input('(analog,type=1;discrete,type=2;digital,type=3)Type =  ');
duong=input('(___,style=1;...,style=2;-.,style=3) stype = ');
if loai==1
   DS1=figure('Name','Type of signal','Color','w',...
   'NumberTitle','off','Position',[50 50 400 300]);
      if duong = =1
      plot(t,y,'r-');
   elseif duong = =2
      plot(t,y,'r:');
   elseif duong = =3
      plot(t,y,'r-.');
   end;
elseif loai= =2
   cham=input('(cham den,cham=1;cham trang,cham=2;...
   khong,cham=3) cham=  ');
   DS1=figure('Name','Type of signal',  'Color','w',...
   'NumberTitle','off','Position',[50 50 400 300]);
      if cham= =1
      stem(t,y,'fulled');
   elseif cham= =2
      stem(t,y);
      elseif cham= =3
      stem1(t,y);
   end;
elseif loai= =3
```

```
  [x,z]=stairs(t,y);
  xt(1)=x(1);zt(1)=z(1);
  for n=1:length(x)/2-1
     ni=2*n+1;
     xt(n)=x(ni);zt(n)=z(ni);
  end;
 cham=input('(cham den,cham=1;cham trang,cham=2;...
 khong,cham=3) cham=  ');
     plot(x,z,'g:');hold on;
     if cham= =1
     stem(xt,zt,'fulled');
  elseif cham= =2
     stem(xt,zt);
     elseif cham= =3
     stem1(xt,zt);
  end;
end
axis off;
```

2. function dsphinh3_26(N,L)

```
%Ve bien do va pha cua DFT n diem cua day co do dai L.
% Doan hoa minh 2001
%-----------------------------------------------------

function dsphinh3_26(N,L)
xn=ones(1,L);
X=fft(xn,N);
X1=abs(X);
theta1=angle(X);
DS2=figure('Name','DFT N diem','Color','w',...
        'NumberTitle','off','Position',[50 50 580 300]);
stem(X1,'filled')
DS2=figure('Name','Type of signal','Color','w',...
        'NumberTitle','off','Position',[50 50 580 300]);
stem(theta1,'filled')
```

3. dsphinh5_16

```
% Ve dac tuyen cua mach loc thiet ke bang cua so co chieu dai bang 9 va bang 61.
% Do Huy Khoi and Phung Trung Nghia

syms w v;
y=sin((w-v)*9/2)/sin((w-v)/2);
z=int(y,v,-pi/4,pi/4);
z=simple(z)
w=0:0.01:pi;
for n=1:length(w)
```

```
Ht(n)=subs(z,'w',w(n));
end
H=exp(-j*4.*w)./(2*pi).*Ht;
tHt=abs(H);

Hdb=20*log10(tHt);
DS1=figure('Name','Type of signal','Color','w',...
        'NumberTitle','off','Position',[50 50 500 200]);
plot(w,tHt)
grid on
DS1=figure('Name','Type of signal','Color','w',...
        'NumberTitle','off','Position',[50 50 500 200]);
plot(w,Hdb,'k')
grid on
syms w v;
y1=sin((w-v)*61/2)/sin((w-v)/2);
z1=int(y1,v,-pi/4,pi/4);
z1=simple(z1)
w=0:0.01:pi;
for n=1:length(w)
Ht1(n)=subs(z1,'w',w(n));
end
H1=exp(-j*4.*w)./(2*pi).*Ht1;
tHt1=abs(H1);

Hdb1=20*log10(tHt1);
DS3=figure('Name','Type of signal',...
  'Color','w','NumberTitle','off','Position',[50 50 500 200]);
plot(w,tHt1)
grid on
DS4=figure('Name','Type of signal',...
  'Color','w','NumberTitle','off','Position',[50 50 500 200]);
plot(w,Hdb1,'k')
grid on
```

4.firequiripple

```
% Thiet ke bo loc FIR thong thap pha tuyen tinh dung thuat toan Remez exchange.
% Do Huy Khoi and Phung Trung Nghia

M=input('Nhap chieu dai cua dap ung xung, M = ');
dx=11; pdx=12;
disp('Chon dieu kien doi xung, neu doi xung thi nhap: dx')
disp('                , neu phan doi xung thi nhap: pdx')
dk=input('Dieu kien doi xung :   ');
W=input('Nhap vector trong so,so phan tu bang so dai bang,...
       Vd: W=[1.2 1],W=  ');
disp('Nhap vector cac tan so c../Anh bang tan,...
    mot cap tan so cho moi ')
```

