

# Dispense di Fisica I

Satnam Singh <sup>\*</sup>  
Studente ad Ingegneria Fisica

Ultima revisione: September 11, 2024

Per eventuali errori segnalare a: [satnamsinghprojects@gmail.com](mailto:satnamsinghprojects@gmail.com)

---

<sup>\*</sup>Sustained by SV

# Indice

<b>1</b>	<b>Premesse</b>	<b>9</b>
1.1	Argomenti trattati . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Osservazioni preliminari</b>	<b>10</b>
2.1	Misure e gestione delle incertezze . . . . .	10
2.1.1	Incertezza nel caso di misure ripetute . . . . .	11
2.1.2	Approfondimento sulla distribuzione normale . . . . .	12
2.1.3	Incertezza nel caso di misure indirette . . . . .	13
2.2	Alcune definizioni . . . . .	13
2.3	Grandezze legate a interazioni . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Derivate e Integrali</b>	<b>16</b>
3.1	Derivate . . . . .	16
3.2	Integrali . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Vettori e sistemi di riferimento</b>	<b>18</b>
4.1	I vettori . . . . .	18
4.1.1	Prodotto scalare . . . . .	19
4.1.2	Prodotto vettoriale . . . . .	20
4.2	Coordinate cartesiane . . . . .	22
4.3	Coordinate polari . . . . .	22
4.3.1	Conversione da coordinate polari a cartesiane . . . . .	23
4.4	Coordinate intrinseche . . . . .	23
4.5	Derivata di un vettore . . . . .	24
4.5.1	Derivata di un versore . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Cinematica</b>	<b>26</b>
5.1	Le prime definizioni . . . . .	26
5.2	Equazioni del moto . . . . .	27
5.2.1	Velocità . . . . .	27
5.2.2	Accelerazione . . . . .	28
5.3	Equazioni del moto in coordinate cartesiane . . . . .	30
5.3.1	Velocità in coordinate cartesiane . . . . .	30
5.3.2	Accelerazione in coordinate cartesiane . . . . .	30
5.4	Equazioni del moto in coordinate polari . . . . .	31
5.4.1	Velocità radiale e trasversa . . . . .	31
5.4.2	Accelerazione radiale e trasversa . . . . .	32
5.5	Equazioni del moto in coordinate intrinseche . . . . .	33
5.5.1	Velocità tangenziale . . . . .	33
5.5.2	Accelerazione tangenziale e normale . . . . .	34
5.5.3	Raggio osculatore . . . . .	35
5.6	Moto rettilineo . . . . .	36
5.6.1	Moto rettilineo uniforme . . . . .	36
5.6.2	Legge oraria del moto rettilineo uniforme . . . . .	36
5.6.3	Velocità nel moto rettilineo uniforme . . . . .	37
5.6.4	Moto rettilineo uniformemente accelerato . . . . .	37
5.6.5	Legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato . . . . .	37
5.6.6	Velocità nel moto rettilineo uniformemente accelerato . . . . .	37
5.6.7	Posizione nel moto rettilineo uniformemente accelerato . . . . .	38

5.6.8	Equazione della velocità in funzione dello spazio . . . . .	38
5.7	Moto parabolico . . . . .	40
5.7.1	Equazioni del Moto Parabolico . . . . .	40
5.7.2	Accelerazione . . . . .	40
5.7.3	Velocità . . . . .	40
5.7.4	Posizione . . . . .	41
5.7.5	Gittata . . . . .	42
5.7.6	Altezza Massima . . . . .	43
5.7.7	Tempo di Volo . . . . .	43
5.8	Moto Angolare . . . . .	45
5.8.1	Posizione Angolare . . . . .	45
5.8.2	Velocità Angolare . . . . .	45
5.8.3	Accelerazione Angolare . . . . .	45
5.9	Moto circolare . . . . .	47
5.9.1	Moto Circolare Uniforme . . . . .	47
5.9.2	Parametri del Moto Circolare . . . . .	47
5.9.3	Periodo e Frequenza . . . . .	47
5.9.4	Velocità Angolare e Lineare . . . . .	47
5.9.5	Accelerazione Centripeta . . . . .	47
5.9.6	Moto Circolare Uniformemente Accelerato . . . . .	48
5.9.7	Velocità e Accelerazione . . . . .	48
5.10	Approfondimento: caduta di un grave in aria . . . . .	49
5.10.1	Equazioni del Moto . . . . .	49
5.10.2	Velocità Limite . . . . .	49
5.10.3	Equazione della Velocità . . . . .	49
5.10.4	Equazione della Posizione . . . . .	50
5.11	Approfondimento: moto armonico . . . . .	52
5.11.1	Introduzione . . . . .	52
5.11.2	Equazione del Moto per un Oscillatore Armonico Smorzato . . . .	52
5.11.3	Oscillatore armonico smorzato . . . . .	53
5.11.4	Oscillatore armonico sovrasmorzato . . . . .	54
5.11.5	Oscillatore criticamente smorzato . . . . .	55
5.11.6	Osservazioni . . . . .	55
5.12	Alcuni esempi . . . . .	56
<b>6</b>	<b>Dinamica</b>	<b>58</b>
6.1	I Principi di Newton . . . . .	58
6.1.1	I Principio di Newton . . . . .	58
6.1.2	II Principio di Newton . . . . .	58
6.1.3	III Principio di Newton . . . . .	59
6.2	Le Forze . . . . .	59
6.2.1	Forza Peso . . . . .	60
6.2.2	Forza Normale . . . . .	60
6.2.3	Attrito Statico . . . . .	61
6.2.4	Attrito Dinamico . . . . .	62
6.2.5	Forza Centripeta . . . . .	62
6.2.6	Tensione . . . . .	63
6.2.7	Forze Elastiche . . . . .	64
6.3	Quantità di Moto . . . . .	65

6.4	Impulso . . . . .	66
6.5	Teorema dell'impulso . . . . .	68
6.5.1	Enunciato . . . . .	68
6.5.2	Dimostrazione . . . . .	68
6.6	Teorema della conservazione della quantità di moto . . . . .	70
6.6.1	Enunciato . . . . .	70
6.6.2	Dimostrazione . . . . .	70
6.6.3	Applicazioni della Conservazione della Quantità di Moto . . . . .	70
6.7	Pendolo Semplice . . . . .	71
<b>7</b>	<b>Lavoro e Energie</b>	<b>72</b>
7.1	Lavoro . . . . .	72
7.2	Energia Cinetica . . . . .	73
7.2.1	Cos'è . . . . .	73
7.2.2	Come si ricava . . . . .	73
7.2.3	Energia Cinetica in Sistemi a Più Corpi . . . . .	74
7.3	Teorema dell'Energia-Lavoro . . . . .	75
7.3.1	Enunciato . . . . .	75
7.3.2	Dimostrazione . . . . .	75
7.4	Potenza . . . . .	76
7.5	Lavoro della Forza Peso . . . . .	76
7.6	Lavoro delle Forze Elastiche . . . . .	77
7.7	Lavoro della Forza d'Attrito dinamico . . . . .	78
7.8	Lavoro delle forze ortogonali allo spostamento . . . . .	78
7.9	Forze Conservative . . . . .	79
7.9.1	Approfondimento sulle forze conservative . . . . .	80
7.10	Energia Potenziale . . . . .	82
7.10.1	Energia Potenziale - Forza Peso . . . . .	83
7.10.2	Energia Potenziale - Forze Elastiche . . . . .	84
7.10.3	Superfici Equipotenziiali . . . . .	84
7.11	Approfondimento: Relazione tra $dE$ e $dF$ . . . . .	86
7.12	Teorema della conservazione dell'energia . . . . .	87
7.12.1	Definizioni preliminari . . . . .	87
7.12.2	Enunciato . . . . .	87
7.12.3	Dimostrazione . . . . .	87
7.12.4	Implicazioni e applicazioni . . . . .	88
7.12.5	Montagne russe . . . . .	88
7.13	Approfondimento: Funzioni Additive . . . . .	89
<b>8</b>	<b>Moti relativi</b>	<b>90</b>
8.1	Definizioni preliminari . . . . .	90
8.2	Notazione e Convenzioni . . . . .	90
8.3	Trasformazioni di Coordinate . . . . .	91
8.4	Approfondimento: la derivata di un versore rotante . . . . .	92
8.4.1	Definizione . . . . .	92
8.4.2	Visualizzazione Geometrica . . . . .	92
8.4.3	Dimostrazione . . . . .	92
8.4.4	Applicazione ai Sistemi di Riferimento Rotanti . . . . .	93
8.5	Teorema delle velocità relative . . . . .	94

8.5.1	Enunciato . . . . .	94
8.6	Dimostrazione . . . . .	94
8.6.1	Osservazioni . . . . .	95
8.6.2	Casi Particolari . . . . .	95
8.6.3	Esempio . . . . .	96
8.7	Teorema delle accelerazioni relative . . . . .	97
8.7.1	Enunciato . . . . .	97
8.7.2	Dimostrazione . . . . .	97
8.7.3	Osservazioni . . . . .	98
8.7.4	Casi Particolari . . . . .	98
8.7.5	Esempio . . . . .	99
8.8	Esempi Avanzati . . . . .	100
8.8.1	Effetto Coriolis sulla Terra . . . . .	100
8.8.2	Deviazione di un Proiettile . . . . .	100
8.8.3	Un sistema a due braccia . . . . .	100
<b>9</b>	<b>Momenti</b>	<b>102</b>
9.1	Momento angolare . . . . .	102
9.1.1	Singola particella . . . . .	102
9.1.2	Sistema di punti . . . . .	102
9.1.3	Passaggio da un polo a un altro . . . . .	103
9.2	Momento delle forze . . . . .	104
9.2.1	Singola particella . . . . .	104
9.2.2	Sistema di punti . . . . .	104
9.3	Teorema del momento angolare per polo fisso . . . . .	105
9.3.1	Enunciato . . . . .	105
9.3.2	Dimostrazione . . . . .	105
9.4	Teorema del momento angolare per polo mobile . . . . .	106
9.4.1	Enunciato . . . . .	106
9.4.2	Dimostrazione . . . . .	106
9.5	Momenti in coordinate polari . . . . .	107
9.5.1	Momento angolare . . . . .	107
9.5.2	Momento delle forze . . . . .	108
9.6	Teorema del momento dell'impulso . . . . .	110
9.6.1	Enunciato . . . . .	110
9.6.2	Dimostrazione . . . . .	110
9.7	Lavori e energie in funzioni dei momenti . . . . .	111
9.7.1	Lavoro in coordinate polari . . . . .	111
9.7.2	Energia cinetica rotazionale . . . . .	111
9.7.3	Potenza in coordinate polari . . . . .	112
<b>10</b>	<b>Dinamica del sistema di punti</b>	<b>113</b>
10.1	Definizioni preliminari . . . . .	113
10.1.1	Insieme di punti . . . . .	113
10.1.2	Considerazioni . . . . .	113
10.1.3	Centro di massa . . . . .	114
10.2	Proprietà dei sistemi di punti . . . . .	115
10.2.1	Posizione del CM e del sistema . . . . .	115
10.2.2	Velocità del CM e del sistema . . . . .	116

10.2.3	Accelerazione del CM e del sistema . . . . .	116
10.2.4	Quantità di moto del CM e del sistema . . . . .	116
10.2.5	Momenti angolare del CM e del sistema . . . . .	117
10.2.6	Energia cinetica del CM e del sistema . . . . .	117
10.2.7	Osservazioni . . . . .	118
10.3	Sistema del laboratorio . . . . .	118
10.3.1	Velocità . . . . .	119
10.3.2	Accelerazioni . . . . .	119
10.3.3	Centro di massa nell'origine . . . . .	119
10.4	I Teorema di König . . . . .	120
10.4.1	Enunciato . . . . .	120
10.4.2	Dimostrazione . . . . .	120
10.5	Osservazioni . . . . .	121
10.6	II Teorema di König . . . . .	122
10.6.1	Enunciato . . . . .	122
10.6.2	Dimostrazione . . . . .	122
10.6.3	Osservazioni . . . . .	124
10.7	III Teorema di König . . . . .	125
10.8	Primo Teorema Cardinale della Dinamica . . . . .	126
10.8.1	Enunciato . . . . .	126
10.8.2	Dimostrazione . . . . .	126
10.9	Osservazioni . . . . .	128
10.10	II equazione cardinale . . . . .	129
10.10.1	Enunciato . . . . .	129
10.10.2	Dimostrazione . . . . .	129
10.10.3	Dimostrazione del momento nullo delle forze interne . . . . .	130
10.11	Lavoro delle Forze in un Sistema di Particelle . . . . .	131
10.11.1	Equazioni Fondamentali del Lavoro . . . . .	131
10.11.2	Lavoro delle Forze Interne . . . . .	131
10.11.3	Spostamento Relativo e sue Implicazioni . . . . .	132
10.11.4	Caso Speciale: Corpo Rigido . . . . .	132
<b>11</b>	<b>Urti</b>	<b>133</b>
11.1	Urto elastico . . . . .	133
11.2	Urto anelastico . . . . .	133
11.3	Urto vincolato . . . . .	134
<b>12</b>	<b>Corpo rigido</b>	<b>135</b>
12.0.1	Gradi di libertà . . . . .	135
12.0.2	Integrale di volume . . . . .	135
12.1	Massa di un corpo rigido . . . . .	136
12.2	Proprietà di un corpo rigido . . . . .	137
12.2.1	Centro di massa . . . . .	137
12.2.2	Velocità . . . . .	137
12.2.3	Accelerazione . . . . .	138
12.3	Inerzia . . . . .	138
12.4	Sistema del laboratorio per un corpo rigido . . . . .	139
12.5	Moto di traslazione . . . . .	140
12.6	Moto di rotazione . . . . .	141

12.7	Moto di rototraslazione . . . . .	142
12.7.1	Scelta ottimale per l'asse di rotazione . . . . .	144
12.8	Momento angolare in pura rotazione . . . . .	144
12.8.1	Momento angolare parallelo . . . . .	145
12.8.2	Momento angolare perpendicolare . . . . .	146
12.9	I Teoremi di Konig applicati al corpo rigido . . . . .	147
12.9.1	Dal sistema di punti al corpo rigido . . . . .	147
12.10	Teorema di Huygens-Steiner . . . . .	148
12.10.1	Enunciato . . . . .	148
12.10.2	Dimostrazione . . . . .	148
12.11	Moto di un pendolo composto . . . . .	150
12.11.1	Equazione del moto . . . . .	150
12.12	Moto di puro rotolamento . . . . .	152
12.13	Approfondimento: Passaggio di coordinate a livello differenziale . . . . .	153
12.13.1	Elemento di volume in coordinate cartesiane . . . . .	153
12.13.2	Passaggio alle coordinate polari . . . . .	153
12.13.3	Passaggio alle coordinate cilindriche . . . . .	154
12.13.4	Passaggio alle coordinate sferiche . . . . .	154
12.13.5	Applicazione al calcolo dei momenti . . . . .	155
12.14	Approfondimento: Calcolo dei principali momenti di inerzia . . . . .	156
12.14.1	Disco . . . . .	156
12.14.2	Anello . . . . .	157
12.14.3	Sfera . . . . .	157
12.14.4	Asta . . . . .	158
12.14.5	Asta rettangolare . . . . .	159
<b>13</b>	<b>Termodinamica</b>	<b>160</b>
13.1	Introduzione . . . . .	160
13.2	Sistema termodinamico . . . . .	160
13.3	Pareti . . . . .	161
13.4	Ambiente . . . . .	161
13.5	Coordinate macroscopiche . . . . .	162
13.5.1	Pressione . . . . .	162
13.5.2	Temperatura . . . . .	163
13.5.3	Volume . . . . .	163
13.6	Equilibrio termodinamico . . . . .	163
13.6.1	Equilibrio interno . . . . .	163
13.6.2	Equilibrio esterno . . . . .	164
13.7	Legge dei gas perfetti . . . . .	165
13.8	Diagramma di Clapeyron . . . . .	165
13.9	Scambi di Lavoro e Calore . . . . .	166
13.10	Lavoro . . . . .	166
13.10.1	Rappresentazione grafica . . . . .	167
13.11	Calore . . . . .	168
13.11.1	Unità di misura . . . . .	168
13.11.2	Calore specifico . . . . .	168
13.11.3	Capacità termica . . . . .	168
13.11.4	Calore latente . . . . .	169
13.11.5	Equazione calorimetrica . . . . .	169

13.11.6 Convenzione dei segni . . . . .	169
13.12 Trasformazioni termodinamiche . . . . .	170
13.13 Trasformazioni irreversibili . . . . .	170
13.14 Trasformazioni reversibili . . . . .	170
13.15 Alcune trasformazioni termodinamiche . . . . .	173
13.15.1 Trasformazioni isocore . . . . .	173
13.15.2 Trasformazioni isobare . . . . .	175
13.15.3 Trasformazioni isoterme . . . . .	177
13.15.4 Trasformazioni Adiabatiche . . . . .	179
13.15.5 Trasformazioni cicliche . . . . .	182
13.16 Lavoro di alcune trasformazioni . . . . .	183
13.17 Approfondimento: Calore specifico dei gas . . . . .	184
13.17.1 Calore specifico a volume costante e a pressione costante . . . . .	184
13.17.2 Calore specifico molare . . . . .	184
13.18 Approfondimento: Teorema di equipartizione dell'energia . . . . .	185
13.19 Equilibrio termico tra due sostanze . . . . .	185
13.20 Trasmissione del calore . . . . .	186
13.20.1 Convezione . . . . .	186
13.20.2 Irraggiamento . . . . .	186
13.20.3 Conduzione . . . . .	187
13.21 Il Principio della Termodinamica . . . . .	188
13.21.1 Conseguenze . . . . .	188
13.22 Esperimento di Joule: Relazione tra calorie e joule . . . . .	189
13.23 Relazione di Mayer . . . . .	190
13.23.1 Derivazione della relazione di Mayer . . . . .	190
13.23.2 Riscaldamento a pressione costante . . . . .	190
13.23.3 Dimostrazione alternativa della relazione di Mayer . . . . .	191
13.23.4 Conseguenze . . . . .	191
13.24 Trasformazioni adiabatiche reversibili . . . . .	192
<b>14 Fluidodinamica</b>	<b>193</b>
<b>15 Gravitazione</b>	<b>194</b>
<b>16 Flusso</b>	<b>195</b>
16.1 Definizione Matematica . . . . .	195
16.2 Interpretazione Fisica . . . . .	195
16.3 Il Teorema di Gauss e l'Angolo Solido . . . . .	196
16.3.1 Enunciato . . . . .	196
16.3.2 Definizione di Angolo Solido . . . . .	196
16.3.3 Dimostrazione Semplificata . . . . .	196
16.4 Il Flusso in Fluidodinamica . . . . .	197
16.4.1 Equazione di Continuità . . . . .	197
16.4.2 Flusso in un Tubo di Flusso . . . . .	197
16.5 Il Flusso in Gravitazione . . . . .	198
16.6 Osservazioni . . . . .	198



# 1 Premesse

Queste dispense servono come supporto didattico per il corso di Fisica I e coprono in modo esaustivo i principali argomenti del corso di fisica. Consiglio tuttavia di fare uso dei testi di riferimento e alle lezioni del corso per una comprensione completa e dettagliata degli argomenti trattati.

A seguito una breve panoramica degli argomenti trattati.

## 1.1 Argomenti trattati

1. **Incertezze, Sistemi di riferimento e Vettori:** Le incertezze e i vari modi per determinarle, i possibili sistemi di riferimento; breve e funzionale discussione dei principali strumenti usati in fisica, in minimo essenziale per poter comprendere chiaramente i concetti a venire.
2. **Cinematica e Dinamica:** Il problema della descrizione del moto, i concetti di velocità e accelerazione le leggi di Newton e i vari metodi di risoluzione dei problemi di dinamica.
3. **Energia e Lavoro:** I concetti di energia e lavoro. i vari tipi di energia (cinetica, potenziale, ecc.) e il principio di conservazione dell'energia, il lavoro compiuto da una forza e il teorema dell'energia cinetica.
4. **Proprietà del corpo rigido:** Proprietà di un corpo rigido, dai concetti traslazione e rotazione pura per arrivare a illustrare i moti di un corpo rigido. Introduciamo anche i teoremi di Steyner e di Konig.
5. **Gravitazione e fluidodinamica:** La gravità e la sua influenza sui corpi, il moto dei pianeti nel sistema solare e la caduta degli oggetti sulla Terra, come la forza di gravità determina il movimento e le traiettorie. Il comportamento dei fluidi e come essi interagiscono con le forze e l'ambiente circostante, alcune delle equazioni fondamentali della fluidodinamica come l'equazione di continuità e di Bernoulli.
6. **Termodinamica:** Le fondamenta della termodinamica, il primo e il secondo principio. Il concetto di calore, lavoro termodinamico e i processi termodinamici.

## 2 Osservazioni preliminari

Una prima definizione della fisica può essere:

Fisica

Lo studio delle **grandezze misurabili** e delle loro **interazioni**.

1. Una **grandezza** rappresenta la proprietà di un oggetto o di un'interazione, a livello matematico si indica con una variabile.
2. Il termine **misurabile** mette in risalto la natura sperimentale della fisica, esprimendo la necessità di effettuare delle misurazioni (ripetibili e confrontabili con un campione) per validare un'ipotesi.
3. Le **interazioni** riguardano l'aspetto più teorico della fisica, sono la *definizione di relazioni matematiche fra grandezze diverse*.

La fisica dunque non studia l'oggetto fisico in sé, ma le sue proprietà; tale studio avviene secondo il metodo definito da Galileo nel Saggiatore (1623), dove lo scienziato italiano evidenzia la necessità di una componente induttiva e una deduttiva nel processo di convalidamento di un'ipotesi scientifica.

### 2.1 Misure e gestione delle incertezze

Il processo di misurazione è necessario per *quantificare una grandezza e avviene per confronto con un campione universalmente accettato*; una misura pertanto necessita di un'**unità di misura**, un **significato fisico** e un **intervallo di variabilità**, quest ultimo generalmente indicato sotto il nome di incertezza.

A causa delle numerose difficoltà nel processo di misurazioni, siano queste di natura strumentale, statistica e/o sistematica, una misura avrà un margine di incertezza rispetto al *valor vero*. Chiameremo d'ora in poi  $x_m$  il valore misurato,  $\delta$  il valore associato all'incertezza e  $\tilde{x}$  il valor vero, ovvero il valore esatto di una determinata proprietà, si avrà che:

$$x_m \neq \tilde{x} \quad \text{più precisamente} \quad x_m - \delta < \tilde{x} < x_m + \delta \quad (1)$$

Sebbene più  $\delta$  sia grande più la probabilità che l'intervallo associato a  $x_m$  contenga  $\tilde{x}$ , bisogna stare attenti a scegliere il più piccolo valore di  $\delta$  possibile, in modo tale da poter effettuare misurazioni utili; a tal proposito viene in nostro soccorso la statistica, che mette a nostra disposizione diversi strumenti per permetterci di calcolare l'intervallo di variabilità ottimale, a seconda del tipo di misurazione.

È molto utile distinguere le misure in due tipologie:

1. **Misure dirette**: misura ottenuta tramite confronto *diretto* con un campione di riferimento;
2. **Misure indirette**: misura derivata da una legge fisica.

Adottando questa distinzione la statistica, più precisamente la **teoria dell'errore** mette a nostra disposizione due metodologie differenti per la derivazione della  $\delta$ .

### 2.1.1 Incertezza nel caso di misure ripetute

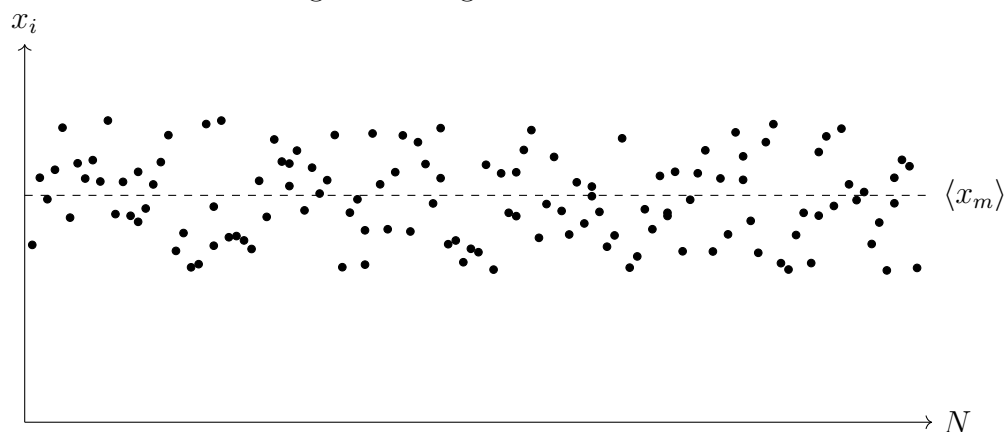
Nel caso delle misure dirette si osserva che effettuare più volte misure della stessa grandezza porta a ottenere risultati spesso differenti.

Le misure ripetute si riferiscono all'atto di misurare la stessa quantità più volte per ottenere una serie di dati. Questo viene fatto per migliorare la precisione e l'accuratezza delle misurazioni, riducendo l'effetto degli errori casuali.

Supponendo ora di effettuare  $N$  misure della stessa proprietà otterremo  $x_N$  valori misurati, se effettuiamo la media dei valori misurati (indicata con  $\langle x \rangle$ ) otteniamo che ad  $N \rightarrow +\infty$  la media dei valori misurati tenderà al valor vero, ovvero:

$$\text{per } N \rightarrow +\infty \text{ abbiamo che } \langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \tilde{x} \quad (2)$$

Se rappresentassimo sull'asse y ciascuna misurazione e sull'asse x il numero di misurazioni effettuate otterremmo un grafico del genere:



Per descrivere l'errore strumentale a seconda del numero di misurazioni conviene utilizzare la **semidispersione** o la **deviazione standard**.

Sperimentalmente si osserva che per un numero di misurazioni  $N$

- Per  $N \leq 20$  la semidispersione permette di approssimare l'incertezza strumentale come la *semidifferenza tra il valore massimo e il valore minimo*

$$\sigma_x = \frac{x_{max} - x_{min}}{2} \quad (3)$$

- Per  $N > 20$  la deviazione standard permette di approssimare l'incertezza strumentale come la radice della somma degli scarti quadratici diviso  $N - 1$ , la varianza è la deviazione standard al quadrato.

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \langle x_m \rangle)^2}{N - 1}} \quad (4)$$

Quanto detto sopra non significa che non si possa calcolare la deviazione standard per un numero minore di 20 misurazioni, soltanto che empiricamente si osserva che è poco vantaggioso in termini di risultati ottenuti.

### 2.1.2 Approfondimento sulla distribuzione normale

Per un grande numero di misurazioni (più precisamente per  $N \rightarrow \infty$ ) indipendenti tra loro, *Il Teorema del Limite Centrale* stabilisce che, sotto certe condizioni (in questo caso verificate), la distribuzione della somma normalizzata di variabili casuali indipendenti tende a una distribuzione normale, che è descritta dall'equazione di Gauss.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (5)$$

Dove:

- $\sigma$  è la deviazione standard che abbiamo osservato prima, con l'eccezione al denominatore compare il termine  $N$  e non  $N - 1$ :

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \langle x_m \rangle)^2}{N}} \quad (6)$$

- $\mu$  non è altro che la media aritmetica:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (7)$$

Intuitivamente la deviazione standard rappresenta l'ampiezza della distribuzione normale:

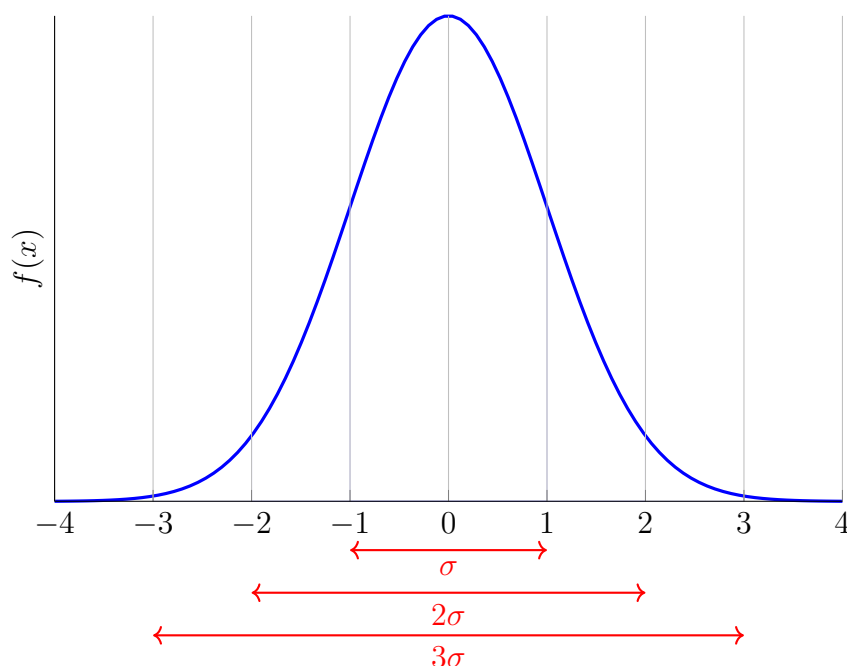


Figure 1: Distribuzione normale e deviazioni standard

Le diverse ampiezze della deviazione standard garantiscono diversi gradi di probabilità di trovare il  $\tilde{x}$  nell'intervallo sotteso da  $\langle x_m \rangle \pm \sigma_x$ , in dettaglio:

Deviazione usata	Probabilità di contenere $\tilde{x}$
$\langle x_m \rangle \pm \sigma_x$	68.27%
$\langle x_m \rangle \pm 2\sigma_x$	95.45%
$\langle x_m \rangle \pm 3\sigma_x$	99.73%

### 2.1.3 Incertezza nel caso di misure indirette

Nel caso di misure ricavate indirettamente, tramite 2 o più grandezze legate tramite una funzione del tipo  $x_m = f(x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$ , dove  $x_1, x_2 \dots x_n$  sono le misurazioni tra loro **indipendenti** è possibile esprimere l'incertezza di  $x_m$  come:

- **Incertezza massima:** Usa semplicemente l'errore più grande tra le fonti di incertezza, senza calcolare una combinazione quadratica.

$$\delta_f = \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta_{x_i} \right| \quad (8)$$

- **Somma in quadratura:** come suggerisce il nome è la combinazione delle incertezze in modo quadratico, assumendo indipendenza tra le fonti di errore: L'espressione in forma contratta diventa:

$$\delta_f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta_{x_i} \right)^2} \quad (9)$$

## 2.2 Alcune definizioni

Di seguito alcune brevi definizioni di alcuni concetti legati alle misure:

### Precisione

La capacità di uno strumento di fornire lo stesso valore ripetendo la misura, si indica con

$$\frac{\delta_x}{x} \quad (10)$$

### Accuratezza

La vicinanza del valore misurato rispetto al valor vero.

### Sensibilità

Il minimo valore misurabile, coincide con l'incertezza strumentale.

### Fondoscala

Il massimo valore misurabile.

### Grandezze omogenea

Grandezze dimensionalmente equivalenti

### Legge fisica

Funzione che lega 2 o più grandezze tra loro.

### Grandezze intensive

Quelle grandezze che non dipendono dalla quantità di sostanza presente nel sistema. In altre parole, il valore di una grandezza intensiva rimane invariato quando il sistema viene diviso in parti più piccole (Temperatura, Pressione, Densità...).

### Grandezze estensive

Le grandezze dipendono dalla quantità di sostanza presente nel sistema. Il valore di una grandezza estensiva cambia quando il sistema viene diviso (Massa, Volume, Entropia...).

### Errore assoluto

La differenza tra il valore misurato e il valore vero di una grandezza, in termini matematici:

$$E_{assoluto} = \Delta x = |x_m - \tilde{x}| \quad (11)$$

### Errore relativo

L'errore relativo è l'errore assoluto diviso per il valore vero della grandezza misurata. Esprime l'errore come una frazione o una percentuale del valore vero, permettendo un confronto tra errori in grandezze di diversa scala, si esprime come:

$$E_{relativo} = \frac{\delta_x}{x} \quad (12)$$

## 2.3 Grandezze legate a interazioni

Le grandezze legate alla proprietà di un corpo se integrate descrivono la variazione della proprietà da un'istante iniziale a uno finale, senza prendere in considerazione il tipo di processo eseguito:

$$\Delta \vec{r} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} d\vec{r} \quad (13)$$

L'esempio mostrato enuncia quanto detto prima: il vettore posizione è una proprietà associata a un corpo,  $d\vec{r}$  rappresenta la *variazione infinitesima del vettore posizione* se integrata descrive la variazione tra la posizione iniziale e quella finale.

### Grandezze legate a interazioni

Le grandezze legate a interazioni tra uno o più corpi (calore, impulso, forze...) dipendono non solo dagli istanti finali e iniziali, ma da tutti gli stati intermedi.

si indica con:

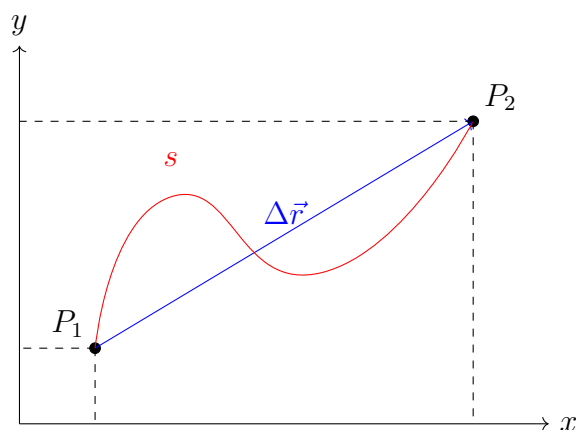
$$s = \int_{\gamma} ds \neq s_b - s_a \quad (14)$$

E si legge come *integrale di linea di ds lungo gamma*, dove s è lo spazio percorso.

Gamma è la curva che indica la traiettoria seguita da una particella; è evidente che per esprimere la totalità dello spazio percorso è impossibile usare esclusivamente le informazioni riguardo l'estremo iniziale e quello finale, è necessario conoscere istante per istante il percorso seguito.

L'integrale di linea non esprime più la variazione di una proprietà di un corpo, pertanto è concettualmente sbagliato parlare di  $\Delta s$ ; analogamente la quantità di  $dQ$ , dove Q è il calore, non indica la variazione infinitesima di calore, ma la variazione infinitesima di calore *calore scambiato*, un corpo non *possiede*  $5J$ , ma puoi assorbirli o cederli, ergo scambiarli, allo stesso modo un corpo non può possedere  $5N$  di forza, ma potrà solo subirli o esercitarli da/su un altro corpo.

Il grafico sottostante permette di cogliere la differenza tra il vettore spostamento e lo spazio percorso e l'importanza di integrare lungo un cammino quando si integra una grandezza legata a delle interazioni.



## 3 Derivate e Integrali

### 3.1 Derivate

La derivata di una funzione  $f(x)$  rispetto alla variabile  $x$  è definita come il **limite del rapporto incrementale**:

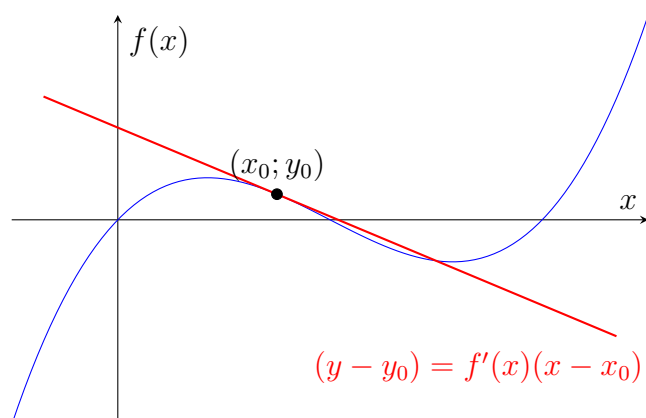
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (15)$$

#### Derivata

La velocità di variazione della funzione  $f(x)$  rispetto a  $x$ .

Geometricamente, la derivata di una funzione in un punto è la pendenza della tangente alla curva in quel punto.

Se tracciamo la funzione  $f(x)$  su un grafico, la derivata  $f'(x)$  valutata in un punto  $(x_0; y_0)$  fornisce pendenza della linea tangente alla curva in quel punto.



### 3.2 Integrali

L'integrale di una funzione  $f(x)$  su un intervallo  $[a, b]$  è definito come il limite di una somma di Riemann:

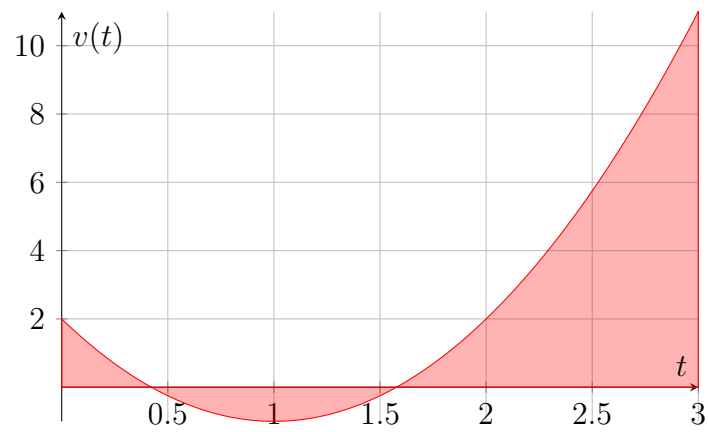
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x \quad (16)$$

Dove  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  e  $x_i^*$  è un punto nell'intervallo  $[x_{i-1}, x_i]$ .

#### Integrale

L'integrale di una funzione rappresenta l'area sottesa dalla funzione stessa, può essere visualizzato come la somma delle aree di infiniti rettangoli sotto la curva.





Le derivate e gli integrali sono strumenti matematici fondamentali in fisica: la derivata ci permette di comprendere come una quantità varia rispetto a un'altra variabile (generalmente il tempo), mentre l'integrale ci aiuta a trovare il totale accumulato di una quantità variabile. .

## 4 Vettori e sistemi di riferimento

### 4.1 I vettori

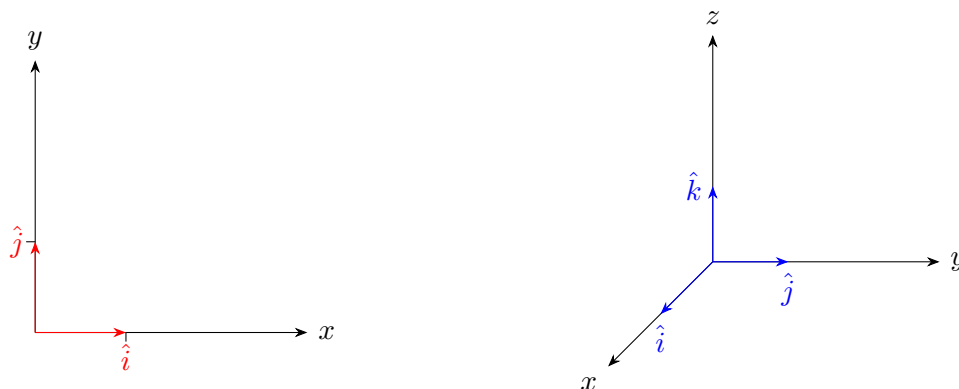
Un vettore è una struttura algebrica<sup>1</sup> (al pari di scalari, matrici e tensori) definita da 3 caratteristiche fondamentali:

1. **Modulo:** la lunghezza euclidea del vettore, facilmente ricavabile con il teorema di Pitagora.
2. **Verso:** l'*orientamento* del vettore. (se va da destra a sinistra o viceversa)
3. **Direzione:** la retta su cui giace il vettore.

Un vettore è un *segmento orientato*: il modulo è invariante rispetto al sistema di riferimento e necessità di un'adeguata **unità di misura** in modo tale che la grandezza abbia un *significato fisico*, tuttavia il verso e la direzione possono essere espressi in modi differenti a seconda del **sistema di riferimento** adottato; senza ovviamente alterarne le caratteristiche.

**I versori** sono dei vettori di modulo 1 generalmente associati agli assi cartesiani  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , vengono spesso indicati con la notazione di Einstein:

$$\hat{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \hat{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$



I versori sono particolarmente utili per la fisica dal momento che permettono di scomporre un generico vettore appartenente a  $\mathbb{R}^n$  con versori associati agli assi del tipo  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_n)$  in:

$$\boldsymbol{\mu} = \mu_1 \hat{x}_1 + \mu_2 \hat{x}_2 + \dots + \mu_3 \hat{x}_3 + \mu_n \hat{x}_n \quad (18)$$

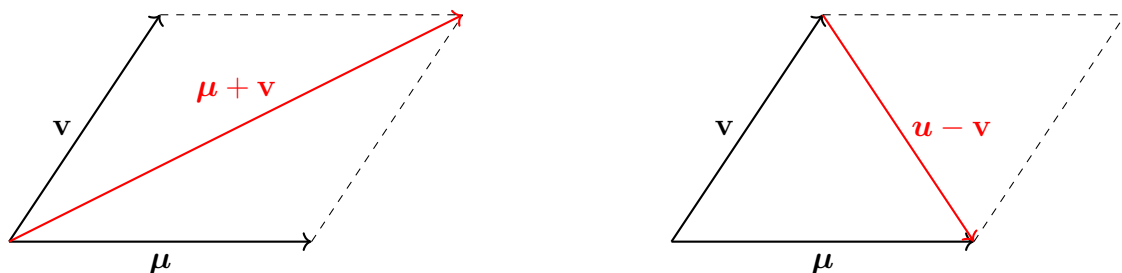
---

<sup>1</sup>Una struttura algebrica è un insieme equipaggiato con una o più operazioni binarie che rispettano determinate proprietà, dove un'operazione binaria su un insieme S è una funzione che prende due elementi di S e restituisce un altro elemento di S.

**La somma e la sottrazione tra vettori** sono delle operazioni binarie interne tra due vettori di dimensione uguale definite in tal modo:

$$\boldsymbol{\mu} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \dots \\ \mu_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 + v_1 \\ \mu_2 + v_2 \\ \mu_3 + v_3 \\ \dots \\ \mu_n + v_n \end{pmatrix} \quad (19)$$

Graficamente possiamo dare loro la seguente interpretazione:



La somma tra vettori genera un vettore collocato nella diagonale "dominante" del parallelogramma generato da  $\boldsymbol{\mu}$  e  $\mathbf{v}$  diretto dall'origine verso l'estremo del parallelogramma; la sottrazione invece genera un vettore collocato nella diagonale minore diretto dalla punta di  $\mathbf{v}$  alla punta di  $\boldsymbol{\mu}$ .

#### 4.1.1 Prodotto scalare

Il prodotto scalare ( $\cdot$  oppure  $\langle ; \rangle$ ) è un'operazione binaria che, dati due vettori  $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$  appartenenti a un insieme  $\mathbb{R}^n$ , associa un numero reale secondo il seguente criterio:

$$\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \mu_i v_i \quad (20)$$

Ovvero:

$$\langle \boldsymbol{\mu}; \mathbf{v} \rangle = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32 \quad (21)$$

Secondo quanto detto fino ad ora la **norma** o il modulo di un vettore può essere espressa come:

$$\|\boldsymbol{\mu}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\mu} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_i \mu_i} \quad (22)$$

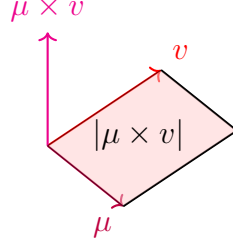
Il prodotto scalare tra due vettori permette di calcolare l'angolo sotteso tra due vettori tramite la funzione trigonometrica coseno:

$$\cos(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{v}) = \frac{\langle \boldsymbol{\mu}; \mathbf{v} \rangle}{\|\boldsymbol{\mu}\| \|\mathbf{v}\|} \quad (23)$$

Dove il termine  $\cos(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{v})$  indica l'angolo  $\phi$  sotteso tra i vettori  $\boldsymbol{\mu}$  e  $\mathbf{v}$ .

#### 4.1.2 Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale ( $\times$ ) è un'operazione binaria interna a  $\mathbb{R}^3$  che a due vettori  $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  associa un terzo vettore ortogonale seguendo il criterio mostrato nell'immagine.



Il modulo del vettore risultante tra il prodotto vettoriale tra  $\boldsymbol{\mu}$  e  $\mathbf{v}$  corrisponde all'area del parallelogramma sotteso dai due vettori:

$$\|\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{v}\| = \|\boldsymbol{\mu}\| \|\mathbf{v}\| \sin(\alpha) \quad (24)$$

Una delle casistiche più semplici riguarda il prodotto vettoriale tra versori: si dimostra che per versori del tipo  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  valgono le seguenti proprietà:

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \quad \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}} \quad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \quad (25)$$

Il prodotto vettoriale gode della proprietà di antisimmetria:

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}} \quad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}} \quad \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}} \quad (26)$$

Inoltre si dimostra facilmente che:

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{0}} \quad \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{0}} \quad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{0}} \quad (27)$$

Ricordando quanto detto precedentemente riguardo la scomposizione di un vettore in versori (18) possiamo esprimere  $\boldsymbol{\mu}$  e  $\mathbf{v}$  come:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= \mu_1 \hat{\mathbf{i}} + \mu_2 \hat{\mathbf{j}} + \mu_3 \hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{v} &= v_1 \hat{\mathbf{i}} + v_2 \hat{\mathbf{j}} + v_3 \hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (28)$$

Mettendo insieme le informazioni ricavate sui versori (25), (26) e (27), possiamo calcolare il prodotto vettoriale per due generici vettori appartenenti a  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{v} &= (\mu_1 \hat{\mathbf{i}} + \mu_2 \hat{\mathbf{j}} + \mu_3 \hat{\mathbf{k}}) \times (v_1 \hat{\mathbf{i}} + v_2 \hat{\mathbf{j}} + v_3 \hat{\mathbf{k}}) \\ &= \mu_1 v_1 (\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}}) + \mu_1 v_2 (\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}) + \mu_1 v_3 (\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}}) \\ &\quad + \mu_2 v_1 (\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}}) + \mu_2 v_2 (\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}}) + \mu_2 v_3 (\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}}) \\ &\quad + \mu_3 v_1 (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}}) + \mu_3 v_2 (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}}) + \mu_3 v_3 (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}) \\ &= \mu_1 v_2 \hat{\mathbf{k}} - \mu_1 v_3 \hat{\mathbf{j}} - \mu_2 v_1 \hat{\mathbf{k}} + \mu_2 v_3 \hat{\mathbf{i}} + \mu_3 v_1 \hat{\mathbf{j}} - \mu_3 v_2 \hat{\mathbf{i}} \\ &= (\mu_2 v_3 - \mu_3 v_2) \hat{\mathbf{i}} + (\mu_3 v_1 - \mu_1 v_3) \hat{\mathbf{j}} + (\mu_1 v_2 - \mu_2 v_1) \hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (29)$$

Commettendo un piccolo abuso di notazione possiamo calcolare il prodotto vettoriale con il *determinante improprio* di una matrice  $3 \times 3$ :

$$\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mu_1 & v_1 & \hat{\mathbf{i}} \\ \mu_2 & v_2 & \hat{\mathbf{j}} \\ \mu_3 & v_3 & \hat{\mathbf{k}} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_2 v_3 - \mu_3 v_2 \hat{\mathbf{i}} \\ \mu_3 v_1 - \mu_1 v_3 \hat{\mathbf{j}} \\ \mu_1 v_2 - \mu_2 v_1 \hat{\mathbf{k}} \end{pmatrix}$$

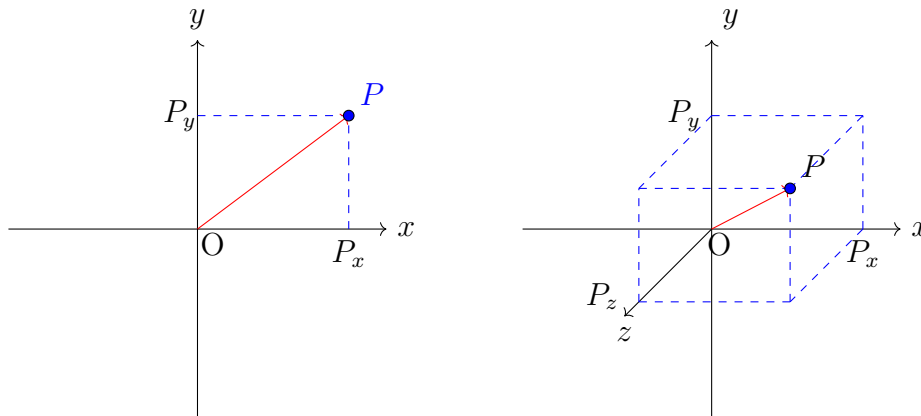
Ovvero:

$$\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{v} = (\mu_2 v_3 - \mu_3 v_2) \hat{\mathbf{i}} + (\mu_3 v_1 - \mu_1 v_3) \hat{\mathbf{j}} + (\mu_1 v_2 - \mu_2 v_1) \hat{\mathbf{k}} \quad (30)$$

## 4.2 Coordinate cartesiane

Sono un sistema di coordinate bidimensionale o tridimensionale dove ogni un punto  $P$  è descritto da un set di  $(x,y,z)$  (nel caso bidimensionale  $z = \text{cost}$ ) dove  $x$  è la distanza orizzontale dall'origine,  $y$  è la distanza verticale dall'origine e  $z$  la quota del punto rispetto all'origine.

$$P = (P_x, P_y, P_z) \quad (31)$$



Le coordinate del punto  $P$  vengono espresse dunque come le proiezioni del punto  $P$  sugli assi cartesiani.

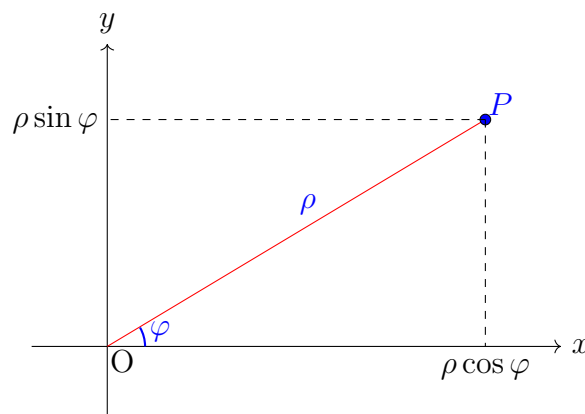
## 4.3 Coordinate polari

Le coordinate polari sono un sistema di coordinate bidimensionali utilizzato per specificare la posizione di un punto in un piano. In questo sistema, la posizione di un punto viene descritta mediante due valori:

- **Raggio** ( $\rho$ ): la distanza dal punto all'origine del sistema di coordinate, spesso chiamata polo.
- **Angolo** ( $\varphi$ ): l'angolo misurato in radianti (o gradi) tra il raggio che passa per il punto e l'asse positivo delle  $x$ .

