

# Curvas de rotación.

## Ecuaciones de Lane-Emden.

Néstor Andrés Montiel Hernández.

Asesor: Dra. Argelia Bernal Bautista  
Universidad de Guanajuato

19 de junio de 2022

# Objetivo.

Realizar ajustes en las velocidades de rotación de las galaxias LSB usando las ecuaciones de Lane-Emden.

# Introducción

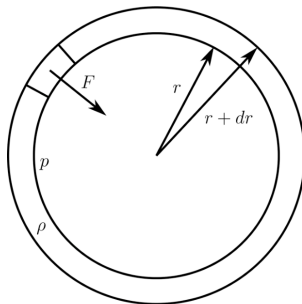
Las curvas de rotación observadas junto con un modelo de masa son de las herramientas principales para derivar el potencial gravitatorio y la distribución de masa en las galaxias. Para la distribución de materia oscura, se prefiere un comportamiento “core” en las regiones centrales de las enanas esferoidales (dSphs) y en galaxias de bajo brillo superficial (LSB).

De Blok et al. [de Blok, W.J.G., McGaugh, S.S., van der Hulst, J.M., 1996, MNRAS 283, 18] fueron los primeros en estudiar las propiedades de las curvas de rotación de las galaxias LSB, encontraron que las curvas de rotación aumentan más lentamente que las galaxias HSB y están dominadas por materia oscura.

# Ecuación de Lane-Emden

Tenemos las ecuaciones de equilibrio para un objeto esférico

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad \frac{dP}{dr} = -\frac{mG}{r^2} \rho \quad (1)$$



consideramos una ecuación para un fluido politrópico

$$P = \kappa \rho^\gamma \quad (2)$$

donde  $\gamma = 1 + 1/n$  con  $n$  el índice politrópico. Despejamos  $m(r)$  de la ecuación diferencial para la presión y sustituimos en la ecuación diferencial para la masa, obteniendo

$$\frac{d}{dr} \left[ -\frac{r^2}{G\rho} \frac{dP}{dr} \right] = 4\pi r^2 \rho \quad (3)$$

de la ecuación politrópica derivamos ambos lados respecto de  $r$

$$\frac{dP}{dr} = \kappa \gamma \rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr} \quad (4)$$

y sustituimos en 3

$$\frac{d}{dr} \left[ -\frac{r^2}{G\rho} \left\{ \kappa \gamma \rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr} \right\} \right] = 4\pi r^2 \rho \quad (5)$$

ahora reescribimos a  $\gamma$  en términos de el índice politrópico  $n$  como

$$\gamma - 1 = 1/n \quad \gamma = \frac{n+1}{n} \quad (6)$$

sustituimos en 5 y obtenemos

$$\frac{d}{dr} \left[ -\frac{r^2}{G\rho} \left( \frac{n+1}{n} \right) \left\{ \kappa \rho^{1/n} \frac{d\rho}{dr} \right\} \right] = 4\pi r^2 \rho \quad (7)$$

realizamos el siguiente cambio de variable  $\rho = \rho_0 \theta^n$ , por lo tanto

$$\rho^{1/n} = \rho_0^{1/n} \theta \quad \frac{d\rho}{dr} = \rho_0 n \theta^{n-1} \frac{d\theta}{dr} \quad (8)$$

sustituyendo lo anterior obtenemos

$$\frac{d}{dr} \left[ -\frac{r^2}{G\rho_0\theta^n} \left( \frac{n+1}{n} \right) \left\{ \kappa(\rho_0^{1/n}\theta) \left( \rho_0 n \theta^{n-1} \frac{d\theta}{dr} \right) \right\} \right] = 4\pi r^2 \rho_0 \theta^n \quad (9)$$

eliminando terminos, llegamos a la siguiente ecuación simplificada

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{r^2}{4\pi G} (n+1) \kappa \rho_0^{\frac{1-n}{n}} \frac{d\theta}{dr} \right\} + r^2 \theta^n = 0 \quad (10)$$

hacemos

$$\alpha^2 = \frac{\kappa(n+1)\rho_0^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G} \quad (11)$$



Podemos reescribir la ecuación como

$$\frac{d}{dr} \left[ \alpha^2 r^2 \frac{d\theta}{dr} \right] + r^2 \theta^n = 0 \quad (12)$$