```
disp('bang tan, cac tan so nay nam giua 0 va 1,...
    Vd F=[0 .1 .15 1]')
F=input('F = ');
disp('Nhap vector gia tri dap ung tan so mong muon A (gia tri thuc),')
disp('tai cac diem tan so bang c../Anh, A co kich thuoc bang F')
disp ('Vi du: A=[1 1 0 0]')
A=input('A =  ');
N=M-1;
if dk= =11
  [hn,err]=remez(N,F,A,W)
elseif dk= =12
  [hn,err]=remez(N,F,A,W,'Hilbert')
end

w=0:0.001:pi;
f=w./pi;
H= freqz(hn,1,w);
H1=20*log10(abs(H));

 DS1=figure('Name','Impulse Response','Color','w',...
        'NumberTitle','off','Position',[50 50 500 300]);
  n=0:1:M-1;
  stem(n,hn,'filled','k')
  axis off

  DS1=figure('Name','Frequency Response', 'Color','w',...
         'NumberTitle','off','Position',[50 50 500 300]);
  plot(f,abs(H),'k')
  grid on

  DS1=figure('Name','Frequency Response (dB)','Color','w',...
 'NumberTitle','off','Position',[50 50 500 300]);
  plot(f,H1,'k')
  ylim([-100 10])
  grid on
```

5. firsample

```
% Thiet ke bo loc FIR thong thap pha tuyen tinh bang phuong phap lay may tan so.
% Do Huy Khoi and Phung Trung Nghia .
%--------------------------------------------------------
M=input('Nhap chieu dai cua dap ung xung, M = ');
dx=11; pdx=12;
disp('Chon dieu kien doi xung, neu doi xung thi nhap: dx')
disp('                , neu phan doi xung thi nhap: pdx')
dk=input('Dieu kien doi xung :   ');
alpha=input('Chon he so alpha, alpha=  ');
disp('Voi h(n) dx k=[0:(M-1)/2] neu M le,...
    k=[0:(M/2)-1] neu M chan')
disp('Voi h(n) pdx k=[0:(M-3)/2] neu M le,...
```

```
     k=[1:(M/2)] neu M chan')
disp('Nhap dac tuyen tan so mong muon,...
     tai cac diem tan so wk=2*pi*k/M')
if mod(M,2)= =0
   U=M/2-1;
else
   U=(M-1)/2;
end
for ii=1:U+1
   %kk=int2str(ii);
   %disp('k = 'kk);
   Hrk(ii)=input('Hr(k) = ');
end
G=zeros(U+1,1);
hn=zeros(M,1);
for k=1:U+1
    G(k)=((-1)^(k-1))*Hrk(k);
end
if alpha= =0
   if dk= =11
      for n=1:M
         for k=2:U+1
            hn(n)=hn(n)+G(k)*cos(pi*(k-1)*(2*(n-1)+1)/M);
         end
         hn(n)=(2*hn(n)+G(1))/M;
      end
   elseif dk = =12
      if mod(M,2)= =1
         for n=1:M
            for k=1:U+1
               hn(n)=hn(n)-2*G(k)*sin(2*pi*(k-1)*((n-1)+0.5)/M)/M;
            end
         end
      else
         for n=1:M
            for k=1:U
               hn(n)=hn(n)-2*G(k)*sin(2*pi*k*((n-1)+0.5)/M)/M;
            end
            hn(n)=hn(n)+((-1)^(n))*G(U+1)/M;
         end
      end
   end
elseif alpha= = 0.5
   if dk= =11
      for n=1:M
         for k=1:U+1
            hn(n)=hn(n)+2*G(k)*sin(2*pi*(k-1+1/2)*((n-1)+0.5)/M)/M;
         end
```

```
      end
    elseif dk= =12
      for n=1:M
        for k=1:U+1
          hn(n)=hn(n)+2*G(k)*cos(2*pi*(k-1+1/2)*((n-1)+0.5)/M)/M;
        end
      end
    end
end
hn

om=0:0.01:pi;
if mod(M,2)= =0
    Hr=hn(1).*cos(om.*((M-1)/2));
    n=1;
    while n<=U
      n=n+1;
      Hr=Hr+hn(n).*cos(om.*((M-1)/2-n+1));
    end
    Hr=2.*Hr;
else
    Hr=hn(1).*cos(om.*((M-1)/2));
    n=1;
    while n<=(M-3)/2
      n=n+1;
      Hr=Hr+hn(n).*cos(om.*((M-1)/2-n+1));
    end
    Hr=2.*Hr;
    Hr=Hr+hn(U+1);
end
modunH=abs(Hr);
DS1=figure('Name', 'Dap ung bien do',   'Color','w',...
        'NumberTitle','off','Position',[50 50 400 300]);
plot(om,modunH,'k');
grid on