In altre parole, invece di usare le coordinate cartesiane, che sono basate su lunghezze lungo assi ortogonali, le coordinate polari si basano su una distanza e un angolo rispetto a un punto di origine.

$$P = \{\varphi, \rho\} \quad (32)$$



### 4.3.1 Conversione da coordinate polari a cartesiane

Per passare dalle coordinate polari a quelle cartesiane è sufficiente usare alcune relazioni trigonometriche, conoscendo il raggio  $\rho$  e l'angolo  $\varphi$  possiamo ricavare le coordinate  $P_x$  e  $P_y$ :

$$P_x = \rho \cdot \cos(\varphi) \quad (33)$$

$$P_y = \rho \cdot \sin(\varphi) \quad (34)$$

Viceversa conoscendo  $P_x$  e  $P_y$  possiamo ricavarci  $\rho$  e  $\varphi$ :

$$\rho = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} \quad (35)$$

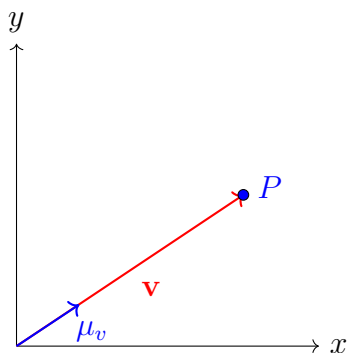
$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (36)$$

## 4.4 Coordinate intrinseche

Quando si parla di coordinate intrinseche per i vettori, ci si riferisce a un metodo per rappresentare un vettore in base alla sua lunghezza e direzione rispetto a un *sistema di assi definiti localmente*, si fa riferimento a:

- **Modulo** ( $\|\mathbf{v}\|$ ): la norma del vettore.
- **Direzione** ( $\mu_v$ ): prendendo in considerazione il versore associato non più agli assi cartesiani, ma alla retta su cui giace il vettore.

$$\mathbf{v} = \{\|\mathbf{v}\|, \mu_v\} \quad (37)$$



---

<sup>2</sup>Considerazione di natura trigonometrica: vale la pena ricordare che a seconda del segno di  $P_x$  e  $P_y$  potrebbe essere necessario sommare  $\pi$ .

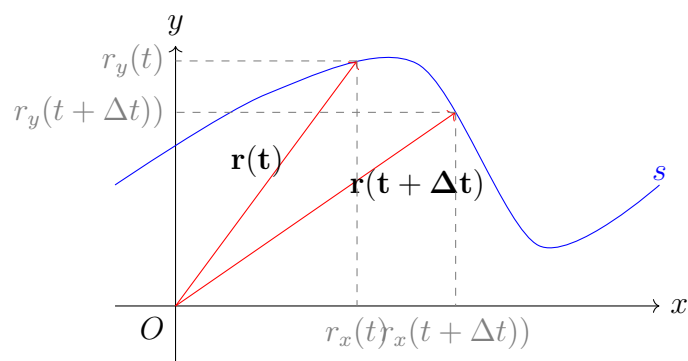
## 4.5 Derivata di un vettore

La derivata di un vettore misura **come cambia il vettore stesso rispetto a una variabile**. Ad esempio, se  $\mathbf{r}(t)$  rappresenta una traiettoria in uno spazio,  $\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$  indica la direzione e la velocità della variazione della traiettoria.

Supponendo di avere  $\mathbf{v}(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t), \dots, v_n(t))$  con  $v_1(t), v_2(t), v_3(t), \dots, v_n(t)$  funzioni scalari, la sua derivata sarà a sua volta un vettore di componenti:

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dv_1(t)}{dt} \\ \frac{dv_2(t)}{dt} \\ \frac{dv_3(t)}{dt} \\ \dots \\ \frac{dv_n(t)}{dt} \end{pmatrix} \quad (38)$$

La derivata di un vettore, oltre a essere anch'essa un vettore, è **tangente alla traiettoria** (d'ora in poi indicata con  $s$ ) descritta dal vettore originale. Consideriamo una funzione  $\mathbf{r}(t)$  che associa a ogni istante  $t$  un vettore in uno spazio cartesiano, tracciando così una traiettoria nello spazio; consideriamo il seguente grafico:



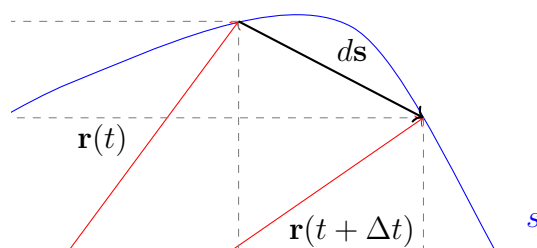
La derivata di  $\mathbf{r}$  può essere espressa tramite il rapporto incrementale:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + dt) - \mathbf{r}(t)}{dt} \quad (39)$$

Il termine  $d\mathbf{r}$  rappresenta una sottrazione tra vettori: più precisamente un vettore che congiunge  $d\mathbf{r}(t)$  a  $d\mathbf{r}(t + dt)$  (indicato qui con  $ds$ , ovvero una **frazione infinitesima della traiettoria**), al tendere di  $dt$  a 0 possiamo trarre una conclusione fondamentale:

### Derivata di un vettore

La derivata di un vettore è a sua volta un vettore, che gode della proprietà di essere tangente alla traiettoria descritta dal vettore iniziale





Con le *coordinate intrinseche* il vettore  $d\mathbf{s}$  può essere scomposto nel suo modulo e un versore associato alla retta su cui giace il vettore:

$$d\mathbf{s} = ds \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}}_T \quad (40)$$

$\hat{\boldsymbol{\mu}}_T$  è in questo caso il versore che indica per ogni istante  $t$  la direzione tangente alla curva. Con queste premesse è possibile esprimere:

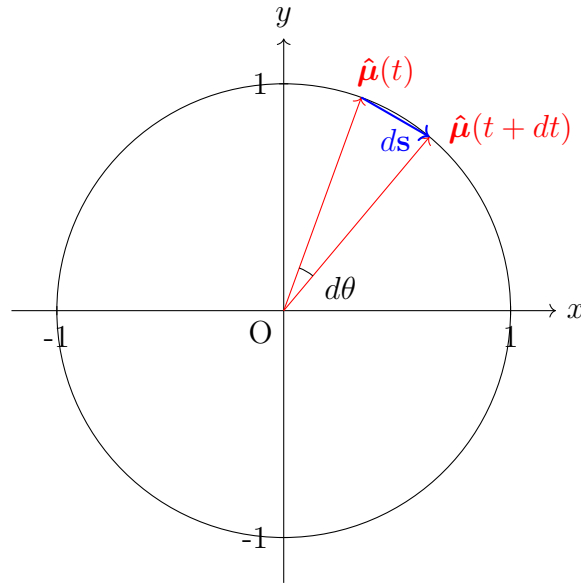
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}}_T \quad (41)$$

Vale la pena osservare che non è possibile fare considerazioni quantitative sul modulo di  $ds$  dal momento che non si hanno informazioni sul modulo di  $d\mathbf{r}$ .

#### 4.5.1 Derivata di un versore

Per i versori oltre a poter effettuare considerazione sulla direzione è possibile effettuare delle considerazioni sul modulo della derivata dal momento che il versore ha modulo costante.

Appare evidente che l'unica traiettoria percorribile da un generico versore  $\hat{\boldsymbol{\mu}}(t)$  è di natura circolare:



Il termine  $d\theta$  indica la *variazione infinitesima dell'angolo* associata tra  $\hat{\boldsymbol{\mu}}(t)$  e  $\hat{\boldsymbol{\mu}}(t+dt)$ .  $ds$  oltre a essere tangente alla traiettoria a  $dt \rightarrow 0$  diventa anche **ortogonale** al versore di partenza.

Chiamando  $r$  il raggio è possibile impostare la seguente relazione:

$$\|ds\| : 2\pi r = d\theta : 2\pi \quad (42)$$

Ricordando che il raggio in questo caso vale 1 si ricava il modulo di  $ds$ :

$$\|ds\| = d\theta \quad (43)$$

Per quanto riguarda la direzione è ben evidente che questa sarà ortogonale, si può dunque indicare la derivata di un versore come:

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\mu}}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\perp} \quad (44)$$

## 5 Cinematica

La cinematica è un ramo della meccanica fondamentale per comprendere come si muovono gli oggetti nello spazio e nel tempo, e serve come base per lo studio della dinamica, che invece si occupa delle cause del moto.

Nella cinematica, si analizza il moto di un **corpo puntiforme** (o di dimensioni trascurabili).

### Cinematica

Lo studio del movimento dei corpi senza considerare le cause che lo producono.

### 5.1 Le prime definizioni

È opportuno definire alcune quantità fondamentali che utilizzeremo per analizzare il moto:

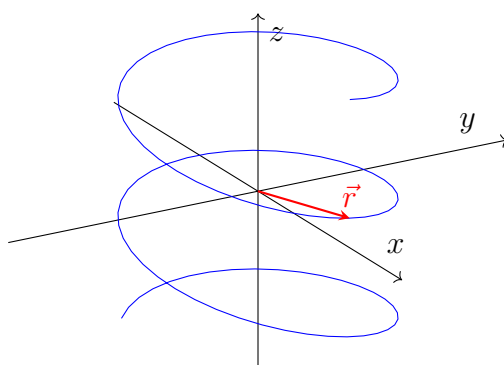
#### Vettore Posizione

Il vettore posizione di un punto materiale è un vettore che individua la posizione del punto rispetto ad un sistema di riferimento.

Se consideriamo un sistema di riferimento cartesiano tridimensionale con origine  $O$ , il **vettore posizione**  $\mathbf{r}(t)$  di un punto  $P$  all'istante  $t$  è dato da:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}} \quad (45)$$

dove  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  sono le coordinate del punto  $P$  all'istante  $t$  e  $\hat{\mathbf{i}}$ ,  $\hat{\mathbf{j}}$ ,  $\hat{\mathbf{k}}$  sono i versori lungo gli assi  $x$ ,  $y$  e  $z$ .



#### Spostamento

Lo spostamento è un vettore che rappresenta la variazione della posizione di un punto materiale in un intervallo di tempo.

Lo **spostamento** è un vettore che rappresenta la variazione della posizione di un punto materiale in un intervallo di tempo. Se un punto materiale si sposta dalla posizione  $\mathbf{r}(t_1)$  alla posizione  $\mathbf{r}(t_2)$ , lo spostamento  $\Delta\mathbf{r}$  è dato da:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1) \quad (46)$$

Lo spostamento è indipendente dal percorso seguito tra le due posizioni, spesso viene indicato anche col termine **distanza**: Nel grafico  $\gamma$  rappresenta la traiettoria compresa tra  $A$  e  $B$ ; la traiettoria viene indicata anche con il termine **spazio percorso**. La cinematica, quindi, ci fornisce gli strumenti per *descrivere il moto dei corpi*, senza entrare nel merito delle forze che causano tali movimenti.

## 5.2 Equazioni del moto

Conoscere l'equazione del moto di un punto è estremamente utile: permette di descrivere e prevedere il moto di un corpo quantitativamente, consentendo di ricavare altre grandezze vettoriali come **velocità** e **accelerazione**.

### Equazione del moto

L'equazione del moto è una funzione che descrive come la posizione di un oggetto cambia in funzione di un'altra variabile.

In altre parole l'equazione del moto fornisce una relazione tra il tempo e la posizione dell'oggetto lungo il suo percorso di movimento; inoltre se la variabile è il tempo si parla di **legge oraria**.

### 5.2.1 Velocità

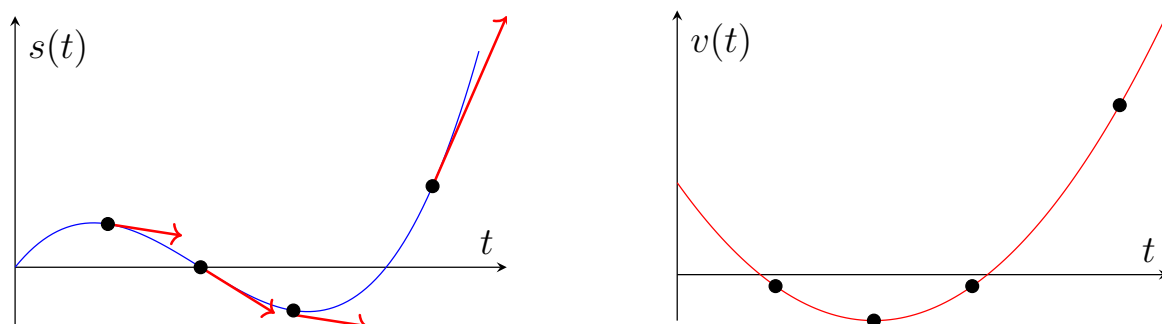
Se la posizione di un oggetto è data da  $\vec{r}(t)$ , la velocità  $\vec{v}(t)$  è definita come:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \quad (47)$$

### Velocità

La velocità è la derivata del vettore posizione rispetto al tempo.

La velocità misura il **tasso di cambiamento della posizione di un oggetto nel tempo**, indicando quanto velocemente un oggetto si sta muovendo in ogni istante. Per quanto riguarda la direzione la velocità (che ricordiamo essere una grandezza vettoriale), essendo la derivata del vettore posizione, risulta essere tangente a quest'ultimo, è dunque rappresentata dal **vettore tangente alla traiettoria** del moto.



La figura sopra mostra i grafici delle funzioni di posizione  $s(t)$  e velocità  $v(t)$  per un oggetto che si muove lungo una curva generica. Sul grafico della posizione, il vettore tangente rappresenta la velocità dell'oggetto in quel

punto, mentre sul grafico della velocità per ogni istante di tempo è segnato il modulo della velocità.

### 5.2.2 Accelerazione

Se la posizione di un oggetto è data da  $\vec{r}(t)$  e la velocità da  $\vec{v}(t)$ , l'accelerazione è definita come:

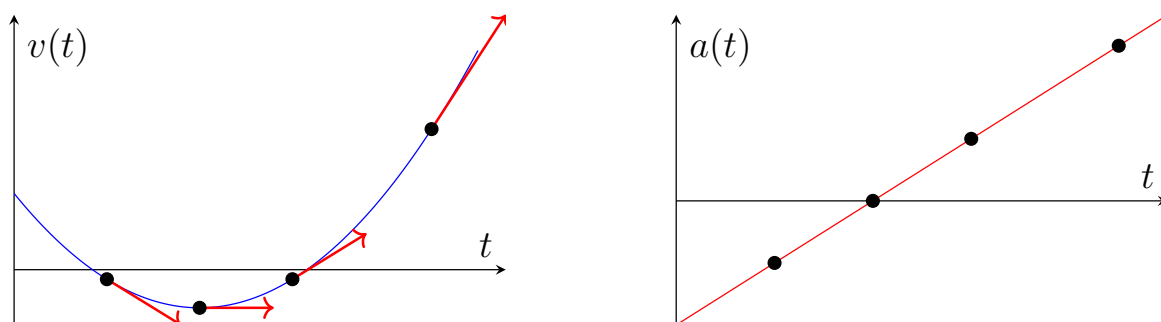
$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} \quad (48)$$

#### Accelerazione

L'accelerazione è la derivata del vettore velocità rispetto al tempo.

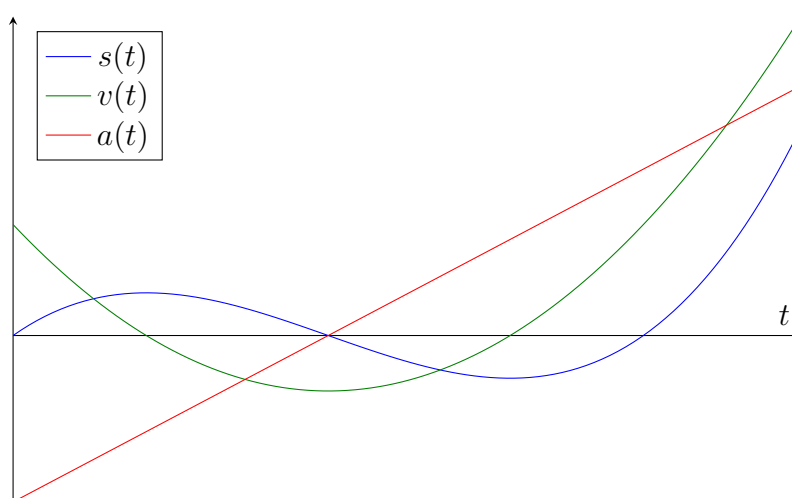
L'accelerazione misura il **tasso di cambiamento della velocità di un oggetto nel tempo**, indicando quanto un oggetto stia accelerando in ogni istante.

Per quanto riguarda la direzione il vettore accelerazione, è tangente alla curva descritta della velocità:



Sul grafico della velocità, il vettore tangente rappresenta l'accelerazione dell'oggetto in quel punto, mentre sul grafico dell'accelerazione per ogni istante di tempo è segnato il modulo di quest'ultima.

A seguito i 3 grafici sovrapposti:



Le relazioni tra posizione, velocità e accelerazione è fondamentale: la velocità ci dice come cambia la posizione di un oggetto, mentre l'accelerazione ci dice come cambia la velocità di un oggetto.

**Relazioni tra Posizione, Velocità e Accelerazione** Se la velocità è la derivata del vettore posizione e a sua volta l'accelerazione è la derivata della velocità, possiamo estrapolare le seguenti relazioni inverse:

**Da Velocità a Posizione:**

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}(t') dt' \quad (49)$$

**Da Accelerazione a Velocità:**

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(t') dt' \quad (50)$$

Ricordando quanto detto sugli integrali e alcune delle loro proprietà è opportuno evidenziare due considerazioni:

- Rispetto al processo di derivazione per integrare è necessario avere delle informazioni sugli estremi di integrazioni chiamate spesso **condizioni iniziali del sistema** per poter descrivere il moto.
- Le **aree sotto i grafici** delle funzioni di velocità e accelerazione hanno significati fisici importanti. L'area sotto il grafico della velocità rispetto al tempo dà lo spostamento totale dell'oggetto, mentre l'area sotto il grafico dell'accelerazione rispetto al tempo dà la variazione della velocità.

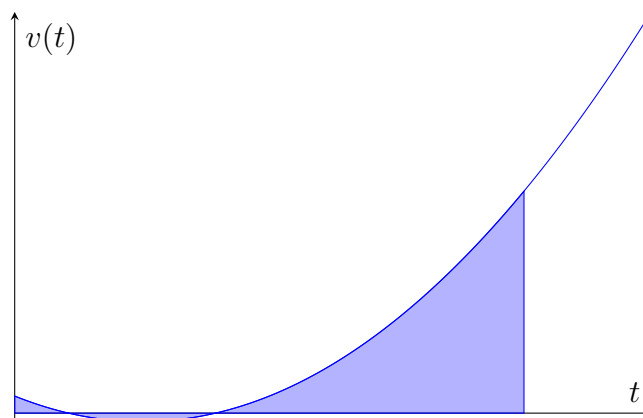


Figure 5: Area sotto il grafico della velocità  $v(t)$  che rappresenta lo spostamento.

L'area evidenziata sotto la curva rappresenta lo spostamento della particella.

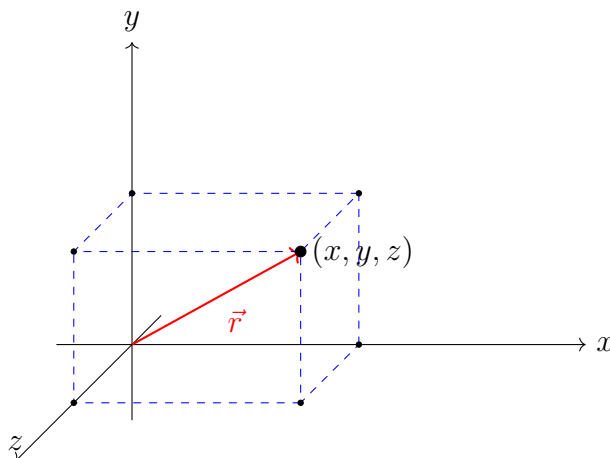
Sebbene il vettore posizione, velocità e accelerazione siano **invarianti rispetto al sistema di riferimento** osserviamo che derivando in diversi sistemi otteniamo modi e scomposizioni differenti per indicare posizione, velocità e accelerazione, sebbene a primo acchito potrebbe sembrare un lavoro poco utile, usare diverse modi di esprimere questi vettori permette di agevolare i conti e le difficoltà concettuali degli argomenti a venire.

### 5.3 Equazioni del moto in coordinate cartesiane

Consideriamo un punto materiale  $\mathbf{r}(t)$  descritto dalle coordinate cartesiane  $(x, y, z)$ . In questo sistema, la posizione è data da:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}} \quad (51)$$

dove  $\hat{\mathbf{i}}$ ,  $\hat{\mathbf{j}}$ , e  $\hat{\mathbf{k}}$  sono i versori lungo gli assi  $x$ ,  $y$ , e  $z$  rispettivamente.



In coordinate cartesiane, **il moto lungo ciascun asse è indipendente dagli altri assi**. Questo permette di analizzare separatamente le componenti del moto lungo  $x$ ,  $y$ , e  $z$ .

#### 5.3.1 Velocità in coordinate cartesiane

La velocità è calcolata come la derivata della posizione rispetto al tempo:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}) = \dot{x}(t)\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}(t)\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}(t)\hat{\mathbf{k}} \quad (52)$$

dove  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ , e  $\dot{z}$  rappresentano rispettivamente le derivate temporali delle coordinate  $x$ ,  $y$ , e  $z$ .

#### Velocità in coordinate cartesiane

La velocità in coordinate cartesiane, indicata con  $\mathbf{v}$ , è data da:

$$\mathbf{v} = \dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}}$$

#### 5.3.2 Accelerazione in coordinate cartesiane

L'accelerazione è la derivata della velocità rispetto al tempo:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}}) = \ddot{x}\hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}\hat{\mathbf{j}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}} \quad (53)$$

dove  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$ , e  $\ddot{z}$  rappresentano le derivate seconde delle coordinate  $x$ ,  $y$ , e  $z$  rispettivamente.

#### Accelerazione in coordinate cartesiane

L'accelerazione in coordinate cartesiane, indicata con  $\mathbf{a}$ , è data da:

$$\mathbf{a} = \ddot{x}\hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}\hat{\mathbf{j}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}}$$

## 5.4 Equazioni del moto in coordinate polari

### 5.4.1 Velocità radiale e trasversa

Per descrivere il moto in coordinate polari, consideriamo un punto  $\mathbf{r}(t)$  descritto dalle coordinate  $(r, \theta)$ . In questo sistema, la posizione è data da:

$$\mathbf{r}(t) = r\boldsymbol{\mu}_r \quad (54)$$

dove  $\boldsymbol{\mu}_r$  è il versore radiale; la velocità quindi potrà essere calcolata come:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d(r\boldsymbol{\mu}_r)}{dt} \quad (55)$$

Usando la proprietà del prodotto tra derivate e la derivata di un versore in coordinate polari, otteniamo:

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{\mu}_\theta \quad (56)$$

Dove  $\boldsymbol{\mu}_\theta$  indica il versore ortogonale alla direzione radiale, d'ora in poi chiamato **versore trasversale**.

$$\frac{d(r\boldsymbol{\mu}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\boldsymbol{\mu}_r + r\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{\mu}_\theta \quad (57)$$

La velocità in coordinate polari si compone di due contributi: un termine radiale ( $\boldsymbol{\mu}_r$ ) e un termine detto **trasversale** ( $\boldsymbol{\mu}_\perp$ ):

$$\mathbf{v} = \dot{r}\boldsymbol{\mu}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{\mu}_\theta \quad (58)$$

#### Velocità Radiale

La velocità radiale, indicata con  $v_r$ , è la componente della velocità di un corpo che è diretta lungo la linea che collega il corpo al centro della traiettoria:

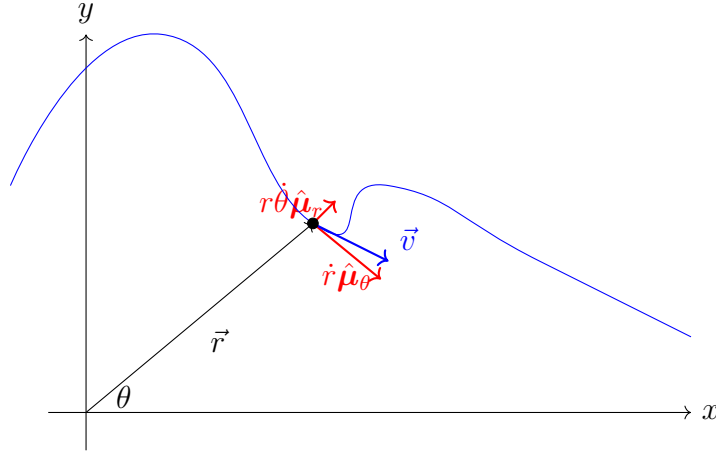
$$v_r = \frac{dr}{dt}$$

La velocità radiale può essere positiva o negativa a seconda che il corpo si stia avvicinando o allontanando dal centro.

#### Velocità Trasversa

La velocità trasversa, indicata con  $v_\perp$ ,  $v_t$  o  $v_\theta$ , è la componente della velocità che è perpendicolare al raggio vettore:

$$v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$$



Ovviamente la velocità trasversa e radiale sono *grandezze simili*.

#### 5.4.2 Accelerazione radiale e trasversa

L'accelerazione in coordinate polari è data dalla derivata della velocità rispetto al tempo:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \boldsymbol{\mu}_r + r \frac{d\theta}{dt} \boldsymbol{\mu}_\theta \right) \quad (59)$$

Come nel caso della velocità è sufficiente applicare la regola del prodotto tra derivate e la regola della derivata di un versore; inoltre è preferibile derivare "a blocchi", partendo prima dal derivare la velocità trasversa e poi quella radiale, sommando tutto alla fine:

Per la velocità radiale:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \boldsymbol{\mu}_r \right) = \frac{d^2 r}{dt^2} \boldsymbol{\mu}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\boldsymbol{\mu}_r}{dt} \quad (60)$$

Ricordando le proprietà della derivata di un versore:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \boldsymbol{\mu}_r \right) = \frac{d^2 r}{dt^2} \boldsymbol{\mu}_r + \frac{dr}{dt} \left( \frac{d\theta}{dt} \boldsymbol{\mu}_\theta \right) \quad (61)$$

Per la velocità trasversa:

$$\frac{d}{dt} \left( r \frac{d\theta}{dt} \boldsymbol{\mu}_\theta \right) = \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \boldsymbol{\mu}_\theta + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \boldsymbol{\mu}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\boldsymbol{\mu}_\theta}{dt} \quad (62)$$

Seppur a tratti banale vale la pena osservare che la derivata di  $\boldsymbol{\mu}_\theta$  è:

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \boldsymbol{\mu}_r \quad (63)$$

Dal momento che se ruoto un versore di 90 gradi per due volte questo cambia inevitabilmente verso.

Ottengo dunque:

$$\frac{d}{dt} \left( r \frac{d\theta}{dt} \boldsymbol{\mu}_\theta \right) = \left( \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) \boldsymbol{\mu}_\theta - r \frac{d\theta}{dt} \left( \frac{d\theta}{dt} \boldsymbol{\mu}_r \right) \quad (64)$$



Sommiamo le derivate della velocità radiale e trasversa:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2r}{dt^2} \boldsymbol{\mu}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \boldsymbol{\mu}_\theta + \left( \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \boldsymbol{\mu}_\theta - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \boldsymbol{\mu}_r \quad (65)$$

Raccogliendo i termini simili:

$$\mathbf{a}(t) = \left( \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \boldsymbol{\mu}_r + \left( r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \boldsymbol{\mu}_\theta \quad (66)$$

Questo completa il calcolo dell'accelerazione in coordinate polari:

$$\mathbf{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \boldsymbol{\mu}_r + (r\ddot{\theta} + s\dot{\theta}) \boldsymbol{\mu}_\theta \quad (67)$$

Così come per la velocità osserviamo che in coordinate polari anche l'accelerazione possiede una componente **radiale** e una **trasversa**.

#### Accelerazione radiale

L'accelerazione radiale è diretta verso il centro della curva, rappresenta l'accelerazione che modifica la direzione della velocità del corpo, ma non la sua magnitudine:

$$a_r = -r\dot{\theta}^2$$

#### Accelerazione Trasversa

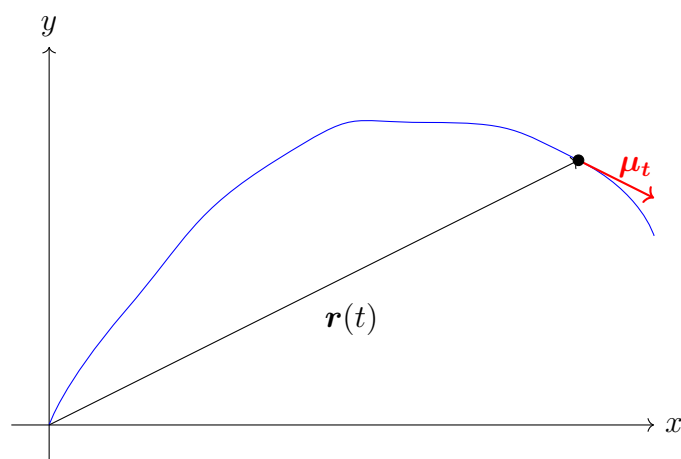
L'accelerazione trasversa è perpendicolare alla velocità istantanea del corpo, rappresenta l'accelerazione che modifica la magnitudine della velocità del corpo:

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + s\dot{\theta}$$

## 5.5 Equazioni del moto in coordinate intrinseche

### 5.5.1 Velocità tangenziale

Per descrivere il moto in coordinate intrinseche osserveremo che il vettore velocità nelle coordinate intrinseche si avvale del versore tangenziale  $\boldsymbol{\mu}_t$ :



Dove la posizione è descritta da  $\mathbf{r}(t)$ ; ricordiamo che:

$$d\mathbf{r}(t) = ds\boldsymbol{\mu}_t \quad (68)$$

La velocità in coordinate intrinseche è data dalla derivata del cammino rispetto al tempo, moltiplicata per il versore tangenziale:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\boldsymbol{\mu}_t \quad (69)$$

Abbiamo già tutte le informazioni necessarie, infatti il vettore velocità ha modulo  $v = \frac{ds}{dt}$  e direzione sempre tangente alla traiettoria.

$$\mathbf{v}(t) = v\boldsymbol{\mu}_t \quad (70)$$

#### Velocità tangenziale

La velocità tangenziale, indicata con  $v_t$ , è la componente della velocità di un corpo lungo la direzione tangente alla traiettoria:

$$v_t = \frac{ds}{dt}$$

### 5.5.2 Accelerazione tangenziale e normale

L'accelerazione in coordinate intrinseche è data dalla derivata della velocità rispetto al tempo. Poiché  $\boldsymbol{\mu}_t$  varia lungo la traiettoria, dobbiamo considerare anche la sua variazione nel tempo.

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv\boldsymbol{\mu}_t}{dt} \quad (71)$$

Usando la regola del prodotto:

$$\frac{d(v\boldsymbol{\mu}_t)}{dt} = \dot{v}\boldsymbol{\mu}_t + v\frac{d\boldsymbol{\mu}_t}{dt} \quad (72)$$

La variazione del versore tangenziale è legata alla curvatura della traiettoria e può essere espressa tramite il versore normale:

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}_t}{dt} = \frac{v}{R}\boldsymbol{\mu}_n \quad (73)$$

Dove  $R$  è il raggio osculatore della traiettoria. Otteniamo quindi:

$$\mathbf{a}(t) = \dot{v}\boldsymbol{\mu}_t + v\left(\frac{v}{R}\boldsymbol{\mu}_n\right) \quad (74)$$

$$\mathbf{a}(t) = \dot{v}\boldsymbol{\mu}_t + \frac{v^2}{R}\boldsymbol{\mu}_n \quad (75)$$

$$\mathbf{a}(t) = a_t\boldsymbol{\mu}_t + a_n\boldsymbol{\mu}_n \quad (76)$$

L'accelerazione in coordinate intrinseche ha quindi una componente tangenziale e una componente normale:

### Accelerazione tangenziale

L'accelerazione tangenziale è la componente dell'accelerazione lungo la direzione tangente alla traiettoria:

$$a_t = \dot{v} = \ddot{s}$$

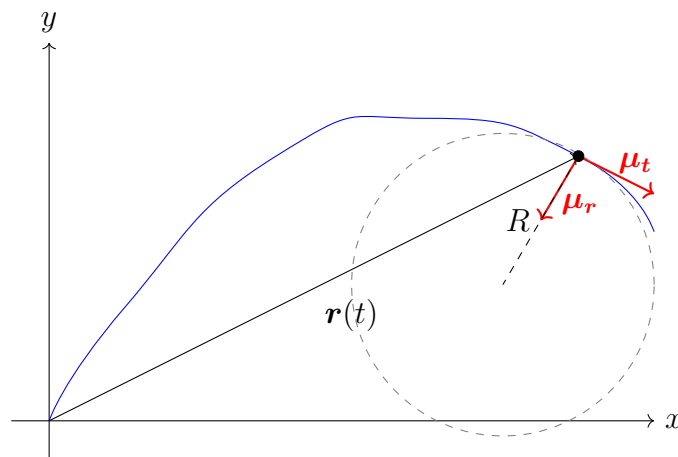
### Accelerazione normale

L'accelerazione normale è la componente dell'accelerazione perpendicolare alla traiettoria, diretta verso il centro di curvatura:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\dot{s}^2}{R}$$

### 5.5.3 Raggio osculatore

Il raggio osculatore,  $R$ , è il raggio del cerchio osculatore, cioè il cerchio che meglio approssima la traiettoria in un dato punto. È definito come:



### Raggio osculatore

Il raggio osculatore è il raggio del cerchio che meglio approssima la traiettoria in un dato punto.

## 5.6 Moto rettilineo

Il moto rettilineo è un moto per un corpo che si muove lungo una linea retta, generalmente si considerano due casi:

- **Moto rettilineo uniforme:** moto lungo una linea retta con velocità costante.
- **Moto rettilineo uniformemente accelerato:** moto lungo una linea retta con accelerazione costante.

Inoltre dalla seguente relazione:

$$d\mathbf{r} = ds\boldsymbol{\mu}_t \quad (77)$$

Ricaviamo che il versore tangente alla traiettoria dovrà necessariamente coincidere con il differenziale della vettore posizione:

$$d\mathbf{r} = ds \quad (78)$$

### 5.6.1 Moto rettilineo uniforme

Nel moto rettilineo uniforme l'accelerazione  $a$  è pari a zero:

$$a = 0 \quad (79)$$

### 5.6.2 Legge oraria del moto rettilineo uniforme

La posizione  $r(t)$  di un corpo che si muove di moto rettilineo uniforme può essere determinata integrando la velocità rispetto al tempo:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (80)$$

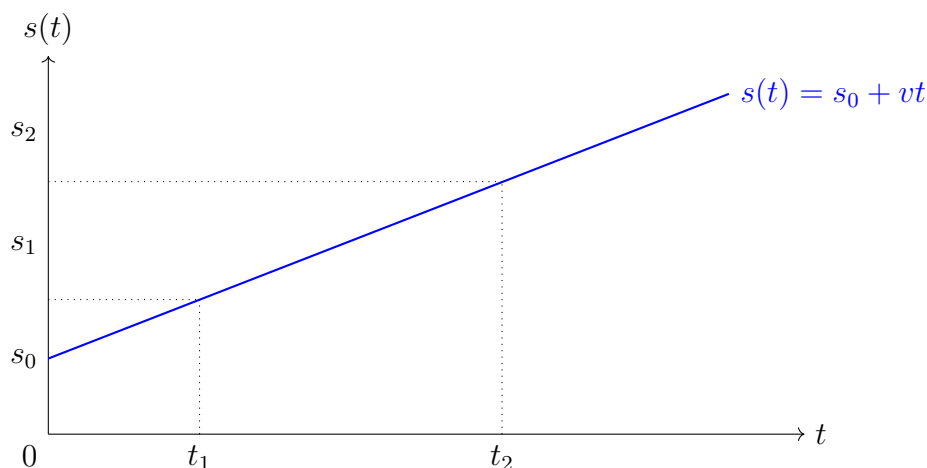
Moltiplicando per  $dt$  da ambo le parti e integrando rispetto al tempo  $t$ , otteniamo:

$$\int ds = \int v dt \Rightarrow s(t) = v(t) + C \quad (81)$$

$C$  è una costante che può essere determinata utilizzando la condizione iniziale  $s(0) = s_0$ :

Legge oraria del moto rettilineo uniforme

$$s(t) = s_0 + vt$$



### 5.6.3 Velocità nel moto rettilineo uniforme

Nel moto rettilineo uniforme, la velocità  $v$  è costante e può essere espressa come:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t) - s_0}{t} \quad (82)$$

### 5.6.4 Moto rettilineo uniformemente accelerato

Il moto rettilineo uniformemente accelerato è caratterizzato da un'accelerazione costante  $a$ .

$$a = \text{cost} \quad (83)$$

### 5.6.5 Legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato

La posizione  $r(t)$  di un corpo che si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato può essere determinata integrando la velocità rispetto al tempo. La velocità, a sua volta, è una funzione lineare rispetto tempo.

### 5.6.6 Velocità nel moto rettilineo uniformemente accelerato

Analogamente a quanto osservato per la velocità tramite definizione di accelerazione otteniamo:

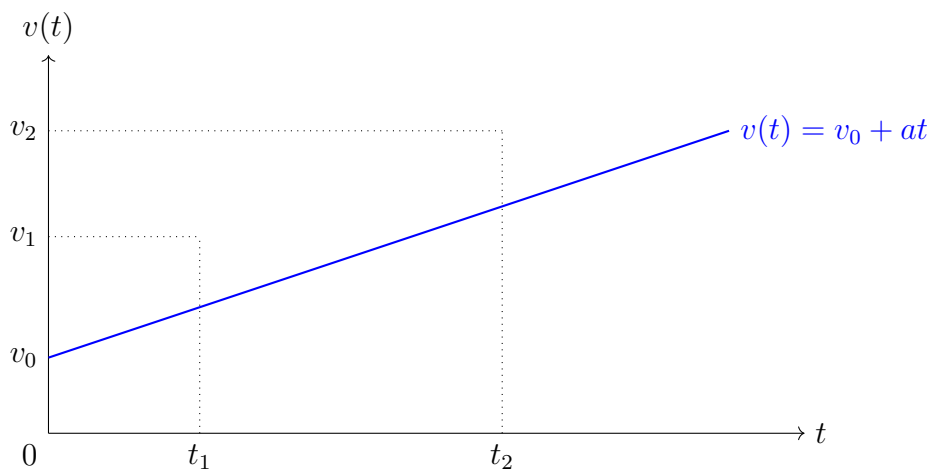
$$a = \frac{dv}{dt} \quad (84)$$

$$\int dv = \int a dt \Rightarrow v = at + C_1 \quad (85)$$

$C_1$  rappresenta la velocità iniziale  $v_0$ , possiamo pertanto scrivere:

Velocità nel moto rettilineo uniformemente accelerato

$$v(t) = v_0 + at$$



### 5.6.7 Posizione nel moto rettilineo uniformemente accelerato

Sappiamo che la velocità  $v$  è la derivata della posizione rispetto al tempo:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (86)$$

Integrando questa espressione rispetto al tempo, otteniamo:

$$\int ds = \int v dt \quad (87)$$

$$s(t) = \int (v_0 + at) dt \Rightarrow \frac{1}{2}at^2 + v_0t + C_2 \quad (88)$$

dove  $C_2$  è una costante di integrazione che rappresenta la posizione iniziale  $s_0$ . Quindi, possiamo scrivere:

Legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato

$$s(t) = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

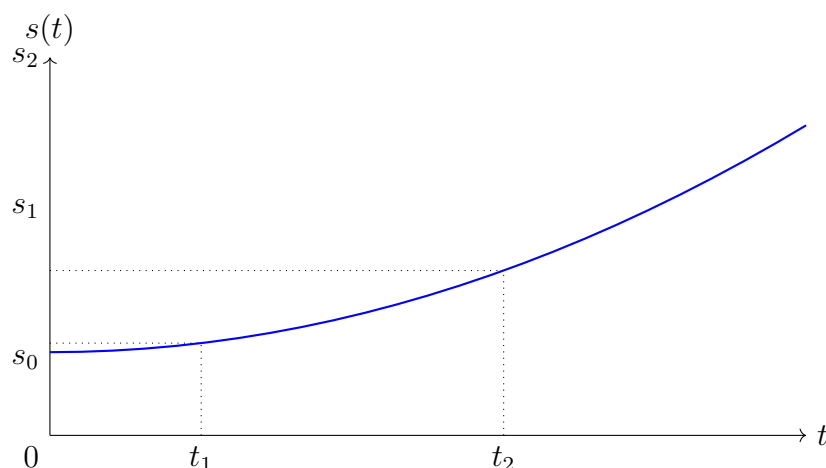


Figure 6: Grafico della legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato.

### 5.6.8 Equazione della velocità in funzione dello spazio

Un'altra equazione tremendamente utile è quella che esprime la velocità in funzione dello spazio percorso. Partiamo dalla definizione di accelerazione:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (89)$$

Possiamo scrivere  $dt$  in funzione di  $ds$  e  $v$ :

$$dt = \frac{ds}{v} \quad (90)$$

Sostituendo questa espressione nella definizione di accelerazione otteniamo:

$$a = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v \quad (91)$$

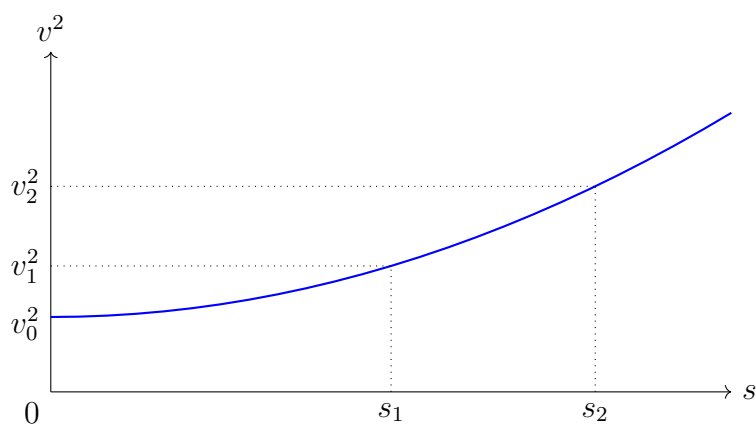
Separando le variabili e integrando otteniamo:

$$\int_{s_0}^{s(t)} a \, ds' = \int_{v_0}^v v \, dv \Rightarrow a(s - s_0) = \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} \quad (92)$$

L'equazione finale diventa:

Equazione della velocità in funzione dello spazio

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$$



In sintesi:

Riassunto delle equazioni del moto rettilineo

**Moto rettilineo uniforme**

- Legge oraria:

$$s(t) = s_0 + vt$$

- Velocità:

$$v = \frac{s(t) - s_0}{t - t_0}$$

**Moto rettilineo uniformemente accelerato**

- Velocità:

$$v(t) = v_0 + at$$

- Legge oraria:

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

- Equazione della velocità in funzione dello spazio:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$$

## 5.7 Moto parabolico

Il moto parabolico è un esempio di moto bidimensionale sotto l'influenza della gravità; in questo tipo di moto, un oggetto viene lanciato con una velocità iniziale  $\mathbf{v}_0$  percorre una traiettoria parabolica per poi toccare il suolo.

### 5.7.1 Equazioni del Moto Parabolico

Consideriamo un punto  $\mathbf{r}(t)$  descritto dalle coordinate  $(x, y)$ . Supponiamo che l'oggetto sia lanciato con una velocità iniziale  $\mathbf{v}_0$  che forma un angolo  $\theta$  con l'orizzontale. In questo sistema, la posizione e la velocità sono date da:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} \quad (93)$$

$$\mathbf{v}(t) = v_x(t)\hat{\mathbf{i}} + v_y(t)\hat{\mathbf{j}} \quad (94)$$

Separare la componente orizzontale da quella verticale permette di trattare  $r$ ,  $v$ ,  $a$  lungo  $x$  e  $y$  come quantità scalari (dal momento che la direzione è già nota).

Ricordiamo inoltre che la scelta del verso dei versori è totalmente arbitraria: cambiando il verso cambierà l'orientamento del sistema di riferimento, tuttavia la proprietà del moto saranno le medesime (talvolta scambiate di segno).

### 5.7.2 Accelerazione

Il moto parabolico è soggetto esclusivamente a un'accelerazione lungo l'asse  $y$ :

Componenti accelerazioni

$$a_x = 0$$

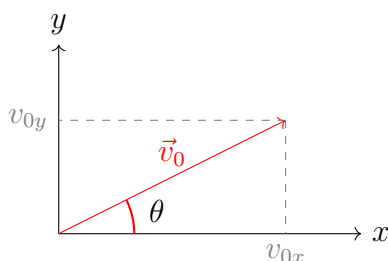
$$a_y = -g$$

### 5.7.3 Velocità

La velocità iniziale  $\mathbf{v}_0$  può essere scomposta nelle componenti orizzontale e verticale:

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta \quad (95)$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta \quad (96)$$



Durante il moto, la componente orizzontale della velocità rimane costante, mentre la componente verticale cambia a causa dell'accelerazione gravitazionale  $g$ .



La componente orizzontale della velocità, indicata con  $v_x$ , rimane costante durante il moto parabolico:

$$v_x = \int_{t_i}^{t_f} a_x dt = 0 + C \quad (97)$$

Dove  $C$  è la velocità iniziale lungo  $x$  che abbiamo detto essere:

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \theta \quad (98)$$

La componente verticale della velocità, indicata con  $v_y$ , varia linearmente con il tempo a causa dell'accelerazione gravitazionale  $g$ :

$$v_y = \int_{t_i}^{t_f} a_y dt = -gt + C \quad (99)$$

Analogamente  $C$  è la velocità iniziale lungo  $y$ :

$$v_y = v_{0y} = v_0 \sin \theta - gt \quad (100)$$

#### Componenti velocità

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \theta$$

$$v_y = v_{0y} = v_0 \sin \theta - gt$$

#### 5.7.4 Posizione

Le equazioni del moto parabolico possono essere ottenute integrando le componenti della velocità lungo l'asse  $x$  e  $y$  rispetto al tempo.

Lungo l'asse  $x$  dal momento che l'accelerazione orizzontale è zero, la velocità orizzontale rimane costante e la posizione orizzontale è una funzione lineare del tempo:

$$x(t) = \int_{t_i}^{t_f} v_x dt = v_{0x}t + C \quad (101)$$

Il termine  $C$  indica la posizione iniziale del corpo lungo l'asse  $x$  all'istante iniziale, che indichiamo con  $x_0$ ,

$$x(t) = v_{0x}t = v_0 \cos(\theta)t + x_0 \quad (102)$$

L'asse  $y$  rappresenta il moto verticale. La velocità verticale cambia a causa dell'accelerazione gravitazionale  $g$ :

$$y(t) = \int_{t_i}^{t_f} v_y dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + C \quad (103)$$

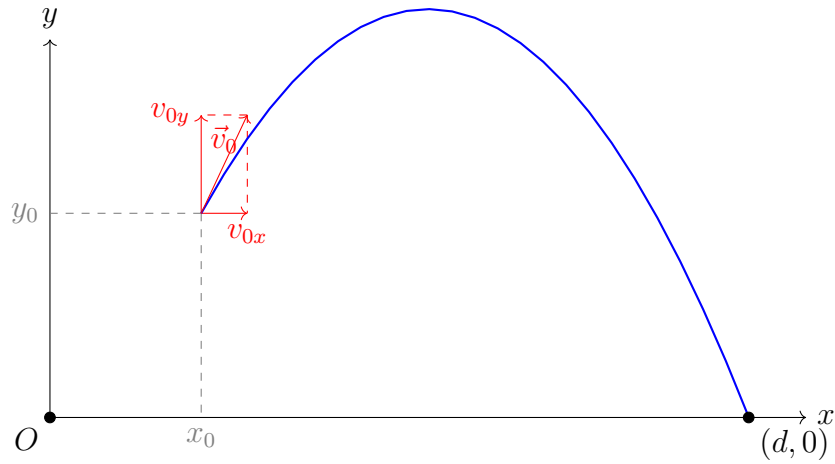
Dove  $C$  è uguale alla posizione orizzontale del corpo all'istante iniziale

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\theta)t + y_0 \quad (104)$$

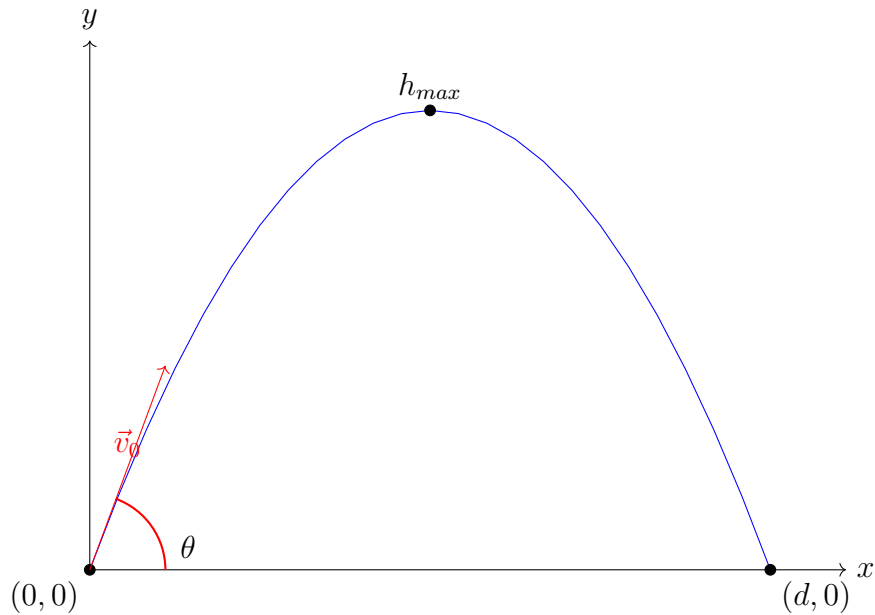
#### Componenti velocità

$$x(t) = v_0 \cos(\theta)t + x_0$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\theta)t + y_0$$



Gli aspetti più studiati del moto parabolico sono la **gittata**, l'**altezza massima** e il **tempo di volo**, generalmente vengono calcolate ponendo  $(x_0, y_0) = (0, 0)$



### 5.7.5 Gittata

La gittata  $d$  è la distanza orizzontale totale percorsa dall'oggetto prima di tornare al suolo ( $y = 0$ ):

$$y(t_d) = v_0 \sin \theta \cdot t_d - \frac{1}{2} g t_d^2 = 0 \quad (105)$$

Risolvendo questa equazione per  $t_R$  (tempo di volo):

$$t_d = \frac{2v_0 \sin \theta}{g} \quad (106)$$

Sostituendo  $t_d$  nell'equazione per  $x(t)$  (dove  $x_0 = 0$ ), ricaviamo la gittata:

$$d = v_0 \cos(\theta) t_d \quad (107)$$

$$d = v_0 \cos \theta \cdot \frac{2v_0 \sin \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} \quad (108)$$

### Gittata

La gittata  $R$  è la distanza orizzontale percorsa dall'oggetto prima di tornare al suolo:

$$d = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

### 5.7.6 Altezza Massima

L'altezza massima  $h_{max}$  è la massima distanza verticale raggiunta dall'oggetto. Si verifica quando la velocità verticale è zero:

$$v_y(t_{h_{max}}) = 0 = v_0 \sin \theta - gt_H \quad (109)$$

Risolvendo questa equazione per  $t_H$ :

$$t_{h_{max}} = \frac{v_0 \sin \theta}{g} \quad (110)$$

Sostituendo  $t_H$  nell'equazione per  $y(t)$ , otteniamo l'altezza massima:

$$h_{max} = v_0 \sin \theta \cdot \frac{v_0 \sin \theta}{g} - \frac{1}{2}g \left( \frac{v_0 \sin \theta}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \quad (111)$$

### Altezza Massima

L'altezza massima  $h_{max}$  è la massima distanza verticale raggiunta dall'oggetto:

$$h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

### 5.7.7 Tempo di Volo

Il tempo di volo  $T$  è il tempo associato al corpo nel percorrere la sua gittata:

$$T = \frac{2v_0 \sin \theta}{g} \quad (112)$$

### Tempo di Volo

Il tempo di volo  $T$  è il tempo totale che l'oggetto impiega per tornare al suolo:

$$T = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$$

## Riassunto delle Formule del Moto Parabolico

### Componenti della Velocità

- Componente orizzontale della velocità:

$$v_x = v_0 \cos \theta$$

- Componente verticale della velocità:

$$v_y = v_0 \sin \theta - gt$$

### Posizione

- Posizione orizzontale:

$$x(t) = v_0 \cos \theta \cdot t$$

- Posizione verticale:

$$y(t) = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

### Parametri Chiave

- Gittata:

$$d = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

- Altezza massima:

$$g_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

- Tempo di volo:

$$t_{volo} = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$$

## 5.8 Moto Angolare

Il moto angolare descrive la rotazione di un corpo intorno a un centro. Le grandezze fondamentali che descrivono questo moto sono la posizione angolare, la velocità angolare e l'accelerazione angolare.