Se realiza el siguiente cambio  $r = \alpha \xi$ , la ecuación queda como

$$\frac{d}{\alpha d\xi} \left[ \alpha^2 (\alpha^2 \xi^2) \frac{d\theta}{\alpha d\xi} \right] + \alpha^2 \xi^2 \theta^n = 0 \quad (13)$$

y obtenemos la ecuación de Lane-Emden

$$\frac{d}{d\xi} \left\{ \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right\} = -\xi^2 \theta^n \quad \xi^2 \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + 2\xi \frac{d\theta}{d\xi} + \theta^n = 0 \quad (14)$$

con las siguientes condiciones de frontera

$$\theta(\xi = 0) = 1 \quad \frac{d\theta}{d\xi}(\xi = 0) = 0 \quad (15)$$

Vamos a calcular la masa

$$m = 4\pi \int \rho r^2 dr \quad (16)$$

reescribimos en las nuevas variables

$$m = 4\pi \int (\rho_0 \theta^n) (\alpha^2 \xi^2) \alpha d\xi \quad (17)$$

usamos la ecuación (14)

$$m = 4\pi \alpha^3 \rho_0 \int \left( -\frac{d}{d\xi} \left\{ \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right\} \right) d\xi \quad (18)$$

$$m = -4\pi \alpha^3 \rho_0 \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \quad (19)$$

Para la velocidad sabemos que

$$v^2 = \frac{GM}{r} = \frac{G}{\alpha\xi} \left( -4\pi\alpha^3 \rho_0 \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) \quad (20)$$

por lo tanto

$$v = \sqrt{-4\pi\alpha^2 G \rho_0 \xi \frac{d\theta}{d\xi}} \quad (21)$$

Para calcular la presión recuerde que

$$P = \kappa \rho^{n+1/n} = \kappa \rho_0^{(n+1)/n} \theta^{n+1} \quad (22)$$

Para calcular el valor de  $\kappa$  usamos  $\alpha$

$$\alpha = \sqrt{\frac{(n+1)\kappa}{4\pi G \rho_0^{(n-1)/n}}} \quad (23)$$

por lo tanto, el valor para la constante es

$$\kappa = \frac{\alpha^2 4\pi G \rho_0^{(n-1)/n}}{n+1} \quad (24)$$

y obtendríamos

$$P = \frac{\alpha^2 4\pi G \rho_0^2 \theta^{n+1}}{n+1} \quad (25)$$

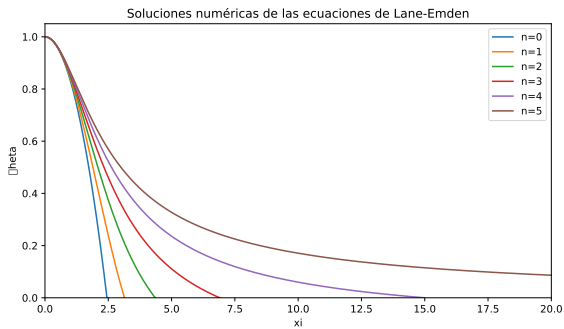


Figura:  $\xi$  VS  $\theta$

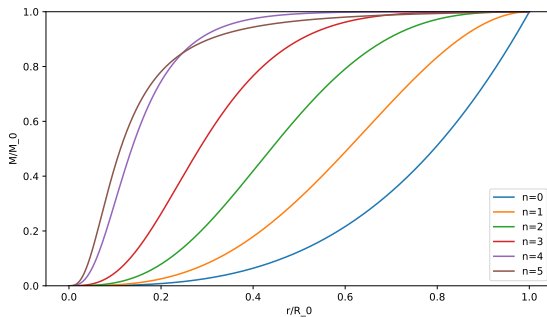


Figura: distribución de masa

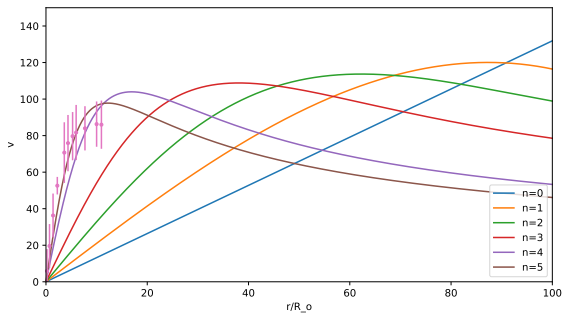


Figura: velocidad de rotación

Usando los valores máximos para la velocidad de rotación y el radio, tanto de la solución numérica, como la de los datos, podemos calcular  $\alpha$  y  $\rho_0$ . Sean

