კვაზი დაყვანადობის შესახებ

მიშიკო ოქროპირიძე
ხელმძღვანელი: თსუ-ს პროფესორი როლანდ ომანაძე

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

16 ივლისი, 2024

შესავალი

- რა არის გამოთვლადობა ?
- რა არის ალგორითმი ?

გამოთვლადობის მოდელები

პოსტის მანქანა [8], ტიურინგის მანქანა [11], ჩარჩის ლამბდა კალკულუსი [2], კლინის ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქციები [5]

ფორმულირდა ჩარჩ-ტიურინგი თეზისი [3]

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე ფუნქცია ეფექტურად გამოთვლადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ის გამოთვალიდა ტიურინიგის მანქანის მიერ.

რეკურსიის თეორემა (უძრავი წერტილის თეორემა) [10, 3.1, გვ. 36]

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

ვთქვათ $f : \omega \longrightarrow \omega$ ზოგად რეკურსიული ფუნქცია, მაშინ იარსებებს ისეთი $n \in \omega$, რომ

$$\varphi_n = \varphi_{f(n)}$$

შესავალი

$s-m-n$ თეორემა [10, 3.5, გვ. 16]

არსებობს ისეთი რეკურსიული, ბიექციური ფუნქცია $s:\omega^2\to\omega$, რომ ყოველი $x,y,z\in\omega$-სთვის

$$\varphi_{s(x,y)}(z)=\varphi_x(y,z)$$

სიმრავლის რეკურსიულობა(გამოთვლადობა)

S სიმრავლე **რეკურსიულია**, თუ არსებობს ეფექტური მეთოდი, რომელიც ყოველი $n\in\omega$-სთვის, უპასუხებს შეკითხვას:

$$n\in S$$

სიმრავლე რეკურსიულად გადათვლადია

S სიმრავლე **რეკურსიულად გადათვლადია**, თუ არსებობს ეფექტური მეთოდი, რომელიც გადათვლის (განმეორებით) S-ს.

$$(\exists f)(f-\text{რეკურსიული})\,(\mathrm{Val}[f]=S)$$

დაყვანადობა

$T-$ აზრით დაყვანადობა

ვიტყვით, რომ A სიმრავლე ტიურინგის აზრით დაყვანადია B-ზე,

$$A \leq_T B$$

თუ არსებობს ეფექტური მეთოდი, რომელიც გამოთვლის A-ს მახასიათებელ ფუნქციას, იმ პირობით, რომ არსებობს ეფექტური ალგორითმი, რომელიც ითვლის B-ს მახასიათებელ ფუნქციას.

ემილ პოსტმა შემოიტანა მრავალი დაყვანადობები, $m-$, btt, $tt-$

$m-$დაყვანადობა

(პოსტი) A სიმრავლე $m-$ დაყვანადია B-ზე, თუ არსებობს ისეთი f რეკურსიული ფუნქცია, რომ ყოველი x-სთვის ω-დან

$$x \in A \Longleftrightarrow f(x) \in B$$

თვისებები

თითოეული ამ დაყვანადობებიდან ფლობს **რეფლექსურობის**, **ანტისიმეტრიულობის** და **ტრანზიტულობის** თვისებებს

ამოუხსნადობის ხარისხები

ვთქვათ $r-$ არის რაიმე სახის დაყვანადობა, მაშინ

r-ეკვივალენტობა

ვიტყვით რომ A და B $r-$ეკვივალენტურია, თუ $A \leq_r B \quad$ და $\quad B \leq_r A$

$$A \equiv_r B \Longleftrightarrow (A \leq_r B \quad \text{და} \quad B \leq_r A)$$

r-ხარისხი

A სიმრავლის $r-$ეკვივალენტურ სიმრავლეთა კლასს ეწოდება A სიმრავლის $r-$**ხარისხი** და აღინიშნება

$$\deg_r(A) = \{B : B \equiv_r A\}$$

r-სრული

A სიმრავლეს ეწოდება $r-$**სრული**, თუ

(1) $A-$ რ.გ.