### 5.8.1 Posizione Angolare

La posizione angolare  $\theta$  di un punto è una misura dell'angolo (in radianti) tra una linea di riferimento fissa e la linea che collega il punto al centro di rotazione.

$$\theta(t) \quad (113)$$

### 5.8.2 Velocità Angolare

La velocità angolare  $\omega$  è la velocità di variazione della posizione angolare rispetto al tempo. È definita come la derivata della posizione angolare rispetto al tempo:

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (114)$$

Integrando la velocità angolare rispetto al tempo, possiamo ricavare la posizione angolare:

$$\theta(t) = \int \omega(t) dt + \theta_0 \quad (115)$$

dove  $\theta_0$  è la posizione angolare iniziale.

### 5.8.3 Accelerazione Angolare

L'accelerazione angolare  $\alpha$  è la velocità di variazione della velocità angolare rispetto al tempo. È definita come la derivata della velocità angolare rispetto al tempo:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} \quad (116)$$

Integrando l'accelerazione angolare rispetto al tempo, possiamo ricavare la velocità angolare:

$$\omega(t) = \int \alpha(t) dt + \omega_0 \quad (117)$$

dove  $\omega_0$  è la velocità angolare iniziale.

Integrando nuovamente, possiamo ricavare la posizione angolare:

$$\theta(t) = \int \left( \int \alpha(t) dt + \omega_0 \right) dt + \theta_0 \quad (118)$$

Esplicitamente,

$$\theta(t) = \int (\alpha(t)t + \omega_0) dt + \theta_0 \quad (119)$$

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \quad (120)$$

## Formule del Moto Angolare

### Posizione Angolare

- Posizione angolare:

$$\theta(t)$$

### Velocità Angolare

- Velocità angolare:

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

- Posizione angolare da velocità angolare:

$$\theta(t) = \int \omega(t) dt + \theta_0$$

### Accelerazione Angolare

- Accelerazione angolare:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt}$$

- Velocità angolare da accelerazione angolare:

$$\omega(t) = \int \alpha(t) dt + \omega_0$$

- Posizione angolare da accelerazione angolare:

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0$$

## 5.9 Moto circolare

Il moto circolare è un tipo di moto in cui un oggetto si muove lungo una traiettoria circolare; esistono due tipi principali di moto circolare:

- Il **moto circolare uniforme**, dove la velocità angolare rimane costante
- Il **moto circolare uniformemente accelerato**, dove l'accelerazione angolare è costante.

### 5.9.1 Moto Circolare Uniforme

Nel moto circolare uniforme, un oggetto si muove lungo una circonferenza con velocità angolare costante  $\omega$ .

### 5.9.2 Parametri del Moto Circolare

Consideriamo un punto  $\mathbf{r}(t)$  descritto dalle coordinate polari  $(r, \theta)$ . Supponiamo che l'oggetto si muova con una velocità angolare costante  $\omega$ .

$$\mathbf{r}(t) = r \cos(\omega t) \hat{\mathbf{i}} + r \sin(\omega t) \hat{\mathbf{j}} \quad (121)$$

$$\mathbf{v}(t) = -r\omega \sin(\omega t) \hat{\mathbf{i}} + r\omega \cos(\omega t) \hat{\mathbf{j}} \quad (122)$$

$$\mathbf{a}(t) = -r\omega^2 \cos(\omega t) \hat{\mathbf{i}} - r\omega^2 \sin(\omega t) \hat{\mathbf{j}} \quad (123)$$

### 5.9.3 Periodo e Frequenza

Il periodo  $T$  è il tempo necessario affinché l'oggetto completi una rivoluzione completa:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (124)$$

La frequenza  $f$  è il numero di rivoluzioni complete per unità di tempo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (125)$$

### 5.9.4 Velocità Angolare e Lineare

La velocità angolare  $\omega$  è la velocità con cui l'angolo  $\theta$  cambia nel tempo: La velocità lineare  $v$  è tangente alla traiettoria circolare e può essere espressa come:

$$v = \omega r \quad (126)$$

### 5.9.5 Accelerazione Centripeta

L'accelerazione centripeta è diretta verso il centro della traiettoria circolare e mantiene l'oggetto in movimento lungo la circonferenza:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (127)$$

### 5.9.6 Moto Circolare Uniformemente Accelerato

Nel moto circolare uniformemente accelerato, l'accelerazione angolare  $\alpha$  è costante. Le equazioni del moto per questo caso sono:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t \quad (128)$$

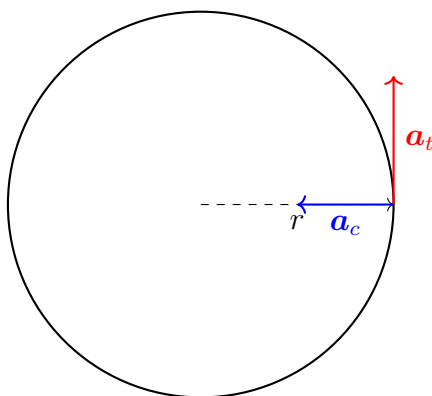
$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (129)$$

### 5.9.7 Velocità e Accelerazione

La velocità lineare e l'accelerazione tangenziale per il moto circolare uniformemente accelerato sono:

$$v(t) = \omega(t)r = (\omega_0 + \alpha t)r \quad (130)$$

$$a_t = \alpha r \quad (131)$$



#### Riassunto delle Formule del Moto Circolare

##### Componenti della Velocità e Accelerazione

- Velocità angolare:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

- Velocità lineare:

$$v = \omega r$$

- Accelerazione centripeta:

$$a_c = \omega^2 r$$

- Accelerazione tangenziale:

$$a_t = \alpha r$$

##### Parametri Chiave

- Periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

- Frequenza:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$



## 5.10 Approfondimento: caduta di un grave in aria

La caduta di un grave in aria è un esempio di moto unidimensionale sotto l'influenza della gravità e della resistenza dell'aria.

Consideriamo un punto  $\mathbf{r}(t)$  descritto dalla coordinata  $y$ . Supponiamo che l'oggetto sia lasciato cadere da una certa altezza iniziale  $h_0$ . Le forze in gioco sono:

- La forza di gravità,  $\mathbf{F}_g = mg$ , dove  $m$  è la massa dell'oggetto e  $g$  è l'accelerazione di gravità.
- La forza di resistenza dell'aria,  $\mathbf{F}_r = -\frac{1}{2}C_d\rho Av^2$ , dove  $C_d$  è il coefficiente di resistenza,  $\rho$  è la densità dell'aria,  $A$  è l'area della sezione trasversale dell'oggetto e  $v$  è la velocità dell'oggetto.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_r = mg - \frac{1}{2}C_d\rho Av^2 \quad (132)$$

### 5.10.1 Equazioni del Moto

L'equazione del moto per l'oggetto cadente può essere scritta come:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{1}{2}C_d\rho Av^2 \quad (133)$$

L'accelerazione vale dunque

Componenti dell'Accelerazione

$$a = g - \frac{1}{2m}C_d\rho Av^2$$

### 5.10.2 Velocità Limite

La velocità limite,  $v_{max}$ , è la velocità alla quale la forza di resistenza dell'aria bilancia esattamente la forza di gravità, e l'accelerazione dell'oggetto diventa zero; risolvendo per  $v_{max}$ , otteniamo:

Velocità Limite

La velocità limite  $v_{max}$  è la velocità alla quale la forza di resistenza dell'aria bilancia la forza di gravità:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2mg}{C_d\rho A}}$$

### 5.10.3 Equazione della Velocità

Integrando l'equazione del moto, possiamo trovare la velocità dell'oggetto come funzione del tempo. Partendo dall'equazione:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{1}{2}C_d\rho Av^2 \quad (134)$$

Possiamo separare le variabili e integrare:

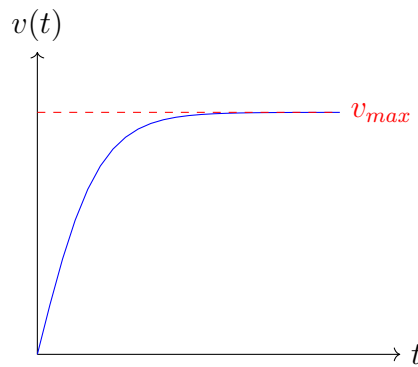
$$\int \frac{dv}{g - \frac{1}{2m}C_d\rho A v^2} = \int dt \quad (135)$$

Risolvendo questa equazione, otteniamo:

Velocità in funzione del tempo

La velocità dell'oggetto in funzione del tempo è data da:

$$v(t) = v_{max} \tanh\left(\frac{gt}{v_{max}}\right)$$



#### 5.10.4 Equazione della Posizione

Integrando nuovamente l'equazione della velocità, otteniamo la posizione dell'oggetto come funzione del tempo. Partendo dall'equazione:

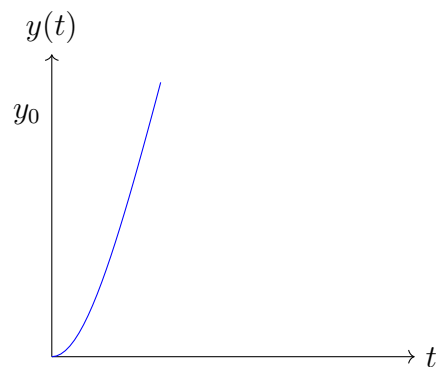
$$\frac{dy}{dt} = v_{max} \tanh\left(\frac{gt}{v_{max}}\right) \quad (136)$$

Integrando rispetto al tempo, otteniamo:

Posizione in funzione del tempo

La posizione dell'oggetto in funzione del tempo è data da:

$$y(t) = y_0 - \frac{v_{max}^2}{g} \ln\left(\cosh\left(\frac{gt}{v_{max}}\right)\right)$$



## Riassunto delle Formule della Caduta di un Grave

### Componenti dell'Accelerazione

- Accelerazione:

$$a = g - \frac{1}{2m}C_d\rho A v^2$$

### Velocità

- Velocità limite:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2mg}{C_d\rho A}}$$

- Velocità in funzione del tempo:

$$v(t) = v_{max} \tanh\left(\frac{gt}{v_{max}}\right)$$

### Posizione

- Posizione in funzione del tempo:

$$y(t) = y_0 - \frac{v_{max}^2}{g} \ln\left(\cosh\left(\frac{gt}{v_{max}}\right)\right)$$

## 5.11 Approfondimento: moto armonico

### 5.11.1 Introduzione

Gli oscillatori armonici smorzati sono modelli fondamentali in fisica utili per descrivere sistemi che subiscono forze resistive come l'attrito o la resistenza dell'aria. Questa sezione esamina i diversi regimi di smorzamento, tra cui smorzato, sovrasmorzato e criticamente smorzato, evidenziando le loro caratteristiche e comportamenti attraverso dettagli matematici e grafici.

#### Oscillatore Armonico

Un oscillatore armonico è un sistema che oscilla attorno a una posizione di equilibrio in modo sinusoidale.

La forza ripristinatrice, proporzionale allo spostamento dalla posizione di equilibrio, è data dalla legge di Hooke. La frequenza naturale di oscillazione è determinata dalle proprietà meccaniche del sistema, come la massa  $m$  e la costante elastica  $k$ .

#### Smorzamento

Lo smorzamento è un fenomeno fisico che riduce l'ampiezza delle oscillazioni di un oscillatore a causa di forze resistive.

Queste forze, come l'attrito o la resistenza dell'aria, agiscono in direzione opposta al movimento e causano una riduzione graduale dell'ampiezza delle oscillazioni nel tempo. La forza di smorzamento è proporzionale alla velocità del sistema e viene descritta da un coefficiente di smorzamento  $\beta$ .

### 5.11.2 Equazione del Moto per un Oscillatore Armonico Smorzato

Consideriamo un oscillatore armonico di massa  $m$ , con una molla di costante elastica  $k$ , e un termine di smorzamento proporzionale alla velocità, rappresentato da un coefficiente  $\beta$ . La forza totale  $F$  che agisce sul sistema è data da:

$$F = -kx - \beta \frac{dx}{dt} \quad (137)$$

Dove  $x(t)$  rappresenta lo spostamento dalla posizione di equilibrio.

Secondo la seconda legge di Newton, la somma delle forze è uguale alla massa per l'accelerazione:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta \frac{dx}{dt} \quad (138)$$

Riorganizzando l'equazione, otteniamo:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (139)$$

Dividendo entrambi i lati per  $m$ , otteniamo l'equazione differenziale del moto per un

oscillatore armonico smorzato, otteniamo le seguenti semplificazioni:

$$\begin{aligned} 2\gamma &= \frac{\beta}{m} \\ \omega_0^2 &= \frac{k}{m} \end{aligned} \quad (140)$$

Dove il termine  $\gamma$  viene chiamato **coefficiente di smorzamento** e  $\omega_0$  **pulsazione naturale o propria** del sistema.

Possiamo dunque scrivere:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (141)$$

dove:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2} \quad (142)$$

è la **pulsazione**.

### 5.11.3 Oscillatore armonico smorzato

Quando il rapporto di smorzamento  $\gamma < \omega_0$ , il sistema è **smorzato**, la soluzione dell'equazione differenziale può essere ottenuta tramite il metodo degli zeri delle radici caratterizzanti.

Assumiamo una soluzione del tipo:

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad (143)$$

Sostituendo questa forma nell'equazione differenziale, otteniamo l'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (144)$$

Le radici di questa equazione sono:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (145)$$

Ricordiamo che:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (146)$$

Nel caso smorzato ( $\gamma < \omega_0$ ), le radici sono complesse coniugate e quindi:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega \quad (147)$$

dove:

$$x(t) = Ae^{(-\gamma+i\omega)t} + Be^{(-\gamma-i\omega)t} \quad (148)$$

Per **smorzamenti deboli** si ottiene la seguente relazione:

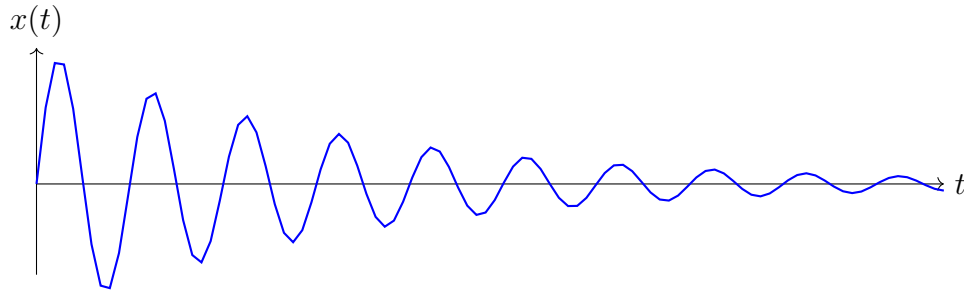
$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) \quad (149)$$

Il termine esponenziale  $e^{-\gamma t}$  rappresenta l'ampiezza decrescente, mentre  $\omega$  è la frequenza di oscillazione smorzata.

### Oscillazione Smorzata

Nel caso di smorzamento sottocritico ( $\gamma < \omega_0$ ), l'oscillatore continua a oscillare, ma con ampiezza decrescente nel tempo.

La frequenza di oscillazione  $\omega_d$  è inferiore alla frequenza naturale  $\omega$  e diminuisce man mano che  $\gamma$  aumenta.



#### 5.11.4 Oscillatore armonico sovrasmorzato

Quando  $\gamma > \omega_0$ , il sistema è **sovrasmorzato**. La soluzione dell'equazione differenziale è:

$$x(t) = Ae^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + Be^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \quad (150)$$

Dove  $A$  e  $B$  sono costanti determinate dalle condizioni iniziali. In questo regime, la risposta del sistema è caratterizzata da una decrescita monotona verso lo stato di equilibrio, senza oscillazioni. Nel caso sovrasmorzato, le radici dell'equazione caratteristica sono reali e distinte:

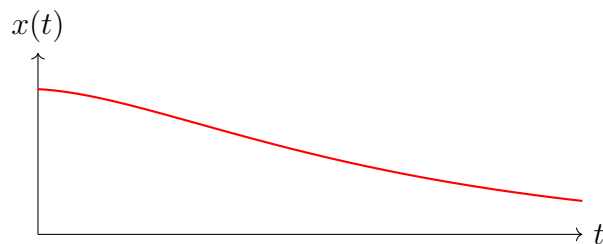
$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (151)$$

Pertanto, la soluzione è una combinazione lineare di due termini esponenziali con tassi di smorzamento differenti.

### Oscillazione Sovrasmorzata

Nel caso di smorzamento sovrasmorzato ( $\gamma > \omega_0$ ), il sistema ritorna al punto di equilibrio senza oscillare.

La risposta è caratterizzata da una decrescita più veloce rispetto al caso criticamente smorzato.



### 5.11.5 Oscillatore criticamente smorzato

Quando  $\gamma = \omega_0$ , il sistema è **criticamente smorzato**, la soluzione dell'equazione differenziale è:

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\omega t} \quad (152)$$

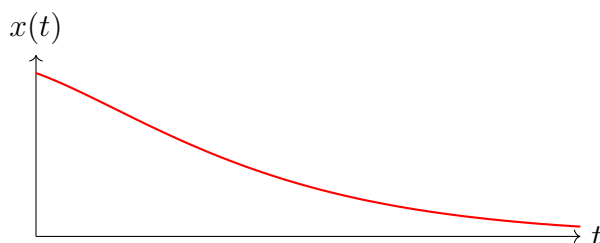
Dove  $A$  e  $B$  sono costanti determinate dalle condizioni iniziali. In questo caso, la risposta del sistema è caratterizzata da una decrescita esponenziale senza oscillazioni, nel caso criticamente smorzato, le radici dell'equazione caratteristica sono coincidenti:

$$\gamma^2 = \omega_0^2 \quad (153)$$

Pertanto, la soluzione è una funzione esponenziale combinata con un termine lineare, che garantisce il ritorno più rapido al punto di equilibrio senza oscillazioni.

#### Oscillazione Criticamente Smorzata

Nel caso di smorzamento critico ( $\gamma = \omega_0$ ), il sistema ritorna al punto di equilibrio il più rapidamente possibile senza oscillare.



### 5.11.6 Osservazioni

I diversi regimi di smorzamento di un oscillatore armonico mostrano come la risposta del sistema possa variare significativamente a seconda del valore del rapporto di smorzamento  $\gamma$ :

- **Oscillatore Smorzato** ( $\gamma < \omega_0$ ): Presenta un comportamento oscillatorio con ampiezza decrescente. La frequenza di oscillazione smorzata  $\omega_d$  è inferiore alla frequenza naturale  $\omega$ , e il sistema continua a oscillare, ma con ampiezza che diminuisce esponenzialmente.
- **Oscillatore Sovrasmorzato** ( $\gamma > \omega_0$ ): Ritorna al punto di equilibrio senza oscillare, ma con una risposta più lenta. Il sistema ha una risposta caratterizzata da una decrescita monotona verso lo stato di equilibrio.
- **Oscillatore Criticamente Smorzato** ( $\gamma = \omega_0$ ): Offre il ritorno più rapido al punto di equilibrio senza oscillazioni. Questo comportamento è ideale per applicazioni in cui è cruciale minimizzare il tempo di risposta e evitare oscillazioni.

## 5.12 Alcuni esempi

**Esercizio 1** Consideriamo la posizione di un oggetto che si muove lungo una linea retta, descritta dalla funzione  $s(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$ :

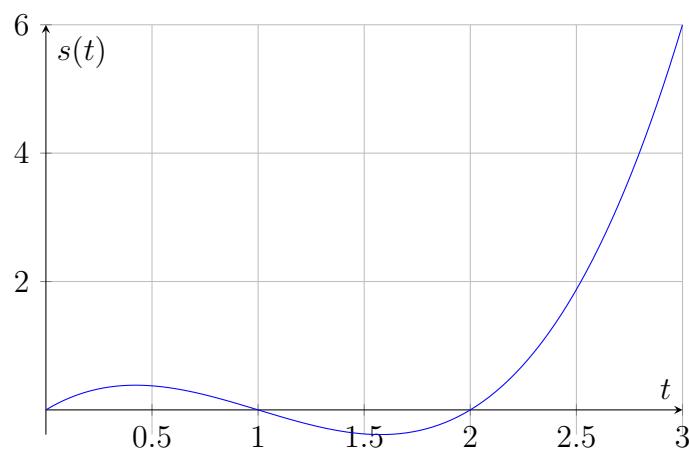


Figure 7: Posizione di un oggetto in funzione del tempo.

La velocità dell'oggetto è la derivata della posizione rispetto al tempo:

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = 3t^2 - 6t + 2 \quad (154)$$

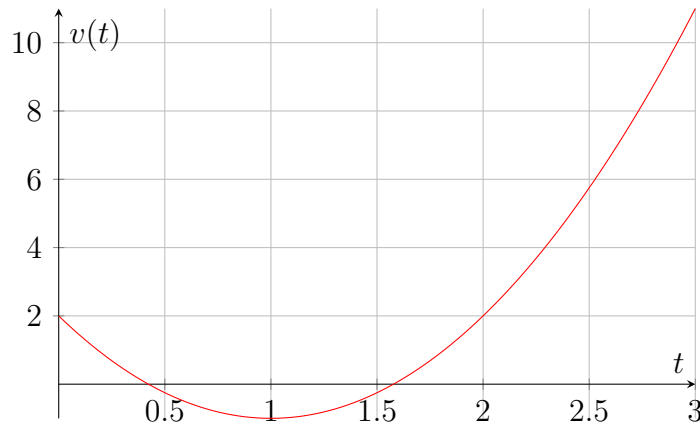


Figure 8: Velocità dell'oggetto in funzione del tempo.

**Esercizio 2** Consideriamo la velocità di un oggetto descritta dalla funzione  $v(t) = 3t^2 - 6t + 2$  (la stessa ottenuta nell'esercizio di prima). La posizione dell'oggetto è l'integrale della velocità rispetto al tempo:

$$s(t) = \int (3t^2 - 6t + 2) dt = t^3 - 3t^2 + 2t + C \quad (155)$$

dove  $C$  è una costante di integrazione che dipende dalle condizioni iniziali.



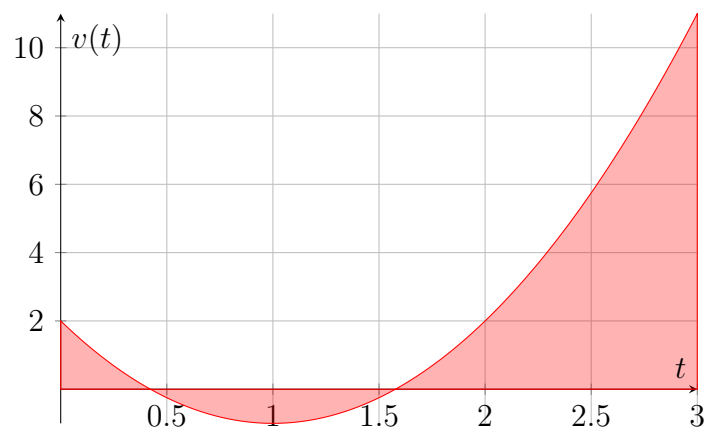


Figure 9: Velocità come funzione del tempo. L'integrale di questa funzione fornisce la posizione.

**Esercizio 3** Consideriamo un'automobile che si muove lungo una strada, con una velocità variabile nel tempo data dalla funzione  $v(t) = 2t$ . Per trovare lo spostamento dell'automobile tra  $t = 0$  e  $t = 3$ , dobbiamo integrare la funzione velocità:

$$s(t) = \int_0^3 2t \, dt = [t^2]_0^3 = 9 - 0 = 9 \text{ unità di distanza} \quad (156)$$

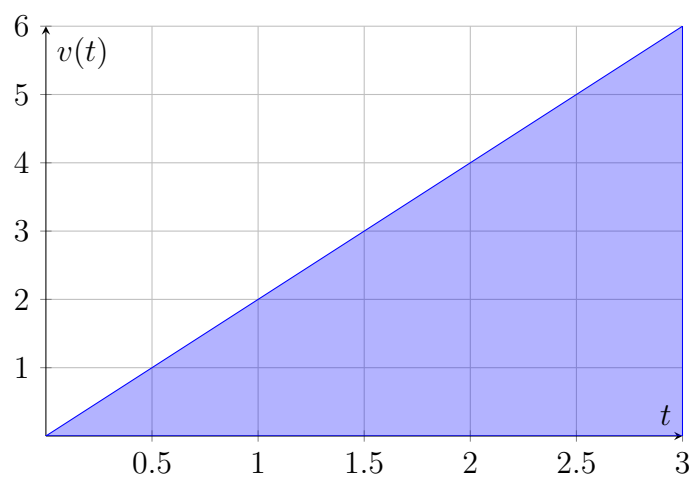


Figure 10: Calcolo dello spostamento come area sotto la curva della velocità.

## 6 Dinamica

A differenza della cinematica, che descrive il moto senza considerare le cause, la dinamica si occupa delle forze e delle leggi che governano il movimento.

### Dinamica

Lo studio delle cause delle variazioni di moto.

È utile osservare che in questa sede ci proporremo di approfondire la *dinamica del punto*, considerando solo moti di traslazione, dove la direzione dell'oggetto resta invariata. Inoltre daremo per scontato di essere in presenza di sistemi di riferimento inerziali

### 6.1 I Principi di Newton

I principi di Newton sono pari ai postulati geometrici, tanto intuitivi quanto indimostrabili, universalmente accettati e mai confutati fino ad ora. Occorre precisare che sono validi esclusivamente per sistemi inerziali.

#### 6.1.1 I Principio di Newton

Il primo principio di Newton, o principio d'inerzia, afferma che:

##### I Principio di Newton

Un corpo mantiene il suo stato di moto o di quiete se non intervengono forze a modificarlo.

La variazione di velocità di un corpo è dovuta all'azione di una forza:

$$\sum \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \text{costante} \quad (157)$$

#### 6.1.2 II Principio di Newton

##### II Principio di Newton

L'interazione di corpo con l'ambiente circostante, espressa dalla forza  $\mathbf{F}$ , determina l'accelerazione del punto secondo un fattore di proporzionalità  $m$ , chiamato **massa inerziale**

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (158)$$

dove:

- $\mathbf{F}$  è la forza applicata al corpo
- $m$  è la massa *inerziale* del corpo, esprime la resilienza di un corpo nel cambiare la velocità
- $\mathbf{a}$  è l'accelerazione del corpo

Dimensionalmente una forza si esprime in  $\frac{Kgm}{s^2}$ , e si indica in modo compatto con N.

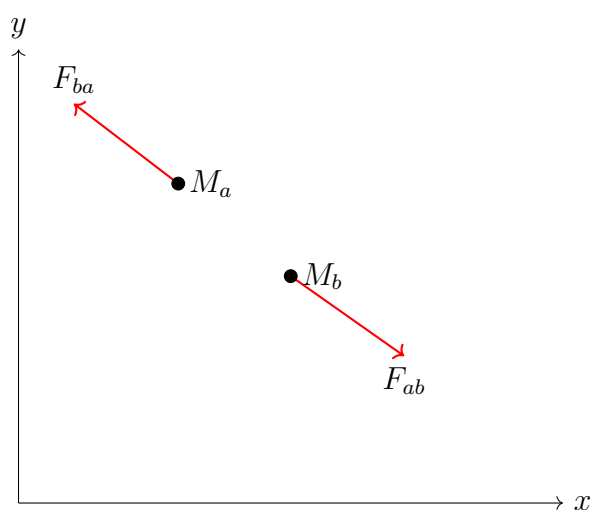
### 6.1.3 III Principio di Newton

Il terzo principio di Newton, chiamato anche principio di azione o reazione, si riferisce a due corpi di massa  $M_a$  e  $M_b$  indicati col nome di :

- **Sorgente** ( $M_a$ ): la quale provoca un'azione sulla sonda.
- **Sonda** ( $M_b$ ): la quale subisce l'azione della sonda e ne esercita a sua volta una sulla sorgente.

#### III Principio di Newton

Se un oggetto di massa  $M_a$  esercita una forza su  $M_b$  (azione), allora  $M_b$  esercita una forza su  $M_a$  (reazione) uguale (modulo) e contraria (verso), sulla stessa retta di azione (direzione).



$$\mathbf{F}_{ab} = -\mathbf{F}_{ba} \quad (159)$$

Dove  $\mathbf{F}_{ab}$  è la forza esercitata dal corpo a sul corpo b e  $\mathbf{F}_{ba}$  è la forza esercitata dal corpo b sul corpo a.

## 6.2 Le Forze

Ciò che deduciamo dai 3 principi è che le forze sono delle grandezze vettoriali capaci di produrre un'accelerazione e conseguentemente una variazione di velocità<sup>3</sup>; il terzo principio afferma che le forze sono agiscono sempre in coppia: un'azione provocherà inevitabilmente una reazione.

Osserviamo infine che le forze sono delle grandezze legate alle **interazioni**, dunque non si parlerà mai di un  $\Delta \mathbf{F}$ , ma solo e esclusivamente di  $\mathbf{F}$ :

$$\int d\mathbf{F} = \mathbf{F} \neq \Delta \mathbf{F} \quad (160)$$

Un corpo non "possiede" 5 Newton, ma potrà solo esercitarli o subirli.  
A seguito alcuni tipi di forze utile per le future applicazioni

<sup>3</sup>Notare bene che dire che le forze producono velocità è sbagliato

### 6.2.1 Forza Peso

#### Formula della Forza Peso

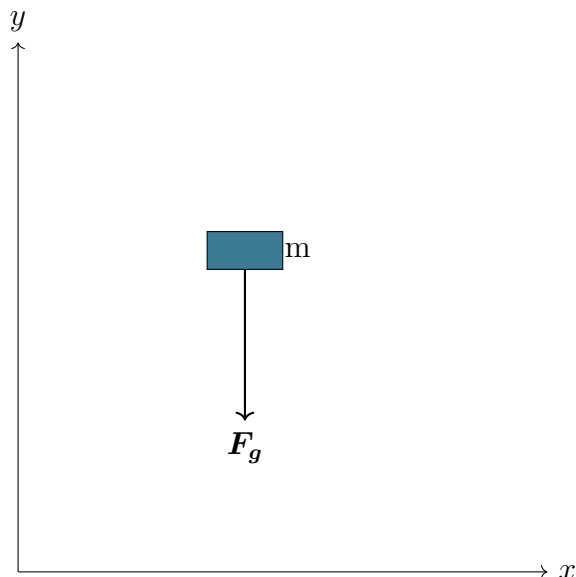
La forza peso ( $\mathbf{F}_p$ ) è la forza con cui la Terra attrae un corpo verso il suo centro. È una forza che agisce verticalmente verso il basso.

La forza peso può essere calcolata usando la formula:

$$\mathbf{F}_p = m\mathbf{g} \quad (161)$$

dove:

- $m$  è la massa del corpo
- $\mathbf{g}$  è l'accelerazione di gravità (circa  $9.8 \text{ m/s}^2$  sulla superficie terrestre)



### 6.2.2 Forza Normale

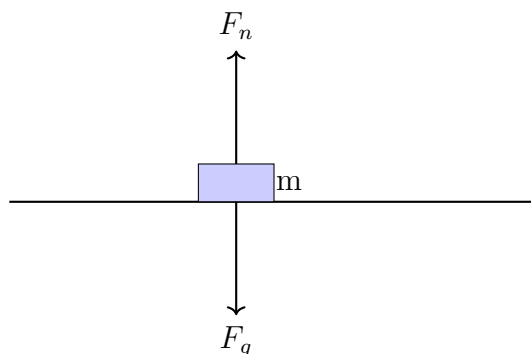
#### Forza Normale

La forza normale ( $\mathbf{F}_n$ ) è la forza perpendicolare alla superficie di contatto tra due oggetti. Bilancia la componente perpendicolare di altre forze (come la forza peso) per mantenere l'equilibrio.

La forza normale dipende dalla situazione specifica, ma in molti casi è uguale alla forza peso se non ci sono altre forze verticali:

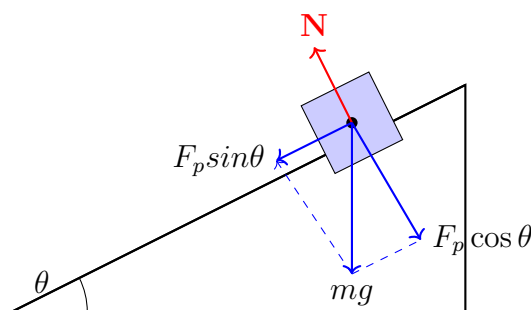
$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_g = m\mathbf{g} \quad (162)$$

Come si può osservare nel seguente grafico:



Dove la forza normale bilancia la forza peso.

Tuttavia la forza normale non vale sempre  $mg$ , appena introdotte delle forze verticali la forza normale cambia di modulo:



Effettuando la scomposizione della forza peso con i versori ortogonali alla superficie otteniamo:

$$F_{p_x} = mg \cos \theta \quad (163)$$

$$F_{p_y} = mg \sin \theta \quad (164)$$

Si osserva subito che la forza normale in questo caso dipende anche dall'angolo di inclinazione del piano:

$$N = mg \cos \theta \quad (165)$$

**Le forze d'attrito** ( $F_{\text{attrito}}$ ) sono le forze che si oppongono al movimento relativo tra due superfici a contatto. Esistono due tipi principali di attrito: **statico** e **dinamico**.

### 6.2.3 Attrito Statico

#### Attrito Statico

La forza d'attrito statico ( $f_s$ ) è la forza che impedisce a un oggetto di iniziare a muoversi.

Può essere calcolata come:

$$f_s \leq \mu_s F_n \quad (166)$$

dove:

- $\mu_s$  è il coefficiente di attrito statico
- $F_n$  è la forza normale

### 6.2.4 Attrito Dinamico

#### Attrito Dinamico

La forza d'attrito dinamico ( $f_d$ ) è la forza che si oppone al movimento di un oggetto che è già in moto.

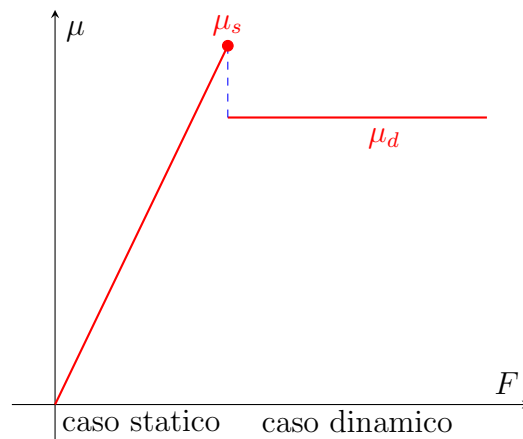
È calcolata come:

$$f_d = \mu_d F_n \quad (167)$$

dove:

- $\mu_d$  è il coefficiente di attrito dinamico
- $F_n$  è la forza normale

A seguito un grafico che illustra il rapporto tra  $\mu_s$  e  $\mu_d$



### 6.2.5 Forza Centripeta

#### Forza Centripeta

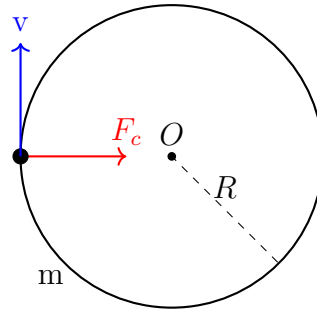
La forza centripeta ( $F_c$ ) è la forza che mantiene un oggetto in moto circolare, agendo verso il centro del cerchio.

La forza centripeta può essere calcolata usando la formula:

$$F_c = m \frac{v^2}{r} \mu_r \quad (168)$$

dove:

- $m$  è la massa inerziale dell'oggetto
- $v$  è la velocità dell'oggetto
- $r$  è il raggio della traiettoria circolare



### 6.2.6 Tensione

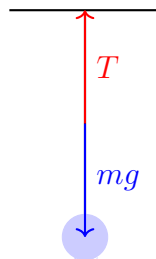
La tensione, indicata comunemente con la lettera  $\mathbf{T}$ , è una forza di trazione che agisce su un oggetto attraverso un filo, una corda, un cavo o una catena.

#### Tensione

La tensione è una forza diretta lungo la lunghezza del filo e agisce verso il centro del filo; si sviluppa nei fili o nei cavi quando sono soggetti a forze esterne.

**Fili Ideali** Un filo ideale è un filo che ha massa trascurabile, non si allunga sotto tensione e non ha attrito; in queste condizioni, **la tensione è omogeneamente distribuita**.

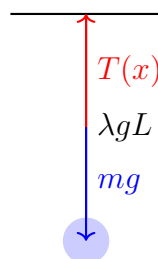
Consideriamo un filo ideale che sostiene una massa  $m$ ; la tensione nel filo sarà uguale alla forza gravitazionale che agisce sulla massa.



$$\mathbf{T} = m\mathbf{g} \quad (169)$$

**Fili Reali** Nei fili reali, la massa del filo e il suo allungamento sotto tensione devono essere considerati. La tensione non è uniforme lungo la lunghezza del filo a causa del peso del filo stesso.

Quando la massa del filo non è trascurabile, la tensione varia lungo la lunghezza del filo; in un filo con densità lineare di massa  $\lambda$  (massa per unità di lunghezza).



In questo caso, la tensione in un punto  $x$  lungo il filo può essere calcolata come:

$$\mathbf{T}(x) = \lambda g(L - x) + mg \quad (170)$$

dove:

- $\mathbf{T}(x)$  è la tensione a una distanza  $x$  dalla cima del filo.
- $\lambda$  è la densità lineare di massa del filo.
- $g$  è l'accelerazione dovuta alla gravità.
- $L$  è la lunghezza totale del filo.
- $m$  è la massa sospesa al filo.

### 6.2.7 Forze Elastiche

#### Forze elastiche

Le forze elastiche sono quelle forze che si manifestano quando un materiale elastico viene deformato e cerca di tornare alla sua forma originale.

Queste forze sono descritte principalmente dalla legge di Hooke, che è una relazione lineare tra la forza esercitata da una molla e la sua deformazione.

**La Legge di Hooke** afferma che la forza esercitata da una molla è direttamente proporzionale alla sua estensione o compressione. Matematicamente, questa legge è espressa come:

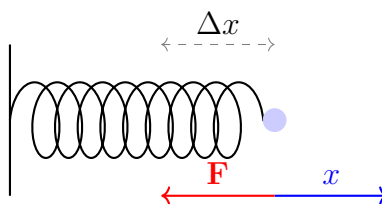
$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x} \quad (171)$$

dove:

- $\mathbf{F}$  è la forza esercitata dalla molla,
- $k$  è la costante elastica della molla (o costante di Hooke),
- $\mathbf{x}$  è la deformazione della molla rispetto alla posizione di equilibrio.

Il segno negativo indica che la forza esercitata dalla molla è opposta alla direzione della deformazione.

**Esempio** Consideriamo una molla con una costante elastica  $k$  che viene compressa di una distanza  $x$  dalla sua posizione di equilibrio.





In questo esempio, la forza elastica  $\mathbf{F}$  esercitata dalla molla è proporzionale alla compressione  $x$  e punta nella direzione opposta, cercando di riportare la molla alla sua posizione di equilibrio.

Per trovare l'equazione del moto è sufficiente riscrivere la legge di Hooke come:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (172)$$

Indicando con  $\omega$ :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (173)$$

La soluzione dell'equazione del moto per questo sistema è una funzione armonica:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (174)$$

dove:

- $A$  è l'ampiezza dell'oscillazione,
- $\omega$  è la frequenza angolare,
- $\phi$  è la fase iniziale.

**Esempio** Supponiamo di avere una molla con una costante elastica  $k = 200 \text{ N/m}$  e una massa di  $m = 2 \text{ kg}$  attaccata ad essa. Calcoliamo la frequenza angolare delle oscillazioni.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200 \text{ N/m}}{2 \text{ kg}}} = \sqrt{100 \text{ Hz}^2} = 10 \text{ Hz} \quad (175)$$

Quindi, la frequenza angolare delle oscillazioni è 10 Hz.

### 6.3 Quantità di Moto

La quantità di moto, o momento lineare, di un corpo è una grandezza fisica vettoriale che indica la **proprietà di un corpo** definita come il prodotto tra la massa  $m$  del corpo e la sua velocità  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (176)$$

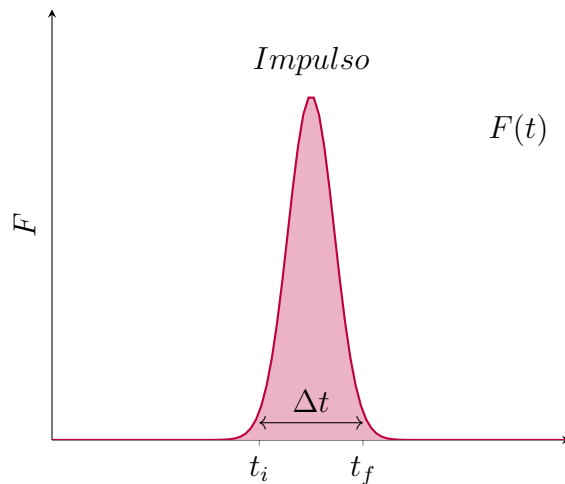
dove:

- $\mathbf{p}$  è la quantità di moto,
- $m$  è la massa del corpo,
- $\mathbf{v}$  è la velocità del corpo.

L'unità di misura della quantità di moto nel Sistema Internazionale (SI) è il chilogrammo metro al secondo ( $\text{kg} \cdot \text{m/s}$ ).

## 6.4 Impulso

L'impulso  $\mathbf{J}$  è una grandezza fisica vettoriale usata per indicare le **interazioni tra particelle** che coinvolgono forze che operano per lassi di tempo molto brevi, è molto utile per descrivere interazioni molto veloci e "esplosive" tra due particelle:



Formalmente l'impulso viene definito come il prodotto tra una forza  $\mathbf{F}$  e l'intervallo di tempo  $\Delta t$  durante il quale la forza agisce:

$$\mathbf{J} = \int d\mathbf{J} = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{F}(t) dt \quad (177)$$

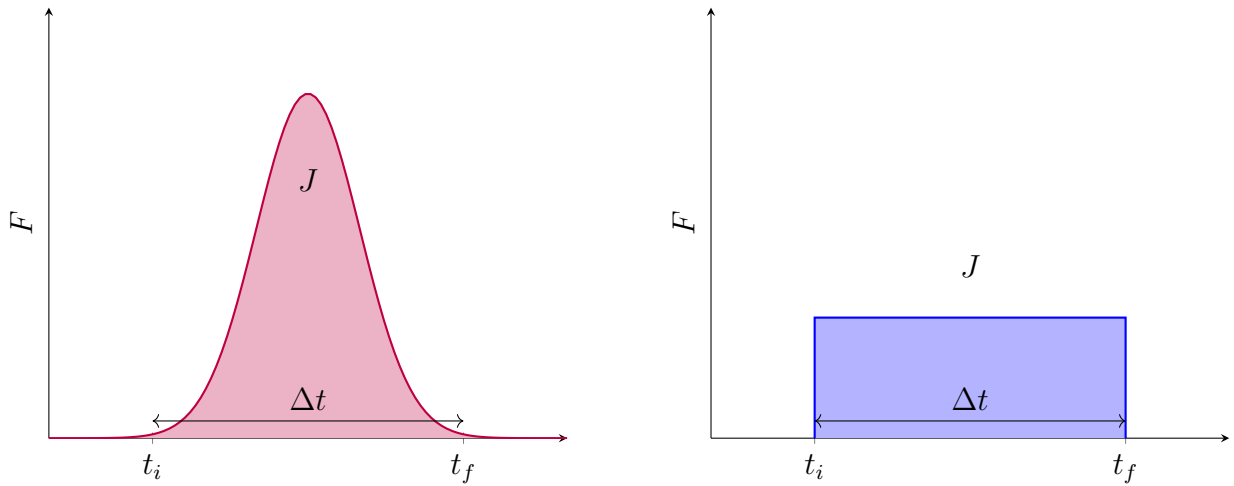
dove:

- $\mathbf{J}$  è l'impulso,
- $\mathbf{F}$  è la forza applicata,
- $\Delta t$  è l'intervallo di tempo durante il quale la forza agisce.

L'unità di misura dell'impulso nel Sistema Internazionale (SI) è il Newton secondo (Ns).

Quando si trattano gli impulsi è utile sfruttare la media integrale per ricavare il valore *medio* della forza durante la durata dell'impulso: infatti dal momento che gli impulsi avvengono per definizione per lassi di tempo molto brevi è possibile avvalersi della **forza media**:

$$\mathbf{F}_{media} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{F} dt \quad (178)$$



Come illustrato dai grafici sopra stanti la media integrale permette di riscrivere l'area sottesa da una funzione irregolare in una più semplice da calcolare, possiamo dunque riscrivere l'impulso come espressione di una forza media.