$$m = -4\pi\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \quad v = \sqrt{\frac{m}{\xi}} \quad (26)$$

valores numéricos y,  $V$  y  $R$  el dato máximo para la curva de rotación. Entonces, para obtener los valores de  $\alpha$  y  $\rho_0$  tendremos

$$R = \alpha\xi_R \quad V^2 = \alpha^2\rho_0 Gv^2 \quad (27)$$

$$\alpha = \frac{R}{\xi_R} \quad \rho_0 = \frac{V^2}{\alpha^2 Gv^2} \quad (28)$$



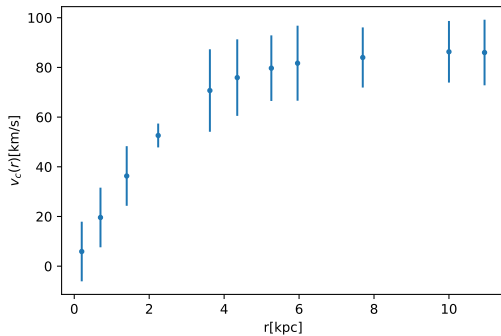


Figura: Datos galaxia LSB ESO3020120

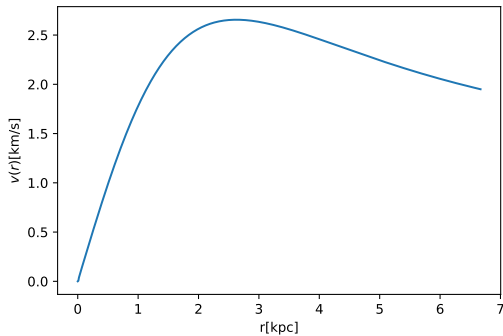


Figura: Datos teóricos usando las ecuaciones de Lane-Emden

# Resultados

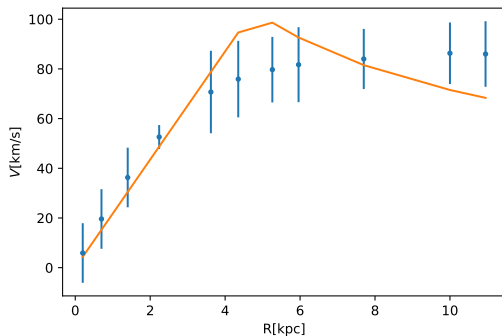


Figura: mejor ajuste para  $n = 0, \alpha = 1,9519, \rho_0 = 0,002654, \chi^2 = 8,58102$

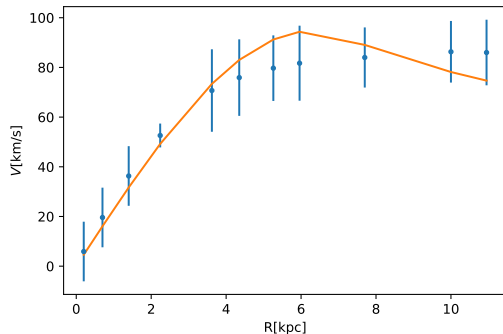


Figura: mejor ajuste para  $n = 1, \alpha = 2,3023, \rho_0 = 0,0029779, \chi^2 = 3,7943$

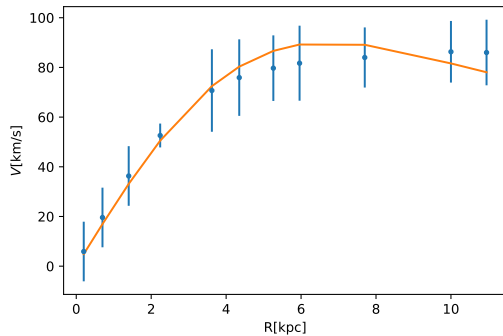


Figura: mejor ajuste para  $n = 2, \alpha = 2,492, \rho_0 = 0,003339, \chi^2 = 1,616$