(2) $\forall B\,(B -$ რ.გ. $\Rightarrow B \leq_r A)$

პოსტის პრობლემა

[9, პოსტი, 1943]

არსებობს თუ არა $T-$ხარისხი, რომელიც არაა რეკურსიული და არაა ტიურინგის აზრით სრული.

პოსტის მეთოდი

პოსტმა ამის დასამტკიცებლად განსაზღვრა მარტივი, ჰიპერმარტივი სიმრავლეები. ის ცდილობდა განესაზღვრა რ.გ. კლასი, რომელსის დამატებაზე შეასუსტებდა რ.გ. თვისებას.

ფრიდბერგი[1957] და მუჩნიკი[1956]. პრიორიტეტის მეთოდი

შეიმუშავეს დამოუკიდებლად პრიორიტეტის მეთოდი და გადაწყვიტეს პოსტის პრობლემა დადებითად.

კვაზი დაყვანადობა

ამ ნაშრომში ჩვენ განვიხილავთ კვაზი დაყვანადობას ($Q-$), რომელიც ძალიან ბუნებრივი და მნიშვნელოვანია ალგორითმების თეორიისთვის.

[7, ომანაძე, 1984] $\mathrm{Th}(Q) \neq \mathrm{Th}(T)$

რეკურსიულად გადათვლადი $Q-$ხარისხებისა და რეკურსიულად გადათვლადი T-ხარისხების ზედა ნახევარმესერების ელემენტარული თეორიები არიან ერთმანეთისაგან განსხვავებულები

[4, დაუნი, 1981]

$Q-$ხარისხების ზედა ნახევარმესერი მკვრივადაა დალაგებული

[6, მარჩენკოვი, 1976] პოსტის პრობლემის გადაწყვეტა

$Q-$დაყვანადობის დახმარებით გადაწყვიტა პოსტის პრობლემა, პოსტის მეთოდებით.

$Q-$დაყვანადობას აქვს ძალიან მნიშვნელოვანი გამოყენება ალგორითმების თეორიის სხვადასხვა დარგში, მაგალითად, სიტყვათა ტოლობის პრობლემისა და გამოთვლადობის სირთულეების შესწავლისას.

$Q-$ დაყვანადობა

განსაზღვრება 1

(**ტენენბაუმი**) $A, B \subseteq \omega$. A *არის* Q*-დაყვანადი* B*-ზე* $A \leq_Q B$ *თუ არსებობს ისეთი რეკურსიული ფუნქცია* f*, რომ ყოველი* x *ისთვის* ω*-დან*

$$x \in A \iff W_{f(x)} \subseteq B$$

განსაზღვრება 2

W_u *არის რ.გ. სიმრავლე, რომლის გეოდელის ინდექსი არის* u.

Q_1– დაყვანადობა

Q_1 დაყვანადობაში მოთხოვნილია, რომ $W_{f(x)}$-ების წყვილ წყვილად თანაუკვეთობა.

განსაზღვრება 3

A არის Q_1-დაყვანადი B-ზე ($A \leq_{Q_1} B$) თუ არსებობს ისეთი რეკურსიული f ფუნქცია, რომ ყოველი x, y-ისთვის:

(1) $x \in A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B$

(2) $x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset$

$Q_{1,N}$– დაყვანადობა [1, ბულიტკო]

$Q_{1,N}$ არის Q_1 დაყვანადობას დამატებული ერთი პირობა, რომ $W_{f(x)}$-ის გაერთიანება რეკურსიულია.

განსაზღვრება 4

A არის $\leq_{Q_{1,N}}$-დაყვანადი B-ზე ($A \leq_{Q_{1,N}} B$) თუ არსებობს ისეთი რეკურსიული f ფუნქცია, რომ ყოველი x, y-ისთვის:

(1) $x \in A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B$

(2) $x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset$

(3) $\bigcup_{x \in N} W_{f(x)} = N$

კვაზი დაყვანადობები და მათი კავშირები

$Q-, Q_1-, Q_{1,N}-$ ხარისხებზე ბუნებრივად ინდუცირდება ნაწილობრივი დალაგების მიმართება. საზოგადოდ $Q-, Q_1-, Q_{1,N}-$ მიმართებები განსხვავდება და ერთმანეთით ვერ ჩანაცვლდება. რა თქმა უნდა, გვაქვს შემდეგი ტრივიალური ჩანაცვლება

$$A \leq_{Q_{1,N}} B \Longrightarrow A \leq_{Q_1} B \Longrightarrow A \leq_Q B \Longrightarrow A \leq_T B$$