Questa osservazione ci permette di riscrivere l'impulso come:

$$\mathbf{J} = \mathbf{F}_{media} \Delta t \quad (179)$$

## 6.5 Teorema dell'impulso

### 6.5.1 Enunciato

#### Teorema dell'impulso

Il teorema dell'impulso, afferma che la variazione della quantità di moto di un corpo è uguale all'impulso della risultante delle forze agenti su di esso:

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{J} = \mathbf{F} \Delta t \quad (180)$$

### 6.5.2 Dimostrazione

Consideriamo un corpo di massa  $m$  soggetto a una forza risultante  $\mathbf{F}$ . Secondo la seconda legge di Newton, l'accelerazione  $\mathbf{a}$  del corpo è data da:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (181)$$

Sapendo che l'accelerazione è la derivata della velocità rispetto al tempo, possiamo scrivere:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (182)$$

Quindi, la forza risultante può essere espressa come:

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (183)$$

Moltiplichiamo entrambi i membri dell'equazione per  $dt$ :

$$\mathbf{F} dt = m d\mathbf{v} \quad (184)$$

Integrando entrambi i membri dell'equazione rispetto al tempo da  $t_0$  a  $t_1$ , otteniamo:

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} dt = m \int_{t_0}^{t_1} d\mathbf{v} \quad (185)$$

Poiché l'integrale della forza nel tempo è l'impulso  $\mathbf{J}$  e l'integrale della derivata della velocità è la variazione della velocità  $\Delta \mathbf{v}$ , possiamo scrivere:

$$\mathbf{J} = m\Delta \mathbf{v} \quad (186)$$

Sapendo che  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0$  e che la quantità di moto è definita come  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ , possiamo riscrivere la relazione sopra come:

$$\mathbf{J} = m(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) = m\mathbf{v}_1 - m\mathbf{v}_0 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 = \Delta \mathbf{p} \quad (187)$$

Quindi, abbiamo dimostrato che:

$$\mathbf{J} = \Delta \mathbf{p} \quad (188)$$

**Osservazioni** una sottigliezza che potrebbe sfuggire è che *a livelllo differenziale* l'impulso e la quantità di moto sono uguali:

$$d\mathbf{J} = d\mathbf{p} \quad (189)$$

Tuttavia non bisogna dimenticare che l'impulso e la quantità di moto sono grandezze di classe diversa: l'**impulso** rappresenta un'**interazione** tra più corpi, mentre la **quantità di moto** rappresenta la **proprietà** di un corpo:

$$\mathbf{p} \neq \mathbf{J} \quad (190)$$

**Esempio** Per visualizzare meglio il teorema della quantità di moto, consideriamo il seguente esempio: supponiamo di avere un oggetto di massa  $m$  inizialmente a riposo ( $\mathbf{v}_0 = 0$ ). Una forza costante  $\mathbf{F}$  viene applicata per un intervallo di tempo  $\Delta t$ . L'accelerazione risultante è  $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}$ . La velocità finale dell'oggetto sarà:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}\Delta t = 0 + \frac{\mathbf{F}}{m}\Delta t = \frac{\mathbf{F}\Delta t}{m} \quad (191)$$

La quantità di moto iniziale era zero ( $\mathbf{p}_0 = 0$ ), e quella finale è:

$$\mathbf{p}_1 = m\mathbf{v}_1 = m \left( \frac{\mathbf{F}\Delta t}{m} \right) = \mathbf{F}\Delta t \quad (192)$$

La variazione della quantità di moto è quindi:

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 = \mathbf{F}\Delta t - 0 = \mathbf{F}\Delta t \quad (193)$$

Confermando il teorema della quantità di moto:

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{I} = \mathbf{F}\Delta t \quad (194)$$

## 6.6 Teorema della conservazione della quantità di moto

### 6.6.1 Enunciato

#### Teorema della quantità di moto

Il teorema della conservazione della quantità di moto è un principio fondamentale della meccanica classica che afferma che la quantità di moto totale di un sistema isolato rimane costante nel tempo, a meno che non agiscano delle forze

$$\sum \mathbf{F} = 0 \rightarrow \Delta \mathbf{p} = 0 \rightarrow \mathbf{p}_{fin} = \mathbf{p}_{in} \quad (195)$$

### 6.6.2 Dimostrazione

Dalla relazione:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (196)$$

Deduciamo che se:

$$\mathbf{F} = 0 \quad (197)$$

Allora necessariamente:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \quad (198)$$

Ma allora:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{p} = \text{costante} \quad (199)$$

Questo dimostra il teorema della conservazione della quantità di moto: **in un sistema isolato, la quantità di moto totale rimane costante.**

### 6.6.3 Applicazioni della Conservazione della Quantità di Moto

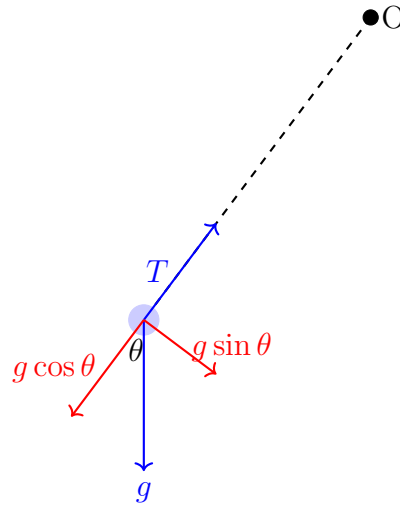
La conservazione della quantità di moto è applicabile in molte situazioni pratiche, come le collisioni elastiche e anelastiche, i sistemi di particelle, la dinamica dei fluidi e molto altro.

**Collisioni** Nelle collisioni tra particelle, la quantità di moto totale del sistema è conservata. Questo principio permette di determinare le velocità delle particelle dopo la collisione.

**Sistemi di Particelle** La conservazione della quantità di moto è essenziale per lo studio dei sistemi di particelle, come i gas, dove le interazioni tra particelle possono essere complicate, ma la quantità di moto totale del sistema rimane invariata.

## 6.7 Pendolo Semplice

Prendiamo un pendolo semplice di lunghezza  $L$  con una massa attaccata all'estremo:



Notiamo che la scomposizione della forza peso grazie all'angolo  $\theta$  rispetto alla verticale permette di scrivere:

$$\sum F_y = T - mg \cos \theta = 0 \quad (200)$$

$$\sum F_x = -mg \sin \theta = m a_t \quad (201)$$

Dove  $a_t$  indica l'accelerazione tangenziale:

$$a_t = \alpha r = r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (202)$$

Quindi considerando l'asse del filo e quello ortogonale possiamo scrivere l'ultima equazione come:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad (203)$$

Per piccoli angoli,  $\sin \theta \approx \theta$ , l'equazione diventa:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0 \quad (204)$$

Chiamiamo:

$$\omega^2 = \frac{g}{L} \quad (205)$$

La soluzione dell'equazione differenziale è dunque:

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (206)$$

Il periodo sarà uguale a:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (207)$$

## 7 Lavoro e Energie

### 7.1 Lavoro

#### Lavoro

Il lavoro è una grandezza scalare che rappresenta l'energia trasferita a un oggetto quando una forza viene applicata su di esso e provoca uno spostamento.

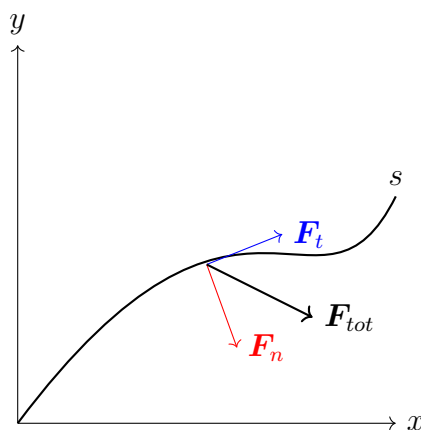
#### Energia

L'energia è una grandezza fondamentale che rappresenta la capacità di un sistema di compiere lavoro o di produrre cambiamenti.

La definizione formale del lavoro infinitesimo  $dW$  compiuto da una forza  $\mathbf{F}$  durante uno spostamento infinitesimo  $d\mathbf{s}$  è:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = |\mathbf{F}| |d\mathbf{s}| \cos \alpha \quad (208)$$

Al fine di agevolare i conti, può essere utile usare le *coordinate intrinseche*, scomponendo così la forza in una componente normale e in una trasversa:



La forza  $\mathbf{F}$  può essere scomposta nelle componenti tangenziale  $\mathbf{F}_t$  e normale  $\mathbf{F}_n$ :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_n \quad (209)$$

Il lavoro infinitesimo diventa:

$$dW = \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{s} + \mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{s} \quad (210)$$

Poiché  $\mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{s} = 0$ , il lavoro è dato solo dalla componente tangenziale:

$$dW = \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{s} \quad (211)$$

Per calcolare il lavoro  $W$  compiuto da una forza su un percorso  $\gamma$ , si integra il lavoro infinitesimo lungo il percorso:

$$W = \int dW = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (212)$$



Il lavoro rappresenta dunque una interazione tra due corpi, un corpo non potrà avere 5J di lavoro, ma potrà solamente compierli o subirli:

$$\int dW \neq \Delta W \quad (213)$$

## 7.2 Energia Cinetica

### 7.2.1 Cos'è

#### Energia cinetica

L'energia cinetica è una forma di energia associata al movimento di un corpo; è una grandezza scalare che dipende dalla massa del corpo e dalla sua velocità.

La definizione classica dell'energia cinetica  $K$  di un corpo di massa  $m$  che si muove con una velocità  $\mathbf{v}$  è data dalla formula:

$$dK = mv \, dv \quad (214)$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (215)$$

dove:

- $K$  è l'energia cinetica,
- $m$  è la massa del corpo,
- $v$  è la velocità del corpo.

### 7.2.2 Come si ricava

Consideriamo un corpo di massa  $m$  che si muove con una velocità  $\mathbf{v}$ . Vogliamo determinare l'energia cinetica di questo corpo utilizzando il concetto di lavoro e forza.

Il lavoro  $W$  fatto da una forza  $\mathbf{F}$  su un corpo che si sposta da una posizione iniziale  $\mathbf{r}_1$  a una posizione finale  $\mathbf{r}_2$  è dato da:

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (216)$$

Per un corpo di massa  $m$  sottoposto a una forza risultante  $\mathbf{F}$  che è costante, la forza è data da:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (217)$$

Dove  $\mathbf{a}$  è la derivata di  $v$  rispetto a  $t$ :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (218)$$

Il lavoro svolto dalla forza su un corpo che accelera da una velocità iniziale  $\mathbf{v}_1$  a una velocità finale  $\mathbf{v}_2$  può essere trovato integrando il prodotto della forza e il vettore spostamento:

$$W = \int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \, dt \quad (219)$$

Sostituendo  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ :

$$W = \int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} m\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \, dt \quad (220)$$

Utilizzando  $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ :

$$W = m \int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \, dt \quad (221)$$

Poiché  $d\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \, dt$ :

$$W = m \int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} \quad (222)$$

Questo integrale può essere calcolato come segue:

$$W = m \left[ \frac{1}{2} v^2 \right]_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} \quad (223)$$

$$W = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad (224)$$

Se il corpo parte da fermo ( $\mathbf{v}_1 = 0$ ) e accelera fino alla velocità  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$ , allora il lavoro fatto è uguale all'energia cinetica finale:

$$W = \frac{1}{2} m v^2 \quad (225)$$

Quindi, l'energia cinetica  $K$  è:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \quad (226)$$

### 7.2.3 Energia Cinetica in Sistemi a Più Corpi

In un sistema composto da più corpi, l'energia cinetica totale è la somma delle energie cinetiche di tutti i corpi. Se abbiamo un sistema di  $n$  corpi, l'energia cinetica totale  $K_{\text{tot}}$  è data da:

$$K_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (227)$$

dove  $m_i$  e  $v_i$  sono rispettivamente la massa e la velocità del  $i$ -esimo corpo.

## 7.3 Teorema dell'Energia-Lavoro

Il Teorema dell'Energia-Lavoro è un principio fondamentale della meccanica che stabilisce una relazione diretta tra il lavoro fatto su un oggetto e la variazione della sua energia cinetica.:

### 7.3.1 Enunciato

#### Teorema dell'Energia Lavoro

Il Teorema dell'Energia Lavoro afferma che il lavoro totale compiuto su un oggetto da tutte le forze esterne è uguale alla variazione dell'energia cinetica dell'oggetto.

$$W_{\text{tot}} = \Delta K \quad (228)$$

dove:

- $W_{\text{tot}}$  è il lavoro totale compiuto dalle forze esterne,
- $\Delta K$  è la variazione dell'energia cinetica.

### 7.3.2 Dimostrazione

Consideriamo un corpo di massa  $m$  che si muove lungo una traiettoria  $\gamma$ ; la variazione dell'energia cinetica dell'oggetto è:

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \quad (229)$$

Dove  $v_i$  e  $v_f$  sono le velocità iniziale e finale dell'oggetto, rispettivamente.

Il secondo principio della dinamica di Newton afferma che la forza netta  $\mathbf{F}_{\text{net}}$  agisce sul corpo e causa una variazione nella sua velocità. Questo può essere espresso come:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (230)$$

Il lavoro compiuto dalla forza netta mentre l'oggetto si sposta lungo una traiettoria  $\gamma$  è:

$$W = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (231)$$

L'accelerazione  $\mathbf{a}$  può essere espressa come la derivata della velocità rispetto al tempo:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (232)$$

Pertanto, il lavoro può essere espresso come:

$$W = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt \quad (233)$$

Poiché  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , sostituendo  $\mathbf{a}$  otteniamo:

$$W = \int_{t_i}^{t_f} m\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} dt \quad (234)$$

Ricordando che  $a = \frac{dv}{dt}$

$$W = m \int_{v_i}^{v_f} mv \, dv \quad (235)$$

L'integrale della derivata è la variazione della quantità integrata, quindi:

$$W = m \left[ \frac{1}{2} v^2 \right]_{t_i}^{t_f} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 \quad (236)$$

Pertanto, il lavoro totale compiuto dalle forze esterne è uguale alla variazione dell'energia cinetica:

$$W_{\text{tot}} = \Delta K \quad (237)$$

Questa conclusione conferma il Teorema dell'Energia-Lavoro.

## 7.4 Potenza

### Potenza

La potenza  $P$  è definita come il lavoro compiuto nell'unità di tempo.

Matematicamente, è data da:

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (238)$$

Se la forza è costante e agisce in una direzione costante, la potenza è data da:

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (239)$$

dove  $\mathbf{v}$  è la velocità del corpo.

## 7.5 Lavoro della Forza Peso

La forza peso  $\mathbf{F}_g$  è una forza costante che agisce verso il basso e la cui intensità è data da:

$$\mathbf{F}_g = -mg\boldsymbol{\mu}_y \quad (240)$$

dove  $m$  è la massa dell'oggetto e  $g$  è l'accelerazione dovuta alla gravità e  $\boldsymbol{\mu}_y$  indica il versore associato all'asse delle  $y$ .

Il lavoro  $W$  fatto dalla forza peso è dato da:

$$W = \int \mathbf{F}_g \cdot d\mathbf{s} \quad (241)$$

Posso scomporre  $d\mathbf{s}$  in:

$$d\mathbf{s} = dx\boldsymbol{\mu}_x + dy\boldsymbol{\mu}_y \quad (242)$$

Sviluppando il prodotto scalare:

$$W = \int -mg\boldsymbol{\mu}_y \cdot (dx\boldsymbol{\mu}_x + dy\boldsymbol{\mu}_y) = \int -mg\boldsymbol{\mu}_y \cdot dx\boldsymbol{\mu}_x + \int -mg\boldsymbol{\mu}_y dy\boldsymbol{\mu}_y \quad (243)$$

Ricordando che il prodotto scalare tra due vettori ortogonali tra loro è nullo:

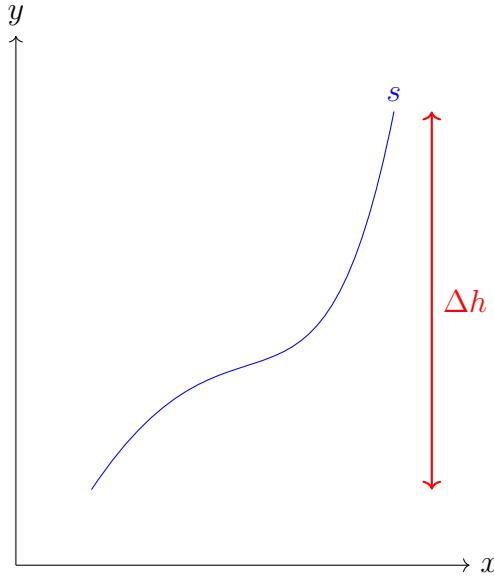
$$W = \int -mg\boldsymbol{\mu}_y \cdot d\mathbf{x}\boldsymbol{\mu}_x + \int -mg\boldsymbol{\mu}_y dy\boldsymbol{\mu}_y = -mg dy \quad (244)$$

Consideriamo un oggetto che si sposta verticalmente da un'altezza  $h_i$  a  $h_f$ ; osserviamo che la forza peso è costante e agisce lungo la direzione dell'asse  $y$ :

$$W = \int_{h_i}^{h_f} (-mg) dy = -mg(h_f - h_i) \quad (245)$$

$$W_{\text{peso}} = -mg\Delta h \quad (246)$$

Il lavoro svolto dalla forza peso dipende esclusivamente dalla **variazione di quota**:



Osserviamo il percorso seguito non è rilevante al fine dei calcoli, indicheremo in seguito questo genere di forze sotto il nome di **forze conservative** :

## 7.6 Lavoro delle Forze Elastiche

Le forze elastiche sono descritte dalla legge di Hooke, che afferma che la forza è proporzionale allo spostamento dalla posizione di equilibrio:

$$\mathbf{F}_e = -kx\boldsymbol{\mu}_x \quad (247)$$

dove  $k$  è la costante elastica e  $x$  è lo spostamento dalla posizione di equilibrio.

Il lavoro  $W$  fatto dalla forza elastica quando una molla viene compressa o allungata da una posizione  $x_i$  a una posizione  $x_f$  è dato da:

$$W = \int -kx ds \quad (248)$$

Analogamente a quanto visto per la forza peso, scomponiamo  $ds$ :

$$W = \int -kx\boldsymbol{\mu}_x \cdot (d\mathbf{x}\boldsymbol{\mu}_x + dy\boldsymbol{\mu}_y) = \int -kx\boldsymbol{\mu}_y \cdot d\mathbf{x}\boldsymbol{\mu}_x + \int -kx\boldsymbol{\mu}_y dy\boldsymbol{\mu}_y \quad (249)$$

Calcoliamo il prodotto scalare ricordandoci che il prodotto scalare tra due vettori ortogonali è nullo.

$$W = \int -kx \boldsymbol{\mu}_y \cdot d\mathbf{x} \boldsymbol{\mu}_x + \int -kx \boldsymbol{\mu}_x dy \boldsymbol{\mu}_x = -kx dx \quad (250)$$

Otteniamo alla fine la formula per il lavoro svolto da forze elastiche:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} -kx dx = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2) \quad (251)$$

Similarmente alla forza peso, il lavoro delle forze elastiche dipende esclusivamente dalla variazione di posizione lungo  $x$ , anche la forza elastica è una **forza conservativa**

## 7.7 Lavoro della Forza d'Attrito dinamico

La forza d'attrito dinamico <sup>4</sup>è una forza che si oppone allo spostamento  $d\mathbf{s}$  (che assoceremo lungo il versore  $\boldsymbol{\mu}_s$ ) e dipende dal coefficiente di attrito  $\mu_d$  e dalla forza normale  $N$ :

$$\mathbf{F}_d = -\mu_d N \boldsymbol{\mu}_s \quad (252)$$

Nel caso di un piano orizzontale, la forza normale è uguale al peso dell'oggetto, quindi:

$$\mathbf{F}_d = -\mu_d N \boldsymbol{\mu}_s \quad (253)$$

Il lavoro  $W$  fatto dalla forza d'attrito quando un oggetto si sposta su una distanza  $\gamma$  lungo un percorso qualsiasi è uguale a:

$$W = \int_{\gamma} \mathbf{F}_d d\mathbf{s} = \int_{\gamma} -\mu_d N \boldsymbol{\mu}_s \cdot d\mathbf{s} \quad (254)$$

Dove  $\boldsymbol{\mu}_s$  e  $d\mathbf{s}$  sono paralleli e con verso uguale:

$$W = \int_{\gamma} -\mu_d N \boldsymbol{\mu}_s \cdot d\mathbf{s} = -\mu_d N \|\gamma\| \quad (255)$$

Osserviamo che a differenza del lavoro della forza peso e della forza elastica il lavoro compiuto dall'attrito dipende dalla traiettoria percorsa: a tal proposito l'attrito **non è una forza conservativa**.

Inoltre l'attrito è sempre negativo: si indica questa proprietà con il nome di lavoro frenante **lavoro frenante**.

## 7.8 Lavoro delle forze ortogonali allo spostamento

Il lavoro dalle forze ortogonali allo spostamento, come la forza normale, o la forza di gravità subita da un corpo che si muove lungo un piano non inclinato è sempre pari a 0. tale proprietà è molto semplice da dimostrare ricordandosi che il prodotto scalare tra 2 vettori ortogonali è sempre nullo:

$$W = \int_{\gamma} \mathbf{F}_{\perp} d\mathbf{s} = 0 \quad (256)$$

---

<sup>4</sup>Non si può considerare il lavoro della forza d'attrito statico dal momento che a quest'ultima non è associato a uno spostamento

## 7.9 Forze Conservative

Una generica forza  $F$  si dice conservativa a patto che per ogni  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \dots \gamma_n$  tra due punti  $a$  e  $b$  nello spazio:

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\gamma_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad \forall \gamma_i \in \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \dots \gamma_n\} \quad (257)$$

Appare evidente dunque che due forze sono conservative se e solo se sono indipendenti dal percorso svolto, ma contano esclusivamente lo stato finale e lo stato iniziale.

### Forza conservativa (I)

Una forza è detta conservativa se il lavoro compiuto da essa dipende solo dai punti iniziale e finale del percorso, e non dal percorso stesso.

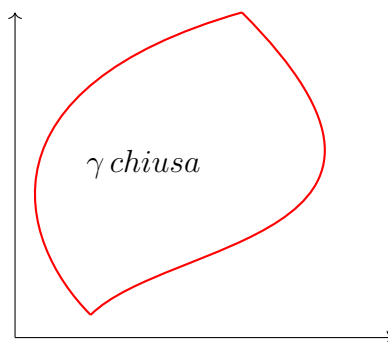
Formalmente questo concetto si illustra con l'integrale di linea, in particolare l'*integrale di linea lungo una curva chiusa*. Affinchè una forza sia conservativa è sufficiente che l'integrale lungo una linea chiusa valga zero, ovvero:

### Forza conservativa (II)

Una forza si dice conservativa se il lavoro compiuto lungo una traiettoria chiusa vale zero.

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (258)$$

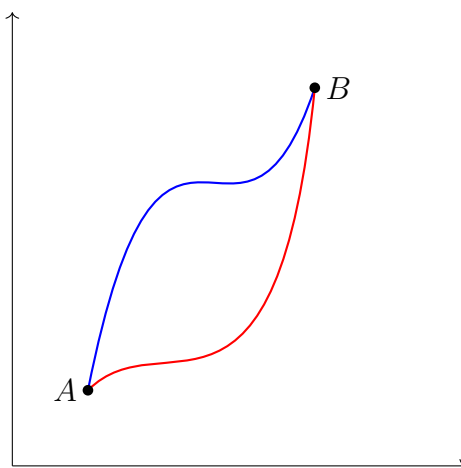
Dove il caso più banale è rappresentato da  $\gamma$  che è un punto: ovvero quando resto fermo.



Notiamo anche che per forze conservative il lavoro compiuto cambia di segno nel momento in cui inverte lo stato iniziale con quello finale<sup>5</sup>:

$$\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_b^a \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (259)$$

<sup>5</sup>Per osservare meglio questo fenomeno è sufficiente prendere una qualsiasi formula per il calcolo del lavoro compiuto per una forza conservativa e invertire  $x_i$  con  $x_f$



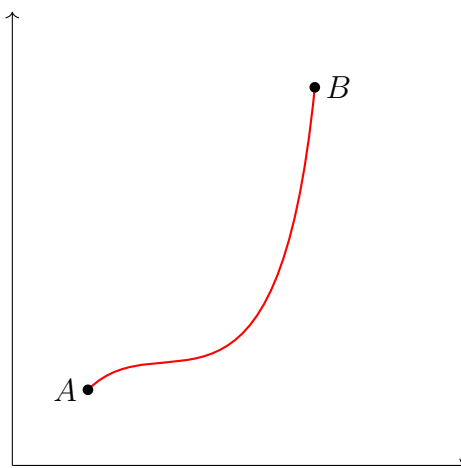
Nonostante i percorsi diversi, se i gli estremi finali rimangono invariati, per forze conservative avremmo sempre valida questa relazione:

$$W_{ab} = -W_{ba} \quad (260)$$

### 7.9.1 Approfondimento sulle forze conservative

Il fatto che una forza sia conservativa e dunque il lavoro compiuto dipenda esclusivamente dallo stato iniziale e finale può essere indicato anche come:

$$W_C = f(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) \quad (261)$$



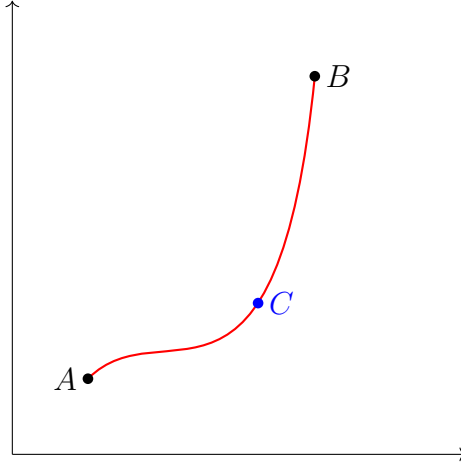
Dove  $W_C$  indica il lavoro svolto da una forza conservativa, l'espressione soprastante indica che per le ciascuna forza conservativa (come la forza peso o la forza elastica), esiste una funzione che prenda in input le sole condizioni finali e iniziali per restituire in output il lavoro compiuto.

Il passo fondamentale consiste nell'ipotizzare uno stato intermedio  $C$  posto  $A$  e  $B$ <sup>6</sup>:

---

<sup>6</sup>Notare bene che questo genere di scomposizione in step più piccoli si può effettuare a prescindere se la forza sia conservativa





Per le proprietà degli integrali posso scomporre l'integrale da  $a$  a  $b$  in:

$$W_C = \int_a^b \mathbf{F} ds = \int_a^c \mathbf{F} ds + \int_c^b \mathbf{F} ds \quad (262)$$

Se  $f$  è additiva significa che non dipende dallo stato intermedio:

$$W_{ab} = W_{ac} + W_{cb} \quad (263)$$

Trattandosi di forze conservative posso esprimerle come:

$$f(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = f(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_c) + f(\mathbf{r}_c, \mathbf{r}_b) \quad (264)$$

Diciamo allora che  $f$  è una **funzione additiva**, (per una maggiore comprensione leggere 7.13)

Le funzioni additive non dipendono dal punto intermedio:

$$f(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = f(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_c) + f(\mathbf{r}_c, \mathbf{r}_b) = g(\mathbf{r}_a) - g(\mathbf{r}_b) \quad (265)$$

Questo significa che esiste una funzione  $g$  che ci permette di svincolarci dal punto intermedio e considerare esclusivamente lo stato iniziale e quello finale indipendentemente.

$$W_{ab} = g(\mathbf{r}_a) - g(\mathbf{r}_b) \quad (266)$$

Chiamiamo la funzione  $g(\mathbf{r})$  **funzione dell'energia potenziale** (E);

**Dimostrazione alternativa** Si può dimostrare l'esistenza della funzione energia potenziale sfruttando la proprietà delle funzioni additive:

$$f(0) = 0 \quad (267)$$

Definiamo a priori l'energia potenziale come una funzione del tipo:

$$E(P) = - \int_O^P \mathbf{F} ds \quad \text{per ogni } O, P \in \mathbb{R}. \quad (268)$$

Dove  $O = (0, 0, 0)$ .

Considerando un generico lavoro dallo stato  $A$  allo stato  $B$ :

$$W_C = \int_A^B \mathbf{F} d\mathbf{s} \quad (269)$$

Possiamo riscriverlo come:

$$W_C = \int_A^B \mathbf{F} d\mathbf{s} = \int_A^0 \mathbf{F} d\mathbf{s} + \int_0^B \mathbf{F} d\mathbf{s} \quad (270)$$

Scambiando gli estremi di integrazione 0 e  $A$ :

$$W_C = \int_0^B \mathbf{F} d\mathbf{s} - \int_0^A \mathbf{F} d\mathbf{s} \quad (271)$$

Ovvero:

$$W_C = E_A - E_B \quad (272)$$

Analogamente a quanto osservato prima è possibile esprimere il lavoro di forze conservativa tramite una funzione energia potenziale che dipende esclusivamente dagli stati iniziale e finali.

## 7.10 Energia Potenziale

### Energia potenziale

L'energia potenziale permette per il solo essere in una certa posizione nello spazio di svolgere/subire un lavoro.

L'energia potenziale è una funzione scalare che indica la **proprietà di un corpo**, dipende esclusivamente dal vettore posizione:

$$E(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}) \quad (273)$$

La sua variazione si può esprimere come:

$$\Delta E = E(\mathbf{r}_b) - E(\mathbf{r}_a) = \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} dE \quad (274)$$

Ricollegandoci a quanto detto sulle forze conservativa possiamo scrivere:

$$W_{i,f} = g(\mathbf{r}_i) - g(\mathbf{r}_f) \quad (275)$$

Ovvero:

$$W_{i,f} = E_i - E_f = -\Delta E \quad (276)$$

Ricaviamo quindi che:

$$dW_C = -dE \quad (277)$$

Trattandosi di una funzione additiva in corrispondenza del vettore posizione nullo (ovvero l'origine del sistema) l'energia potenziale varrà sempre 0.

$$E(\mathbf{r}_O) = 0 \quad (278)$$

L'energia potenziale ( $E$ ) dipende da una costante additiva arbitraria che varia a seconda del sistema di riferimento scelto (dal momento che posso porre l'origine del sistema dove preferisco), tuttavia la sua variazione ( $\Delta E$ ) è invariante in qualsiasi sistema scelto.

### 7.10.1 Energia Potenziale - Forza Peso

Per ottenere una funzione dell'energia potenziale, possiamo integrare la forza peso lungo il cammino dall'altezza zero fino all'altezza  $h$ :

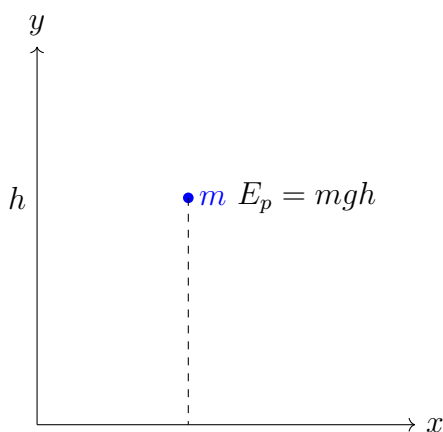
$$E_p(\mathbf{r}) = - \int_0^h \mathbf{F}_p \cdot d\mathbf{s} \quad (279)$$

Poiché  $\mathbf{F}_p = m\mathbf{g}$  e la direzione di  $\mathbf{g}$  è costante e parallela all'asse  $y$ :

$$E_p(\mathbf{r}) = - \int_0^h mg dy = -mgh \quad (280)$$

Assumendo il punto di riferimento in cui l'energia potenziale è zero come  $h = 0$ , otteniamo:

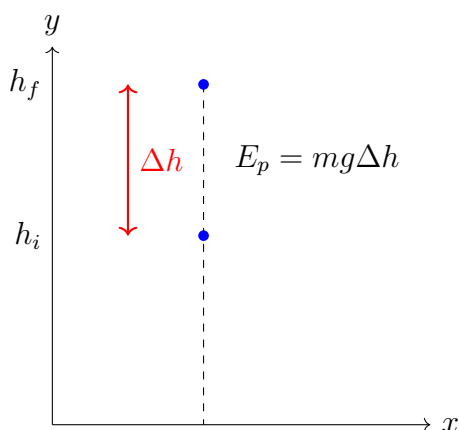
$$E_p(\mathbf{r}) = mgh \quad (281)$$



Osserviamo immediatamente che l'energia potenziale delle forza peso dipende da dove pongo l'origine, tuttavia se considero la **variazione** di energia potenziale tra  $h_i$  e  $h_f$ :

$$E_p(\mathbf{r}) = - \int_{h_i}^{h_f} mg dz = -mgh = mg\Delta h \quad (282)$$

La variazione di energia potenzia è **invariante** rispetto al sistema di riferimento



### 7.10.2 Energia Potenziale - Forze Elastiche

La forza elastica è:

$$\mathbf{F}_{el} = -k\mathbf{x} \quad (283)$$

L'energia potenziale immagazzinata in una molla è data da:

$$E_{el}(\mathbf{r}) = - \int_0^x -kx \, dx = \frac{1}{2}kx^2 \quad (284)$$

$$\Delta E_{el} = -W_{el} \quad (285)$$

Dunque:

$$\Delta E_{el} = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2 \quad (286)$$

### 7.10.3 Superfici Equipotenziiali

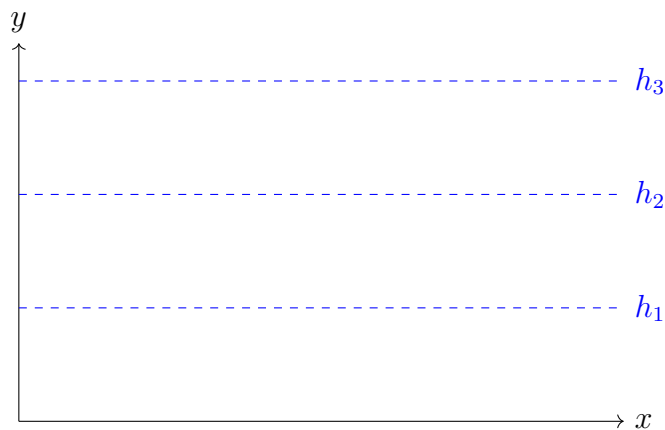
Le superfici equipotenziiali sono insiemi di punti nello spazio per i quali l'energia potenziale è costante. In altre parole, il lavoro necessario per spostare un oggetto lungo una superficie equipotenziiale è zero.

Per un campo gravitazionale uniforme, come la forza peso, le superfici equipotenziiali sono piani orizzontali paralleli. L'energia potenziale in un punto  $(x, y, z)$  è data da:

$$E_p(x, y) = m \cdot g \cdot h \quad (287)$$

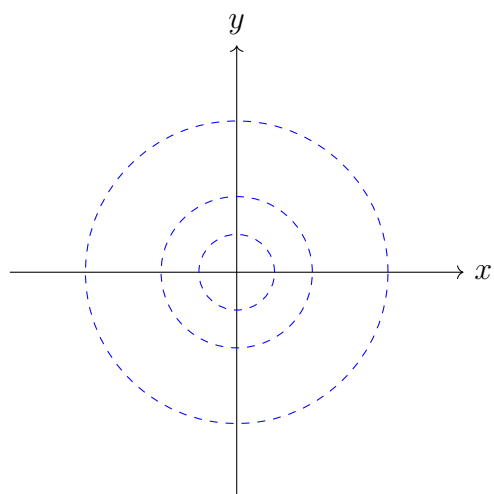
Le superfici equipotenziiali sono date dall'equazione:

$$h = \text{costante} \quad (288)$$



Luogo dei punti delle superfici equipotenziiali per la forza peso.

Per un campo elastico, come una molla, le superfici equipotenziiali sono superfici sferiche centrate sull'origine della molla, con raggio che varia a seconda della deformazione della molla.



Per spostare la attaccata in un molla in un campo elastico lungo una delle circonferenze tratteggiate compierei un lavoro nullo.

### 7.11 Approfondimento: Relazione tra $dE$ e $dF$

Consideriamo una funzione scalare  $E(\mathbf{r})$  che rappresenta l'energia potenziale in un punto nello spazio, dove  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  è il vettore posizione. La funzione  $E(\mathbf{r})$  dipende dalle coordinate spaziali e varia in base alla posizione dell'oggetto nel campo. Il differenziale di questa funzione rappresenta una piccola variazione dell'energia quando si sposta leggermente la posizione.

Il differenziale di una funzione scalare  $E$  è dato da:

$$dE = \frac{\partial E}{\partial x}dx + \frac{\partial E}{\partial y}dy + \frac{\partial E}{\partial z}dz \quad (289)$$

dove  $\frac{\partial E}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial E}{\partial y}$ , e  $\frac{\partial E}{\partial z}$  sono le derivate parziali di  $E$  rispetto alle coordinate spaziali  $x$ ,  $y$ , e  $z$ , rispettivamente. Questi coefficienti rappresentano il gradiente della funzione  $E$ .

Il gradiente  $\nabla E$  di una funzione scalare  $E(\mathbf{r})$  è un vettore che punta nella direzione di massima variazione della funzione e ha come componenti le derivate parziali della funzione:

$$\nabla E = \left( \frac{\partial E}{\partial x}, \frac{\partial E}{\partial y}, \frac{\partial E}{\partial z} \right) \quad (290)$$

Quindi, il differenziale di  $E$  può essere scritto come:

$$dE = \nabla E \cdot d\mathbf{r} \quad (291)$$

dove  $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$  è il vettore di spostamento infinitesimale; questo significa che il lavoro fatto dalla forza è uguale e opposto alla variazione dell'energia potenziale.

Consideriamo una forza conservativa  $\mathbf{F}$  che può essere derivata dall'energia potenziale  $E(\mathbf{r})$ :

$$\mathbf{F} = -\nabla E \quad (292)$$

**Esempio** Proviamo a passare dall'energia potenziale alla forza peso tramite il gradiente: consideriamo un campo gravitazionale uniforme dove l'energia potenziale  $E$  è data da:

$$E_p = m \cdot g \cdot z \quad (293)$$

Il gradiente di  $E$  è:

$$\nabla E = (0, 0, m \cdot g) \quad (294)$$

Il differenziale di  $E$  è:

$$dE = m \cdot g \cdot dz \quad (295)$$

La forza gravitazionale è:

$$\mathbf{F} = -\nabla E = -m \cdot g \cdot \boldsymbol{\mu}_z \quad (296)$$

Il lavoro infinitesimale compiuto dalla forza gravitazionale è:

## 7.12 Teorema della conservazione dell'energia

### 7.12.1 Definizioni preliminari

Prima di procedere con l'enunciato e la dimostrazione del teorema, è necessario definire alcuni concetti chiave.

- Un **sistema isolato** è un sistema che non scambia energia o materia con l'ambiente esterno.
- L'**energia meccanica**  $E_{mecc}$  di un sistema è la somma dell'energia cinetica  $K$  e dell'energia potenziale  $E$ :

$$E_{mecc} = K + E \quad (297)$$

### 7.12.2 Enunciato

Il teorema della conservazione dell'energia afferma che l'energia totale di un sistema isolato rimane costante nel tempo:

$$E_{mecc} = K + E = \text{costante} \quad (298)$$

### 7.12.3 Dimostrazione

Consideriamo un sistema su cui agiscono forze conservative e non conservative. Il lavoro totale è la somma del lavoro delle forze conservative  $W_c$  e non conservative  $W_{nc}$ :

$$dW = dW_c + dW_{nc} \quad (299)$$

Per definizione, il lavoro delle forze conservative è uguale alla variazione di energia potenziale cambiata di segno:

$$dW_c = -dE \quad (300)$$

Il teorema dell'energia cinetica stabilisce che il lavoro totale è uguale alla variazione di energia cinetica:

$$dW = dK \quad (301)$$

Combinando questi risultati:

$$dK = dW_c + dW_{nc} = -dE + dW_{nc} \quad (302)$$

Riarrangiando i termini:

$$dK + dE = dW_{nc} \quad (303)$$

Il lato sinistro rappresenta la variazione di energia meccanica:

$$d(K + E) = dE_{mecc} = dW_{nc} \quad (304)$$

Integrando entrambi i lati:

$$\int_i^f E_{mecc} = \int_i^f W_{nc} \quad (305)$$

$$\Delta E_{mecc} = W_{nc} \quad (306)$$

In un sistema isolato, non ci sono forze non conservative esterne, quindi  $W_{nc} = 0$ :

$$\Delta E_{mecc} = 0 \quad (307)$$

Questo implica che:

$$E_{mecc,f} = E_{mecc,i} = \text{costante} \quad (308)$$

Quindi, l'energia meccanica totale in un sistema isolato rimane costante nel tempo.

#### 7.12.4 Implicazioni e applicazioni

Il teorema della conservazione dell'energia ha numerose implicazioni:

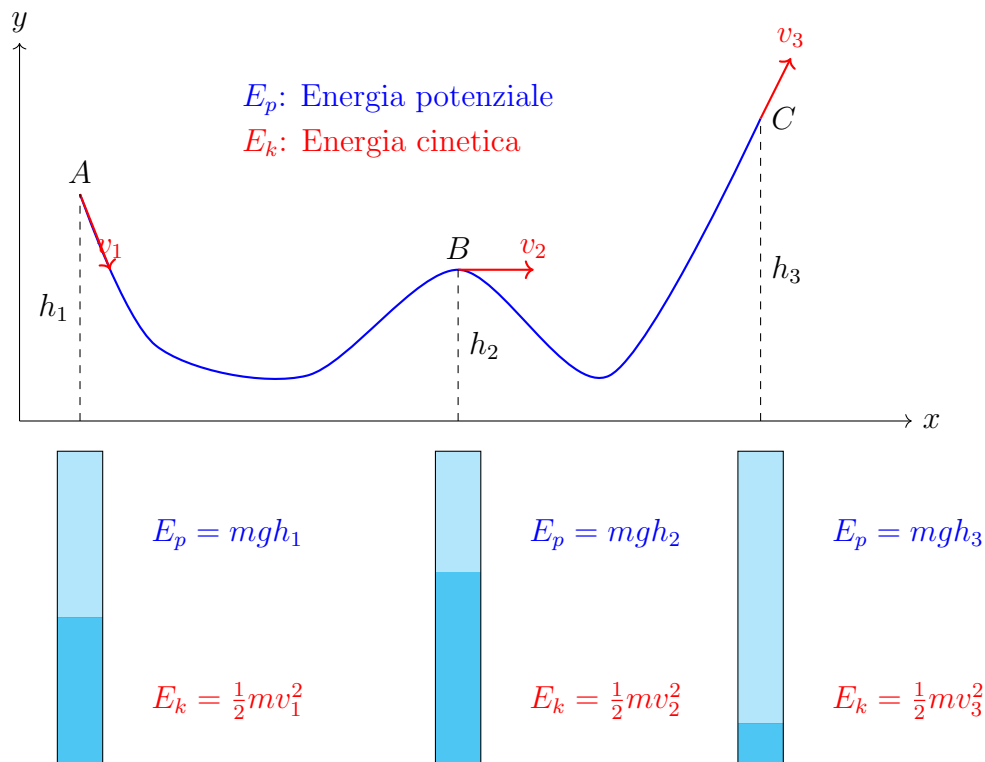
- In assenza di forze non conservative, l'energia meccanica si conserva.
- Le forze non conservative, come l'attrito, possono trasformare l'energia meccanica in altre forme di energia (es. calore), ma l'energia totale rimane costante.
- In un sistema isolato, l'energia può essere convertita da una forma all'altra, ma la somma totale rimane invariata.

#### 7.12.5 Montagne russe

Un oggetto in caduta libera converte continuamente la sua energia potenziale gravitazionale in energia cinetica. Trascurando la resistenza dell'aria:

$$mgh_i + \frac{1}{2}mv_i^2 = mgh_f + \frac{1}{2}mv_f^2$$

dove gli indici  $i$  e  $f$  indicano rispettivamente lo stato iniziale e finale.





## 7.13 Approfondimento: Funzioni Additive

### Funzioni additive

Una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è detta *additiva* se soddisfa la seguente condizione:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$

## Proprietà delle Funzioni Additive

### Linearità

Se  $f$  è una funzione additiva, allora  $f$  è lineare se è anche omogenea, ovvero se  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $x \in \mathbb{R}$ .

### Dimostrazione della Linearità

Supponiamo che  $f$  sia additiva e omogenea. Dimostriamo che  $f$  è lineare:

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= f(\lambda x) + f(\mu y) && \text{(per additività)} \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y) && \text{(per omogeneità)} \end{aligned}$$

Quindi,  $f$  è lineare.

### Funzione Identicamente Nulla

Se  $f$  è una funzione additiva e continua, allora  $f$  è della forma  $f(x) = cx$ , dove  $c$  è una costante.

### Dimostrazione

Dimostriamo che  $f(0) = 0$ :

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) \implies f(0) = 0. \quad (309)$$

Dimostriamo che  $f(-x) = -f(x)$ :

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \implies f(-x) = -f(x). \quad (310)$$

Dimostriamo che  $f$  è omogenea per numeri razionali  $q$ :

Sia  $q = \frac{m}{n}$ , con  $m, n \in \mathbb{Z}$ :

$$\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{m}{n}f(x). \quad (311)$$

Per estendere questa proprietà ai numeri reali, usiamo la continuità di  $f$ . Per ogni  $x \in \mathbb{R}$  e  $r \in \mathbb{Q}$ :

$$f(rx) = rf(x). \quad (312)$$

Quindi,  $f$  è lineare e della forma  $f(x) = cx$ .

## 8 Moti relativi

Lo studio dei moti relativi è fondamentale nella meccanica classica, soprattutto per quanto riguarda la dinamica del sistema di punti.

L'obiettivo principale dello studio dei moti relativi è comprendere come le grandezze cinematiche, in particolare velocità e accelerazione, si trasformano passando da un sistema di riferimento all'altro.

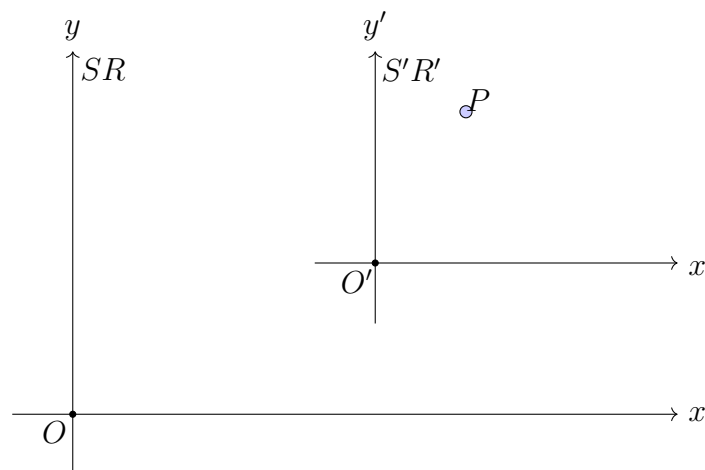
### 8.1 Definizioni preliminari

Prima di addentrarci nell'analisi dettagliata dei moti relativi, è necessario stabilire alcune definizioni e concetti chiave:

- Un **sistema di riferimento** è un insieme di coordinate spaziali e temporali utilizzato per descrivere la posizione e il movimento di un oggetto nello spazio e nel tempo.
- Il **moto relativo** è il movimento di un corpo osservato da un sistema di riferimento che è esso stesso in movimento rispetto a un altro sistema di riferimento considerato fisso o assoluto.

L'analisi dei moti relativi richiede la considerazione di almeno due sistemi di riferimento:

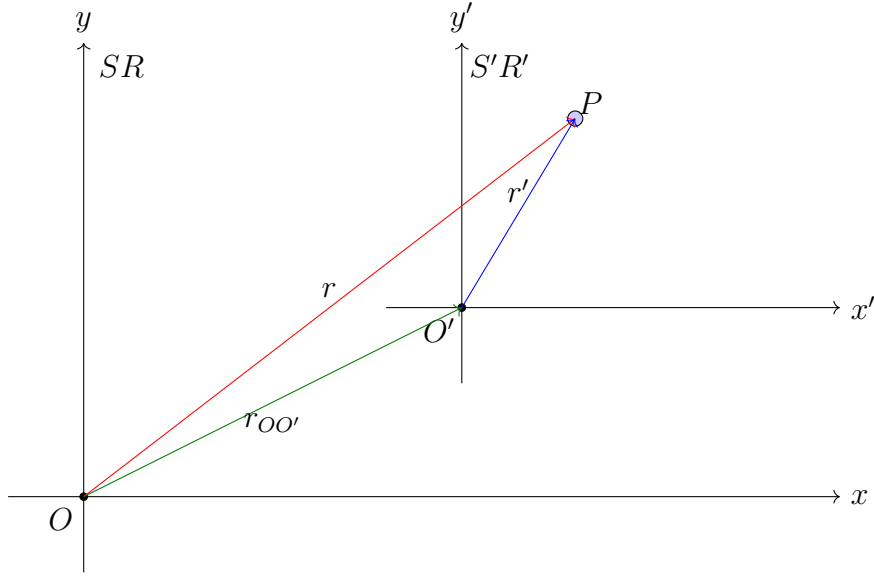
- Un **sistema di riferimento** considerato **fisso** o assoluto, che chiameremo  $SR$ .
- Un **sistema di riferimento mobile**, che chiameremo  $S'R'$ , in movimento rispetto a  $SR$ .



### 8.2 Notazione e Convenzioni

- Indicheremo con  $\mathbf{r}$  il vettore posizione di un punto  $P$  rispetto al sistema di riferimento fisso  $SR$ .
- Indicheremo con  $\mathbf{r}'$  il vettore posizione dello stesso punto  $P$  rispetto al sistema di riferimento mobile  $S'R'$ .

- Il vettore  $\mathbf{r}_{OO'}$  rappresenterà la posizione dell'origine del sistema  $S'R'$  rispetto a  $SR$ .



Quindi, in ogni istante, la relazione tra questi vettori sarà:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{OO'} + \mathbf{r}' \quad (313)$$

Intuitivamente, possiamo anticipare che:

- La velocità di un punto osservata da  $S'$  sarà diversa da quella osservata da  $S$ , a causa del moto relativo tra i due sistemi.
- L'accelerazione subisce una trasformazione ancora più complessa, che tiene conto non solo del moto relativo tra i sistemi, ma anche degli effetti dovuti alla rotazione di  $S'R'$  rispetto a  $SR$ .

### 8.3 Trasformazioni di Coordinate

La relazione tra le coordinate di un punto nei due sistemi di riferimento può essere espressa attraverso una trasformazione di coordinate.

Nel caso più generale, questa trasformazione può includere sia una **traslazione** che una **rotazione**.

Considerando un caso semplificato in cui gli assi dei due sistemi rimangono paralleli (solo traslazione), la trasformazione si può esprimere come:

$$x = x_{OO'} + x' \quad (314)$$

$$y = y_{OO'} + y' \quad (315)$$

$$z = z_{OO'} + z' \quad (316)$$

dove  $(x_{OO'}, y_{OO'}, z_{OO'})$  sono le coordinate dell'origine di  $S'R'$  rispetto a  $SR$ , e  $(x', y', z')$  sono le coordinate del punto  $P$  in  $S'R'$ .

Nel caso più generale, che include anche la rotazione, la trasformazione diventa più complessa e richiede l'uso di strumenti più complessi, tra i quali la **derivata di un versore rotante**.

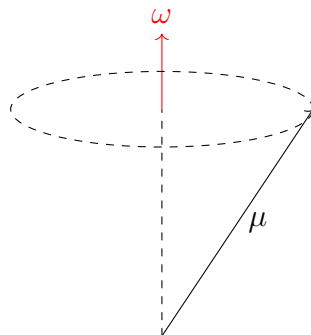
## 8.4 Approfondimento: la derivata di un versore rotante

Lo studio della derivata di un versore sottoposto a rotazione è fondamentale per comprendere le trasformazioni di velocità e accelerazione nei moti relativi, in particolare quando il sistema di riferimento mobile  $S'R'$  è in rotazione rispetto al sistema fisso  $SR$ .

### 8.4.1 Definizione

Un versore rotante è un vettore unitario la cui direzione varia nel tempo a causa di una rotazione attorno a un asse fisso o variabile.

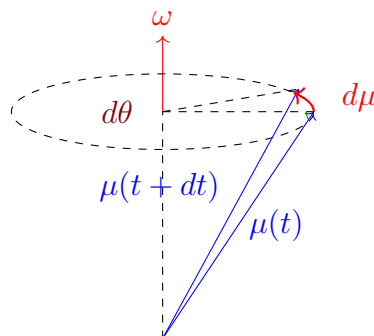
Consideriamo un versore  $\mathbf{u}(t)$  che ruota con velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}(t)$ . La nostra obiettivo è determinare l'espressione della sua derivata temporale  $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ .