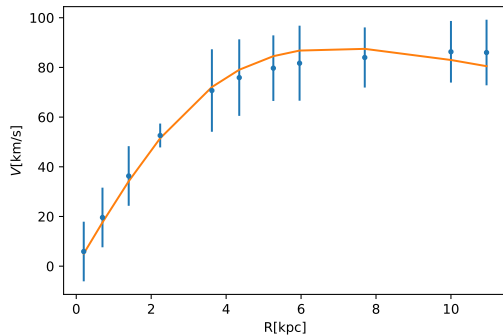


Figura: mejor ajuste para  $n = 3, \alpha = 2,6626, \rho_0 = 0,0036246, \chi^2 = 0,7399$

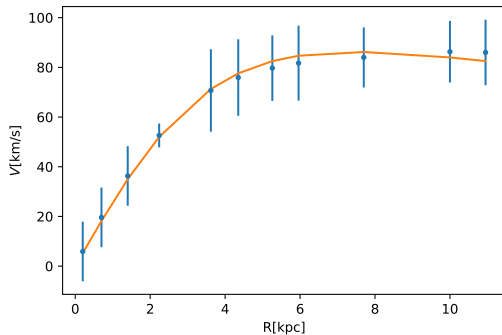


Figura: Mejor ajuste para  $n = 4$ ,  $\alpha = 2,85$ ,  $\rho_0 = 0,00379579$ ,  
 $\chi^2 = 0,4252187179$

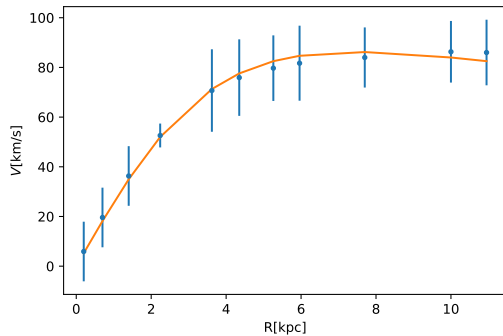


Figura: Mejor ajuste para  $n = 5$ ,  $\alpha = 3,053$ ,  $\rho_0 = 0,003871$ ,  $\chi^2 = 0,2795$

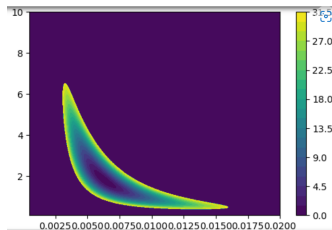
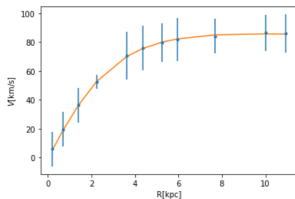


# Buscando el mejor valor de $\chi^2$ para $n$ diferentes

	Valores de $n$				
	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
ESO3020120	$\alpha = 1,953255$	$\alpha = 2,303839$	$\alpha = 2,504173$	$\alpha = 2,671118$	$\alpha = 2,854757$
	$\rho_0 = 0,002649$	$\rho_0 = 0,002966$	$\rho_0 = 0,003315$	$\rho_0 = 0,003601$	$\rho_0 = 0,003791$
	$\chi^2 = 8,581417$	$\chi^2 = 3,795385$	$\chi^2 = 1,617199$	$\chi^2 = 0,740173$	$\chi^2 = 0,425009$

	Valores de $n$				
	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$
ESO3020120	$\alpha = 3,041903$	$\alpha = 3,240233$	$\alpha = 3,422036$	$\alpha = 3,587312$	$\alpha = 3,756260$
	$\rho_0 = 0,003885$	$\rho_0 = 0,003950$	$\rho_0 = 0,004015$	$\rho_0 = 0,004048$	$\rho_0 = 0,004076$
	$\chi^2 = 0,280667$	$\chi^2 = 0,200573$	$\chi^2 = 0,153912$	$\chi^2 = 0,122746$	$\chi^2 = 0,101481$