თეორემები, რომლებიც აკავშირებს კვაზი დაყვანადობებს ერთმანეთთან

თეორემა 5

(ჯილ და მორის) *რ.გ. A სიმრავლე Q-სრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ Q_1 სრულია.*

$$Q \text{ სრული} \iff Q_1 \text{ სრული}$$

კვაზი დაყვანადობები, და მათი კავშირები

თეორემა 6

(ომანაძე და ჩიტაია) *ვთქვათ A არის Σ_2^0 სიმრავლე B რ.გ. და*

$$A \leq_Q B$$

მაშინ, არსებობს ისეთი რ.გ. სიმრავლე C, რომ

$$A \leq_{Q_{1,N}} C \leq_Q B.$$

საზოგადოდ, და ამ თეორემაშიც $Q-$ ვერ ჩანაცვლდება $Q_{1,N}-$ით. ვთქვათ A ძლიერად ჰიპერ-მარტივია, B, C არარეკურსიული რ.გ. სიმრავლე და $A = B \cup C$ და $B \cap C = \emptyset$. (ომანაძე [1992], წინადადება 1) გვექნება, რომ

$$B \leq_Q A, \quad C \leq_Q A$$

მაგრამ, ზემო მოყვანილი თეორემით, იარსებებს D ისეთი, რომ $B \leq_{Q_{1,N}} D \leq_Q A$, მაგრამ $D \not\leq_{Q_{1,N}} A$ $\square$

მაქსიმალური და r-მაქსიმალური სიმრავლე

განსაზღვრება 7

რ.გ. M სიმრავლეს ეწოდება **მაქსიმალური** *თუ $\overline{M}$* **კოჰესიურია**

განსაზღვრება 8

A სიმრავლე **კოჰესიურია** *თუ* **არ** *არსებობს რ.გ. W სიმრავლე, ისეთი რომ*

$$|W \cap A| = \left|\overline{W} \cap A\right| = \infty$$

განსაზღვრება 9

*რ.გ. M სიმრავლეს ეწოდება r-***მაქსიმალური** *თუ $\overline{M}$ r-***კოჰესიურია**

განსაზღვრება 10

*A სიმრავლე r-***კოჰესიურია** *თუ* **არ** *არსებობს რეკურსიული R სიმრავლე, ისეთი რომ*

$$|R \cap A| = \left|\overline{R} \cap A\right| = \infty$$

რა თქმა უნდა, მაქსიმალური სიმრავლე ქვეკლასია r-მაქსიმალურის.

$$\text{Max} \subset \text{R-Max}$$

მაქსიმალური და r-მაქსიმალური სიმრავლის კვაზი ხარისხებში შემავალი m-ხარისხები

თეორემა 11

M მაქსიმალური სიმრავლის Q ხარიხებში შემავალ m ხარისხებს გააჩნიათ უმცირესი ელემენტი: M-ის $m-$ ხარისხი. ანუ, თუ B ნებისმიერი სიმრავლეა, მაშინ

$$M \equiv_Q B \Longrightarrow M \leq_m B$$

თეორემა 12

M r-მაქსიმალური სიმრავლის $Q_{1,N}$ ხარიხებში შემავალ m ხარისხებს გააჩნიათ უმცირესი ელემენტი: M-ის $m-$ ხარისხი. ანუ, თუ B ნებისმიერი სიმრავლეა, მაშინ

$$M \equiv_{Q_{1,N}} B \Longrightarrow M \leq_m B$$

მაქსიმალური სიმრავლის მთავარი ქვესიმრავლეები და Q_1 დაყვანადობა

განსაზღვრება 13

რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეს $A \subseteq B$ *ეწოდება მთავარი თუ* $B \setminus A$ *უსასრულოა და ყველა რეკურსიულად გადათვლადი* W *სიმრავლე*

$$\overline{B} \subseteq^* W \Rightarrow \overline{A} \subseteq^* W$$

ლახლანმა[1968] აჩვენა რომ ყველა არა-რეკურსიულ რეკურსიულად გადათვლას სიმრავლეს აქვს მთავარი ქვესიმრავლე