### 8.4.2 Visualizzazione Geometrica

Durante un intervallo infinitesimo  $dt$ , il versore  $\mathbf{u}(t)$  ruota di un angolo infinitesimo  $d\theta = |\boldsymbol{\omega}|dt$ .

Geometricamente, possiamo visualizzare una rotazione infinitesima nel seguente modo:



Dal diagramma, possiamo osservare che:

- Il vettore  $d\mathbf{u} = \mathbf{u}(t + dt) - \mathbf{u}(t)$  è perpendicolare a  $\mathbf{u}(t)$ .
- La lunghezza di  $d\mathbf{u}$  è approssimativamente uguale a  $d\theta$  per piccole rotazioni.

### 8.4.3 Dimostrazione

Sappiamo che il prodotto vettoriale  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$  è un vettore perpendicolare sia a  $\boldsymbol{\omega}$  che a  $\mathbf{u}$ ; il suo modulo vale:

$$\|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}\| = \|\boldsymbol{\omega}\|\|\mathbf{u}\|\sin\theta \quad (317)$$

Dove  $\theta$  è l'angolo tra  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\boldsymbol{u}$ .

Poiché  $\boldsymbol{u}$  è un versore,  $|\boldsymbol{u}| = 1$ , e l'angolo tra  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\boldsymbol{u}$  è 90 (perpendicolare), quindi  $\sin \theta = 1$ :

$$\|\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}\| = |\boldsymbol{\omega}| \quad (318)$$

La direzione di  $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}$  coincide con la direzione di  $d\boldsymbol{u}$ , e il modulo si ricava dalla seguente proporzione:

$$2\pi r : |d\boldsymbol{\mu}| = d\theta : 2\pi \quad (319)$$

Ricordando che il raggio vale 1 ricaviamo::

$$|d\boldsymbol{u}| = |d\theta| = |\boldsymbol{\omega}| dt \quad (320)$$

Combinando queste osservazioni, possiamo scrivere:

$$d\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}) dt \quad (321)$$

Dividendo entrambi i lati per  $dt$ , otteniamo l'espressione finale per la derivata del versore rotante:

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u} \quad (322)$$

L'equazione  $\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}$  ha diverse implicazioni importanti:

- La derivata del versore è sempre perpendicolare al versore stesso.
- La magnitudine della derivata è proporzionale alla velocità angolare.
- La direzione della derivata è tale da produrre la rotazione desiderata tramite il prodotto vettoriale<sup>7</sup>.

Questa equazione è fondamentale nella cinematica dei corpi rigidi e sarà cruciale nella derivazione dei teoremi delle velocità e delle accelerazioni relative.

#### 8.4.4 Applicazione ai Sistemi di Riferimento Rotanti

In un sistema di riferimento rotante  $SR''$ , possiamo definire tre versori ortogonali  $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$  che ruotano con il sistema. Applicando il risultato appena derivato, possiamo scrivere:

$$\frac{d\boldsymbol{i}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}' \quad (323)$$

$$\frac{d\boldsymbol{j}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j}' \quad (324)$$

$$\frac{d\boldsymbol{k}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k}' \quad (325)$$

Lo stesso può essere applicato ai versori "tradizionali" nel sistema di riferimento  $SR$

---

<sup>7</sup>Volgarmente usando la regola della mano destra

## 8.5 Teorema delle velocità relative

Il teorema delle velocità relative stabilisce la relazione tra la velocità di un punto osservata da un sistema di riferimento fisso e quella osservata da un sistema di riferimento in movimento.

### 8.5.1 Enunciato

La velocità  $\mathbf{v}$  di un punto  $P$  osservata dal sistema di riferimento fisso  $SR$  è uguale alla somma vettoriale della velocità  $\mathbf{v}_0$  dell'origine del sistema mobile  $S'R'$  rispetto a  $SR$ , della velocità  $\mathbf{v}'$  del punto  $P$  osservata da  $S'R'$ , e del prodotto vettoriale della velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  di  $S'R'$  rispetto a  $SR$  con il vettore posizione  $\mathbf{r}'$  di  $P$  in  $S'R'$ :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{OO'} + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (326)$$

## 8.6 Dimostrazione

Per dimostrare questo teorema, partiamo dalla relazione fondamentale tra i vettori posizione nei due sistemi di riferimento:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{OO'} + \mathbf{r}' \quad (327)$$

Dove  $\mathbf{r}$  è il vettore posizione di  $P$  in  $S$ ,  $\mathbf{r}_{OO'}$  è il vettore posizione dell'origine di  $S'$  rispetto a  $S$ , e  $\mathbf{r}'$  è il vettore posizione di  $P$  in  $S'$ . Derivando equazione rispetto al tempo otteniamo:

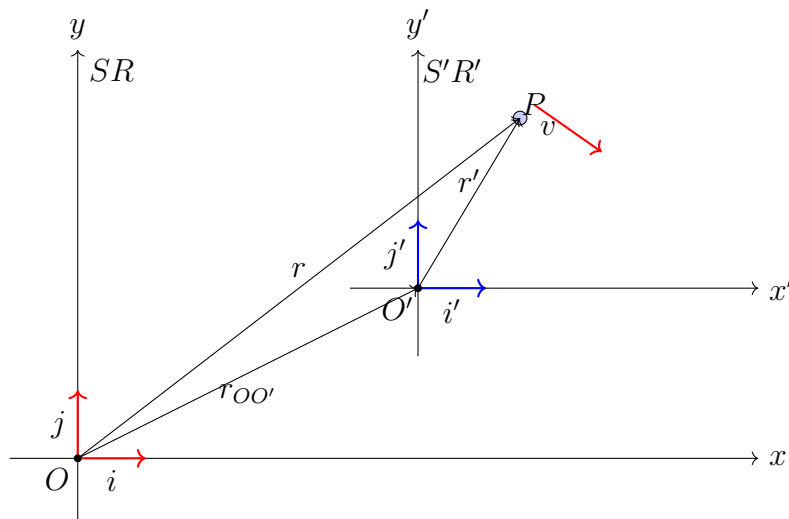
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_{OO'}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \quad (328)$$

Ora, analizziamo preliminarmente ciascun termine:

- $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  è la velocità  $\mathbf{v}$  di  $P$  osservata da  $SR$ .
- $\frac{d\mathbf{r}_{OO'}}{dt}$  è la velocità  $\mathbf{v}_{OO'}$  dell'origine di  $S'R'$  rispetto a  $SR$ .
- $\frac{d\mathbf{r}'}{dt}$  richiede un'analisi più dettagliata.

Per analizzare  $\frac{d\mathbf{r}'}{dt}$ , esprimiamo  $\mathbf{r}'$  in termini dei versori rotanti di  $S'R'$ :

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}' \quad (329)$$



Derivando rispetto al tempo:

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\mathbf{i}' + x'\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\mathbf{j}' + y'\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\mathbf{k}' + z'\frac{d\mathbf{k}'}{dt} \quad (330)$$

$$= \mathbf{v}' + x'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}') + y'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}') + z'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}') \quad (331)$$

$$= \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}') \quad (332)$$

$$= \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (333)$$

Dove abbiamo usato il risultato della sezione precedente sulla derivata di un versore in rotazione; sostituendo questi risultati nell'equazione originale:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (334)$$

### 8.6.1 Osservazioni

Il teorema delle velocità relative ci dice che la velocità di un punto osservata dal sistema fisso è composta da tre contributi:

- $\mathbf{v}_0$ : la **velocità di trascinamento**, dovuta al moto dell'origine del sistema mobile.
- $\mathbf{v}'$ : la **velocità relativa**, osservata dal sistema mobile.
- $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ : la **velocità di trascinamento rotazionale**, dovuta alla rotazione del sistema mobile.

Questa decomposizione ci permette di analizzare il moto di un punto in termini di contributi distinti, ciascuno con un chiaro significato fisico.

### 8.6.2 Casi Particolari

È utile esaminare alcuni casi particolari del teorema delle velocità relative:

**Sistema mobile in pura traslazione** ( $\boldsymbol{\omega} = 0$ ): In questo caso, l'equazione si riduce a:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' \quad (335)$$

Questa è la classica regola di somma delle velocità in sistemi in traslazione relativa.

**Punto fisso nel sistema mobile** ( $\mathbf{v}' = 0$ ): L'equazione diventa:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (336)$$

Questa espressione descrive la velocità di un punto rigidamente connesso al sistema mobile.

**Rotazione pura attorno all'origine** ( $\mathbf{v}_0 = 0$ ): In questo caso:

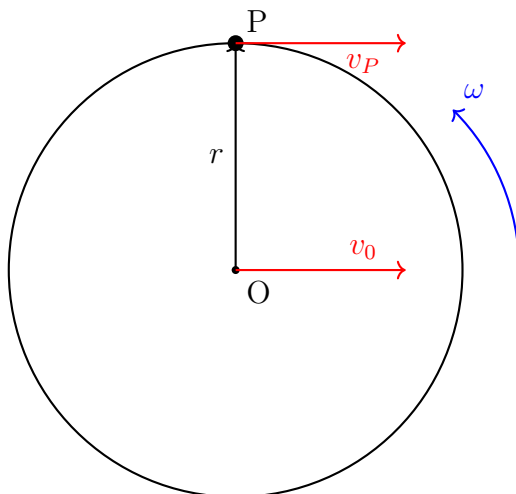
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (337)$$

Questa equazione è fondamentale nello studio della cinematica dei corpi rigidi.

### 8.6.3 Esempio

Per consolidare la comprensione del teorema, risolviamo un esempio numerico.

**Problema:** Un disco ruota con velocità angolare costante  $\omega = 2 \text{ rad/s}$  attorno al suo asse verticale. Un punto P sul disco si trova a una distanza  $r = 0.5 \text{ m}$  dal centro e ruota con esso. Il centro del disco si muove orizzontalmente con velocità  $v_0 = 3 \text{ m/s}$ . Calcolare la velocità assoluta del punto P quando si trova nella posizione più alta del suo moto circolare.



**Soluzione:** Definiamo un sistema di riferimento con l'origine nel centro del disco:

$$\mathbf{v}_0 = 3\mathbf{i} \text{ m/s} \quad (338)$$

$$\boldsymbol{\omega} = 2\mathbf{k} \text{ rad/s} \quad (339)$$

$$\mathbf{r}' = 0.5\mathbf{j} \text{ m} \quad (340)$$

La velocità relativa  $\mathbf{v}'$  è nulla poiché il punto è fisso rispetto al disco; applicando il teorema delle velocità relative:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (341)$$

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{k} \times 0.5\mathbf{j} \quad (342)$$

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 1\mathbf{i} = 2\mathbf{i} \text{ m/s} \quad (343)$$

Quindi, la velocità assoluta del punto P nella posizione specificata è  $2 \text{ m/s}$  nella direzione orizzontale.



## 8.7 Teorema delle accelerazioni relative

Il teorema delle accelerazioni relative è un'estensione naturale del teorema delle velocità relative; descrive come l'accelerazione di un punto si trasforma passando da un sistema di riferimento all'altro, tenendo conto non solo del moto relativo tra i sistemi, ma anche degli effetti della rotazione.

### 8.7.1 Enunciato

L'accelerazione  $\mathbf{a}$  di un punto  $P$  osservata dal sistema di riferimento fisso  $S$  è uguale a:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' \quad (344)$$

### 8.7.2 Dimostrazione

Per dimostrare questo teorema, partiamo dall'equazione del teorema delle velocità relative e la deriviamo rispetto al tempo:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (345)$$

Derivando rispetto al tempo:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad (346)$$

Analizziamo preliminarmente ciascun termine:

- $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}$  è l'accelerazione assoluta di  $P$  in  $SR$ .
- $\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \mathbf{a}_0$  è l'accelerazione dell'origine di  $S'R'$  rispetto a  $SR$ .
- $\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \mathbf{a}'$  è l'accelerazione relativa di  $P$  in  $S'R'$ .
- Il termine  $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$  richiede un'analisi più dettagliata:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \quad (347)$$

$$= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad (348)$$

$$= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad (349)$$

Dove abbiamo usato il risultato del teorema delle velocità relative per  $\frac{d\mathbf{r}'}{dt}$ ; sostituendo questi risultati nell'equazione originale:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}' + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad (350)$$

Il termine  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$  appare una sola volta in questa equazione, ma nel teorema finale appare moltiplicato per 2. Questo è dovuto al fatto che nel passaggio da velocità relative ad accelerazioni relative, emerge un termine addizionale  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$  dalla derivata di  $\mathbf{v}'$  nel sistema rotante.

Quindi, l'equazione finale diventa:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' \quad (351)$$

### 8.7.3 Osservazioni

Ciascun termine nell'equazione del teorema delle accelerazioni relative ha un significato fisico specifico:

- **Accelerazione di trascinamento traslazionale  $\mathbf{a}_0$ :** l'accelerazione dovuta al moto non uniforme dell'origine del sistema mobile.
- **Accelerazione relativa  $\mathbf{a}'$ :** l'accelerazione del punto P come osservata nel sistema mobile S'.
- **Accelerazione di Coriolis  $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ :** L'accelerazione apparente che si osserva in sistemi rotanti<sup>8</sup>
- **Accelerazione centripeta  $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ :** l'accelerazione diretta verso il centro di rotazione, necessaria per mantenere il moto circolare.
- **Accelerazione di trascinamento angolare  $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}'$ :** Questo termine appare quando la velocità angolare del sistema mobile varia nel tempo.

### 8.7.4 Casi Particolari

Come per il teorema delle velocità relative, è utile esaminare alcuni casi particolari:

**Sistema mobile in pura traslazione ( $\boldsymbol{\omega} = 0, \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = 0$ ):** L'equazione si riduce a:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}' \quad (352)$$

Questa è la classica regola di somma delle accelerazioni in sistemi in traslazione relativa.

**Sistema mobile in rotazione uniforme ( $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = 0$ ):** L'equazione diventa:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad (353)$$

Questa forma è particolarmente rilevante per lo studio di sistemi rotanti come la Terra.

**Punto fisso nel sistema mobile ( $\mathbf{v}' = 0, \mathbf{a}' = 0$ ):** L'equazione si riduce a:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' \quad (354)$$

Questa espressione descrive l'accelerazione di un punto rigidamente connesso al sistema mobile.

---

<sup>8</sup>È responsabile, ad esempio, della deviazione dei venti e delle correnti oceaniche sulla Terra.

### 8.7.5 Esempio

**Problema:** Una piattaforma rotante gira con velocità angolare costante  $\omega = 3 \text{ rad/s}$  attorno a un asse verticale. Un oggetto si muove radialmente sulla piattaforma con velocità costante  $v' = 2 \text{ m/s}$  rispetto alla piattaforma. Quando l'oggetto si trova a una distanza  $r = 1.5 \text{ m}$  dal centro di rotazione, calcolare:

- L'accelerazione di Coriolis
- L'accelerazione centripeta
- L'accelerazione totale dell'oggetto nel sistema di riferimento inerziale, assumendo che la piattaforma non abbia accelerazione traslazionale ( $\mathbf{a}_0 = 0$ ).

**Soluzione:** definiamo un sistema di coordinate con l'asse  $z$  verticale:

$$\boldsymbol{\omega} = 3 \mathbf{k} \text{ rad/s} \quad (355)$$

(assumendo che l'oggetto si trovi sull'asse  $x$  positivo)

$$\mathbf{r}' = 1.5 \mathbf{i} \text{ m} \quad (356)$$

(la velocità è radiale)

$$\mathbf{v}' = 2 \mathbf{i} \text{ m/s} \quad (357)$$

**Accelerazione di Coriolis:**

$$\mathbf{a}_{\text{Coriolis}} = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = 2(3 \mathbf{k} \times 2 \mathbf{i}) = 12 \mathbf{j} \text{ m/s} \quad (358)$$

**Accelerazione centripeta:**

$$\mathbf{a}_{\text{centripeta}} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = 3 \mathbf{k} \times (3 \mathbf{k} \times 1.5 \mathbf{i}) = -13.5 \mathbf{i} \text{ m/s} \quad (359)$$

**Accelerazione totale:**

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad (360)$$

Dove  $\mathbf{a}' = 0$  (velocità costante sulla piattaforma)

$$\mathbf{a} = 12 \mathbf{j} - 13.5 \mathbf{i} \text{ m/s}^2 \quad (361)$$

Il modulo dell'accelerazione totale è:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{12^2 + 13.5^2} \approx 18.0 \text{ m/s}^2 \quad (362)$$

Questo esempio illustra come l'accelerazione in un sistema rotante sia composta da termini che non esisterebbero in un sistema inerziale, evidenziando l'importanza del teorema delle accelerazioni relative nell'analisi di sistemi rotanti.

## 8.8 Esempi Avanzati

### 8.8.1 Effetto Coriolis sulla Terra

Una delle applicazioni più note del teorema delle accelerazioni relative è l'analisi dell'effetto Coriolis sulla Terra. Questo effetto è responsabile della deviazione apparente di oggetti in movimento sulla superficie terrestre.

**Analisi Teorica** Consideriamo la Terra come un sistema di riferimento rotante con velocità angolare  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$ , dove  $\omega \approx 7.29 \times 10^{-5}$  rad/s. L'accelerazione di Coriolis è data da:

$$\mathbf{a}_{\text{Coriolis}} = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad (363)$$

dove  $\mathbf{v}'$  è la velocità dell'oggetto rispetto alla superficie terrestre.

**Variazione con la Latitudine** L'effetto Coriolis varia con la latitudine. Se consideriamo un punto a latitudine  $\phi$ , il vettore velocità angolare effettivo diventa:

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{eff}} = \omega \sin \phi \mathbf{n} \quad (364)$$

dove  $\mathbf{n}$  è il vettore unitario normale alla superficie terrestre in quel punto.

### 8.8.2 Deviazione di un Proiettile

Consideriamo un proiettile sparato orizzontalmente con velocità  $v = 1000$  m/s in direzione nord a una latitudine di  $45^\circ\text{N}$ . Calcoliamo la deviazione dovuta all'effetto Coriolis dopo un tempo di volo  $t = 10$  s.

La velocità angolare effettiva è:

$$\omega_{\text{eff}} = \omega \sin 45 \approx 5.16 \times 10^{-5} \text{ rad/s} \quad (365)$$

L'accelerazione di Coriolis è:

$$a_{\text{Coriolis}} = 2\omega_{\text{eff}} v = 2 \times 5.16 \times 10^{-5} \times 1000 \approx 0.103 \text{ m/s}^2 \quad (366)$$

La deviazione dopo 10 s è:

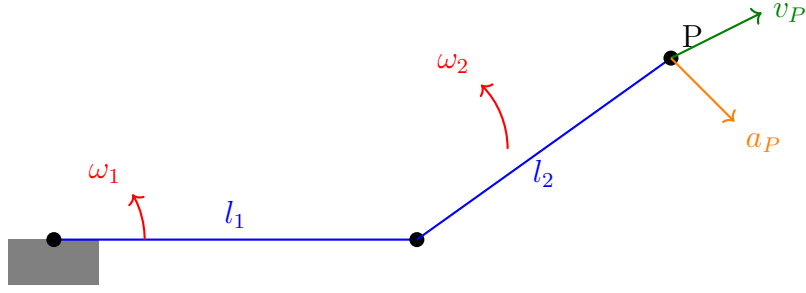
$$d = \frac{1}{2} a_{\text{Coriolis}} t^2 \approx 5.15 \text{ m} \quad (367)$$

Il proiettile devierà di circa 5.15 m verso destra rispetto alla direzione di tiro.

### 8.8.3 Un sistema a due braccia

Consideriamo un braccio robotico con due giunti rotanti. Il primo giunto ruota attorno all'asse verticale con velocità angolare  $\omega_1$ , mentre il secondo giunto ruota rispetto al primo con velocità angolare  $\omega_2$ .

**Problema:** Calcolare la velocità e l'accelerazione dell'estremità del braccio robotico, dato che il primo segmento ha lunghezza  $l_1 = 1$  m e il secondo  $l_2 = 0.8$  m. Assumiamo  $\omega_1 = 2$  rad/s e  $\omega_2 = 3$  rad/s, entrambe costanti.



**Soluzione:** Definiamo un sistema di coordinate con l'asse z verticale; la posizione dell'estremità del braccio nel sistema rotante del primo giunto è:

$$\mathbf{r}' = l_1 \mathbf{i} + l_2 (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \quad (368)$$

Dove  $\theta = \omega_2 t$  è l'angolo del secondo giunto rispetto al primo; la velocità relativa è:

$$\mathbf{v}' = l_2 \omega_2 (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) \quad (369)$$

La velocità assoluta è data dal teorema delle velocità relative:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}' \quad (370)$$

Calcolando il prodotto vettoriale:

$$\mathbf{v} = \omega_1 (-l_1 \mathbf{j} + l_2 (-\sin \theta \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{i})) + l_2 \omega_2 (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) \quad (371)$$

Per l'accelerazione, applichiamo il teorema delle accelerazioni relative:

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}' \quad (372)$$

Dove

$$\mathbf{a}' = l_2 \omega_2^2 (-\cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j}) \quad (373)$$

È l'accelerazione nel sistema rotante del primo giunto.

## 9 Momenti

### 9.1 Momento angolare

#### Momento angolare

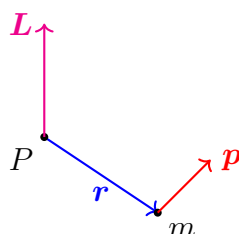
Il momento angolare rappresenta la quantità di moto di un sistema rispetto a un punto di riferimento, detto polo.

#### 9.1.1 Singola particella

Per una singola particella il momento angolare è dato da:

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (374)$$

Dove  $\mathbf{r}$  viene indicato con il termine **braccio**.



Per essere del tutto corretti trattandosi di un prodotto vettoriale in  $\mathbf{R}^3$  il momento angolare andrebbe indicato con tutte le componenti:

$$\mathbf{L}_O = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_i p_z - z_i p_y \\ z_i p_x - x_i p_z \\ x_i p_y - y_i p_x \end{pmatrix} \quad (375)$$

Dove  $p_x, p_y, p_z$  sono le componenti della quantità di moto della particella; tuttavia dal momento che prenderemo in considerazione esclusivamente corpi con moto posto sul piano  $(x, y)$  notiamo subito che il momento angolare avrà sì un suo modulo e verso, ma avrà una direzione parallela all'asse  $z$ :

$$\mathbf{L}_O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_z \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_i p_y - y_i p_x \end{pmatrix} \quad (376)$$

Diremo allora che il momento angolare potrà essere **uscente** o **entrante**.

#### 9.1.2 Sistema di punti

Per un sistema di  $N$  punti materiali, il momento angolare totale rispetto a un polo  $O$  è definito come:

$$\mathbf{L}_O = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \quad (377)$$

dove  $\mathbf{r}_i$  è il vettore posizione della particella  $i$ -esima rispetto al polo  $O$ , e  $\mathbf{v}_i$  è la sua velocità.

### 9.1.3 Passaggio da un polo a un altro

Il momento angolare dipende dal polo scelto. Se vogliamo passare dal momento angolare rispetto al polo P a quello rispetto a un nuovo polo P', possiamo usare la seguente relazione:

$$\mathbf{L}_{P'} = \mathbf{L}_P - \mathbf{r}_{PP'} \times \mathbf{p} \quad (378)$$

dove  $\mathbf{r}_{PP'}$  è il vettore che va da P a P', e  $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i$  è la quantità di moto totale del sistema.

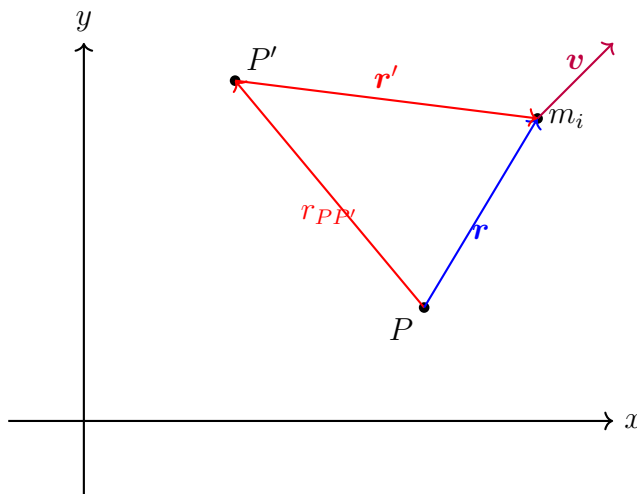
**Dimostrazione:** Il momento angolare rispetto al polo P per una singola particella è definito come:

$$\mathbf{L}_P = \mathbf{r} \times m_i \mathbf{v} \quad (379)$$

Dove  $\mathbf{r}$  è il vettore posizione della particella rispetto a P.

Se vogliamo esprimere il momento angolare rispetto al nuovo polo P'; consideriamo il vettore posizione della particella rispetto a P':

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{PP'} \quad (380)$$



Quindi, il momento angolare rispetto a P' è:

$$\mathbf{L}_{P'} = \mathbf{r}' \times m_i \mathbf{v} \quad (381)$$

$$= (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{PP'}) \times m_i \mathbf{v} \quad (382)$$

$$= \mathbf{r} \times m_i \mathbf{v} - \mathbf{r}_{PP'} \times m_i \mathbf{v} \quad (383)$$

$$= \mathbf{L}_P - \mathbf{r}_{PP'} \times m \mathbf{v} \quad (384)$$

$$= \mathbf{L}_P - \mathbf{r}_{PP'} \times \mathbf{p} \quad (385)$$

Come volevasi dimostrare.

## 9.2 Momento delle forze

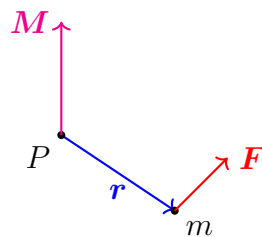
### Momento delle forze

Il momento delle forze, anche noto come coppia o torque, è una grandezza vettoriale che misura la tendenza di un sistema di forze a far ruotare un corpo attorno a un punto o a un asse.

#### 9.2.1 Singola particella

Per una singola particella il momento angolare è dato da:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{a} \quad (386)$$



Analogamente a quanto detto per il momento angolare, anche il momento delle forze avrà delle componenti lungo l'asse x e y

$$\mathbf{M}_O = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_i F_z - z_i F_y \\ z_i F_x - x_i F_z \\ x_i F_y - y_i F_x \end{pmatrix} \quad (387)$$

Tuttavia dal momento che prenderemo in considerazione esclusivamente corpi con forze poste piano  $(x, y)$  notiamo subito che il momento delle forze avrà una direzione parallela all'asse  $z$ :

$$\mathbf{M}_O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_z \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_i F_y - y_i F_x \end{pmatrix} \quad (388)$$

Diremo allora che il momento angolare potrà essere **uscente** o **entrante**.

#### 9.2.2 Sistema di punti

Per un sistema di  $N$  punti materiali, il momento totale delle forze rispetto a un polo  $O$  è definito come:

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \quad (389)$$

dove  $\mathbf{r}_i$  è il vettore posizione della particella  $i$ -esima rispetto al polo  $O$ , e  $\mathbf{F}_i$  è la forza totale agente su di essa.



### 9.3 Teorema del momento angolare per polo fisso

Il teorema del momento angolare per polo fisso è uno dei risultati fondamentali della dinamica dei sistemi di punti. Esso stabilisce la relazione tra il momento delle forze esterne agenti su un sistema e la variazione del momento angolare del sistema stesso.

#### 9.3.1 Enunciato

La derivata temporale del momento angolare di un sistema di punti materiali rispetto a un polo fisso P è uguale al momento delle forze esterne agenti sul sistema rispetto allo stesso polo:

$$\frac{d\mathbf{L}_P}{dt} = \mathbf{M}_P \quad (390)$$

#### 9.3.2 Dimostrazione

Partiamo dalla definizione del momento angolare per un sistema di N punti:

$$\mathbf{L}_P = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (391)$$

Derivando rispetto al tempo:

$$\frac{d\mathbf{L}_P}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) \quad (392)$$

$$= \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \quad (393)$$

$$= (\mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\mathbf{a}) \quad (394)$$

Il primo termine è nullo poiché il prodotto vettoriale di un vettore per se stesso è sempre zero. Per il secondo termine, possiamo sostituire  $m\mathbf{a}$  con la forza totale  $\mathbf{F}$  agente sul punto (II legge di Newton):

$$\frac{d\mathbf{L}_P}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}_P \quad (395)$$

Che è esattamente la definizione del momento delle forze esterne rispetto al polo P.

Il teorema è valido indipendentemente dal fatto che le forze interne al sistema siano conservative o meno.

## 9.4 Teorema del momento angolare per polo mobile

Il teorema del momento angolare può essere esteso al caso in cui il polo di riferimento non è fisso, ma si muove con una certa velocità.

### 9.4.1 Enunciato

La derivata temporale del momento angolare di un sistema di punti materiali rispetto a un polo mobile  $P'$  è uguale al momento delle forze esterne agenti sul sistema rispetto allo stesso polo, meno il prodotto vettoriale tra la velocità del polo e il momento lineare totale del sistema:

$$\frac{d\mathbf{L}_{P'}}{dt} = \mathbf{M}_{P'} - \mathbf{v}_{P'} \times \mathbf{p} \quad (396)$$

Dove  $\mathbf{v}_{P'}$  è la velocità del polo  $P'$  e  $\mathbf{p}$  è il momento lineare totale del sistema.

### 9.4.2 Dimostrazione

Partiamo dalla relazione tra il momento angolare rispetto al polo fisso  $O$  e quello rispetto al polo mobile  $O'$ :

$$\mathbf{L}_{P'} = \mathbf{L}_P - \mathbf{r}_{PP'} \times \mathbf{p} \quad (397)$$

Dove  $\mathbf{r}_{PP'}$  è il vettore posizione di  $P'$  rispetto a  $P$ .

Derivando rispetto al tempo:

$$\frac{d\mathbf{L}_{P'}}{dt} = \frac{d\mathbf{L}_P}{dt} - \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{PP'} \times \mathbf{p}) \quad (398)$$

$$= \mathbf{M}_P - \left( \frac{d\mathbf{r}_{PP'}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r}_{PP'} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) \quad (399)$$

Ora sostituendo  $\frac{d\mathbf{r}_{PP'}}{dt} = \mathbf{v}_{P'}$  e  $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$ :

$$\frac{d\mathbf{L}_{P'}}{dt} = \mathbf{M}_P - \mathbf{v}_{P'} \times \mathbf{p} - \mathbf{r}_{PP'} \times \mathbf{F} \quad (400)$$

$$= (\mathbf{M}_P - \mathbf{r}_{PP'} \times \mathbf{F}) - \mathbf{v}_{P'} \times \mathbf{p} \quad (401)$$

$$= \mathbf{M}_{P'} - \mathbf{v}_{P'} \times \mathbf{p} \quad (402)$$

dove abbiamo usato il fatto che  $\mathbf{M}_{P'} = \mathbf{M}_P - \mathbf{r}_{PP'} \times \mathbf{F}$ .

Questo teorema è particolarmente utile quando si studia il moto di un sistema rispetto al suo centro di massa, che è un polo mobile.

## 9.5 Momenti in coordinate polari

Le coordinate polari offrono un sistema elegante e spesso più intuitivo per descrivere il moto di particelle o corpi rigidi in rotazione. In questo sistema, la posizione di un punto è definita da una distanza radiale  $r$  dal polo (origine) e un angolo  $\theta$  rispetto a un asse di riferimento. Questa rappresentazione si rivela particolarmente utile nello studio dei momenti, sia angolari che delle forze.

### 9.5.1 Momento angolare

Per comprendere appieno il momento angolare in coordinate polari, dobbiamo prima esaminare la velocità della particella. In questo sistema di coordinate, la velocità  $\mathbf{v}$  può essere scomposta in due componenti:

- **Velocità radiale** ( $v_r$ ): rappresenta la variazione della distanza dal polo nel tempo.

$$v_r = \frac{dr}{dt} \quad (403)$$

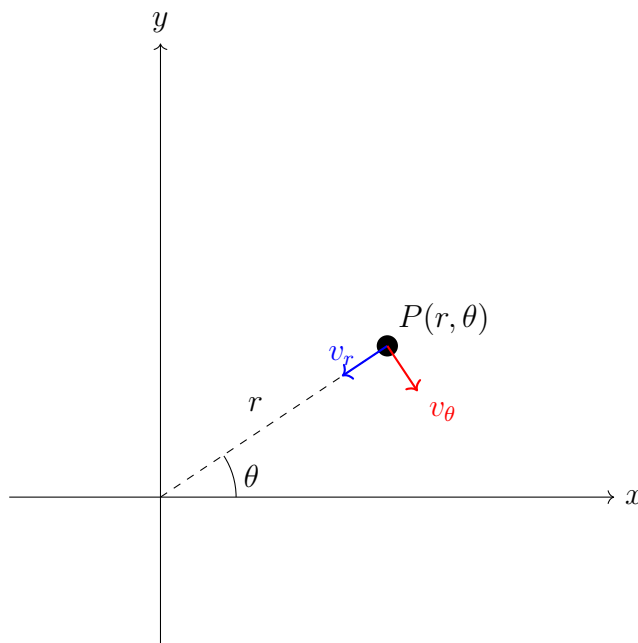
- **Velocità trasversa** ( $v_\theta$ ): rappresenta il movimento perpendicolare alla direzione radiale.

$$v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} \quad (404)$$

La velocità totale è quindi:

$$\mathbf{v} = v_r \boldsymbol{\mu}_r + v_\theta \boldsymbol{\mu}_\theta \quad (405)$$

dove  $\boldsymbol{\mu}_r$  e  $\boldsymbol{\mu}_\theta$  sono i versori nelle direzioni radiale e trasversa rispettivamente. Con



questa decomposizione della velocità, possiamo ora esprimere il momento angolare  $\vec{L}$  di una particella rispetto al polo:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (406)$$

Sostituendo l'espressione della velocità in coordinate polari, otteniamo:

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times (v_r\boldsymbol{\mu}_r + v_\theta\boldsymbol{\mu}_\theta) \quad (407)$$

$$= m\mathbf{r} \times v_\theta\boldsymbol{\mu}_\theta \quad (408)$$

$$= mr^2 \frac{d\theta}{dt} \boldsymbol{\mu}_z \quad (409)$$

dove  $\boldsymbol{\mu}_z$  è il versore perpendicolare al piano del moto; inoltre la quantità  $mr^2$  prende il nome di **momento di inerzia**:

$$I = mr^2 \quad (410)$$

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} \quad (411)$$

#### Momento angolare in coordinate polari

Il momento angolare dipende solo dalla componente trasversa della velocità. La velocità radiale non contribuisce al momento angolare, poiché è parallela al vettore posizione.

**Piccola anticipazione** È importante notare che la quantità  $r^2 \frac{d\theta}{dt}$  è spesso indicata come velocità areolare, poiché rappresenta il tasso di variazione dell'area spazzata dal vettore posizione nel tempo. La conservazione del momento angolare in un sistema isolato si traduce quindi nella conservazione della velocità areolare, un risultato noto come seconda legge di Keplero nel contesto del moto planetario.

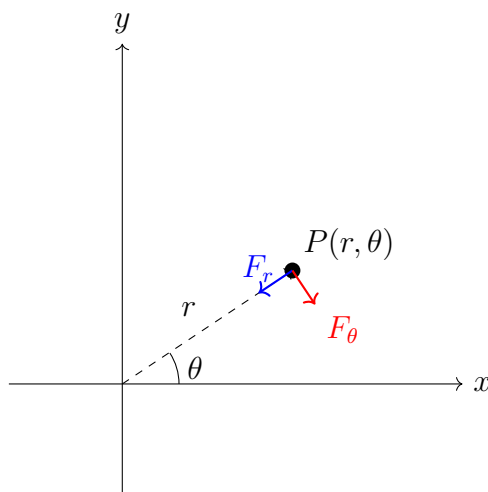
### 9.5.2 Momento delle forze

Per una forza  $\vec{F}$  applicata a un punto a distanza  $\vec{r}$  dal polo, il momento delle forze  $\mathbf{M}$  è definito come:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (412)$$

In coordinate polari, possiamo scomporre la forza in componenti **radiale** e **trasversa**, analogamente a quanto fatto per la velocità:

$$\mathbf{F} = F_r\boldsymbol{\mu}_r + F_\theta\boldsymbol{\mu}_\theta \quad (413)$$



Sostituendo questa espressione nella definizione del momento delle forze, otteniamo:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times (F_r \boldsymbol{\mu}_r + F_\theta \boldsymbol{\mu}_\theta) \quad (414)$$

$$= \mathbf{r} \times F_\theta \boldsymbol{\mu}_\theta \quad (415)$$

$$= r F_\theta \boldsymbol{\mu}_z \quad (416)$$

#### Momento delle forze in coordinate polari

Solo la componente trasversa della forza contribuisce al momento. La componente radiale della forza non produce alcun momento rispetto al polo.

La forza trasversa può essere espressa come:

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}_\theta \quad (417)$$

Dove  $a_\theta$ :

$$\mathbf{a}_\theta = r \ddot{\theta} + \dot{r} \dot{\theta} \boldsymbol{\mu}_\theta \quad (418)$$

Nel caso di un moto rotante a raggio costante, la derivata del raggio è nulla, pertanto:

$$\mathbf{a}_\theta = r \ddot{\theta} \boldsymbol{\mu}_\theta \quad (419)$$

Questa considerazione mi permette di esprimere il momento delle forze nel in un moto rotante come:

$$\mathbf{M} = I \boldsymbol{\alpha} \quad (420)$$

dove  $I$  è il momento d'inerzia e  $\boldsymbol{\alpha}$  è l'accelerazione angolare. Questa equazione è l'analogo rotazionale della seconda legge di Newton ( $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$ ) e descrive come il momento delle forze influenzi il moto rotazionale di un corpo.

In coordinate polari, l'accelerazione angolare  $\alpha$  è data da:

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (421)$$

Combinando queste equazioni, possiamo esprimere il moto rotazionale in coordinate polari come:

$$r F_\theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (422)$$

Questa equazione descrive come la componente trasversa della forza influenzi l'accelerazione angolare del sistema.

È importante notare che, mentre la componente radiale della forza non contribuisce direttamente al momento delle forze, essa può influenzare il moto rotazionale indirettamente modificando il momento d'inerzia del sistema se la distanza dal polo varia nel tempo.

L'analisi dei momenti in coordinate polari offre una prospettiva unica e spesso semplificata sui fenomeni rotazionali. La decomposizione delle grandezze vettoriali in componenti radiali e trasverse permette di isolare gli effetti che contribuiscono alla rotazione, fornendo intuizioni preziose sulla dinamica dei sistemi rotanti.

## **9.6 Teorema del momento dell'impulso**

### **9.6.1 Enunciato**

### **9.6.2 Dimostrazione**

## 9.7 Lavori e energie in funzioni dei momenti

Nel contesto dei sistemi rotanti, l'analisi dei lavori e delle energie in funzione dei momenti offre una prospettiva illuminante sulla dinamica del sistema.

Questa trattazione si rivela particolarmente elegante quando formulata in coordinate polari, permettendo una comprensione più profonda dei fenomeni rotazionali.

### 9.7.1 Lavoro in coordinate polari

Il lavoro compiuto da una forza  $\mathbf{F}$  su una particella che si sposta lungo un percorso  $\mathbf{r}(t)$  è generalmente definito come:

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (423)$$

In coordinate polari, possiamo esprimere sia la forza che lo spostamento in termini di componenti radiali e trasverse:

$$\mathbf{F} = F_r \boldsymbol{\mu}_r + F_\theta \boldsymbol{\mu}_\theta \quad (424)$$

$$d\mathbf{r} = dr \boldsymbol{\mu}_r + r d\theta \boldsymbol{\mu}_\theta \quad (425)$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione del lavoro, otteniamo:

$$W = \int (F_r dr + F_\theta r d\theta) \quad (426)$$

Questa formulazione evidenzia due contributi distinti al lavoro in coordinate polari:

- Il **lavoro radiale**:  $W_r = \int F_r dr$
- Il **lavoro trasverso**:  $W_\theta = \int F_\theta r d\theta$

#### Lavoro trasverso

Il lavoro trasverso può essere espresso in termini del momento delle forze  $M = rF_\theta$ :

$$W_\theta = \int M d\theta$$

Questa espressione rivela una profonda connessione tra il lavoro trasverso e il momento delle forze, analogamente a come il lavoro lineare è legato alla forza.

### 9.7.2 Energia cinetica rotazionale

L'energia cinetica di un corpo in rotazione, o energia cinetica rotazionale, è una quantità fondamentale nella dinamica rotazionale. Per un corpo rigido che ruota attorno a un asse fisso con velocità angolare  $\omega$ , l'energia cinetica rotazionale è data da:

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (427)$$

dove  $I$  è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione.

In coordinate polari, per una particella di massa  $m$  a distanza  $r$  dal polo, possiamo esprimere l'energia cinetica come:

$$K = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\theta^2) = \frac{1}{2}m \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \left( r \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \quad (428)$$

Dove il primo termine indica l'energia cinetica **traslazionale** mentre il secondo termine rappresenta l'energia cinetica rotazionale della particella.

### 9.7.3 Potenza in coordinate polari

La potenza, definita come il tasso di variazione del lavoro nel tempo, può essere espressa in coordinate polari come:

$$P = \frac{dW}{dt} = F_r v_r + F_\theta v_\theta \quad (429)$$

$$P_\theta = F_\theta v_\theta = (r F_\theta) \frac{d\theta}{dt} = M\omega \quad (430)$$

Analoga alla forma familiare  $P = Fv$  per il moto lineare.



## 10 Dinamica del sistema di punti

### 10.1 Definizioni preliminari

La dinamica dei sistemi di punti si occupa dello studio del moto di un **insieme di punti interagenti** tra loro e con l'ambiente esterno.

#### 10.1.1 Insieme di punti

##### Sistema di punti

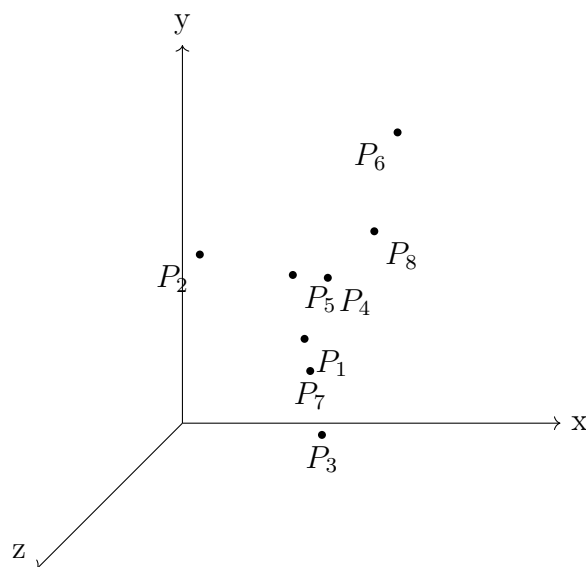
Un sistema di punti materiali è un insieme di  $N$  particelle, ciascuna caratterizzata da una massa  $m_i$  e una posizione  $\vec{r}_i(t)$  che varia nel tempo.

Generalmente si può indicare un sistema di punti come:

$$\{(m_1, \mathbf{r}_1(t)), (m_2, \mathbf{r}_2(t)), \dots, (m_N, \mathbf{r}_N(t))\} \quad (431)$$

dove  $i = 1, 2, \dots, N$  indica l'indice di ciascuna particella.

Le particelle di un sistema si dicono interagenti quando esercitano forze reciproche le une sulle altre.



#### 10.1.2 Considerazioni

Quando il numero di particelle in un sistema diventa molto grande (anche 4 particelle in 3 dimensioni possono dare non pochi problemi.), la descrizione dettagliata del moto di ciascuna particella diventa praticamente impossibile, questo porta a diverse sfide:

- Complessità computazionale: Il numero di equazioni del moto cresce rapidamente con il numero di particelle.
- Sensibilità alle condizioni iniziali: Piccole variazioni nelle condizioni iniziali possono portare a grandi differenze nel comportamento del sistema.

- Necessità di approcci statistici: Per sistemi con molte particelle, si ricorre spesso a metodi statistici e alla meccanica statistica.

Per affrontare queste difficoltà, si introducono spesso grandezze medie o collettive, come il **centro di massa**, che permettono di effettuare un'analisi delle proprietà globali del sistema (perdendo informazioni a livello locale) lo studio dei sistemi di punti materiali permette di:

- Analizzare il comportamento **globale** di un gran numero di particelle.
- Derivare le leggi macroscopiche della materia a partire dalle interazioni microscopiche.
- Modellizzare sistemi complessi.

### 10.1.3 Centro di massa

#### Centro di massa

Il centro di massa è un'entità virtuale che rappresenta il punto medio del sistema, pesato rispetto alle masse delle particelle.

Il centro di massa di un sistema di  $N$  punti materiali è definito come il punto geometrico la cui posizione  $\mathbf{r}_{CM}$  è data da:

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{m_{tot}} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \quad (432)$$

dove  $M = \sum_{i=1}^N m_i$  è la massa totale del sistema.

Il centro di massa ha diverse proprietà importanti:

- Il suo moto può essere descritto come se tutta la massa del sistema fosse concentrata in esso.
- In assenza di forze esterne, il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme.

## 10.2 Proprietà dei sistemi di punti

Nella dinamica dei sistemi di punti materiali, è fondamentale comprendere la distinzione tra le grandezze relative al centro di massa (CM) e quelle relative all'intero sistema.

Questa distinzione ci permette di analizzare il comportamento complessivo del sistema e, allo stesso tempo, di esaminare il moto interno dei suoi componenti:

- Il centro di massa rappresenta un punto immaginario che si comporta come se tutta la massa del sistema fosse concentrata in esso.

Le grandezze associate al CM, come posizione, velocità e accelerazione, descrivono il movimento 'medio' del sistema nello spazio.

Queste grandezze sono particolarmente utili quando si studia il comportamento macroscopico del sistema o la sua interazione con l'ambiente esterno.

- D'altra parte, le grandezze relative all'intero sistema tengono conto di tutti i punti materiali che lo compongono e delle loro interazioni reciproche.

Queste includono la quantità di moto totale, il momento angolare totale e l'energia cinetica totale del sistema.

**È importante notare che, mentre alcune grandezze del sistema coincidono con quelle del CM (come la quantità di moto totale), altre mostrano differenze significative.**

Ad esempio, l'energia cinetica totale del sistema non è semplicemente l'energia cinetica del CM, ma include anche un termine relativo al moto dei punti rispetto al CM.

Questa distinzione diventa cruciale quando si applicano i principi di conservazione o si studiano fenomeni come gli urti o le deformazioni. In molti casi, il moto del CM può essere relativamente semplice, mentre il moto interno del sistema può essere complesso e variegato.

Per un sistema di  $N$  punti materiali, possiamo definire alcune grandezze globali che caratterizzano il sistema nel suo complesso:

### 10.2.1 Posizione del CM e del sistema

#### Centro di massa e posizioni in un sistema di punti

La posizione del centro di massa è calcolata come la media pesata delle singole posizioni:

$$\mathbf{r}_{CM} = \mathbf{r}_{sistema\ media}$$

Più precisamente:

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{m_{tot}} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \quad (433)$$

Dove  $m_{tot} = \sum_{i=1}^N m_i$  è la massa totale del sistema.

### 10.2.2 Velocità del CM e del sistema

#### Velocità del centro di massa e del sistema

La velocità del centro di massa è calcolata come la media pesata della singole velocità:

$$\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{v}_{sistema\ media}$$

Più precisamente:

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{m_{tot}} \sum m_i \mathbf{r}_i\right)}{dt} = \frac{1}{m_{tot}} \sum m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{1}{m_{tot}} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \quad (434)$$

Ovvero:

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{1}{m_{tot}} \sum m_i \mathbf{v}_i \quad (435)$$

### 10.2.3 Accelerazione del CM e del sistema

#### Accelerazione del centro di massa e del sistema

L'accelerazione del centro di massa è calcolata come la media pesata della singole accelerazioni:

$$\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{a}_{sistema\ media}$$

Più precisamente:

$$\mathbf{a}_{CM} = \frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{m_{tot}} \sum m_i \mathbf{v}_i\right)}{dt} = \frac{1}{m_{tot}} \sum m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{1}{m_{tot}} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \quad (436)$$

Quindi:

$$\mathbf{a}_{CM} = \frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{m_{tot}} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i = \frac{1}{m_{tot}} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \quad (437)$$

dove  $\mathbf{F}_i$  è la forza totale agente sull'i-esimo punto.

### 10.2.4 Quantità di moto del CM e del sistema

#### Quantità di moto del centro di massa e del sistema

La quantità di moto del centro di massa è **uguale** alla quantità di moto del sistema:

$$\mathbf{q}_{CM} = \mathbf{q}_{sistema}$$

Infatti per il sistema:

$$\mathbf{p}_{sistema} = \sum m_i \mathbf{v}_i \quad (438)$$

Mentre per il centro di massa

$$\mathbf{p}_{CM} = m_{tot}v_{cm} = m_{tot}\frac{1}{m_{tot}}\sum m_i v_i = \sum m_i v_i \quad (439)$$

Queste considerazioni ci portano a concludere:

$$\mathbf{p}_{CM} = \mathbf{p}_{sistema} \quad (440)$$

### 10.2.5 Momenti angolare del CM e del sistema

#### Momento angolare del centro di massa e del sistema

Il momento angolare del centro di massa è **diverso** alla quantità di moto del sistema:

$$\mathbf{L}_{CM} \neq \mathbf{L}_{sistema}$$

Il momento angolare del centro di massa è definito come:

$$\mathbf{L}_{CM} = m_{tot} \times \mathbf{q}_{CM} \quad (441)$$

Mentre il momento angolare del sistema viene definito come:

$$\mathbf{L}_{sistema} = \sum m_i \times \mathbf{q}_i \quad (442)$$

Osserviamo che queste due grandezze sebbene indichino il momento angolare sono strutturate in modo differente, vengono pertanto indicate come **momento angolare del sistema** e come **momento angolare del centro di massa**

Un modo per legare queste due grandezze verrà derivato dal **I Teorema di Konig**

### 10.2.6 Energia cinetica del CM e del sistema

#### Energia cinetica del centro di massa e del sistema

Il momento angolare del centro di massa è **diverso** alla quantità di moto del sistema:

$$K_{CM} \neq K_{sistema}$$

L'energia cinetica del centro di massa viene definita come:

$$K_{CM} = \frac{1}{2}m_{tot}v_{CM}^2 \quad (443)$$

Mentre l'energia cinetica del sistema viene calcolata come:

$$K_{sistema} = \sum \frac{1}{2}m_i v_i^2 \quad (444)$$

Osserviamo che queste due grandezze sebbene indichino l'energia cinetica sono strutturate in modo differente, vengono pertanto indicate come **energia cinetica del sistema** e come **energia cinetica del centro di massa**

Un modo per legare queste due grandezze verrà derivato dal **II Teorema di Konig**

### 10.2.7 Osservazioni

Sebbene la posizione, velocità, accelerazione, quantità di moto siano direttamente correlate quando le si identificano per il sistema e il centro di massa, il momento angolare e l'energia cinetica non lo sono.