modunHdb=20.*log10(modunH);
DS2=figure('Name','Type of signal',  'Color','w',...
        'NumberTitle','off','Position',[50 50 400 300]);
plot(om,modunHdb,'k');
grid on

teta=-om.*(M-1)/2+angle(Hr);
DS3=figure('Name','Dap ung pha','Color','w',...
        'NumberTitle','off','Position',[50 50 400 300]);
plot(om,teta,'k');
grid on
```

```
DS4=figure('Name','Dap ung xung',   'Color','w',...
        'NumberTitle','off','Position',[50 50 400 300]);
stem(hn,'filled','k');
grid on
```

6. dsphinh 5_15

```
% Ve dap ung tan so cua cua so chu nhat co chieu dai bang M=9,
% M=51 va m=101.
% Do Huy Khoi and Phung Trung Nghia

om=0:0.001:pi;
M=9;
W1=20*log10(abs(sin(om.*M/2)./sin(om./2)));
DS1=figure('Name','Dap ung tan so cua cua so chu nhat M=9',
  'Color','w','NumberTitle','off','Position',[50 50 500 200]);
plot(om,W1,'k')
title('M = 9');
xlabel('w (rad)');
ylabel('|W(w)|(dB)');

axis on
grid on
M=51;
W2=20*log10(abs(sin(om.*M/2)./sin(om./2)));
DS2=figure('Name',' Dap ung tan so cua cua so chu nhat M=51',
  'Color','w','NumberTitle','off','Position',[50 50 500 200]);
plot(om,W2,'k')
title('M = 51');
xlabel('w (rad)');
ylabel('|W(w)|(dB)');
axis on
grid on
M=101;
W3=20*log10(abs(sin(om.*M/2)./sin(om./2)));
DS2=figure('Name','Dap ung tan so cua cua so chu nhat M=101',
  'Color','w','NumberTitle','off','Position',[50 50 500 200]);
plot(om,W3,'k')
title('M = 101');
xlabel('w (rad)');
ylabel('|W(w)|(dB)');
axis on
grid on
```

function hh = stem1(varargin)

% Hàm này được cải biên từ hàm stem của MATLAB, vẽ dãy rời rạc không có chấm trêm đầu.

%STEM1   Discrete sequence or "stem" plot.

```
%   STEM1(Y) plots the data sequence Y as stems from the x axis
%
%   STEM1(X,Y) plots the data sequence Y at the values specfied
%   in X.
%   STEM1(...,'LINESPEC') uses the linetype specifed for the stems and
%   markers.  See PLOT for possibilities.
%
%   H = STEM(...) returns a vector of line handles.
%
%   See also PLOT, BAR, STAIRS.

%   Copyright (c)  by Do Huy Khoi and Phung Trung Nghia.
%   Date: 2000/6/4.

nin = nargin;
fill = 0;
ls = '-';
ms = 'o';
col = '';
% Parse the string inputs
while isstr(varargin{nin}),
  v = varargin{nin};
  if ~isempty(v) & strcmp(lower(v(1)),'f')
    fill = 1;
    nin = nin-1;
  else
    [l,c,m,msg] = colstyle(v);
    if ~isempty(msg),
      error(sprintf('Unknown option "%s".',v));
    end
    if ~isempty(l), ls = l; end
    if ~isempty(c), col = c; end
    if ~isempty(m), ms = m; end
    nin = nin-1;
  end
end
error(nargchk(1,2,nin));
[msg,x,y] = xychk(varargin{1:nin},'plot');
if ~isempty(msg), error(msg); end
if min(size(x))= =1, x = x(:); end
if min(size(y))= =1, y = y(:); end
% Set up data using fancing ../indexing
[m,n] = size(x);
xx = zeros(3*m,n);
xx(1:3:3*m,:) = x;
xx(2:3:3*m,:) = x;
xx(3:3:3*m,:) = NaN;
[m,n] = size(y);
```

```
yy = zeros(3*m,n);
yy(2:3:3*m,:) = y;
yy(3:3:3*m,:) = NaN;
cax = newplot;
next = lower(get(cax,'NextPlot'));
hold_state = ishold;
h2 = plot(xx,yy,[col,ls],'parent',cax);
if nargout>0, hh = h2; end
```