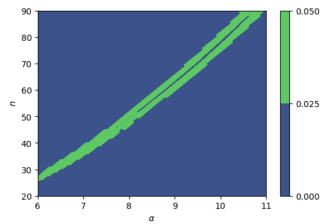
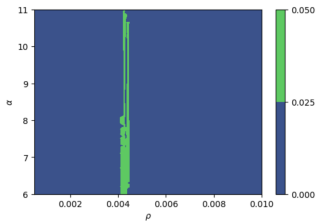
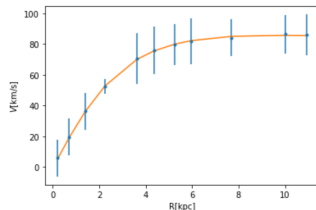
	MINIMO DE $n$				
	$n = 75$	$n = 76$	$n = 77$	$n = 78$	$n = 79$
ESO3020120	$\alpha = 9,814691$	$\alpha = 9,874290$	$\alpha = 9,933889$	$\alpha = 9,993489$	$\alpha = 10,072954$
	$\rho_0 = 0,004341$	$\rho_0 = 0,004341$	$\rho_0 = 0,004341$	$\rho_0 = 0,004341$	$\rho_0 = 0,004341$
	$\chi^2 = 0,020289$	$\chi^2 = 0,020248$	$\chi^2 = 0,020291$	$\chi^2 = 0,020509$	$\chi^2 = 0,020782$



Para la galaxia ESO3020120 se busca por intervalos de  $n$ , por ejemplo, a continuación se realizó la búsqueda en el intervalo  $[20, 90]$  del mejor valor para el  $\chi^2$

```
In [27]: print(n_minimo)
          print(alpha_minimo)
          print(rhoc_minimo)
          print(xi_minimo)

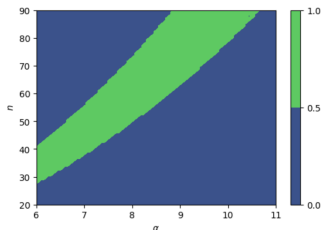
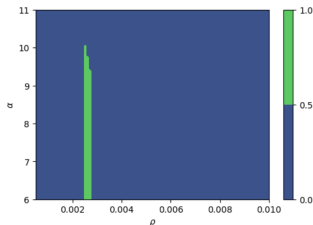
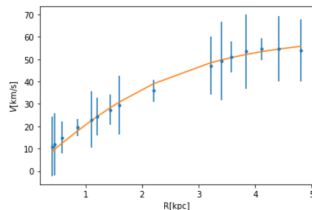
73.03030303030303
9.686868686868687
0.004338383838383838
0.020275257195562557
```



Para la galaxia ESO3050090 se busca por intervalos de  $n$ , por ejemplo, a continuación se realizó la búsqueda en el intervalo  $[20, 90]$  del mejor valor para el  $\chi^2$

```
In [12]: print(n_minimo)
          print(alpha_minimo)
          print(rhoc_minimo)
          print(xi_minimo)

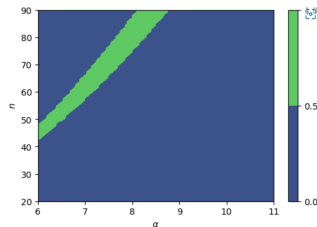
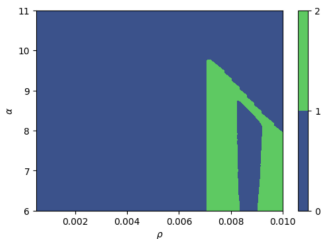
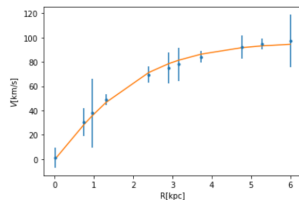
71.61616161616162
8.575757575757576
0.002611111111111111
0.8585911005019571
```