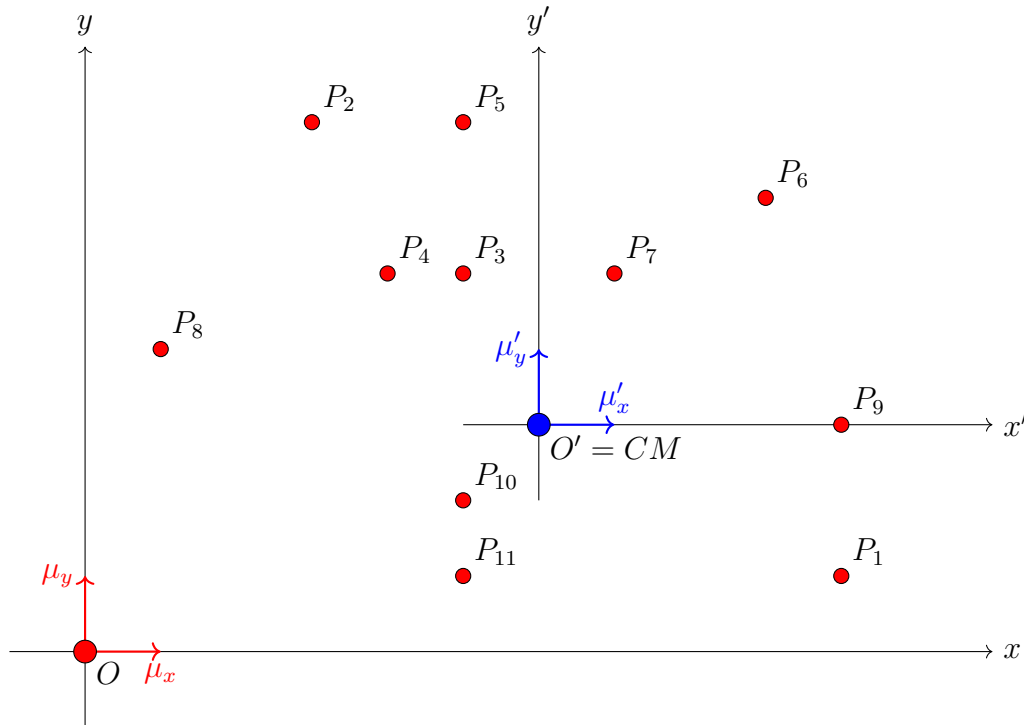
La quantità di moto e il momento in un sistema di punti non sono più linearmente dipendenti, ma sono due grandezze con un set di informazioni differenti.

Per mettere in relazione il momento angolare e l'energia cinetica del sistema e del centro di massa faremo riferimento ai **teoremi di konig**, che ci permetteranno, tramite il **sistema di riferimento del laboratorio** di mettere in relazione queste due grandezze.

## 10.3 Sistema del laboratorio

Il sistema del laboratorio è un particolare tipo di sistema di riferimento ideato per agevolare i conti nella dinamica di sistema di punti, gode di due proprietà fondamentali:

- Nel sistema del laboratorio l'origine  $O'$  del sistema  $S'R'$  coincide con il  $CM$  del sistema.
- I versori  $\mu'_x$  e  $\mu'_y$  di  $S'R'$  sono paralleli e orientati lungo lo stesso verso dei versori  $\mu_x, \mu_y$  di  $SR$



Applicando i teoremi delle velocità e delle accelerazioni relative a un sistema di punti nel sistema del laboratorio, si ottengono risultati interessanti che collegano il moto dei singoli punti nel laboratorio al moto del centro di massa e al moto relativo dei punti rispetto al centro di massa:

### 10.3.1 Velocità

Rifacendoci al **teorema delle velocità relative** per un punto  $P_i$  del sistema, la sua velocità nel sistema del laboratorio può essere espressa come:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}'_i \quad (445)$$

dove  $\mathbf{v}_{CM}$  è la velocità del centro di massa nel sistema del laboratorio e  $\mathbf{v}'_i$  è la velocità del punto  $P_i$  rispetto al centro di massa.

### 10.3.2 Accelerazioni

Rifacendoci al **teorema delle accelerazioni relative** per un punto  $P_i$  nel sistema del laboratorio può essere scritta come:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_{CM} + \mathbf{a}'_i \quad (446)$$

dove  $\mathbf{a}_{CM}$  è l'accelerazione del centro di massa nel sistema del laboratorio e  $\mathbf{a}'_i$  è l'accelerazione del punto  $P_i$  rispetto al centro di massa.

Otteniamo dunque le seguenti relazioni:

#### Trasformazioni nel sistema del laboratorio

Applicando il teorema delle velocità e delle accelerazioni relative al sistema di riferimento del laboratorio otteniamo:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_{CM} \\ \mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{CM} \\ \mathbf{a}_i = \mathbf{a}'_i + \mathbf{a}_{CM} \end{cases}$$

### 10.3.3 Centro di massa nell'origine

La scelta di collocare l'origine del sistema di riferimento del laboratorio nel centro di massa agevola i conti in modo non indifferente: infatti il centro di massa per  $S'R'$  non compirà mai alcun moto.

Il nuovo sistema di riferimento dal momento vedrà il  $CM$  sempre collocato nell'origine: all'osservatore posto nel sistema del laboratorio sembrerà che il centro di massa non si muova, dal momento che egli si muoverà di pari passo con lui.

Questo fatto comporta delle agevolazioni non indifferenti a livello matematico, infatti essendo il  $CM$  per  $S'R'$  potremmo scrivere le seguenti relazioni:

#### Moto del centro di massa per il sistema del laboratorio

$$\begin{array}{lll} \mathbf{r}'_{CM} = 0 & \mathbf{a}'_{CM} = 0 & \sum m_i \mathbf{r}'_i = 0 \\ \mathbf{v}'_{CM} = 0 & \mathbf{q}'_{CM} = 0 & \sum m_i \mathbf{v}'_i = 0 \end{array}$$

## 10.4 I Teorema di König

Il primo teorema di König, noto anche come **teorema di König sul momento angolare**, è un risultato fondamentale nella meccanica classica che fornisce una relazione elegante tra il momento angolare totale di un sistema di particelle e il moto del suo centro di massa.

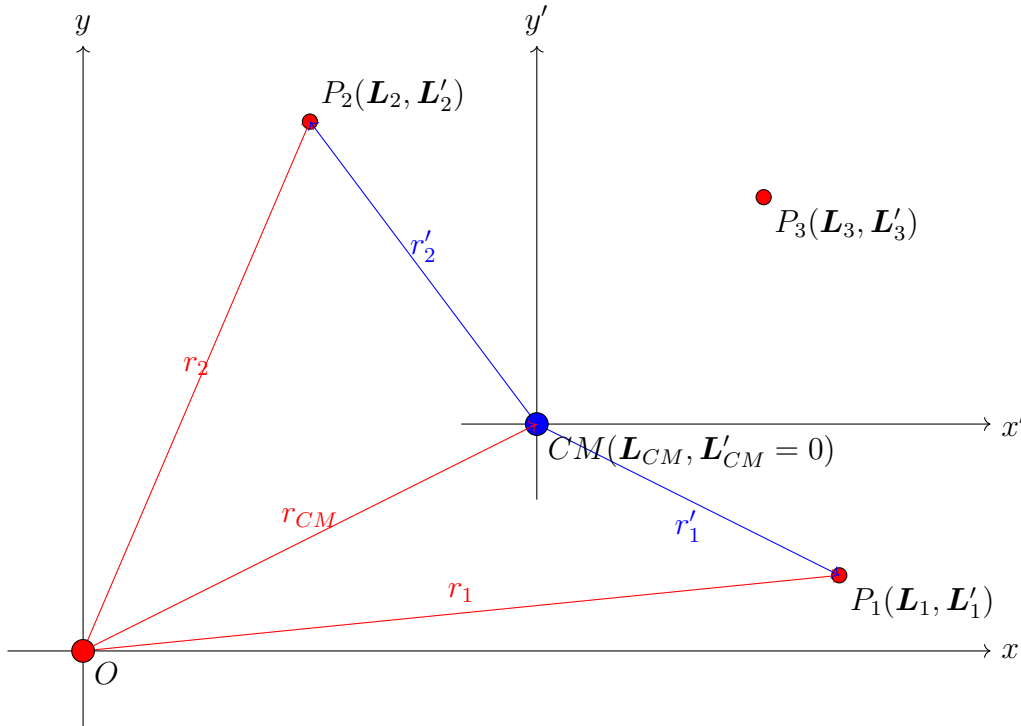
### 10.4.1 Enunciato

Il primo teorema di König afferma che il momento angolare totale di un sistema di particelle è uguale alla somma di due termini:

- Il momento angolare del centro di massa del sistema, considerando tutta la massa concentrata in quel punto.
- Il momento angolare del sistema rispetto al suo centro di massa.

$$\mathbf{L}_{tot} = \mathbf{L}_{CM} + \mathbf{L}_{sistema} \quad (447)$$

$$\mathbf{L}_{tot} = \mathbf{r}_{CM} \times m_{tot} \mathbf{v}_{CM} + \sum \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \quad (448)$$



### 10.4.2 Dimostrazione

Per dimostrare il teorema, consideriamo un sistema di  $n$  particelle. Sia  $m_i$  la massa della  $i$ -esima particella,  $\mathbf{r}_i$  la sua posizione e  $\mathbf{v}_i$  la sua velocità nel sistema di riferimento inerziale.

Il momento angolare totale del sistema rispetto all'origine è dato da:



$$\mathbf{L}_{tot} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \quad (449)$$

Dai moti relativi sappiamo che la posizione di ciascuna particella può essere espressa come la somma della posizione del centro di massa e della posizione relativa della particella rispetto al centro di massa:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{CM} + \mathbf{r}'_i \quad (450)$$

Sostituiamo questa espressione nell'equazione del momento angolare totale:

$$\mathbf{L}_{tot} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_{CM} + \mathbf{r}'_i) \times m_i \mathbf{v}_i \quad (451)$$

$$= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{CM} \times m_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_i \quad (452)$$

Il primo termine può essere riscritto come:

$$\mathbf{r}_{CM} \times \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{q}_{sistema} = \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{q}_{CM} \quad (453)$$

che rappresenta il momento angolare del centro di massa.

Per il secondo termine, notiamo che  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}'_i$ , dove  $\mathbf{v}'_i$  è la velocità relativa della particella rispetto al centro di massa. Sostituendo:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i (\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}'_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \quad (454)$$

poiché  $\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i = 0$  per definizione di centro di massa. Quindi, otteniamo il risultato finale:

$$\mathbf{L}_{tot} = m_{tot} (\mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{v}_{CM}) + \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i) \quad (455)$$

## 10.5 Osservazioni

Il primo teorema di König ha numerose implicazioni e applicazioni importanti:

- **Semplificazione dei calcoli:** Invece di calcolare il momento angolare di ogni singola particella in un sistema complesso, possiamo spesso semplificare il problema calcolando il momento angolare del centro di massa e il momento angolare relativo separatamente.
- **Studio dei corpi rigidi:** Per un corpo rigido, il momento angolare relativo al centro di massa può essere espresso in termini dell'inerzia e velocità angolare, portando a formulazioni più semplici per il momento angolare totale.

## 10.6 II Teorema di König

Il secondo teorema di König, noto anche come **teorema di König sull'energia cinetica**, è un risultato fondamentale nella meccanica classica che fornisce una relazione elegante tra l'energia cinetica totale di un sistema di particelle e il moto del suo centro di massa.

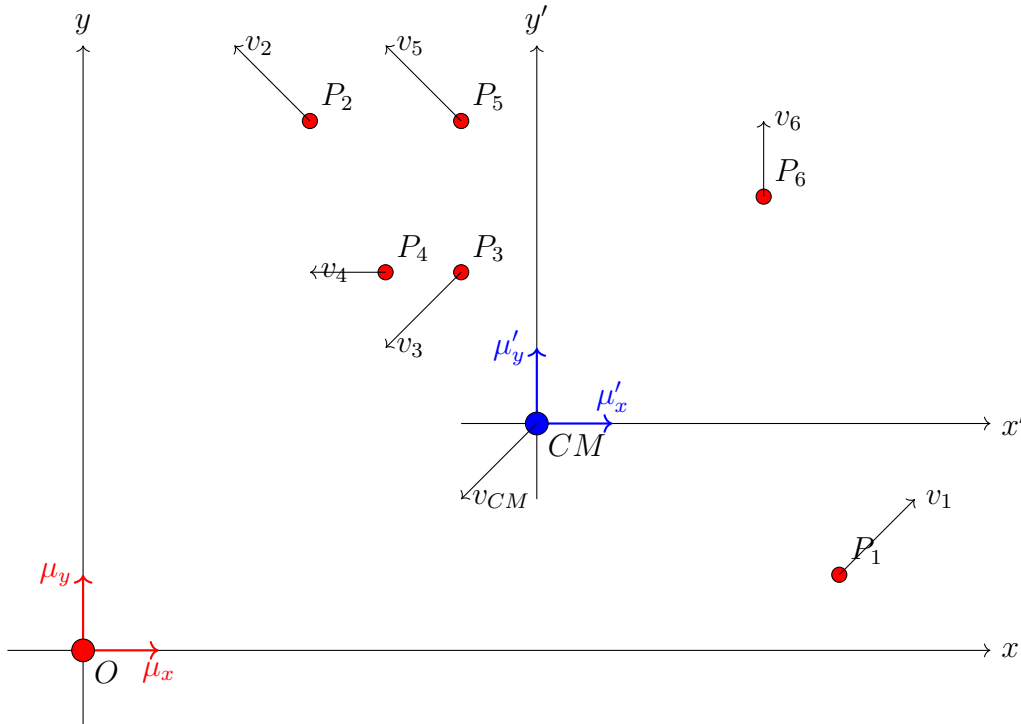
### 10.6.1 Enunciato

Il secondo teorema di König afferma che l'energia cinetica totale di un sistema di particelle è uguale alla somma di due termini:

- L'energia cinetica del centro di massa del sistema, considerando tutta la massa concentrata in quel punto.
- L'energia cinetica del sistema rispetto al suo centro di massa.

$$K_{tot} = K_{CM} + K_{sistema} \quad (456)$$

$$K_{tot} = \frac{1}{2}m_{tot}v_{CM}^2 + \sum \frac{1}{2}m_i v_i^2 \quad (457)$$



### 10.6.2 Dimostrazione

Per dimostrare il teorema, consideriamo un sistema di  $n$  particelle. Sia  $m_i$  la massa della  $i$ -esima particella e  $\vec{v}_i$  la sua velocità nel sistema di riferimento inerziale.

L'energia cinetica totale del sistema è data dalla somma delle energie cinetiche di tutte le particelle:

$$K_{tot} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (458)$$

Ora, introduciamo il concetto di centro di massa. La posizione del centro di massa  $\vec{r}_{CM}$  è definita come:

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{m_{tot}} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \quad (459)$$

dove  $m_{tot} = \sum_{i=1}^n m_i$  è la massa totale del sistema e  $\mathbf{r}_i$  è la posizione della  $i$ -esima particella.

La velocità del centro di massa  $\mathbf{v}_{CM}$  è la derivata temporale di  $\mathbf{r}_{CM}$ :

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \quad (460)$$

Ora, esprimiamo la velocità di ciascuna particella come la somma della velocità del centro di massa e della velocità relativa della particella rispetto al centro di massa:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}'_i \quad (461)$$

dove  $\mathbf{v}'_i$  è la velocità della  $i$ -esima particella rispetto al centro di massa. Sostituiamo questa espressione nell'equazione dell'energia cinetica totale:

$$K_{tot} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}'_i)^2 \quad (462)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (v_{CM}^2 + 2\mathbf{v}_{CM} \cdot \mathbf{v}'_i + v_i'^2) \quad (463)$$

$$= \frac{1}{2} v_{CM}^2 \sum_{i=1}^n m_i + \mathbf{v}_{CM} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}'_i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \quad (464)$$

Il primo termine è l'energia cinetica del centro di massa:

$$\frac{1}{2} v_{CM}^2 \sum_{i=1}^n m_i = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 \quad (465)$$

Il secondo termine si annulla, poiché per definizione:

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}'_i = \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{CM}) = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i - m_{tot} \mathbf{v}_{CM} = 0 \quad (466)$$

Il terzo termine rappresenta l'energia cinetica relativa al centro di massa:

$$K_{rel} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \quad (467)$$

Quindi, otteniamo il risultato finale:

$$K_{tot} = K_{CM} + K_{rel} \quad (468)$$

che è esattamente l'enunciato del secondo teorema di König.

### 10.6.3 Osservazioni

Il secondo teorema di König ha numerose implicazioni e applicazioni importanti:

- **Semplificazione dei calcoli:** Invece di calcolare l'energia cinetica di ogni singola particella in un sistema complesso, possiamo spesso semplificare il problema calcolando l'energia del centro di massa e l'energia relativa separatamente.
- **Analisi dei sistemi di riferimento:** Il teorema ci permette di passare facilmente tra diversi sistemi di riferimento, separando il moto del sistema nel suo complesso dal moto interno delle sue parti.
- **Studio dei corpi rigidi:** Per un corpo rigido, l'energia cinetica relativa al centro di massa può essere espressa in termini di rotazione attorno al centro di massa, portando a formulazioni più semplici per l'energia cinetica totale.

## 10.7 III Teorema di Konig

## 10.8 Primo Teorema Cardinale della Dinamica

Il Primo Teorema Cardinale della Dinamica, noto anche come **teorema del centro di massa**, è un risultato fondamentale nella meccanica classica che mette in relazione le forze esterne agenti su un sistema di particelle con il moto del suo centro di massa.

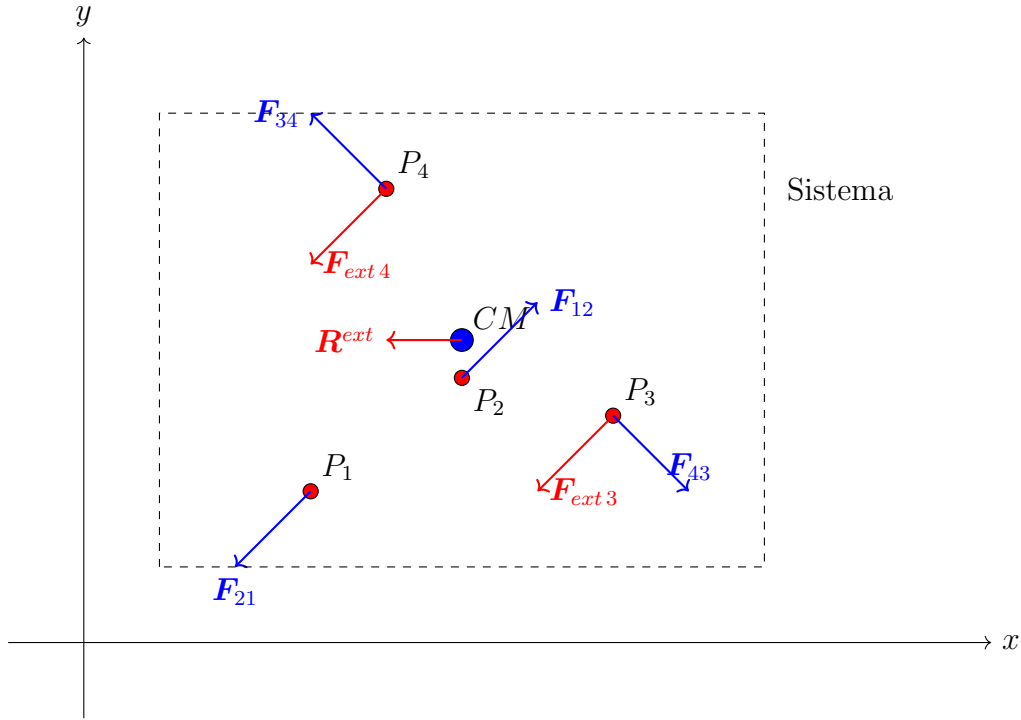
### 10.8.1 Enunciato

Il Primo Teorema Cardinale della Dinamica afferma che la somma delle forze esterne agenti su un sistema di particelle è uguale al prodotto della massa totale del sistema per l'accelerazione del suo centro di massa:

$$\mathbf{R}^{ext} = \frac{d\mathbf{q}_{CM}}{dt} \quad (469)$$

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = m_{tot} \frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = m_{tot} \mathbf{a}_{CM} \quad (470)$$

dove  $\sum \mathbf{F}_{ext}$  è la somma vettoriale di tutte le forze esterne,  $m_{tot}$  è la massa totale del sistema, e  $\mathbf{a}_{CM}$  è l'accelerazione del centro di massa.



Le forze contrassegnate in rosso sono le forze esterne mentre quelle in blu sono le forze che le particelle interne al sistema generano tra di loro.

### 10.8.2 Dimostrazione

Consideriamo un sistema di  $n$  particelle. Sia  $m_i$  la massa della  $i$ -esima particella,  $\mathbf{r}_i$  la sua posizione, e  $\mathbf{v}_i$  la sua velocità nel sistema di riferimento inerziale.

Per ogni particella, la seconda legge di Newton stabilisce:

$$\mathbf{F}_{i,tot} = m_i \mathbf{a}_i \quad (471)$$

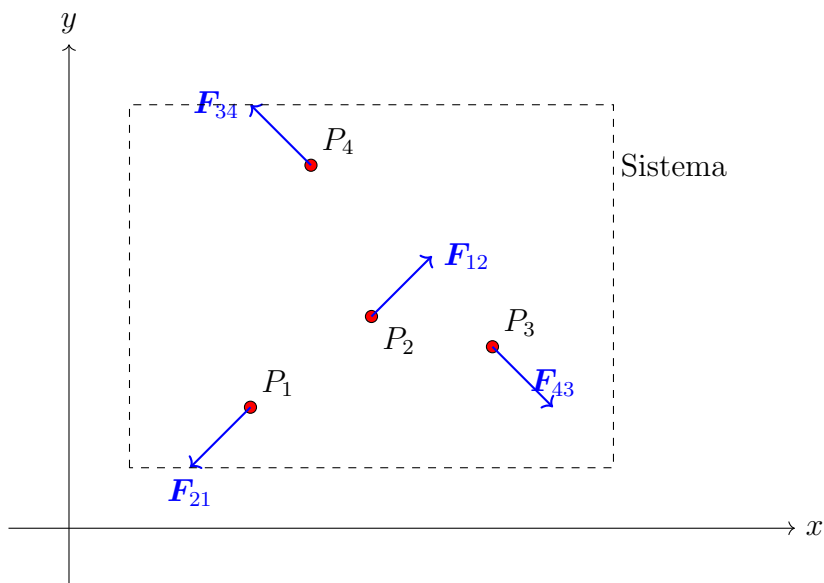
dove  $\mathbf{F}_{i,tot}$  è la forza totale agente sulla  $i$ -esima particella. Questa forza può essere suddivisa in forze esterne  $\mathbf{F}_{i,ext}$  e forze interne  $\mathbf{F}_{ij}$  (la forza esercitata sulla particella  $i$  dalla particella  $j$ ):

$$\mathbf{F}_{i,tot} = \mathbf{F}_{i,ext} + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} \quad (472)$$

Sommiamo le equazioni per tutte le particelle:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{i,ext} + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i \quad (473)$$

Per la terza legge di Newton, le forze interne si annullano a coppie:



Ad esempio applicandolo alla coppia di punti (e relative forze) 1, 2:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad (474)$$

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0 \quad (475)$$

Ne consegue che rimangono solo le forze esterne a influenzare il moto del centro di massa:

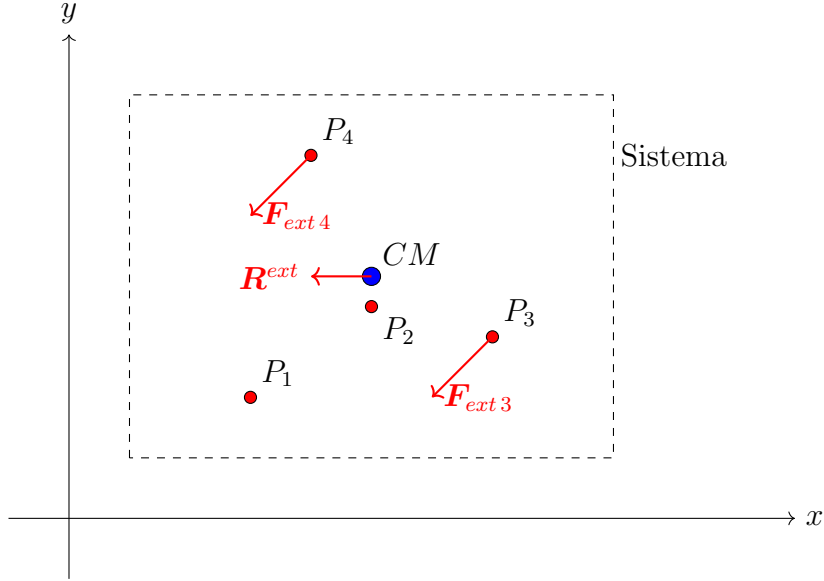
$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{i,ext} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i \quad (476)$$

Il lato sinistro rappresenta la somma di tutte le forze esterne. Per il lato destro, ricordiamo la definizione del centro di massa:

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{m_{tot}} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \quad (477)$$

Derivando due volte rispetto al tempo:

$$\mathbf{a}_{CM} = \frac{1}{m_{tot}} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i \quad (478)$$



Sostituendo nell'equazione precedente, otteniamo:

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = m_{tot} \mathbf{a}_{CM} \quad (479)$$

## 10.9 Osservazioni

Dal primo teorema cardinale consegue:

- **Indipendenza dalle forze interne:** Il moto del centro di massa dipende solo dalle forze esterne, indipendentemente dalle interazioni interne al sistema.
- **Conservazione della quantità di moto:** In assenza di forze esterne, l'accelerazione del centro di massa è nulla, portando alla conservazione della quantità di moto totale del sistema.

$$se \quad \sum F_{ext} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{q}_{CM}}{dt} = 0 \quad (480)$$

$$\frac{d\mathbf{q}_{CM}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q}_{CM} = costante \quad (481)$$



## 10.10 II equazione cardinale

### 10.10.1 Enunciato

La II equazione cardinale della dinamica, nota anche come equazione del momento angolare, è fondamentale per lo studio dei sistemi di punti materiali e dei corpi rigidi:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(ext)} - \mathbf{v}_P \times \mathbf{q} \quad (482)$$

Questa equazione mette in relazione la variazione del momento angolare totale di un sistema con i momenti delle forze esterne agenti su di esso.

### 10.10.2 Dimostrazione

Partiamo dalla definizione del momento angolare per un singolo punto materiale:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (483)$$

dove  $\mathbf{r}$  è il vettore posizione,  $m$  è la massa e  $\mathbf{v}$  è la velocità del punto.

Per un sistema di  $N$  punti materiali, il momento angolare totale è la somma dei momenti angolari di ogni punto:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \quad (484)$$

Deriviamo questa espressione rispetto al tempo:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) \right] \quad (485)$$

Applicando la regola di derivazione del prodotto vettoriale:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \left[ \left( \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times m_i \mathbf{v}_i \right) + \left( \mathbf{r}_i \times m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right) \right] \quad (486)$$

Notiamo che  $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_p$  (includiamo anche la presenza di un **polo mobile** e che  $m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{F}_i$  (la forza totale agente sul punto  $i$ -esimo). Quindi:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N [((\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_p) \times m_i \mathbf{v}_i) + (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i)] \quad (487)$$

Il primo termine è nullo poiché il prodotto vettoriale di un vettore per se stesso è sempre zero. Rimane:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum (-\mathbf{v}_p \times m_i \mathbf{v}_i) + \sum (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) \quad (488)$$

Il termine  $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$  rappresenta il momento della forza  $\mathbf{F}_i$  rispetto all'origine. Possiamo quindi scrivere:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(tot)} \quad (489)$$

dove  $\mathbf{M}^{(tot)}$  è il momento risultante di tutte le forze agenti sul sistema.

### 10.10.3 Dimostrazione del momento nullo delle forze interne

Consideriamo ora le forze interne al sistema. Per ogni coppia di punti  $i$  e  $j$ , le forze interne sono uguali e opposte (terza legge di Newton):

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \quad (490)$$

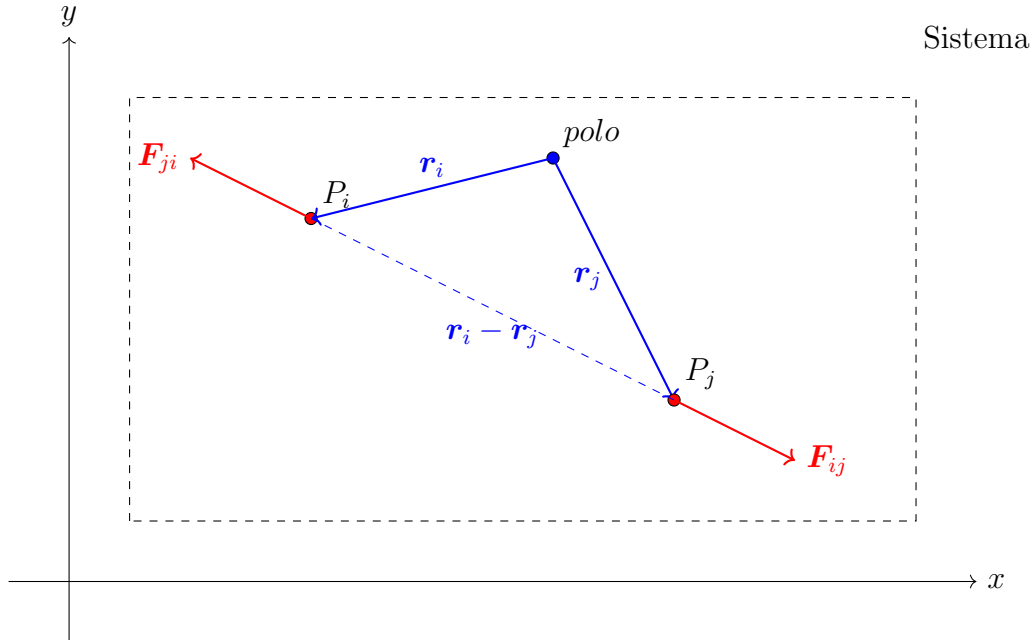
Il momento totale delle forze interne è:

$$\mathbf{M}^{(int)} = \sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}) \quad (491)$$

Sostituendo  $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$ :

$$\mathbf{M}^{(int)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = 0 \quad (492)$$

poiché  $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$  è parallelo a  $\mathbf{F}_{ij}$ :



Quindi, il momento risultante delle forze interne è sempre nullo.

Possiamo quindi scrivere la II equazione cardinale nella sua forma finale:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(ext)} - \mathbf{v}_p \times \mathbf{q} \quad (493)$$

dove  $\mathbf{M}^{(ext)}$  è il momento risultante delle sole forze esterne agenti sul sistema.

## 10.11 Lavoro delle Forze in un Sistema di Particelle

### 10.11.1 Equazioni Fondamentali del Lavoro

Per una singola particella, il lavoro infinitesimo è dato dal prodotto scalare tra la forza totale e lo spostamento:

$$dW_i = \mathbf{R}_i \cdot d\mathbf{r}_i \quad (494)$$

Considerando separatamente le forze esterne e interne:

$$dW_i = (\mathbf{F}_i^{est} + \mathbf{F}_i^{int}) \cdot d\mathbf{r}_i \quad (495)$$

Possiamo quindi scomporre il lavoro in componenti interne ed esterne:

$$dW_i = dW_i^{int} + dW_i^{est} \quad (496)$$

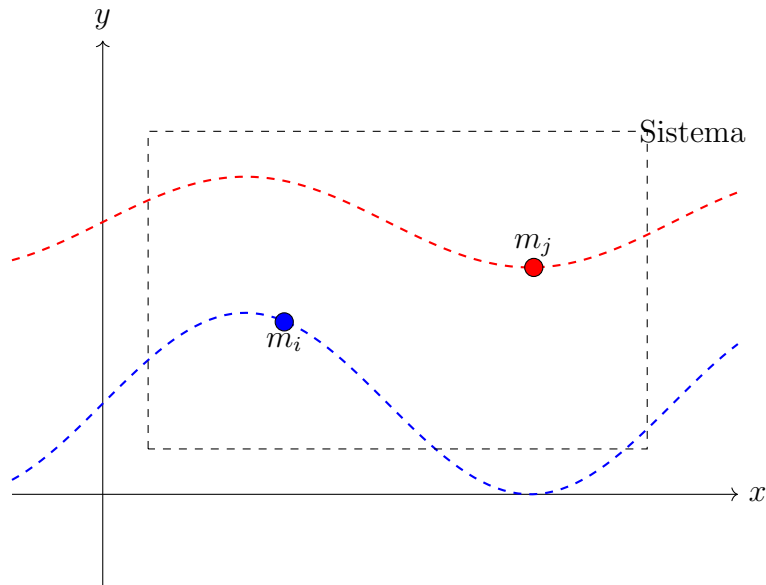
Il lavoro totale sul sistema è la somma dei lavori su tutte le particelle:

$$dW_{tot} = \sum dW_i^{int} + \sum dW_i^{est} \quad (497)$$

### 10.11.2 Lavoro delle Forze Interne

La somma dei lavori interni, contrariamente a quanto si potrebbe pensare osservando i momenti e le forze interne, non è nulla.

Consideriamo ora in dettaglio l'interazione tra due particelle  $i$  e  $j$  che si spostano lungo due traiettoria differenti:



Il lavoro compiuto dalle forze interne su queste particelle è:

$$dW_j = \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_j \quad (498)$$

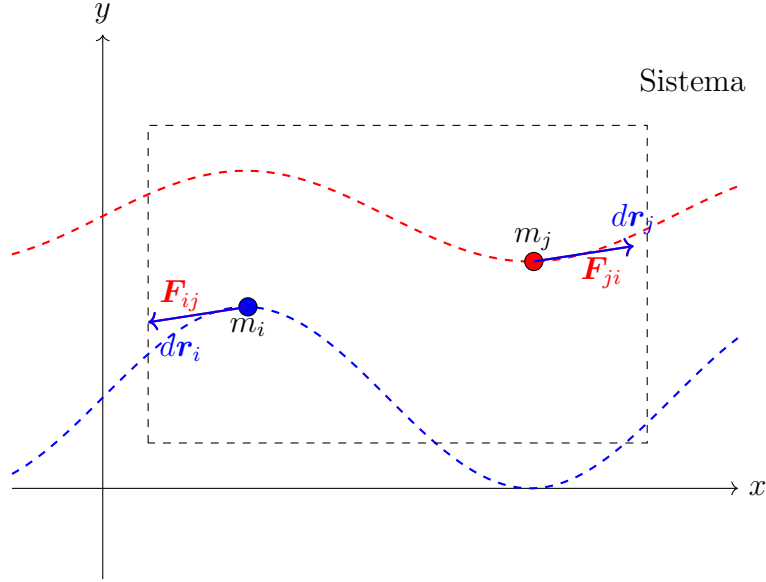
$$dW_i = \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_i \quad (499)$$

Il lavoro totale della coppia di particelle è la somma di questi contributi:

$$dW_i + dW_j = \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_j + \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_i \quad (500)$$

Per la terza legge di Newton, sappiamo che  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ . Applicando questa relazione:

$$dW_i + dW_j = \mathbf{F}_{ij} \cdot (d\mathbf{r}_j - d\mathbf{r}_i) \neq 0 \quad (501)$$



Tuttavia non possiamo essere certi del fatto che la differenza  $(d\mathbf{r}_j - d\mathbf{r}_i) = 0$ :

$$d\mathbf{r}_j - d\mathbf{r}_i \neq 0 \quad (502)$$

Questa equazione è cruciale: mostra che il lavoro delle forze interne non è generalmente nullo, ma dipende dallo spostamento relativo tra le particelle.

### 10.11.3 Spostamento Relativo e sue Implicazioni

Lo spostamento relativo tra le particelle  $i$  e  $j$  è definito come:

$$\delta\mathbf{r}_{ij} = d\mathbf{r}_j - d\mathbf{r}_i \quad (503)$$

Questo vettore rappresenta come cambia la distanza e l'orientamento tra le due particelle durante il loro moto. L'importanza di questo concetto è evidente nell'equazione del lavoro delle forze interne:

$$dW_i + dW_j = \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} \quad (504)$$

### 10.11.4 Caso Speciale: Corpo Rigido

Un corpo rigido è un caso particolare in cui lo spostamento relativo tra qualsiasi coppia di particelle è sempre nullo:

$$d\mathbf{r}_i - d\mathbf{r}_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = \text{costante} \quad (505)$$

In questo caso, il lavoro delle forze interne si annulla sempre:

## 11 Urti

Gli urti sono eventi in cui due o più corpi interagiscono per un brevissimo periodo di tempo, scambiandosi quantità di moto ed energia. Gli urti possono essere classificati in vari modi, a seconda delle proprietà dei corpi coinvolti e delle condizioni dell'urto stesso.

### 11.1 Urto elastico

#### Urto elastico

Un urto elastico è un tipo di collisione in cui l'energia cinetica totale del sistema si conserva.

In altre parole, non c'è dissipazione di energia in forme come calore o deformazione permanente.

Per due corpi rigidi in un urto elastico unidimensionale, valgono le seguenti equazioni:

- Conservazione della quantità di moto:

$$\sum p_i = \sum p_f \quad (506)$$

Nel caso di due particelle:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad (507)$$

- Conservazione dell'energia cinetica:

$$\sum K_i = \sum K_f \quad (508)$$

Nel caso di due particelle:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (509)$$

Risolvendo le equazioni per due corpi, si possono ricavare le equazioni delle velocità finali:

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1i} + 2m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \quad (510)$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1)v_{2i}}{m_1 + m_2} \quad (511)$$

### 11.2 Urto anelastico

#### Urto anelastico

Un urto anelastico è un tipo di collisione in cui parte dell'energia cinetica iniziale viene convertita in altre forme di energia

L'energia cinetica totale del sistema dopo l'urto è minore di quella prima dell'urto.

Nel caso estremo di un urto completamente anelastico, i due corpi si muovono insieme dopo l'urto con la stessa velocità finale; inoltre per un urto completamente anelastico unidimensionale, vale la conservazione della quantità di moto:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f \quad (512)$$

Risolviendo questa equazione, si ottiene:

$$v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \quad (513)$$

La perdita di energia cinetica in un urto completamente anelastico è:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{1i} - v_{2i})^2 \quad (514)$$

### 11.3 Urto vincolato

#### Urto vincolato

Un urto vincolato è un tipo di collisione in cui uno o entrambi i corpi coinvolti sono soggetti a vincoli che limitano il loro movimento

Questi vincoli possono essere fisici (come una superficie su cui il corpo scivola) o geometrici (come un perno attorno al quale il corpo ruota).

In un urto vincolato, la presenza dei vincoli introduce forze di reazione vincolari che influenzano il moto dei corpi durante e dopo l'urto. Queste forze di reazione vincolari **non compiono lavoro**, ma modificano la direzione del moto dei corpi.

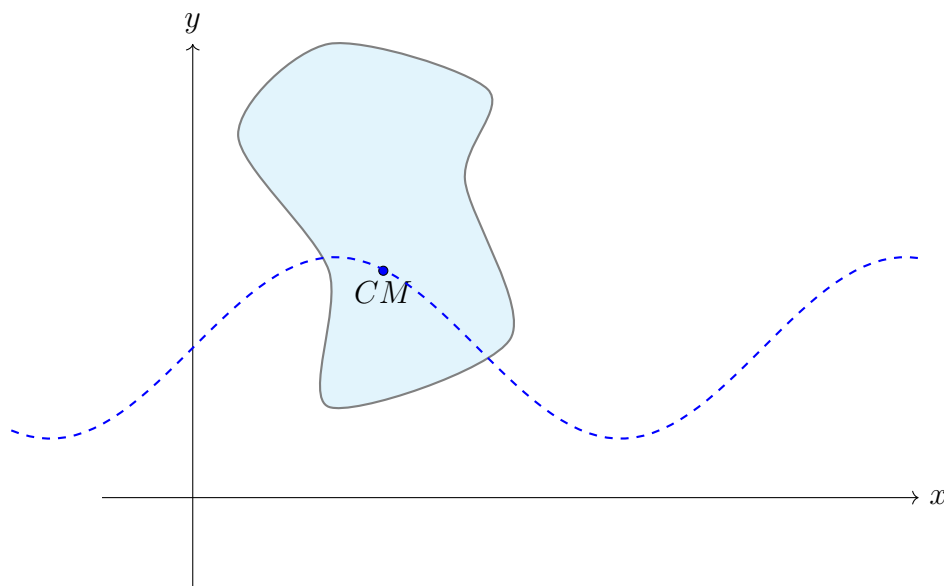
Un esempio classico di urto vincolato è quello di un'asta rigida che ruota attorno a un perno fisso e viene colpita da una particella. In questo caso, il perno agisce come un vincolo che limita il movimento dell'asta a una pura rotazione.

## 12 Corpo rigido

### Corpo rigido

Un corpo rigido è un sistema di punti materiali le cui distanze reciproche rimangono costanti nel tempo.

In altre parole, un corpo rigido è un corpo ideale che non subisce deformazioni quando sottoposto a forze esterne.



Questa definizione idealizzata è fondamentale per lo studio della meccanica dei corpi estesi e permette di semplificare notevolmente l'analisi di molti sistemi fisici.

### 12.0.1 Gradi di libertà

I gradi di libertà di un sistema meccanico rappresentano il numero di parametri indipendenti necessari per descrivere completamente la configurazione del sistema nello spazio.

Per un corpo rigido nello spazio tridimensionale, i gradi di libertà sono sei:

- Tre coordinate per la posizione del centro di massa  $(x, y, z)$
- Tre angoli per l'orientazione del corpo (ad esempio, gli angoli di Eulero  $\phi, \theta, \psi$ )

Osserviamo che conoscendo il moto del centro di massa  $\mathbf{r}_{CM}$  e la rotazione attorno a un asse, possiamo descrivere completamente il moto di un corpo rigido, senza nessuna perdita di informazioni.

### 12.0.2 Integrale di volume

L'integrale di volume è uno strumento matematico fondamentale per lo studio dei corpi rigidi, in quanto permette di calcolare grandezze fisiche distribuite su tutto il volume del corpo.

Per una generica funzione scalare  $f(\mathbf{r})$  definita su un volume  $V$ , l'integrale di volume si scrive:

$$I = \int_V f(\mathbf{r}) dV \quad (515)$$

dove  $dV$  è l'elemento infinitesimo di volume.

In coordinate cartesiane, questo si esprime come:

$$I = \int_V f(x, y, z) dx dy dz \quad (516)$$

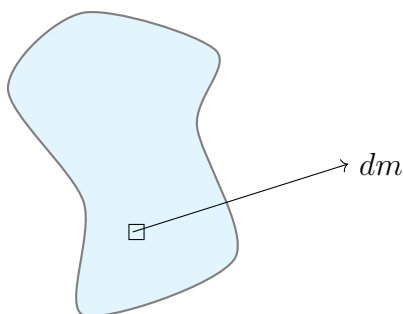
L'integrale di volume è particolarmente utile per calcolare grandezze come la massa totale, il centro di massa e i momenti d'inerzia di un corpo rigido.

## 12.1 Massa di un corpo rigido

Mentre per un sistema di punti avevamo  $n$  masse distinte e ben definite e la massa totale era definita come:

$$m_{tot} = \sum m_i \quad (517)$$

Per un corpo rigido consideriamo una massa infinitesima  $dm$  e ricaviamo la massa totale di un solido integrando sull'infinitesimo  $dm$ :



La massa totale pertanto viene indicata come la *somma degli infinitesimi*  $dm$ :

$$m_{tot} = \int dm \quad (518)$$

Inoltre considerando la densità del corpo:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad (519)$$

A prescindere dal fatto che questa sia costante o meno, possiamo effettuare un cambio di variabile:

$$dm = \rho dV \quad (520)$$

L'integrale iniziale diventa dunque:

$$m_{tot} = \int_V \rho dV \quad (521)$$



### Massa totale

La massa di un generico corpo rigido di volume  $V$  viene definita come:

$$m_{tot} = \int dm = \int_V \rho dV$$

## 12.2 Proprietà di un corpo rigido

Mentre per la dinamica dei sistemi di punti avevamo osservato che per ricavare le proprietà globale del sistema era sufficiente **sommare** le singole proprietà, per un corpo rigido per ricavare il centro di massa, la velocità e l'accelerazione sarà necessario **integrare**.

### 12.2.1 Centro di massa

Il centro di massa di un corpo rigido è un punto geometrico che si comporta come se tutta la massa del corpo fosse concentrata in esso. La sua posizione è definita come:

$$\text{per un sistema di punti : } \mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} \quad (522)$$

$$\text{per un corpo rigido } \mathbf{r}_{CM} = \frac{\int \mathbf{r} dm}{\int_V \rho dV} = \frac{1}{m_{tot}} \int_V \mathbf{r} dm = \frac{1}{m_{tot}} \int_V \mathbf{r} \rho dV \quad (523)$$

dove  $m_{tot}$  è la massa totale del corpo,  $\mathbf{r}$  è il vettore posizione di un elemento infinitesimo di massa  $dm$ , e  $\rho(\mathbf{r})$  è la densità di massa nel punto  $\mathbf{r}$ .

### Centro di massa

Il centro di massa di un generico corpo rigido di volume  $V$  è definito come:

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{m_{tot}} \int_V \mathbf{r} \rho dV$$

### 12.2.2 Velocità

La velocità del centro di massa è data dalla derivata temporale della sua posizione:

$$\text{per un sistema di punti : } \mathbf{v}_{CM} = \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum m_i \mathbf{v}_i}{\sum m_i} \quad (524)$$

$$\text{per un corpo rigido } \mathbf{v}_{CM} = \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{m_{tot}} \int_V \mathbf{v} dm \quad (525)$$

dove  $\mathbf{v}$  è la velocità dell'elemento infinitesimo di massa  $dm$ .

### Velocità del centro di massa

L'accelerazione del centro di massa di un generico corpo rigido di volume  $V$  è definito come:

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{1}{m_{tot}} \int_V \mathbf{v} dm$$

### 12.2.3 Accelerazione

L'accelerazione del centro di massa si ottiene derivando ulteriormente:

$$\text{per un sistema di punti : } \mathbf{a}_{CM} = \frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = \frac{\sum m_i \mathbf{a}_i}{\sum m_i} \quad (526)$$

$$\text{per un corpo rigido } \mathbf{a}_{CM} = \mathbf{v}_{CM} = \frac{1}{m_{tot}} \int_V \mathbf{a} dm \quad (527)$$

dove  $\mathbf{a}$  è la velocità dell'elemento infinitesimo di massa  $dm$ .

#### Accelerazione del centro di massa

L'accelerazione del centro di massa di un generico corpo rigido di volume  $V$  è definito come:

$$\mathbf{a}_{CM} = \frac{1}{m_{tot}} \int_V \mathbf{a} dm$$

## 12.3 Inerzia

#### Inerzia

Il momento d'inerzia è una grandezza che misura la resistenza di un corpo alla variazione del suo stato di rotazione

Per un corpo rigido che ruota attorno a un asse fisso, il momento d'inerzia è definito come:

$$\text{Corpo rigido} \Rightarrow I = \int r^2 dm \quad (528)$$

dove  $r$  è la distanza dell'elemento di massa  $dm$  dall'asse di rotazione.

L'inerzia di un corpo rigido è una misura della sua resistenza al cambiamento del suo stato di moto; nel caso dei corpi rigidi, l'inerzia si manifesta sia per quanto riguarda il moto traslazionale che quello rotazionale.

Per un corpo discreto composto da  $n$  particelle, il momento d'inerzia può essere calcolato come:

$$\text{Sistema di punti} \Rightarrow I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (529)$$

dove  $m_i$  è la massa della  $i$ -esima particella e  $r_i$  è la sua distanza dall'asse di rotazione.