ჯოინ ოპერატორი

$$A \oplus B = \{2x : x \in A\} \cup \{2x + 1 : x \in B\}$$

ჩვენ ვაჩვენეთ შემდეგი თეორემა

თუ M მაქსიმალური სიმრავლეა, A მისი მთავარი ქვესიმრავლე და B, C ნებისმიერი სიმრავლეებია და

$$B \leq_{Q_1} M \setminus A, \quad C \leq_{Q_1} M \setminus A, \quad M \setminus A \leq_{Q_1} B \oplus C$$

მაშინ

$$M \setminus A \leq_m B \quad \text{ან} \quad M \setminus A \leq_m C$$

შედეგი

მივიღეთ, უკვე არსებული თეორემის მტკიცება.

შედეგი

(ომანაძე და ჩიტაია) M მაქსიმალურია, A მთავარი ქვესიმრავლეა M-ის, B ნებისმიერი სიმრავლეა და $M \backslash A \equiv_{Q_1} B$ მაშინ $M \backslash A \leq_m B$

დამტკიცება.

ვინაიდან $M \setminus A \equiv_{Q_1} B$, გვექნება რომ:

$$B \leq_{Q_1} M \backslash A \leq_{Q_1} B \leq_{Q_1} B \oplus B$$

მაშასადამე, თეორემის თანახმად

$$M \setminus A \leq_m B$$

$\square$

ლიტერატურა I

[1] Valeriy K. Bulitko. "ON WAYS OF CHARACTERIZING COMPLETE SETS". **in***Mathematics of The Ussr-izvestiya*: 38 (1992), **pages** 225–249. URL: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:120721623.

[2] Alonzo Church. "An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory". **in***American Journal of Mathematics*: 58.2 (1936), **pages** 345–363. ISSN: 00029327, 10806377. URL: http://www.jstor.org/stable/2371045 (**urlseen** 14/07/2024).

[3] B. Jack Copeland. "The Church-Turing Thesis". **in***The Stanford Encyclopedia of Philosophy*: (2023). URL: https://plato.stanford.edu/entries/church-turing/.

[4] R. Downey, G. LaForte **and** A. Nies. "Computably enumerable sets and quasi-reducibility". **in***Annals of Pure and Applied Logic*: 95.1 (1998), **pages** 1–35. ISSN: 0168-0072.

[5] S. C. Kleene. "General Recursive Functions of Natural Numbers". **in***Mathematische Annalen*: 112.1 (1936), **pages** 727–742. DOI: 10.1007/BF01565439.

[6] S. S. Marchenkov. "One class of partial sets". **in***Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*: 20.4 (1976), **pages** 823–825. ISSN: 1573-8876.

[7] R. Sh. Omanadze. "Upper semilattice of recursively enumerable Q-degrees". **in***Algebra and Logic*: 23.2 (1985). English translation, **pages** 124–130. ISSN: 1573-8302.

[8] Emil L. Post. "Finite Combinatory Processes-Formulation 1". **in***The Journal of Symbolic Logic*: 1.3 (1936), **pages** 103–105. URL: http://www.jstor.org/stable/2269031 (**urlseen** 12/07/2024).

[9] Emil L. Post. “Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems”. **in***Bulletin of the American Mathematical Society*: 50 (1944), **pages** 284–316.

[10] R. I. Soare. *Recursively Enumerable Sets and Degrees. A Study of Computable Functions and Computably Generated Sets, Perspectives in Mathematical Logic*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[11] A. M. Turing. “On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem”. **in***Proceedings of the London Mathematical Society*: s2-42.1 (1937), **pages** 230–265. DOI: https://doi.org/10.1112/plms/s2-42.1.230. eprint: https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1112/plms/s2-42.1.230. URL: https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/plms/s2-42.1.230.