Para la galaxia ESO4880049 se busca por intervalos de  $n$ , por ejemplo, a continuación se realizó la búsqueda en el intervalo  $[20, 90]$  del mejor valor para el  $\chi^2$

```
In [12]: print(n_minimo)
          print(alpha_minimo)
          print(rhoc_minimo)
          print(xi_minimo)

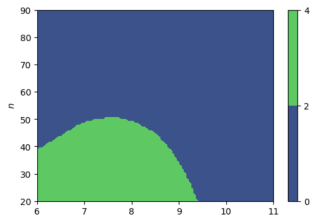
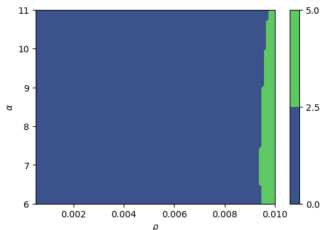
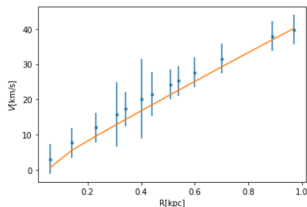
          89.29292929292929
          8.424242424242424
          0.008656565656565657
          0.9177167681439127
```



Para la galaxia U4115 se busca por intervalos de  $n$ , por ejemplo, a continuación se realizó la búsqueda en el intervalo  $[20, 90]$  del mejor valor para el  $\chi^2$

```
In [12]: print(n_minimo)
          print(alpha_minimo)
          print(rhoc_minimo)
          print(xi_minimo)

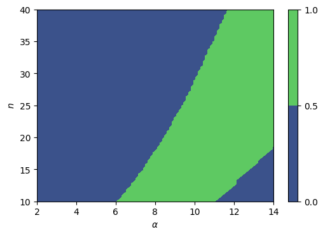
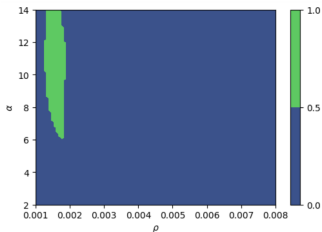
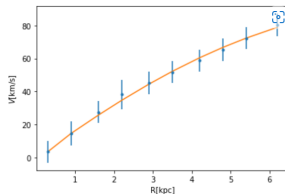
20.0
6.959595959595959
0.01
3.3877787715435304
```



Para la galaxia U11557 se busca por intervalos de  $n$ , por ejemplo, a continuación se realizó la búsqueda en el intervalo  $[10, 40]$  del mejor valor para el  $\chi^2$

```
In [15]: print(n_minimo)
          print(alpha_minimo)
          print(rhoc_minimo)
          print(xi_minimo)

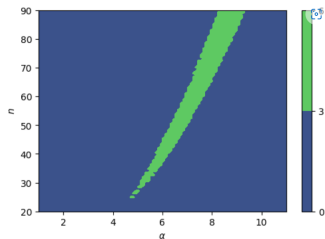
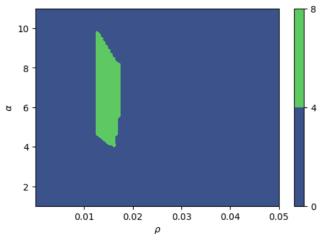
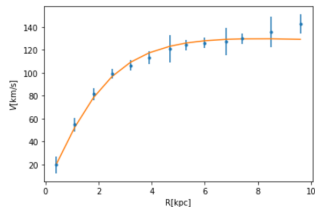
16.060606060606062
10.0
0.001494949494949495
0.42769160235344716
```



Para la galaxia U11616 se busca por intervalos de  $n$ , por ejemplo, a continuación se realizó la búsqueda en el intervalo  $[10, 40]$  del mejor valor para el  $\chi^2$

```
In [18]: print(n_minimo)
          print(alpha_minimo)
          print(rhoc_minimo)
          print(xi_minimo)

          88.58585858585859
          8.777777777777779
          0.014653535353535354
          5.025830347160955
```



Falta explorar la alternativa para los casos negativos

$$\frac{1}{\xi^m} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^m \frac{d\theta}{d\xi} \right) = \mp \theta^n \quad (29)$$

El signo superior se refiere a los polítropos de índice  $-1 < n < +\infty$ , mientras que el signo inferior se aplica cuando  $-\infty < n < -1$ . Nótese que el caso  $n = -1$  no se considera, ya que corresponde a configuraciones en las que la presión es constante en todo momento. En ausencia de campo magnético o de rotación, como se supone aquí, tales configuraciones no pueden estar en equilibrio hidrostático ya que ningún gradiente de presión equilibra la atracción gravitatoria.



# Bibliografía