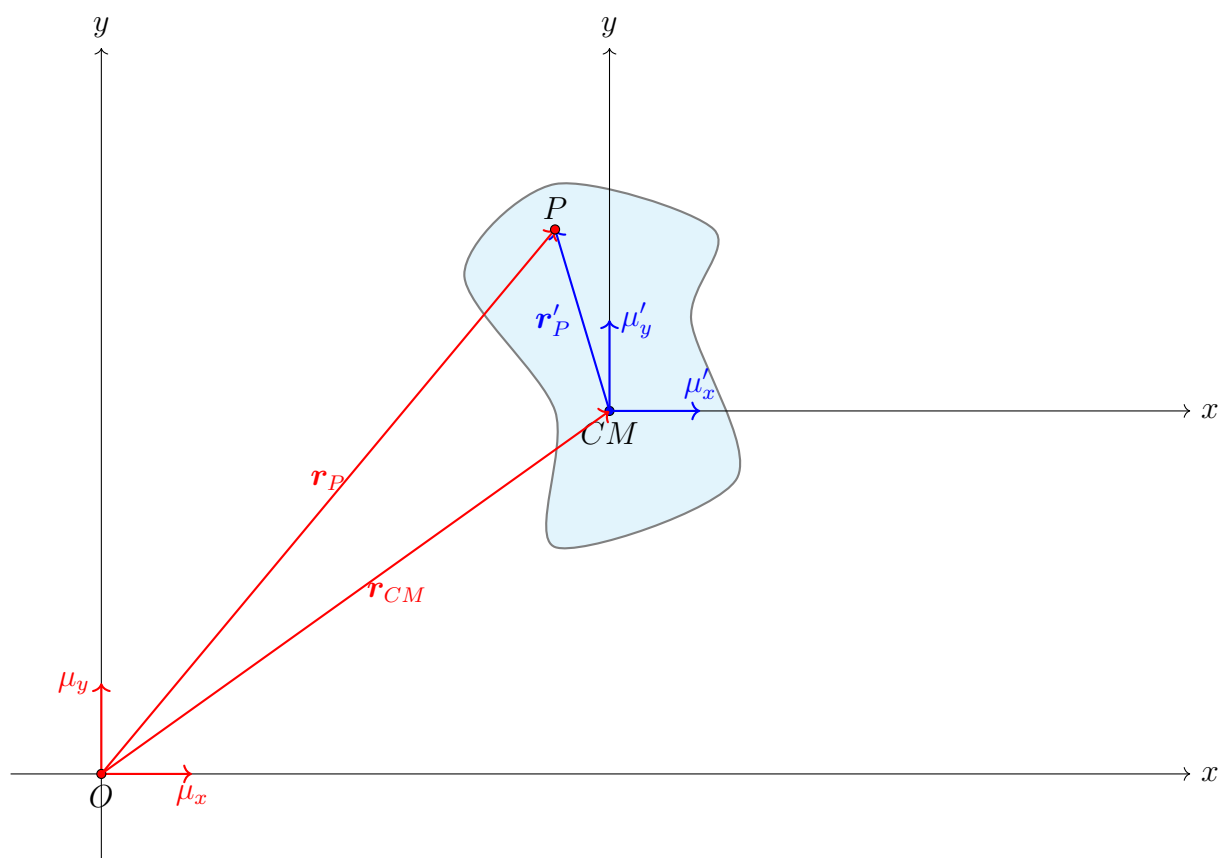
## 12.4 Sistema del laboratorio per un corpo rigido

Il sistema del laboratorio è un sistema di riferimento già introdotto nello studio della dinamica dei punti, gode di due proprietà fondamentali:

- Origine centrata nel  $CM$  del corpo rigido.
- Versori  $\mu'_x$  e  $\mu'_y$  sempre paralleli a  $\mu_x$  e  $\mu_y$

rispetto al quale si studia il moto del corpo rigido. In questo sistema, la posizione di un punto generico  $P$  del corpo rigido può essere espressa come:

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_{CM} + \mathbf{r}'_P \quad (530)$$



dove  $\mathbf{r}_{CM}$  è la posizione del centro di massa e  $\mathbf{r}'_P$  è la posizione del punto  $P$  rispetto al centro di massa.

## 12.5 Moto di traslazione

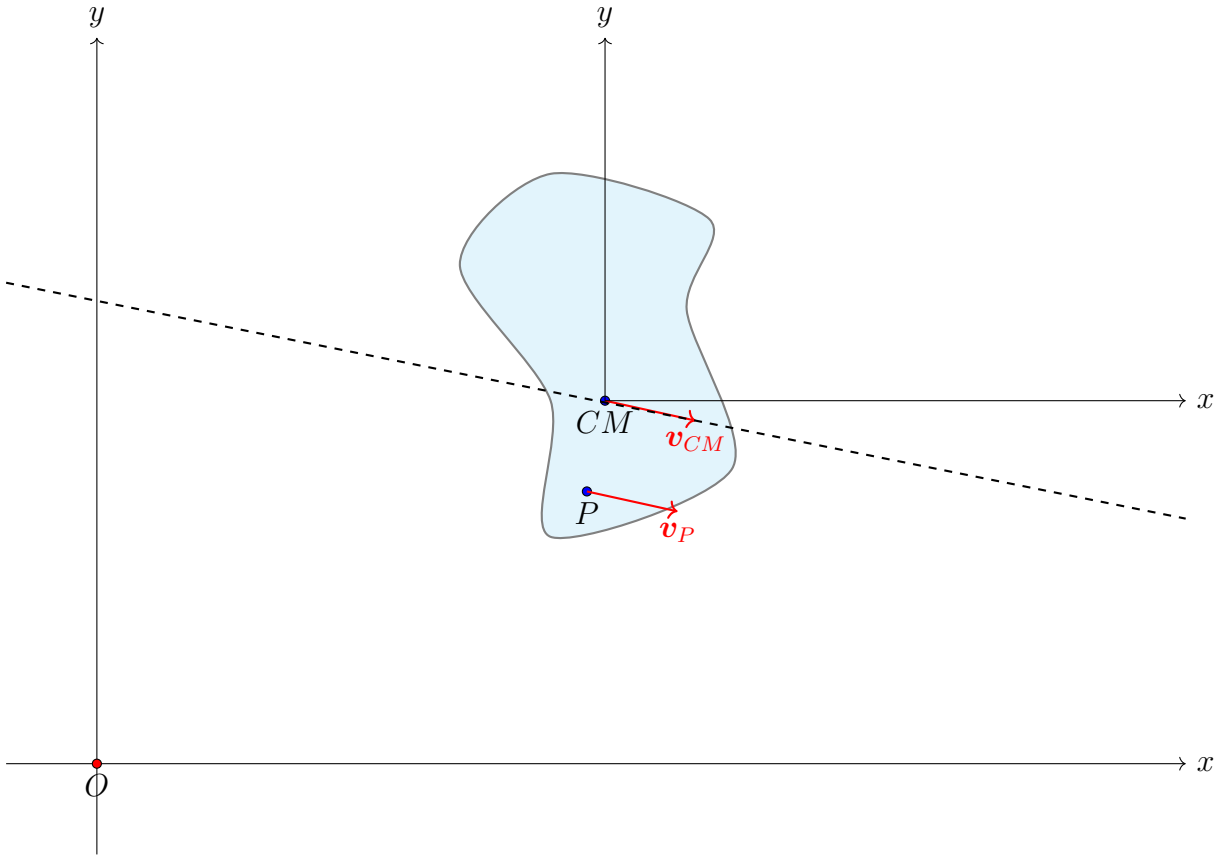
Il moto di traslazione di un corpo rigido è caratterizzato dal fatto che tutti i punti del corpo si muovono con la stessa velocità e accelerazione. In questo caso, il moto del corpo può essere completamente descritto dal moto del suo centro di massa.

Per un moto di pura traslazione, ricaviamo la velocità derivando le accelerazioni:

$$\frac{d\mathbf{r}_P}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'_P}{dt} \quad (531)$$

Nel moto di pura traslazione,  $\mathbf{r}'_P$  rimane costante nel tempo, quindi  $\frac{d\mathbf{r}'_P}{dt} = 0$ , da cui segue che  $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{CM}$ .

$$\mathbf{v}_{tr} = \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{CM} \quad \forall (x_P, y_P, z_P) \in V \quad (532)$$



L'energia cinetica di un corpo rigido in un moto di pura traslazione è data da:

$$K_{tr} = \frac{1}{2}mv_{tr}^2 \quad (533)$$

Inoltre derivando l'equazione della posizione rispetto al tempo, ricaviamo le accelerazioni:

$$\frac{d\mathbf{v}_P}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}'_P}{dt} \quad (534)$$

Non essendoci rotazioni le derivate sono molto più semplici da eseguire:

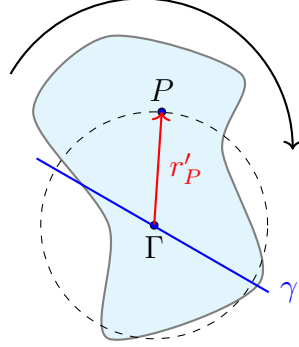
$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{CM} \quad \forall P \in V \quad (535)$$

## 12.6 Moto di rotazione

Il moto di rotazione di un corpo rigido è caratterizzato da una rotazione attorno a un asse fisso. In questo caso, la velocità di un punto generico  $P$  del corpo è data da:

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_P \quad (536)$$

dove  $\boldsymbol{\omega}$  è il vettore velocità angolare e  $\mathbf{r}'_P$  è la posizione del punto  $P$  rispetto all'asse di rotazione.



L'energia cinetica di un corpo rigido in pura rotazione viene data da:

$$K_{rot} = \frac{1}{2} m_{tot} v^2 = \int \frac{1}{2} v^2 \rho dV \quad (537)$$

Sapendo che la  $dm = \rho dV$  e che in un moto circolare la velocità può essere scomposta in  $\omega r$ :

$$\int \frac{1}{2} v^2 \rho dV = \int \frac{1}{2} \omega^2 r^2 dm \quad (538)$$

Il momento di inerzia ci permette di riscrivere:

$$dI = r^2 dm \quad (539)$$

Otteniamo dunque che l'**energia cinetica rotazionale** è data:

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (540)$$

L'accelerazione del punto  $P$  è data derivando l'equazione della velocità rispetto al tempo otteniamo:

$$\frac{d\mathbf{v}_P}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}'_P + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'_P}{dt} \quad (541)$$

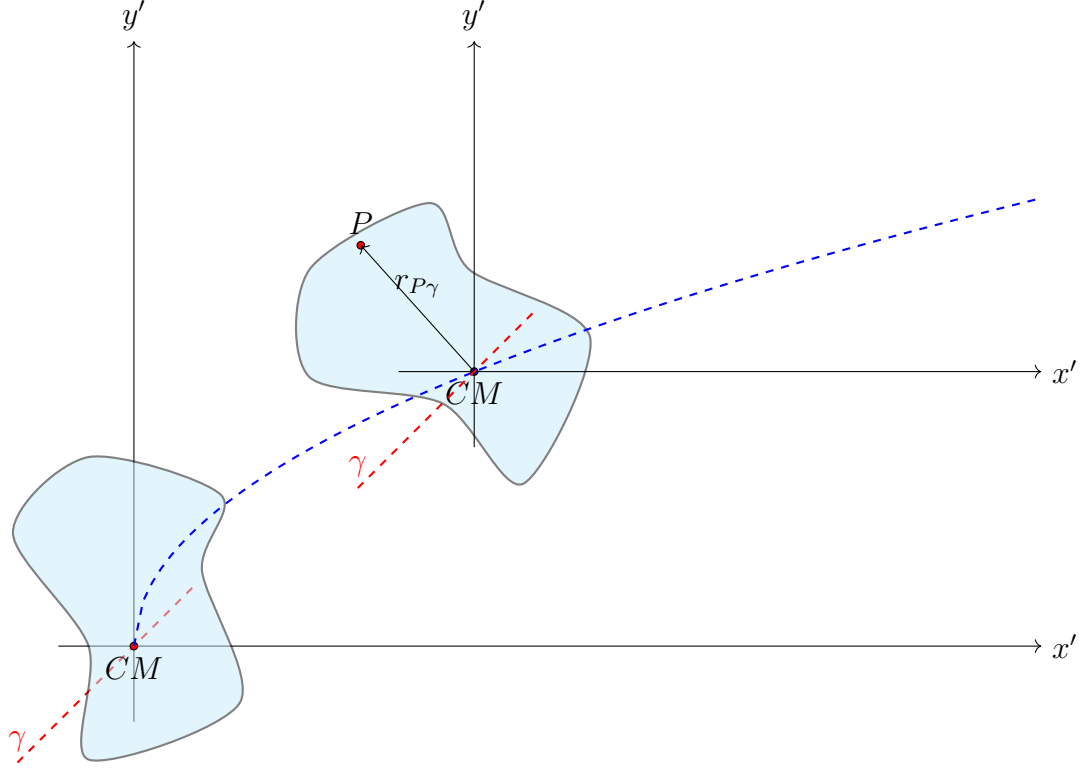
Poiché  $\frac{d\mathbf{r}'_P}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_P$ , sostituendo otteniamo l'equazione dell'accelerazione.

$$\mathbf{a}_P = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}'_P + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_P) \quad (542)$$

dove  $\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$  è l'accelerazione angolare.

## 12.7 Moto di rototraslazione

Senza scendere troppo nel dettaglio e coinvolgere le matrici di rotazione, possiamo intuitivamente accettare che un generico moto di rototraslazione possa essere descritto come la composizione di un moto di traslazione più un moto di rotazione.<sup>9</sup>



Il moto di un generico punto  $P$  appartenente al corpo verrà espresso come:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{traslazione} + \mathbf{v}_{rotazione} \quad (543)$$

Tuttavia possiamo esprimere la velocità di rotazione attorno a un generico asse  $\gamma$  come:

$$\mathbf{v}_{rotazione} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P\gamma} \quad (544)$$

Dove  $\mathbf{r}_P$  è la distanza del punto  $P$  dall'asse di rotazione:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{tr} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P\gamma} \quad (545)$$

L'energia cinetica sarà ovviamente la somma dell'energia cinetica di traslazione più quella di rotazione:

$$K = K_{tr} + K_{rot} \quad (546)$$

$$K_{tot} = \frac{1}{2}mv_{tr}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (547)$$

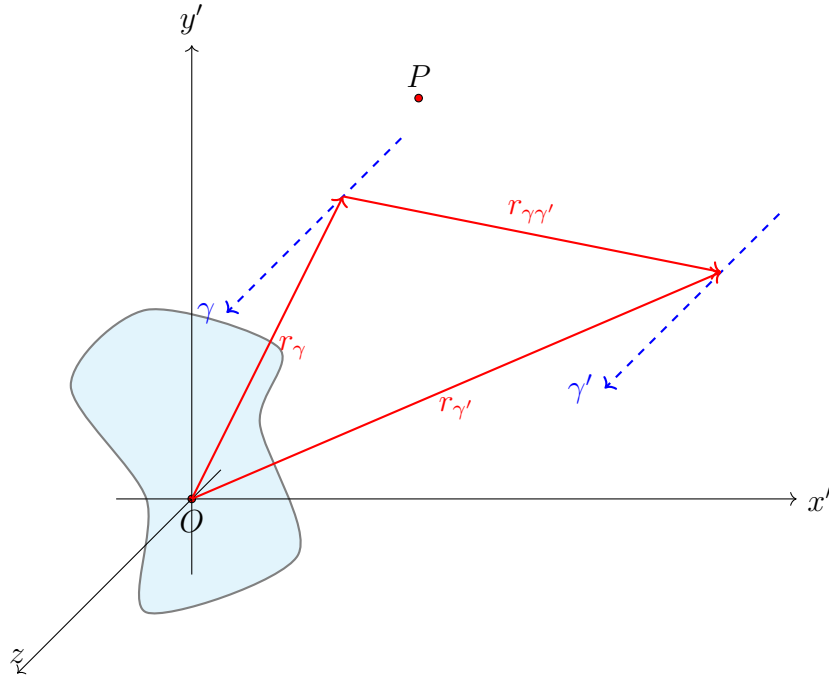
Il fatto più interessante è però un altro: **posso esprimere un qualsiasi moto di un corpo rigido come una rotazione generica e una traslazione**, l'unica cosa che

---

<sup>9</sup>Notare che tutti i grafici usati fino a ora sono riferiti al sistema del laboratorio, infatti gli assi sono sempre contrassegnati con  $x'$  e  $y'$ , per chiarezza nella simbologia ho ommesso l'accento sul vettore posizione per agevolare la lettura

cambieranno saranno la  $\mathbf{v}_{tr}$  e la distanza  $\mathbf{r}'_P$ .

Proviamo a effettuare un cambio dell'asse di rotazione da  $\gamma$  a  $\gamma'$ :



Noto subito che:

$$\mathbf{r}_\gamma = \mathbf{r}_{\gamma'} - \mathbf{r}_{\gamma\gamma'} \quad (548)$$

Sostituendo nell'equazione delle velocità:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{tr} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_\gamma - \mathbf{r}_{\gamma\gamma'}) \quad (549)$$

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{tr} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\gamma - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\gamma\gamma'} \quad (550)$$

Chiamo

$$\mathbf{v}'_{tr} = \mathbf{v}_{tr} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\gamma\gamma'} \quad (551)$$

Otengo così:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}'_{tr} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\gamma'} \quad (552)$$

L'ultima equazione indica esattamente lo stesso moto preso in considerazione inizialmente, tuttavia come notiamo cambiano la velocità di traslazione e la distanza dall'asse di rotazione.

Queste osservazioni ci portano a una conclusione molto importante

### Scomposizione dei moti

Un qualsiasi moto di un corpo rigido può essere scomposto come rotazione attorno al CM e traslazione

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{v}_{tr} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\gamma$$

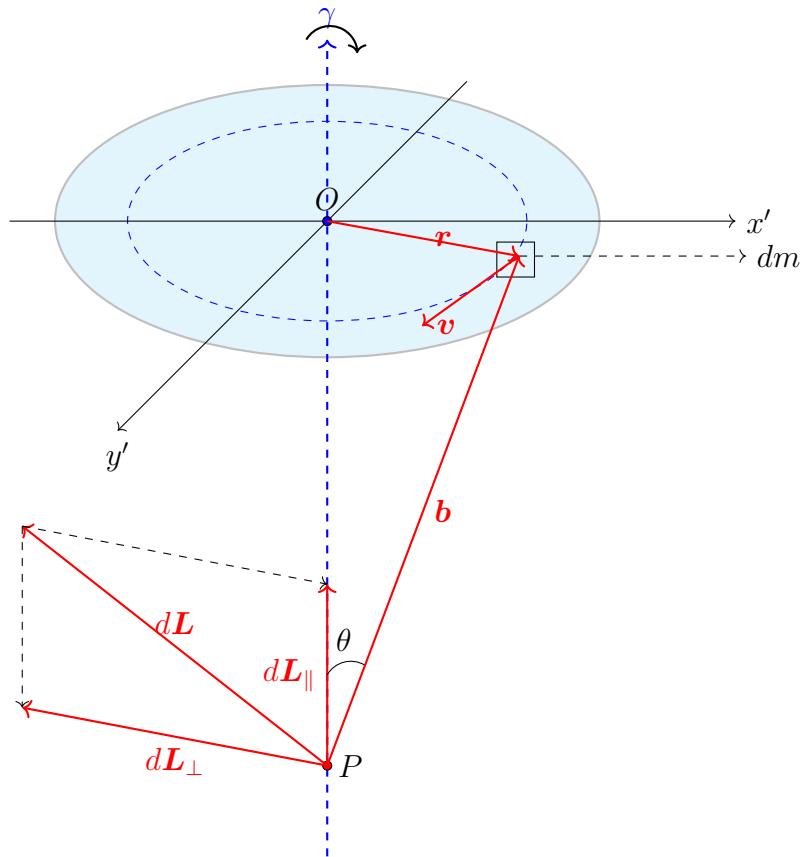
Dove  $r_\gamma$  è la distanza dal CM

### 12.7.1 Scelta ottimale per l'asse di rotazione

- Se esiste un punto fisso nel corpo, conviene scegliere l'asse di rotazione passante per quel punto.
- Se non ci sono punti fissi, è spesso conveniente scegliere l'asse passante per il centro di massa.
- In alcuni casi, può essere utile scegliere un asse istantaneo di rotazione, che può variare nel tempo.

## 12.8 Momento angolare in pura rotazione

Quando consideriamo il momento angolare di un corpo rigido in pura rotazione attorno a un asse fisso supponiamo che il polo giaccia sullo stesso piano, tuttavia esistono configurazioni dove la rotazione avviene sì attorno a un asse fisso, ma su un polo non appartenente al piano del corpo rigido, si parla allora di **precessione**:



La curva tratteggiata in blu rappresenta la traiettoria di un'infinitesima massa  $dm$  percorsa con una rotazione attorno all'asse  $\gamma$ , il punto  $P$  invece rappresenta il polo del momento angolare, che stavolta non giace più sullo stesso piano del corpo rigido, il momento  $d\mathbf{L}$  è dato da:

$$d\mathbf{L} = \mathbf{b} \times \mathbf{v} dm \quad \Rightarrow \quad |d\mathbf{L}| = b dm \sin(\mathbf{b}, \mathbf{v}) \quad (553)$$

Inoltre vale la pena osservare che  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{b}$  sono sempre ortogonali tra loro, dunque il modulo del momento angolare sarà:

$$|d\mathbf{L}| = b v dm \quad (554)$$



Osservando il disegno si nota che è possibile separare il momento angolare  $d\mathbf{L}$  in due contributi: uno perpendicolare ( $d\mathbf{L}_\perp$ ) e uno parallelo ( $d\mathbf{L}_\parallel$ ) all'asse  $\gamma$ :

$$d\mathbf{L} = dL_\perp \boldsymbol{\mu}_\perp + dL_\parallel \boldsymbol{\mu}_\parallel \quad (555)$$

L'angolo compreso tra  $d\mathbf{L}$  e  $d\mathbf{L}_\perp$  è  $\theta$  dal momento che  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{v}$  sono perpendicolari tra loro.

$$dL_\perp = dL \cos \theta = b v dm \cos \theta \quad (556)$$

$$dL_\parallel = dL \sin \theta = b v dm \sin \theta \quad (557)$$

Un'osservazione fondamentale è la seguente:

#### Momento angolare perpendicolare e parallelo

Al proseguire della rotazione della massa infinitesima  $dm$  rispetto all'asse  $\gamma$  la componente parallela del momento ha lo stesso segno, mentre la componente perpendicolare cambia segno a seconda di dove si trova la massa  $dm$

### 12.8.1 Momento angolare parallelo

Per il momento angolare parallelo è possibile fare delle considerazioni aggiuntive:

- La velocità, trattandosi di un moto circolare può essere scomposta come:

$$v = \omega r \quad (558)$$

- Possiamo raggruppare il prodotto tra il braccio e il seno:

$$b \sin \theta = r \quad (559)$$

Utilizzando le seguenti osservazioni possiamo riscrivere il momento angolare parallelo come:

$$dL_\parallel = r^2 dm \omega \quad (560)$$

Dal momento che il momento d'inerzia infinitesimo è dato da:

$$dI = r^2 dm \quad (561)$$

Il momento parallelo vale:

$$dL_\parallel = dI \omega \quad (562)$$

Integrando otteniamo:

$$\int dL_\parallel = \int \omega dI \quad \Rightarrow \quad L_\parallel = I \omega \quad (563)$$

Il risultato non ci deve sorprendere: in caso di assenza di precessione, ovvero quando la componente perpendicolare del momento angolare è nulla, il momento parallelo coincide con il momento angolare che noi già sappiamo calcolare.

### 12.8.2 Momento angolare perpendicolare

La componente infinitesima del momento angolare perpendicolare è data da:

$$dL_{\perp} = b v dm \cos \theta \quad (564)$$

Osserviamo che il termine:

$$b \cos \theta = \overline{OP} \quad (565)$$

Osserviamo che il segmento  $\overline{OP}$  rappresenta "l'altezza" del corpo rigido rispetto al punto P:

$$dL_{\perp} = v dm h \quad (566)$$

La precessione non fa altro che quantificare quanto siano distanti il polo e il corpo rigido, può essere sia positiva che negativa:

#### Precessione

La precessione è un fenomeno che si verifica quando il momento angolare di un corpo rigido non è allineato con l'asse di rotazione. In questo caso, l'asse di rotazione descrive un moto conico attorno alla direzione del momento angolare totale.

L'introduzione della precessione sebbene sia molto utile in campo ingegneristico, è molto scomoda da gestire a livello pratico, infatti non permette di applicare tutta una serie di agevolazioni che subentrerebbero con i teoremi di König, per questo motivo nella stragrande maggioranza degli esercizi e delle teorie che osserveremo d'ora in poi il contributo apportato dalla precessione sarà sempre nullo.

## 12.9 I Teoremi di Konig applicati al corpo rigido

L'utilità dei teoremi di Konig applicati al corpo rigido è sorprendente: la capacità di descrivere un moto generico per un sistema di punti come somma del moto del centro di massa e del moto attorno al centro di massa ci permette di indicare a sua volta il moto di un corpo rigido come traslazione più rotazione:

### 12.9.1 Dal sistema di punti al corpo rigido

**I Teorema di Konig** Il primo teorema di Konig permette di esprimere il momento angolare di un sistema di punti come momento angolare del centro di massa più il momento angolare del sistema di punti rispetto al CM:

$$\text{Sistema di punti} = \mathbf{L}_{tot} = m_{tot}(\mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{v}_{CM}) + \sum_{i=1}^n m_i(\mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i) \quad (567)$$

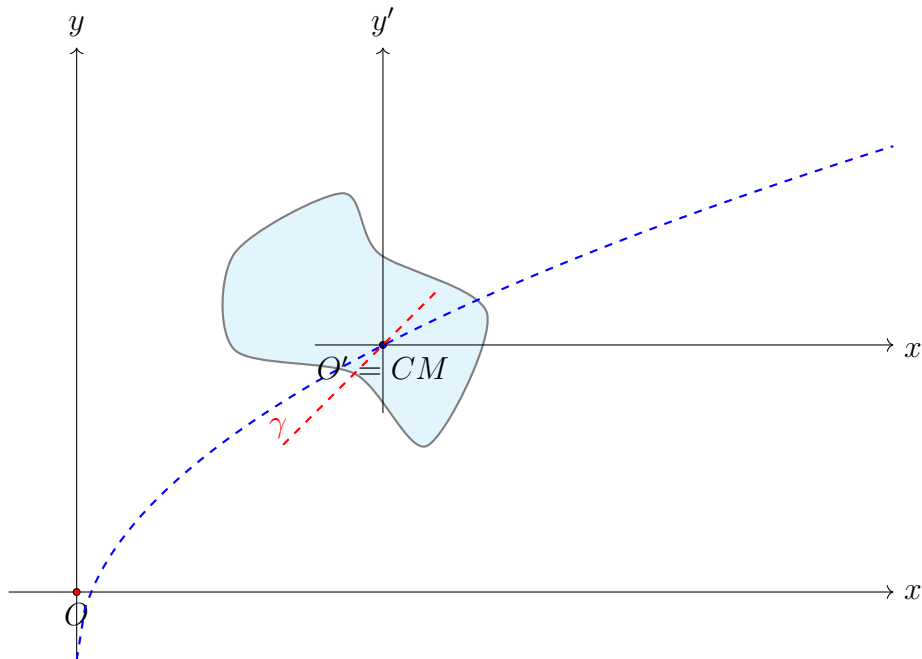
Applicandolo al corpo rigido avremmo che la prima componente descrive la traslazione mentre la seconda indica la rotazione:

$$\text{Corpo rigido} = \mathbf{L}_{tot} = \mathbf{L}_{traslazione} + \mathbf{L}_{rotazione} = \mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{v}_{CM} + I \boldsymbol{\omega} \quad (568)$$

**II Teorema di Konig** Il secondo teorema di Konig permette di esprimere l'energia cinetica di un sistema di punti come l'energia cinetica del centro di massa più l'energia cinetica del sistema di punti rispetto al CM:

$$\text{Sistema di punti} = K_{tot} = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_i v_i'^2 \quad (569)$$

$$\text{Corpo rigido} = K_{tot} = K_{traslazione} + K_{rotazione} = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (570)$$



## 12.10 Teorema di Huygens-Steiner

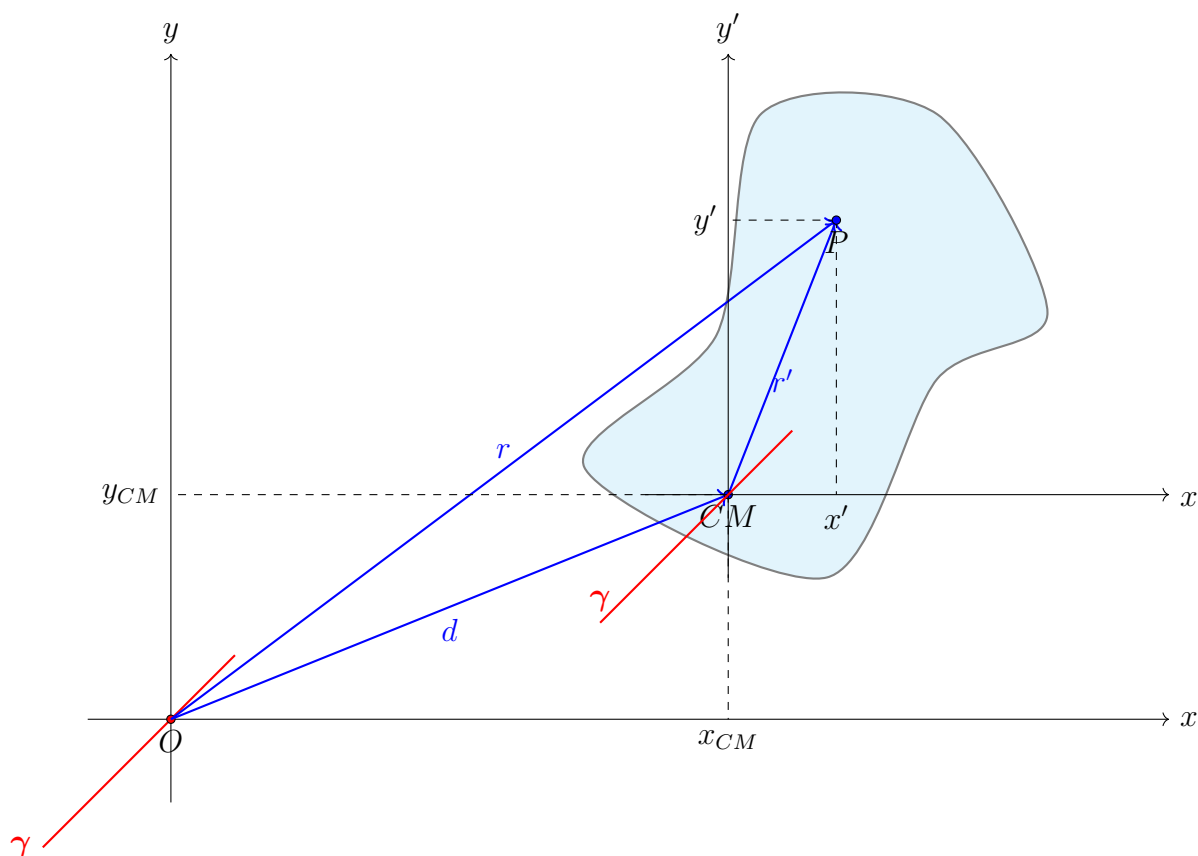
Il teorema di Steiner, noto anche come teorema degli assi paralleli, permette di calcolare il momento d'inerzia di un corpo rigido rispetto a un asse qualsiasi, conoscendo il momento d'inerzia rispetto a un asse parallelo passante per il centro di massa.

### 12.10.1 Enunciato

Sia  $I_{CM}$  il momento d'inerzia di un corpo rigido rispetto a un asse passante per il suo centro di massa. Il momento d'inerzia  $I$  rispetto a un asse parallelo, distante  $d$  dall'asse passante per il centro di massa, è dato da:

$$I_{\gamma'} = I_{CM} + md^2 \quad (571)$$

dove  $m$  è la massa totale del corpo.



### 12.10.2 Dimostrazione

Dal teorema dei moti relativi e dal sistema di riferimento del laboratorio ricaviamo:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{CM} + \mathbf{r}' \quad (572)$$

Una proprietà molto ovvia che però vale la pena ricordare è la seguente:

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (573)$$

Ricaviamo quindi le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}_{CM} + \mathbf{r}' \\ x = x_{CM} + x' \\ y = y_{CM} + y' \end{cases} \quad (574)$$

L'inerzia è data dalla seguente espressione:

$$I = \int dI = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm \quad (575)$$

Il momento di inerzia dell'asse passante per il  $CM$  è data da:

$$I_{CM} = \int r'^2 dm = \int (x'^2 + y'^2) dm \quad (576)$$

Il momento di inerzia del corpo rigido rispetto all'asse passante parallelo e posto a una distanza  $d$  dall'asse passante per il centro di massa è dato da:

$$I_{\gamma'} = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm \quad (577)$$

Scomponendo la  $x$  e la  $y$  otteniamo:

$$\int (x^2 + y^2) dm = \int ((x_{CM} + x')^2 + (y_{CM} + y')^2) dm \quad (578)$$

Sviluppando i prodotti e raggruppandoli come più ci conviene otteniamo:

$$\int (x_{CM}^2 + y_{CM}^2 + x'^2 + y'^2 + 2x_{CM}x' + 2y_{CM}y') dm \quad (579)$$

$$I_{\gamma'} = \int (x_{CM}^2 + y_{CM}^2) dm + \int (x'^2 + y'^2) dm + 2x_{CM} \int x' dm + 2y_{CM} \int y' dm \quad (580)$$

Possiamo estrarre  $x_{CM}$  e  $y_{CM}$  dagli integrali dal momento che si tratta di grandezze costanti; procediamo ora con analizzare singolarmente i termini:

- Nel primo integrale la quantità  $x_{CM}^2 + y_{CM}^2$  indica la distanza  $d$  tra i due assi  $\gamma$  e  $\gamma'$ :

$$x_{CM}^2 + y_{CM}^2 = d^2 \quad (581)$$

$$\int (x_{CM}^2 + y_{CM}^2) dm = \int d^2 dm = md^2 \quad (582)$$

- Il secondo integrale non è altro che il momento di inerzia rispetto all'asse passante per il centro di massa:

$$I_{CM} = \int (x'^2 + y'^2) dm \quad (583)$$

- Il terzo e il quarto integrale corrispondono al centro di massa lungo l'asse  $x'$  e  $y'$  rispetto a  $O'$ , che noi sappiamo coincidere con il  $CM$ , quello che deduciamo, analogamente a quanto osservato per i sistemi di punti, è che la posizione del centro di massa nel sistema di riferimento del laboratorio corrisponde alla coppia di punti  $(0, 0)$

$$\text{Sistema di punti} \Rightarrow \sum x'_i m_i = \sum y'_i m_i = 0 \quad (584)$$

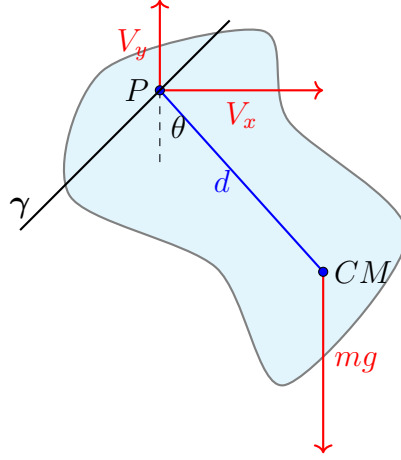
$$\text{Corpo rigido} \Rightarrow \int x' dm = \int y' dm = 0 \quad (585)$$

Otteniamo quindi quello che volevamo dimostrare:

$$I_{\gamma'} = I_{CM} + md^2 \quad (586)$$

## 12.11 Moto di un pendolo composto

Un pendolo composto, noto anche come pendolo fisico, è un corpo rigido che può oscillare liberamente attorno a un asse orizzontale fisso che non passa per il suo centro di massa.



Dove  $V_x$  e  $V_y$  rappresentano la forza esercitata dal vincolo per tenere fermo il corpo rigido attorno all'asse.

### 12.11.1 Equazione del moto

Consideriamo un pendolo composto di massa  $m$  e momento d'inerzia  $I$  rispetto all'asse di rotazione. Sia  $d$  la distanza tra l'asse di rotazione e il centro di massa.

Scomponendo le forze lungo l'asse  $x, y$  otteniamo:

$$\sum F_x = V_x = 0 \quad (587)$$

$$\sum F_y = V_y - mg = 0 \Rightarrow V_y = mg \quad (588)$$

Per quanto riguarda i momenti si tratta di analizzare il moto di un corpo rigido in rotazione attorno a un certo punto a una distanza  $d$  dal  $CM$ .

Il momento di inerzia per  $P$  si ricava dal teorema di Steiner:

$$I = I_{CM} + md^2 \quad (589)$$

La somma dei momenti viene calcolata prendendo come polo l'origine del vincolo, in modo tale da semplificare i calcoli; infatti l'unica forza a generare un momento sarà la forza peso:

$$M_{tot} = I\alpha = I\ddot{\theta} = -mgd \sin \theta \quad (590)$$

L'equazione del moto per piccole oscillazioni è:

$$\text{per } \theta \rightarrow 0 \quad \sin \theta \approx \theta \quad (591)$$

$$I\ddot{\theta} + mgd \sin \theta \Rightarrow I\ddot{\theta} + mgd\theta = 0 \quad (592)$$

dove  $\theta$  è l'angolo di spostamento dalla posizione di equilibrio,  $g$  è l'accelerazione di gravità, e il punto indica la derivata rispetto al tempo.

Questa è l'equazione di un oscillatore armonico con frequenza angolare:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad (593)$$

Il periodo di oscillazione è quindi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad (594)$$

## 12.12 Moto di puro rotolamento



## 12.13 Approfondimento: Passaggio di coordinate a livello differenziale

Nel calcolo dei momenti di varie quantità fisiche, come momenti di inerzia, carica elettrica o magnetizzazione, è spesso necessario integrare su volumi di forme diverse.

Il passaggio da coordinate cartesiane ad altri sistemi di coordinate può semplificare notevolmente questi calcoli, specialmente quando la geometria del problema presenta simmetrie particolari.

### 12.13.1 Elemento di volume in coordinate cartesiane

In coordinate cartesiane  $(x, y, z)$ , l'elemento di volume infinitesimo è semplicemente il prodotto dei differenziali delle tre coordinate:

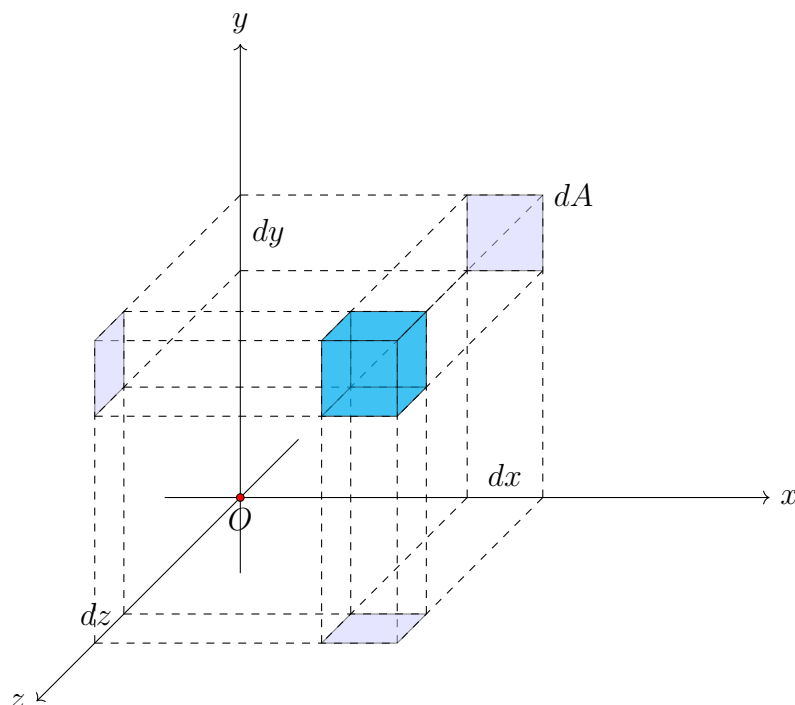
$$dV = dx \, dy \, dz \quad (595)$$

Questo elemento di volume rappresenta un piccolo parallelepipedo nello spazio tridimensionale.

Allo stesso modo un elemento infinitesimo di area in coordinate cartesiane è rappresentato da:

$$dA = dx \, dy \quad (596)$$

E rappresenta un quadrato infinitesimo nel piano cartesiano.



### 12.13.2 Passaggio alle coordinate polari

Le coordinate polari  $(r, \theta)$  sono utili per problemi bidimensionali con simmetria circolare. La trasformazione dalle coordinate cartesiane alle coordinate polari è data da:

$$x = r \cos \theta \quad (597)$$

$$y = r \sin \theta \quad (598)$$

Per trovare l'elemento di area  $dA$  in coordinate polari, dobbiamo calcolare il determinante della matrice jacobiana della trasformazione:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r \quad (599)$$

Quindi, l'elemento di area in coordinate polari è:

$$dA = |J| dr d\theta = r dr d\theta \quad (600)$$

### 12.13.3 Passaggio alle coordinate cilindriche

Le coordinate cilindriche  $(r, \theta, z)$  estendono le coordinate polari aggiungendo una coordinata  $z$  per la terza dimensione. La trasformazione dalle coordinate cartesiane alle coordinate cilindriche è:

$$x = r \cos \theta \quad (601)$$

$$y = r \sin \theta \quad (602)$$

$$z = z \quad (603)$$

Per trovare l'elemento di volume  $dV$  in coordinate cilindriche, calcoliamo il determinante della matrice jacobiana:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \quad (604)$$

Quindi, l'elemento di volume in coordinate cilindriche è:

$$dV = |J| dr d\theta dz = r dr d\theta dz \quad (605)$$

### 12.13.4 Passaggio alle coordinate sferiche

Le coordinate sferiche  $(r, \theta, \varphi)$  sono particolarmente utili per problemi con simmetria sferica. La trasformazione dalle coordinate cartesiane alle coordinate sferiche è:

$$x = r \sin \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \varphi \quad (606)$$

Dove  $r$  è la distanza dall'origine,  $\theta$  è l'angolo azimutale nel piano  $xy$  (come nelle coordinate cilindriche), e  $\varphi$  è l'angolo polare misurato dall'asse  $z$ .

Per trovare l'elemento di volume  $dV$  in coordinate sferiche, calcoliamo il determinante della matrice jacobiana:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & 0 & -r \sin \varphi \end{vmatrix} \quad (607)$$

Calcolando questo determinante, otteniamo:

$$|J| = r^2 \sin \varphi \quad (608)$$

Quindi, l'elemento di volume in coordinate sferiche è:

$$dV = |J| dr d\theta d\varphi = r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi \quad (609)$$

### 12.13.5 Applicazione al calcolo dei momenti

Questi passaggi di coordinate sono fondamentali per il calcolo dei momenti in varie situazioni fisiche. Per esempio, consideriamo il calcolo del momento d'inerzia di un corpo rigido rispetto a un asse. In generale, il momento d'inerzia è dato da:

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho(r) dV \quad (610)$$

dove  $r$  è la distanza dall'asse di rotazione,  $\rho(r)$  è la densità di massa (che può variare con la posizione), e  $dV$  è l'elemento di volume.

Utilizzando le espressioni per  $dV$  che abbiamo derivato, possiamo scrivere il momento d'inerzia in diversi sistemi di coordinate:

- In coordinate cartesiane, per un generico parallelepipedo:

$$I = \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \int_0^{L_3} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz \quad (611)$$

- In coordinate cilindriche, per un corpo con simmetria assiale attorno all'asse  $z$ :

Allo stesso modo un elemento infinitesimo di area in coordinate cartesiane è rappresentato da:

$$I_z = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \rho(r, z) r dr d\theta dz \quad (612)$$

- In coordinate sferiche, per un corpo con simmetria sferica:

$$I = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R r^4 \sin \varphi \rho(r) dr d\theta d\varphi \quad (613)$$

La scelta del sistema di coordinate appropriato può semplificare notevolmente questi integrali, specialmente quando la densità  $\rho(r)$  ha una forma semplice nel sistema di coordinate scelto.

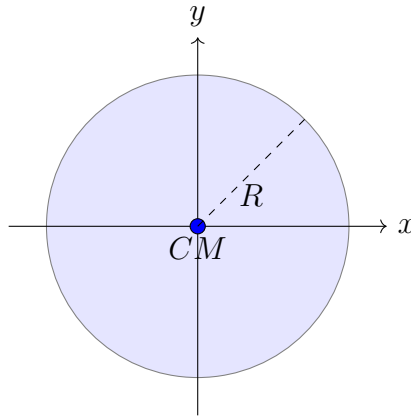
## 12.14 Approfondimento: Calcolo dei principali momenti di inerzia

Il momento di inerzia di un corpo rigido è una grandezza fisica che descrive la distribuzione della massa del corpo rispetto all'asse di rotazione. Esso determina quanto una forza applicata al corpo produca una accelerazione angolare.

Utilizzeremo il teorema di Steiner per calcolare i momenti di inerzia di alcune forme geometriche comuni, assumendo che la loro densità sia costante.

### 12.14.1 Disco

Consideriamo un disco di raggio  $R$  e massa  $m$ :



Trattandosi di una superficie, la densità sarà definita nel seguente modo:

$$\rho = \frac{dm}{dA} \quad (614)$$

Usando le coordinate polari possiamo esprimere  $dA$  come:

$$dA = r dr d\theta \quad (615)$$

Inoltre in caso di densità costante possiamo esprimere  $\rho$  come:

$$\rho = \frac{m_{tot}}{\pi R^2} \quad (616)$$

Il momento di inerzia rispetto a un asse passante per il centro del disco è:

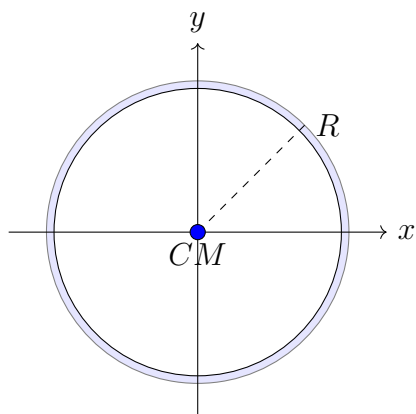
$$I = \int r^2 dm = \int_A r^2 \rho dA = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 \rho dr d\theta \quad (617)$$

Risolvendo l'integrale in coordinate polari e scomponendo la densità:

$$I = \rho \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{m}{\pi R^2} \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{1}{2} m R^2 \quad (618)$$

### 12.14.2 Anello

Prendiamo un anello sottile di raggio interno  $R$  e massa  $m$ :



Trattandosi di una linea, la densità sarà definita nel seguente modo:

$$\rho = \frac{dm}{dL} \quad (619)$$

Usando le coordinate polari possiamo esprimere  $dL$  come:

$$dL = r d\theta \quad (620)$$

Inoltre in caso di densità costante possiamo esprimere  $\rho$  come:

$$\rho = \frac{m_{tot}}{2\pi R} \quad (621)$$

Il momento di inerzia rispetto a un asse passante per il centro del disco è:

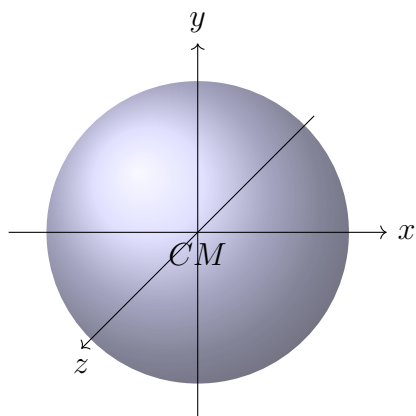
$$I = \int r^2 dm = \int_L r^2 \rho dL = \int_0^{2\pi} r^3 \rho d\theta \quad (622)$$

Risolvendo l'integrale in coordinate polari e scomponendo la densità:

$$I = \rho R^3 2\pi = \frac{m}{2\pi R} r^3 2\pi = m R^2 \quad (623)$$

### 12.14.3 Sfera

Consideriamo una sfera di raggio  $R$  e massa  $m$ :



Trattandosi di un solido, la densità sarà definita nel seguente modo:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad (624)$$

Usando le coordinate sferiche possiamo esprimere  $dV$  come:

$$dV = r^2 \sin \varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi \quad (625)$$

Inoltre in caso di densità costante possiamo esprimere  $\rho$  come:

$$\rho = \frac{m_{tot}}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad (626)$$

Il momento di inerzia rispetto a un asse passante per il centro di una sfera è:

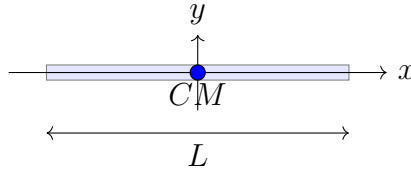
$$I = \int r^2 \, dm = \int_V r^2 \rho \, dV = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \rho \sin^3 \varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi \quad (627)$$

Risolvendo l'integrale in coordinate sferiche e scomponendo la densità:

$$I = \rho \frac{4}{3} \frac{R^5}{5} 2\pi = \frac{4}{3} \frac{3m}{4\pi R^3} r^5 2\pi = \frac{2}{5} m R^2 \quad (628)$$

#### 12.14.4 Asta

Consideriamo un'asta di lunghezza  $L$  e massa  $m$ :



Trattandosi di una linea, la densità sarà definita nel seguente modo:

$$\rho = \frac{dm}{dL} \quad (629)$$

Usando le coordinate cartesiane possiamo esprimere  $dL$  come:

$$dL = dx \quad (630)$$

Inoltre in caso di densità costante possiamo esprimere  $\rho$  come:

$$\rho = \frac{m_{tot}}{L} \quad (631)$$

Il momento di inerzia rispetto a un asse passante per il centro di un'asta rettangolare è:

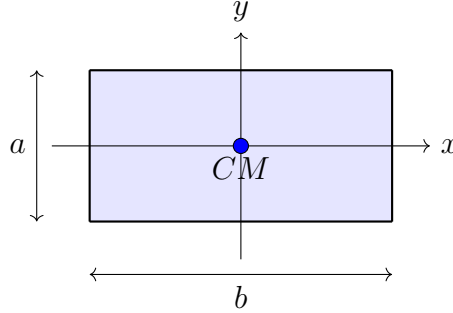
$$I = \int r^2 \, dm = \int_L r^2 \rho \, dL = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \rho \, dx \quad (632)$$

Risolvendo l'integrale in coordinate sferiche e scomponendo la densità:

$$I = \frac{1}{12} \rho L^3 = \frac{1}{12} \frac{m}{L} L^3 = \frac{1}{12} m L^2 \quad (633)$$

### 12.14.5 Asta rettangolare

Consideriamo un rettangolo di lunghezza  $a$  e larghezza  $b$ , con massa  $m$ .



Trattandosi di una superficie, la densità sarà definita nel seguente modo:

$$\rho = \frac{dm}{dA} \quad (634)$$

Usando le coordinate cartesiane possiamo esprimere  $dA$  come:

$$dA = dx dy \quad (635)$$

Inoltre in caso di densità costante possiamo esprimere  $\rho$  come:

$$\rho = \frac{m_{tot}}{a b} \quad (636)$$

Il momento di inerzia rispetto a un asse passante per il centro di un'asta rettangolare è:

$$I = \int r^2 dm = \int_A r^2 \rho dA = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (x^2 + y^2) \rho dx dy \quad (637)$$

Risolvendo l'integrale in coordinate sferiche e scomponendo la densità:

$$I = \frac{1}{12} \rho (a^3 b + b^3 a) = \frac{1}{12} \frac{m}{a b} (a^3 b + b^3 a) = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2) \quad (638)$$

## 13 Termodinamica

### 13.1 Introduzione

La termodinamica è una branca della fisica che si occupa dello studio delle trasformazioni di energia (generalmente meccanica e classica) di un insieme di particelle interagenti in un volume chiuso:

#### Termodinamica

Studio delle trasformazioni e il passaggio di energia da un sistema a un altro e da una forma a un'altra

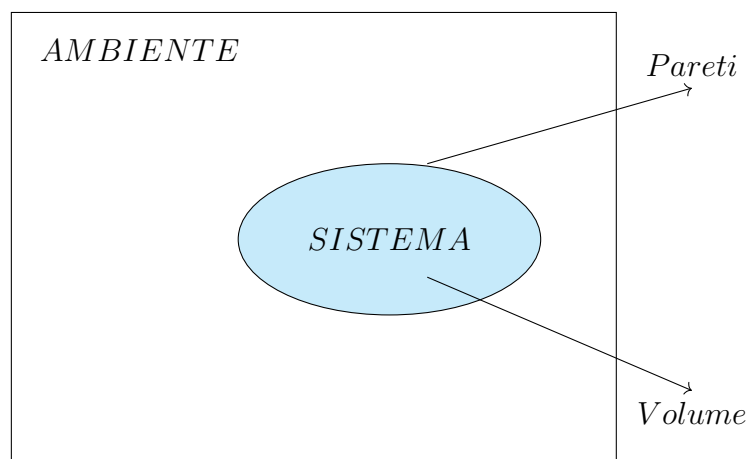
Durante lo studio della termodinamica quindi ci ritroveremo a analizzare come avvengano gli *scambi* e le *trasformazioni* di energia in *sistemi* chiusi contenenti  $n$  particelle che oltre che a reagire tra di loro potranno anche reagire con l'*ambiente*.

Non analizzeremo le singole interazioni, ma studieremo il comportamento globale del sistema, introdurremo dunque delle *proprietà macroscopiche* che ci permetteranno di analizzare agevolmente le principali caratteristiche di un sistema termodinamico.

### 13.2 Sistema termodinamico

#### Sistema termodinamico

Determinata quantità di energia e/o materia racchiusa in un volume finito



A seconda di come un sistema interagisce con l'ambiente si dice:

- **Isolato:** Se non scambia energia e massa con l'ambiente.
- **Chiuso:** Se non scambia massa, ma scambia energia.
- **Aperto:** Se scambia sia energia che massa.

Generalmente le grandezze macroscopiche che descrivono il sistema sono **pressione**, **temperatura** e **volume**.



## 13.3 Pareti

### Pareti

Le pareti sono le superfici che racchiudono il sistema termodinamico

Le pareti si occupano di regolare le interazioni tra sistema e ambiente, saranno i vari tipi di parete a definire il tipo di sistema che studieremo:

Per gli scambi di calore le pareti possono essere:

- **Adiabatiche:** se non permettono scambi di calore.
- **Diatermiche:** se permettono scambi di calore.

Per gli scambi di massa le pareti possono essere:

- **Permeabili:** se permettono scambi di massa dal sistema all'ambiente e viceversa.
- **Semipermeabili:** se permettono scambi di massa solo dal sistema all'ambiente o viceversa.
- **Impermeabili:** se non permettono scambi di massa.

Infine per gli scambi di lavoro le pareti si dicono:

- **Pareti Rigide:** se non permettono scambi di lavoro.
- **Pareti Flessibili:** se permettono scambi di lavoro.

Dal momento che i sistemi non sono in grado di distinguere l'energia meccanica da quella termica sarebbe più corretto affermare che nei sistemi adiabatici gli scambi di energetici avvengono solo attraverso processi di tipo meccanico, mentre nei sistemi a parete rigida gli scambi avvengono esclusivamente tramite processi di natura termica.

Un'altra possibile classificazione delle pareti è fatta basandosi sul fatto se queste sono in grado di far passare o meno il calore e il lavoro:

- **Normali:** se sono in grado di scambiare sia il lavoro che calore.
- **Adiabatiche:** se permettono scambi di energia termica.
- **Rigide:** se permettono esclusivamente scambi di lavoro.

## 13.4 Ambiente

### Ambiente

Tutto ciò che circonda il sistema

Il comportamento di un sistema oltre che dalla natura delle pareti può dipendere anche dall'ambiente.

L'ambiente a sua volta può essere concepito come un sistema termodinamico<sup>10</sup> a sua

---

<sup>10</sup>Allo stesso modo le pareti possono essere idealizzate come un terzo sistema termodinamico

volta con pressione, temperatura e volume propri; tuttavia il volume dell'ambiente spesso è infinito, rende l'ambiente un sistema termodinamico in senso improprio.

L'ambiente è generalmente molto complesso da studiare, conviene pertanto considerarlo in condizioni più semplici, vengono pertanto definite la pressione e la temperatura ambiente:

$$P_{amb} = 1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa} \quad (639)$$

$$T_{amb} = 27 \text{ C} = 300 \text{ K} \quad (640)$$

## 13.5 Coordinate macroscopiche

Le coordinate macroscopiche sono intrinsecamente legate ai valori medi del sistema termodinamico e offrono una descrizione globale delle proprietà di un sistema e prendono il nome di Pressione, Volume e Temperatura ( $P, V, T$ ).

### 13.5.1 Pressione

#### Pressione

La pressione è una grandezza fisica legata alla quantità di moto delle particelle e indica la forza agente su una superficie

La pressione viene espressa come il rapporto tra la forza ortogonale agente e l'area della superficie sulla quale agisce:

$$P = \frac{dF_{\perp}}{dS} \quad (641)$$

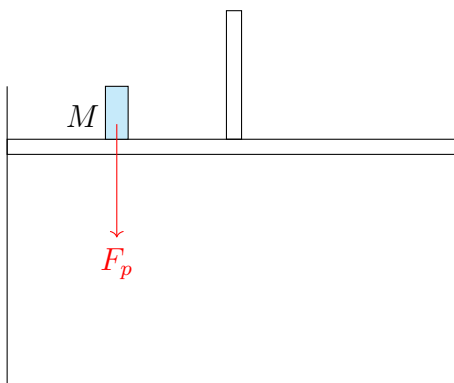
Questa formula ci permetta di esprimere la forza agente come:

$$F_{\perp} = \int_S P dS \quad (642)$$

In caso di pressione costante:

$$F_{\perp} = PS \quad (643)$$

Le pressioni, così come le forze, sono additive; supponiamo di avere un pistone di superficie  $S$  con sopra poggiata una massa  $M$ :



La pressione esercitata sul volume circostante sarà data dalla pressione atmosferica e quella esercitata dal blocchetto: La pressione esercitata dal blocchetto sarà:

$$P_{blocco} = \frac{F_{\perp}}{S} = \frac{mg}{S} \quad (644)$$

$$P_{tot} = P_{amb} + \frac{mg}{S} \quad (645)$$

### 13.5.2 Temperatura

#### Temperatura

La temperatura di un corpo o di un sistema misura l'energia cinetica delle particelle che lo compongono

La temperatura è una grandezza fondamentale scalare e intensiva, che indica la proprietà termica di un corpo o di un sistema; nel sistema internazionale (SI) la temperatura viene indicata mediante la scala Kelvin ( $K$ ).

Per evitare eventuali confusioni è necessario ricordare che temperatura e calore sono due grandezze differenti che misurano due caratteristiche simili, ma non uguali:

$$Q \neq T \quad (646)$$

### 13.5.3 Volume

#### Volume

Il volume è una porzione di spazio occupata da un corpo o da un sistema,

Nel sistema internazionale viene indicato con i metri ( $m$ ), talvolta può essere espresso anche con i litri ( $l$ ); ricordiamo che la conversione è:

$$1 m^3 = 1\,000\,l \quad (647)$$

Ovvero per un metro cubo di spazio corrisponde mille litri di un liquido con densità unitaria (come l'acqua).

## 13.6 Equilibrio termodinamico

Per poter definire lo stato di un sistema è necessario che questo sia in **equilibrio interno** e in **equilibrio esterno**

### 13.6.1 Equilibrio interno

La condizione di equilibrio interno viene raggiunta nel momento in cui la variabili intensive sono omogeneamente distribuite all'interno del volume, si parla allora di **equilibrio meccanico, termico e chimico**.<sup>11</sup>

<sup>11</sup>Nell'eventualità in cui ci trovassimo in uno stato non all'equilibrio,  $P$  e  $T$  non sarebbero univocamente definite

**Equilibrio meccanico** L'equilibrio meccanico si raggiunge quando la somma delle forze interne è nulla, ciò è possibile quando la pressione è **omogeneamente** distribuita:

$$\forall (x, y, z) \in V \quad P(x, y, z) = \text{cost} \quad (648)$$

**Equilibrio termico** Si parla di equilibrio termico nel momento in cui la temperatura è omogeneamente distribuita:

$$\forall (x, y, z) \in V \quad T(x, y, z) = \text{cost} \quad (649)$$

**Equilibrio chimico** Si ha l'equilibrio chimico in assenza di reazioni chimiche o fenomeni di diffusione, ovvero la composizione chimica delle sostanze in gioco rimane costante e uniforme.

La conclusione che traiamo è che per raggiungere la condizione di equilibrio interno la pressione e il volume devono essere omogeneamente distribuite.

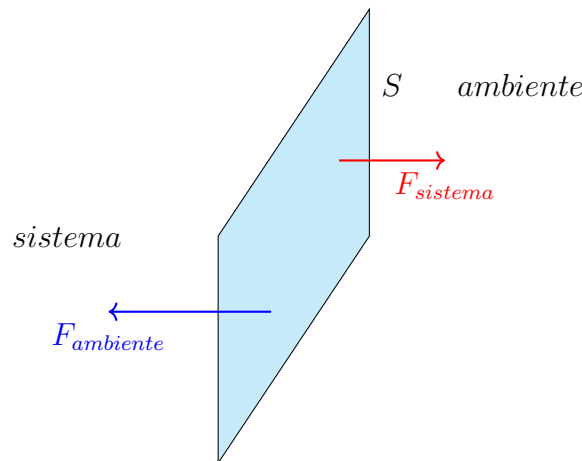
### 13.6.2 Equilibrio esterno

A meno che il sistema non sia isolato<sup>12</sup> significa che è in contatto con l'ambiente, per poter definire lo stato di un sistema termodinamico è dunque necessario che si abbia anche **equilibrio esterno** oltre che la condizione di equilibrio interno.

**Equilibrio meccanico** A meno che le pareti non siano rigide, per raggiungere l'equilibrio meccanico è necessario che la somma delle forze interne sia uguale alla somma delle forze esterne:

$$F_{\text{sistema}} = F_{\text{ambiente}} \quad (650)$$

Prendiamo in considerazione una parete non isolante di superficie  $S$  a contatto con l'ambiente:



La forza si può indicare come prodotto tra la superficie e la pressione:

$$P_{\text{sistema}} S = P_{\text{ambiente}} S \quad (651)$$

Dalla quale otteniamo:

$$P_{\text{sistema}} = P_{\text{ambiente}} \quad (652)$$

---

<sup>12</sup>Ovvero abbia pareti adiabatiche, rigide e impermeabili

**Equilibrio termico** Se le pareti non sono adiabatiche, l'equilibrio termico si raggiunge nel momento in cui la temperatura dell'ambiente coincide con quella del sistema:

$$T_{sistema} = T_{ambiente} \quad (653)$$

Riassumiamo tutto nello specchietto seguente:

#### Termodinamica di equilibrio

L'**equilibrio interno** è dato da:

- Pressione omogeneamente distribuita all'interno del volume.
- Volume omogeneamente distribuito all'interno del volume.

L'**equilibrio esterno** è dato da:

- $P_{sistema} = P_{ambiente} \quad \forall \quad$  pareti rigide
- $T_{sistema} = T_{ambiente} \quad \forall \quad$  pareti adiabatiche

### 13.7 Legge dei gas perfetti

Notare bene che tutte le osservazioni sui vari tipi di equilibrio hanno una conseguenza fondamentale: nell'istante in cui vengono garantite le condizioni di equilibrio interno e esterno, pressione, volume e temperatura sono tra loro dipendenti:

$$se \text{ Eq.interno} + \text{Eq.esterno} \quad \Rightarrow \quad \exists g(P, V, T, n) \quad (654)$$

Questa funzione non è altro che la legge dei gas perfetti:

$$PV = nRT \quad (655)$$

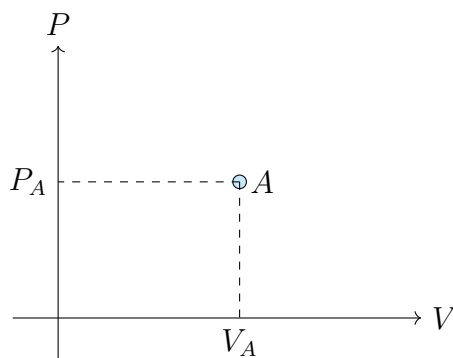
Dove  $n$  è il numero di moli e  $R$  è la costante dei gas perfetti.

Nel caso in cui venisse meno lo stato di equilibrio

$$se \text{ non Eq.interno} + \text{Eq.esterno} \quad \Rightarrow \quad \{P, V, T, n\} \text{ sono indipendenti} \quad (656)$$

### 13.8 Diagramma di Clapeyron

Il diagramma di Clapeyron è uno degli schemi rappresentativi più utili in termodinamica; permette di visualizzare graficamente le **trasformazioni reversibili** e gli stati di equilibrio in modo agevole:



Dove  $A$  fornisce tutte le informazioni necessarie per determinare lo stato termodinamico di un sistema; infatti sapendo che solo le trasformazioni reversibili sono rappresentabili sui diagrammi di Clapeyron, deduciamo immediatamente  $P$  e  $V$  dal grafico e ricaviamo  $T$  dalla legge dei gas perfetti.

## 13.9 Scambi di Lavoro e Calore

Gli scambi delle varie forme di energia (calore o lavoro) tra sistema e ambiente possono essere indicati secondo diverse convenzioni, in questa disamina adotteremo quella che si chiama "convenzione egoistica", ovvero definiremo i segni degli scambi di energia dal punto di vista del sistema<sup>13</sup>.

Secondo la convenzione egoistica un lavoro è:

- Positivo: quando un sistema termodinamico scambia un lavoro che viene reso disponibile sotto forma di energia all'ambiente per effetto di un'azione meccanica.
- Negativo: quando l'ambiente scambia un lavoro che viene reso disponibile sotto forma di energia al sistema per effetto di un'azione meccanica.

Il calore invece sarà:

- Positivo: quando il calore viene ceduto dall'ambiente al sistema mediante processi di natura termica.
- Negativo: quando il calore viene ceduto dal sistema all'ambiente.

## 13.10 Lavoro

Il concetto di lavoro in termodinamica è fondamentale per comprendere le interazioni energetiche tra un sistema e il suo ambiente; il lavoro rappresenta un trasferimento di energia che non coinvolge una differenza di temperatura e viene definito come:

$$\delta W = F \cdot dx = P \cdot dV \quad (657)$$

dove  $F$  è la forza esercitata,  $dx$  è lo spostamento infinitesimo,  $P$  è la pressione e  $dV$  è la variazione infinitesima di volume.

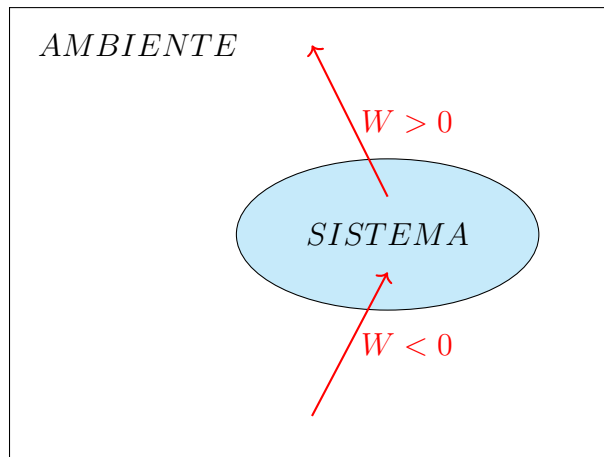
Il lavoro totale compiuto durante una trasformazione da uno stato iniziale  $i$  a uno stato finale  $f$  è dato dall'integrale:

$$W = \int_i^f P \cdot dV \quad (658)$$

Osserviamo che nella convenzione egoistica gli scambi di lavoro vengono indicati secondo la seguente modalità:

---

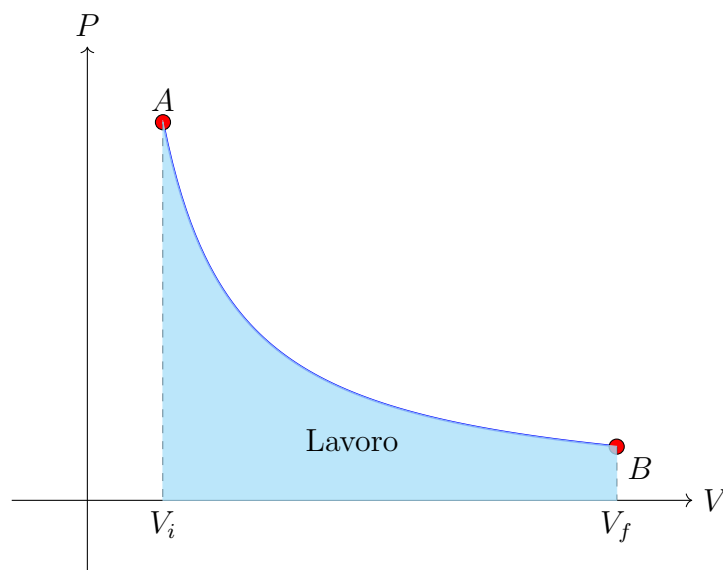
<sup>13</sup>Notare bene che nella realtà anche le pareti assorbono energia, tuttavia consideriamo le pareti come entità fittizie



- $W > 0$ : il sistema compie lavoro sull'ambiente (espansione)
- $W < 0$ : l'ambiente compie lavoro sul sistema (compressione)

### 13.10.1 Rappresentazione grafica

Sul diagramma P-V, il lavoro è rappresentato dall'area sottesa dalla curva che descrive la trasformazione:



## 13.11 Calore

### Calore

Il calore è una forma di trasferimento di energia tra corpi o parti di uno stesso corpo a diverse temperature

Il flusso di calore avviene sempre dalla regione a temperatura più alta verso quella a temperatura più bassa, in accordo con il secondo principio della termodinamica.

A differenza del lavoro, il calore è associato al movimento disordinato delle particelle che compongono la materia

### 13.11.1 Unità di misura

Nel Sistema Internazionale (SI), l'unità di misura del calore è il Joule (J). Storicamente, si utilizzava anche la caloria (cal), definita come la quantità di calore necessaria per innalzare la temperatura di 1 grammo d'acqua da 14.5°C a 15.5°C a pressione standard. La relazione tra le due unità è:

$$1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J} \quad (659)$$

### 13.11.2 Calore specifico

#### Calore Specifico

Il calore specifico  $c$  di una sostanza è definito come la quantità di calore necessaria per innalzare la temperatura di un'unità di massa di quella sostanza di un grado Kelvin (o Celsius)

$$c = \frac{Q}{m\Delta T} \quad (660)$$

dove  $Q$  è il calore fornito,  $m$  è la massa e  $\Delta T$  è la variazione di temperatura; l'unità di misura del calore specifico nel SI è J/(kg·K).

### 13.11.3 Capacità termica

#### Capacità Termica

La capacità termica  $C$  di un corpo è definita come la quantità di calore necessaria per innalzare la sua temperatura di un grado Kelvin (o Celsius)

$$C = \frac{Q}{\Delta T} = mc \quad (661)$$

L'unità di misura della capacità termica nel SI è J/K.



### 13.11.4 Calore latente

#### Calore Latente

Il calore latente  $L$  è la quantità di calore necessaria per cambiare lo stato di aggregazione di una sostanza senza variarne la temperatura

Si distinguono:

- Calore latente di fusione  $\lambda_f$
- Calore latente di vaporizzazione  $\lambda_v$
- Calore latente di sublimazione  $\lambda_s$

Il calore scambiato durante un cambiamento di fase è dato da:

$$Q = m \lambda \quad (662)$$

dove  $m$  è la massa della sostanza che cambia fase.

### 13.11.5 Equazione calorimetrica

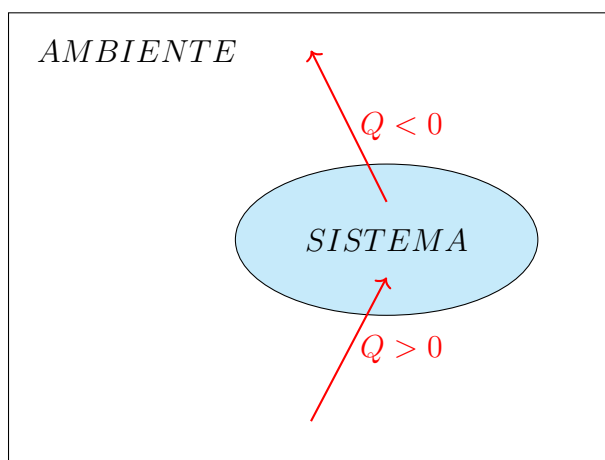
L'equazione calorimetrica descrive lo scambio di calore tra due o più corpi che raggiungono l'equilibrio termico:

$$\sum_i m_i c_i (T_f - T_i) = 0 \quad (663)$$

dove  $m_i$ ,  $c_i$  e  $T_i$  sono rispettivamente la massa, il calore specifico e la temperatura iniziale di ciascun corpo, e  $T_f$  è la temperatura finale di equilibrio.

### 13.11.6 Convenzione dei segni

In termodinamica, si adotta la seguente convenzione dei segni per il calore:



- $Q > 0$ : il sistema assorbe calore dall'ambiente
- $Q < 0$ : il sistema cede calore all'ambiente

## 13.12 Trasformazioni termodinamiche

Alterando le pareti o l'ambiente di un sistema termodinamico, ovvero perturbando l'equilibrio del sistema, questo raggiungerà un nuovo equilibrio:

### Trasformazione termodinamica

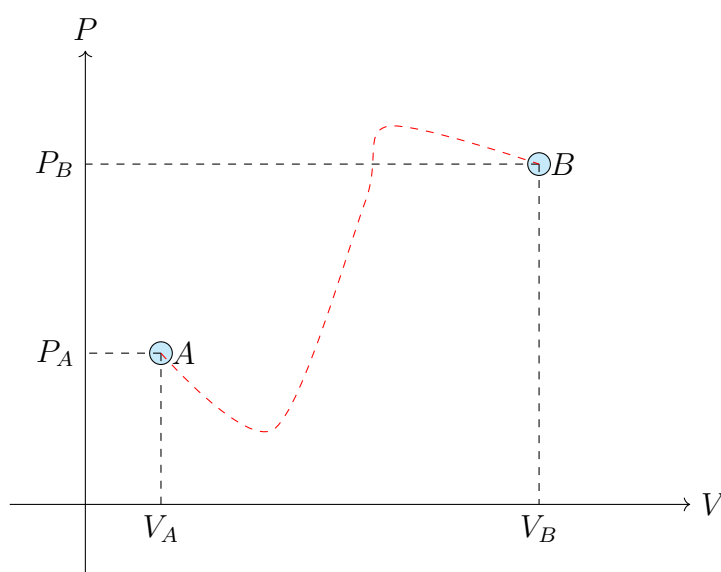
Insieme delle proprietà del sistema durante gli stati intermedi durante uno scambio di energia tra sistema e ambiente

Tuttavia l'insieme degli stati intermedi che da uno stato di equilibrio a un altro generalmente non sono a loro volta di equilibrio, secondo tale divisione si distinguono le trasformazioni in **reversibili** e **irreversibili**.

## 13.13 Trasformazioni irreversibili

Le trasformazioni irreversibili sono tutte quelle trasformazioni durante le quali gli stati intermedi non sono stati d'equilibrio, dove dunque non è possibile usare la legge dei gas perfetti.

Dal momento che gli stati intermedi di una trasformazioni irreversibili non sono di equilibrio, non è possibile rappresentarle nel diagramma di Clapeyron, pertanto queste trasformazioni vengono indicate con una linea tratteggiata, ad eccezione dello stato finale e iniziale.



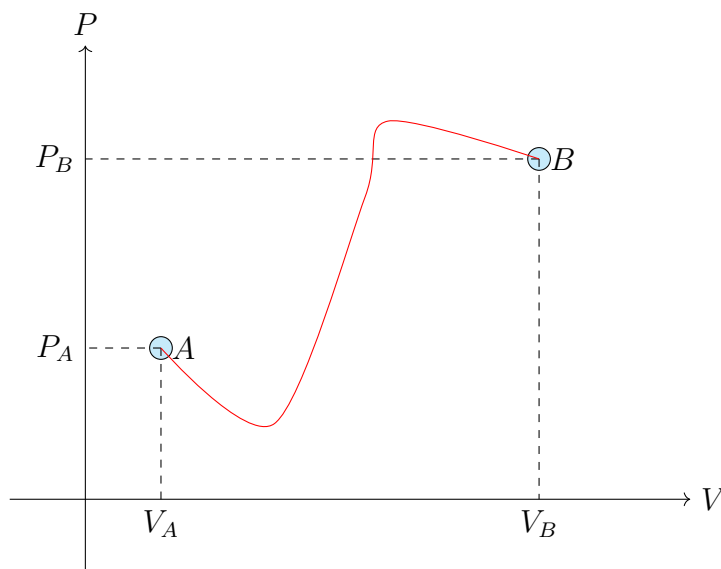
## 13.14 Trasformazioni reversibili

Le trasformazioni reversibili sono trasformazioni ideali e semplici da strutturare durante le quali ogni stato intermedio è uno stato d'equilibrio.

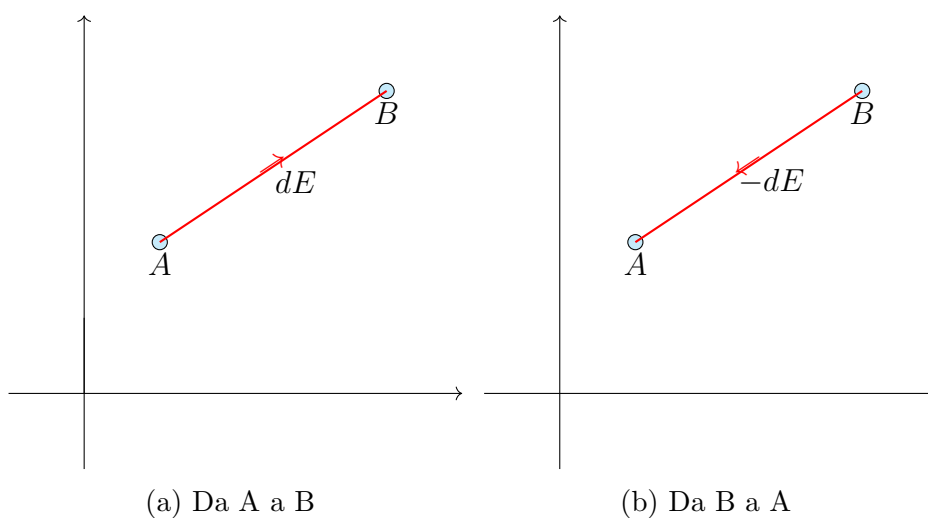
### Trasformazione reversibile

Una trasformazione reversibile è costituita da una successione di stati d'equilibrio

Essendo tutti gli stati intermedi stati all'equilibrio posso rappresentarle sul piano  $PV$  come linee ben definite:



Una conseguenza fondamentale delle trasformazioni reversibili sta nel fatto che invertendo la trasformazione inverto anche gli scambi energetici tra sistema e ambiente.



$$dE_{\gamma_{AB}} = dE_{\gamma_{BA}} \quad (664)$$

In conclusione per ottenere una trasformazione reversibile la pressione e temperatura devono essere omogeneamente distribuite all'interno del volume e essere uguali alla pressione e temperatura esterne.

Ricordando che in termodinamica l'energia può essere fornita tramite processi di natura meccanica (lavoro) o di natura termica (calore):

$$dE = dW + dQ \quad (665)$$

Ricaviamo che una condizione **necessaria** e **sufficiente** per ottenere una trasformazione reversibile è che si debba verificare la seguente uguaglianza:

$$\begin{cases} dQ_{AB} = -dQ_{BA} \\ dW_{AB} = -dW_{BA} \end{cases} \implies \text{Trasformazione reversibile} \quad (666)$$

Vale la pena osservare che:

$$\begin{cases} Q_{AB} = -Q_{BA} \\ W_{AB} = -W_{BA} \end{cases} \not\Rightarrow \text{Trasformazione reversibile} \quad (667)$$

Non garantisce una condizione necessaria e sufficiente per la realizzazione di una trasformazione reversibile.

Per garantire che gli stati intermedi di una reazione siano di equilibrio necessito di una condizione di quasi staticità e di assenza di forze dissipative:

- **Quasi staticità:** implica che per ogni  $dt$  durante una trasformazione il sistema sia in equilibrio esterno con l'ambiente:

$$\begin{cases} P_{int} = P_{est} \\ T_{int} = T_{est} \end{cases} \quad \forall dt \text{ lungo } \gamma \quad (668)$$

- **Assenza forze dissipative:** garantisce che l'energia interna del sistema non si disperda.

## 13.15 Alcune trasformazioni termodinamiche

Analizzeremo alcune delle principali e più note trasformazioni termodinamiche soffermandoci sulle loro principali proprietà.

### 13.15.1 Trasformazioni isocore

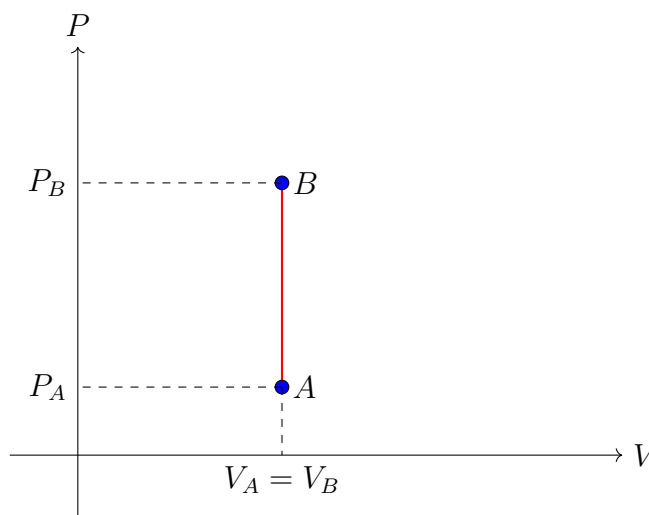
#### Trasformazione Isocora

Una trasformazione isocora (o isovolumica) è una trasformazione termodinamica durante la quale il volume del sistema rimane costante

Questa condizione si esprime matematicamente come:

$$V = \text{costante} \Rightarrow dV = 0 \quad (669)$$

Le trasformazioni isocore sono particolarmente importanti nello studio dei gas e possono essere rappresentate graficamente sul piano P-V come linee verticali.



**Lavoro in una trasformazione isocora** In una trasformazione isocora, il lavoro compiuto dal sistema è nullo. Questo è una conseguenza diretta della definizione di lavoro in termodinamica:

$$W = \int_{V_i}^{V_f} P dV \quad (670)$$

Poiché in una trasformazione isocora  $dV = 0$ , il lavoro risulta:

$$W = \int_{V_i}^{V_f} P \cdot 0 = 0 \quad (671)$$

**Variazione di energia interna** Per un gas ideale, la variazione di energia interna in una trasformazione isocora è direttamente proporzionale alla variazione di temperatura:

$$\Delta U = nC_V \Delta T \quad (672)$$

dove  $n$  è il numero di moli,  $C_V$  è il calore specifico molare a volume costante e  $\Delta T$  è la variazione di temperatura.

**Calore scambiato** Dal primo principio della termodinamica, sappiamo che:

$$\Delta U = Q + W \quad (673)$$

Poiché in una trasformazione isocora il lavoro è nullo ( $W = 0$ ), tutto il calore scambiato va a modificare l'energia interna del sistema:

$$Q = \Delta U = nC_V\Delta T \quad (674)$$

**Relazione tra pressione e temperatura** Per un gas ideale in una trasformazione isocora, la relazione tra pressione e temperatura è data dalla legge di Gay-Lussac:

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \quad (675)$$

Questa relazione può essere derivata dall'equazione di stato dei gas perfetti,  $PV = nRT$ , considerando  $V$  e  $n$  costanti:

$$P = \frac{nR}{V}T = kT \quad (676)$$

dove  $k = \frac{nR}{V}$  è una costante.

### 13.15.2 Trasformazioni isobare

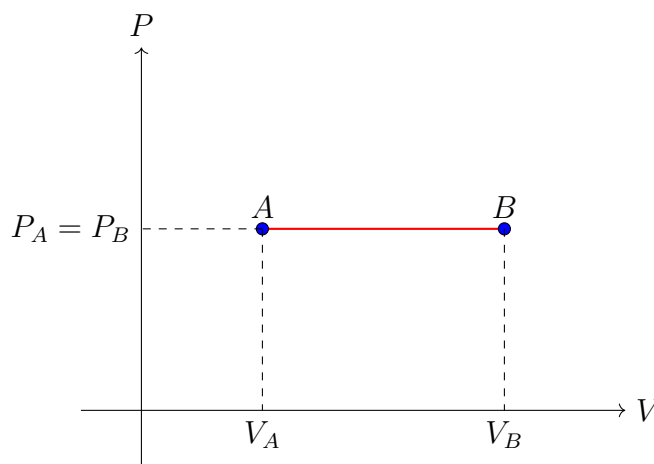
#### Trasformazione Isobara

Una trasformazione isobara è una trasformazione termodinamica che avviene a pressione costante

Matematicamente, questa condizione si esprime come:

$$P = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad dP = 0 \quad (677)$$

Le trasformazioni isobare sono rappresentate graficamente sul piano P-V come linee orizzontali.



**Lavoro in una trasformazione isobara** In una trasformazione isobara, il lavoro compiuto dal sistema è dato dall'integrale della pressione rispetto alla variazione di volume:

$$W = \int_{V_i}^{V_f} P dV \quad (678)$$

Poiché la pressione è costante, possiamo estrarla dall'integrale:

$$W = P \int_{V_i}^{V_f} dV = P(V_f - V_i) = P\Delta V \quad (679)$$

Questa equazione mostra che il lavoro in una trasformazione isobara è direttamente proporzionale alla variazione di volume.

**Variazione di energia interna** Per un gas ideale, la variazione di energia interna in una trasformazione isobara è:

$$\Delta U = nC_V\Delta T \quad (680)$$

dove  $n$  è il numero di moli,  $C_V$  è il calore specifico molare a volume costante e  $\Delta T$  è la variazione di temperatura.

**Calore scambiato** Il calore scambiato in una trasformazione isobara può essere calcolato utilizzando il calore specifico a pressione costante,  $C_P$ :

$$Q = nC_P\Delta T \quad (681)$$

È importante notare che  $C_P > C_V$  per i gas ideali. La relazione tra  $C_P$  e  $C_V$  è data dalla relazione di Mayer:

$$C_P - C_V = R \quad (682)$$

dove  $R$  è la costante universale dei gas.

**Relazione tra volume e temperatura** Per un gas ideale in una trasformazione isobara, la relazione tra volume e temperatura è data dalla legge di Charles:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad (683)$$

Questa relazione può essere derivata dall'equazione di stato dei gas perfetti,  $PV = nRT$ , considerando  $P$  e  $n$  costanti:

$$V = \frac{nR}{P}T = k'T \quad (684)$$

dove  $k' = \frac{nR}{P}$  è una costante.



### 13.15.3 Trasformazioni isoterme

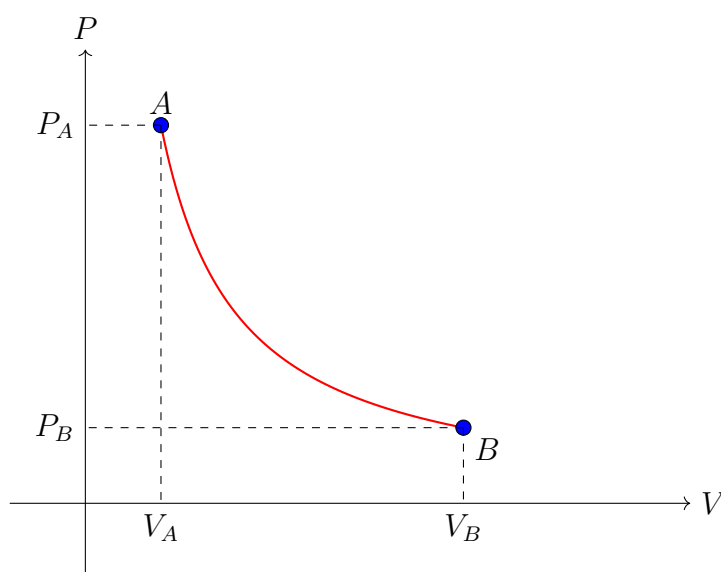
#### Trasformazione Isoterma

Una trasformazione isoterma è una trasformazione termodinamica che avviene a temperatura costante

Matematicamente, questa condizione si esprime come:

$$T = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad dT = 0 \quad (685)$$

Le trasformazioni isoterme per un gas ideale sono rappresentate graficamente sul piano P-V come iperboli equilateri.



**Equazione caratteristica** Per un gas ideale, la relazione tra pressione e volume in una trasformazione isoterma è data dalla legge di Boyle:

$$PV = \text{costante} \quad (686)$$

Questa relazione può essere derivata dall'equazione di stato dei gas perfetti,  $PV = nRT$ , considerando  $T$  e  $n$  costanti:

$$PV = nRT = k' \quad (687)$$

dove  $k' = nRT$  è una costante.

**Lavoro in una trasformazione isoterma** Il lavoro compiuto durante una trasformazione isoterma di un gas ideale può essere calcolato come segue:

$$W = \int_{V_i}^{V_f} P dV \quad (688)$$

$$= \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV \quad (\text{usando l'equazione di stato dei gas perfetti}) \quad (689)$$

$$= nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} \quad (690)$$

$$= nRT \ln \left( \frac{V_f}{V_i} \right) \quad (691)$$

Alternativamente, usando la relazione  $PV = \text{costante}$ , possiamo esprimere il lavoro in termini di pressioni:

$$W = nRT \ln \left( \frac{P_i}{P_f} \right) \quad (692)$$

**Variazione di energia interna** Per un gas ideale, l'energia interna dipende solo dalla temperatura. Poiché in una trasformazione isoterma la temperatura rimane costante, la variazione di energia interna è nulla:

$$\Delta U = 0 \quad (693)$$

**Calore scambiato** Dal primo principio della termodinamica, sappiamo che:

$$\Delta U = Q + W \quad (694)$$

Poiché in una trasformazione isoterma  $\Delta U = 0$ , abbiamo:

$$Q = -W = nRT \ln \left( \frac{V_i}{V_f} \right) = nRT \ln \left( \frac{P_f}{P_i} \right) \quad (695)$$

Questo risultato mostra che in una trasformazione isoterma, il calore scambiato è uguale in modulo al lavoro compiuto, ma di segno opposto.

### 13.15.4 Trasformazioni Adiabatiche

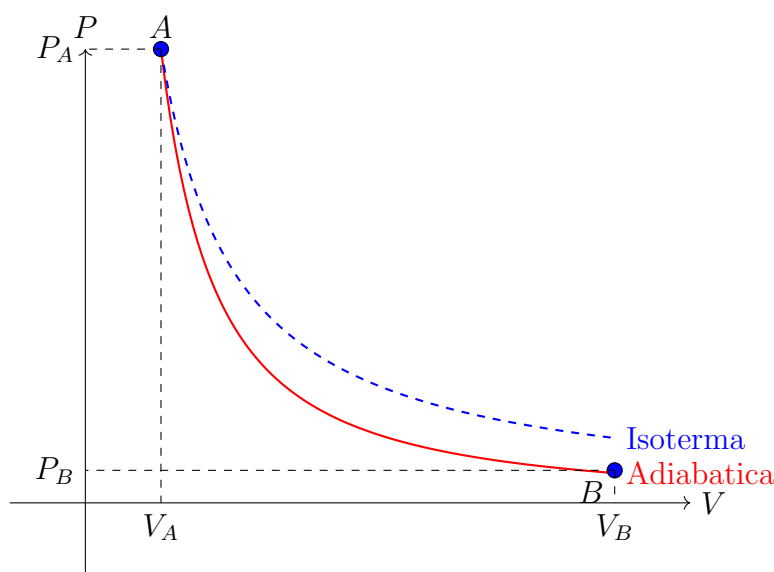
#### Trasformazione Adiabatiche

Una trasformazione adiabatica è una trasformazione termodinamica durante la quale non avviene scambio di calore tra il sistema e l'ambiente circostante

Matematicamente, questa condizione si esprime come:

$$dQ = 0 \quad (696)$$

Le trasformazioni adiabatiche sono rappresentate graficamente sul piano P-V come curve più ripide rispetto alle isoterme.



**Equazione caratteristica** Per un gas ideale, la relazione tra pressione e volume in una trasformazione adiabatica è data dall'equazione di Poisson:

$$PV^\gamma = \text{costante} \quad (697)$$

dove  $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$  è il rapporto tra i calori specifici a pressione costante e a volume costante. Tale relazione si può dimostrare partendo dal primo principio della termodinamica e considerando che  $Q = 0$  in una trasformazione adiabatica:

$$dU = \delta Q - \delta W \quad (698)$$

$$dU = -PdV \quad (699)$$

Per un gas ideale,  $dU = nC_V dT$  e  $PV = nRT$ . Sostituendo:

$$nC_V dT = -PdV \quad (700)$$

$$C_V \frac{dT}{T} = -R \frac{dV}{V} \quad (701)$$

Integrando entrambi i lati:

$$C_V \ln \frac{T_2}{T_1} = -R \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (702)$$

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{C_V} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^R \quad (703)$$

Usando la relazione  $PV = nRT$ , possiamo scrivere:

$$\left(\frac{P_2 V_2}{P_1 V_1}\right)^{C_V} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^R \quad (704)$$

Riarrangiando:

$$\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{C_V} \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{C_V} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^R \quad (705)$$

$$\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{C_V} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{C_P} \quad (706)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{C_P}{C_V}} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma \quad (707)$$

Da cui:

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma = \text{costante} \quad (708)$$

**Lavoro in una trasformazione adiabatica** Il lavoro compiuto durante una trasformazione adiabatica di un gas ideale può essere calcolato come segue:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P dV \quad (709)$$

$$= \int_{V_1}^{V_2} k V^{-\gamma} dV \quad (\text{dove } k = P_1 V_1^\gamma) \quad (710)$$

$$= k \int_{V_1}^{V_2} V^{-\gamma} dV \quad (711)$$

$$= k \left[ \frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]_{V_1}^{V_2} \quad (712)$$

$$= \frac{k}{1-\gamma} (V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}) \quad (713)$$

$$= \frac{P_1 V_1^\gamma}{1-\gamma} (V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}) \quad (714)$$

$$= \frac{P_1 V_1 - P_2 V_2}{\gamma - 1} \quad (715)$$

**Variazione di temperatura** In una trasformazione adiabatica, la temperatura cambia. La relazione tra temperatura e volume (o pressione) può essere derivata dall'equazione di Poisson:

$$TV^{\gamma-1} = \text{costante} \quad (716)$$

$$T_2 = T_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = T_1 \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (717)$$

**Variazione di energia interna** In una trasformazione adiabatica, la variazione di energia interna è uguale al lavoro compiuto sul sistema (con segno opposto):

$$\Delta U = -W = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\gamma - 1} = nC_V(T_2 - T_1) \quad (718)$$

**Confronto con le trasformazioni isoterme** Le trasformazioni adiabatiche differiscono dalle isoterme in diversi aspetti:

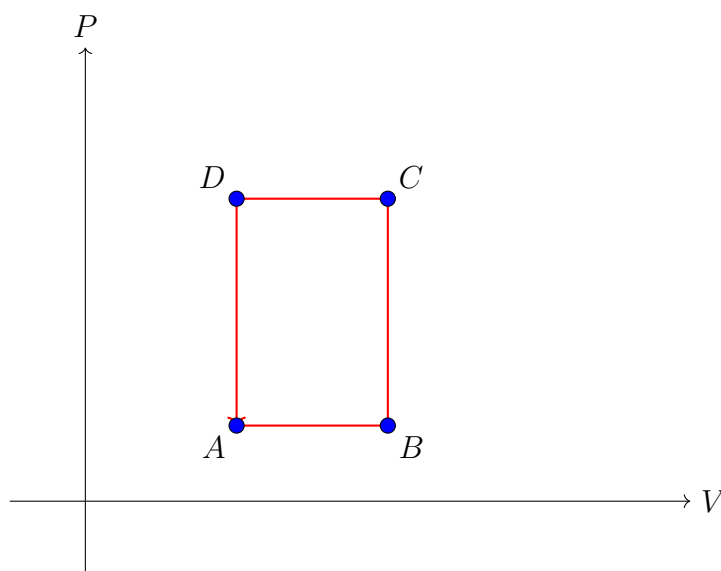
- Nelle adiabatiche la temperatura cambia, nelle isoterme rimane costante
- Le adiabatiche sono più ripide delle isoterme sul piano  $P - V$
- Nelle adiabatiche non c'è scambio di calore, nelle isoterme il calore scambiato è uguale al lavoro compiuto
- L'equazione caratteristica è  $PV^\gamma = \text{costante}$  per le adiabatiche,  $PV = \text{costante}$  per le isoterme

### 13.15.5 Trasformazioni cicliche

#### Trasformazione Ciclica

Una trasformazione ciclica è una serie di processi termodinamici che riportano il sistema al suo stato iniziale.

Queste trasformazioni sono di fondamentale importanza nello studio delle macchine termiche e dei refrigeratori.



#### Proprietà fondamentali

- **Variazione nulla delle funzioni di stato:** Poiché il sistema ritorna allo stato iniziale, la variazione netta di tutte le funzioni di stato (come energia interna, entalpia, entropia) è zero:

$$\Delta U = 0 \quad (719)$$

- **Calore netto:** Il calore netto scambiato durante un ciclo è uguale al lavoro netto compiuto:

$$Q_{netto} = W_{netto} \quad (720)$$

Questa relazione deriva dal primo principio della termodinamica:  $\Delta U = Q - W$ . Poiché  $\Delta U = 0$  in un ciclo,  $Q = W$ .

### 13.16 Lavoro di alcune trasformazioni

- **Trasformazione isocora:**  $dV = \text{costante}$ :

$$W = \int_{V_i}^{V_f} P \cdot dV = 0 \quad (721)$$

- **Trasformazione isobara:**  $dP = \text{costante}$ :

$$W = P \int_{V_i}^{V_f} dV = P(V_f - V_i) \quad (722)$$

- **Trasformazione isoterma:**  $dT = \text{costante}$  per un gas ideale:

$$W = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT \ln \left( \frac{V_f}{V_i} \right) = nRT \ln \left( \frac{P_i}{P_f} \right) \quad (723)$$

- **Trasformazione adiabatica** per un gas ideale:

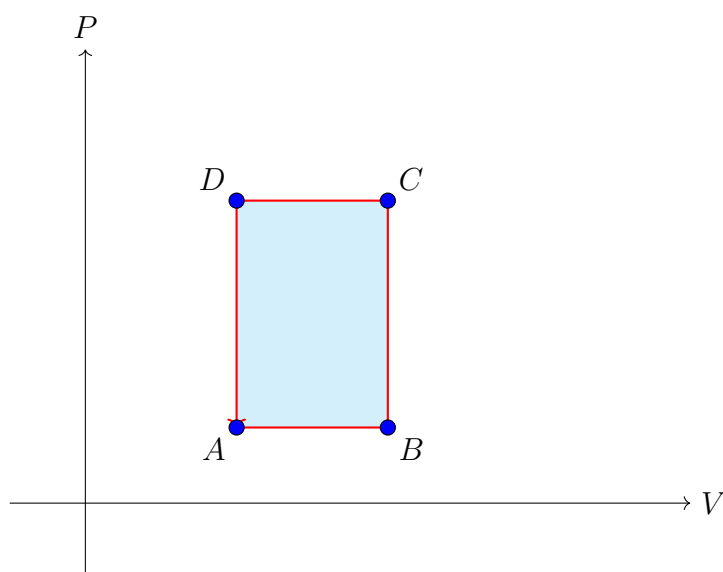
$$W = \frac{P_1 V_1 - P_2 V_2}{\gamma - 1} = nC_V(T_1 - T_2) \quad (724)$$

dove  $\gamma = C_P/C_V$  è il rapporto dei calori specifici.

- **Lavoro in un ciclo**

In un ciclo termodinamico, il lavoro netto è dato dall'area racchiusa dalla curva sul diagramma P-V:

$$W_{\text{netto}} = \oint P \cdot dV \quad (725)$$



## 13.17 Approfondimento: Calore specifico dei gas

Il calore specifico è una proprietà termodinamica fondamentale che caratterizza la capacità di una sostanza di immagazzinare energia termica.

Il calore specifico  $c$  di una sostanza è definito come la quantità di calore necessaria per innalzare la temperatura di un'unità di massa di quella sostanza di un grado Kelvin (o Celsius):

$$c = \frac{1}{m} \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right) \quad (726)$$

dove  $m$  è la massa,  $Q$  è il calore fornito e  $T$  è la temperatura; nel Sistema Internazionale (SI), l'unità di misura del calore specifico è J/(kg·K).

### 13.17.1 Calore specifico a volume costante e a pressione costante

Per i gas, si distinguono due tipi di calore specifico:

- Calore specifico a volume costante  $c_V$ :

$$c_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \quad (727)$$

- Calore specifico a pressione costante  $c_P$ :

$$c_P = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P \quad (728)$$

dove  $U$  è l'energia interna e  $H = U + PV$  è l'entalpia del sistema.

### 13.17.2 Calore specifico molare

Il calore specifico molare è il calore specifico riferito a una mole di sostanza anziché a un'unità di massa.

#### Calore specifico molare

Il calore specifico molare  $C_m$  è definito come la quantità di calore necessaria per innalzare la temperatura di una mole di sostanza di un grado Kelvin (o Celsius):

$$C_m = \frac{1}{n} \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right) \quad (729)$$

dove  $n$  è il numero di moli.

Nel Sistema Internazionale (SI), l'unità di misura del calore specifico molare è J/(mol·K).

Il calore specifico molare è legato al calore specifico dalla relazione:

$$C_m = M \cdot c \quad (730)$$

dove  $M$  è la massa molare della sostanza.



### 13.18 Approfondimento: Teorema di equipartizione dell'energia

Il teorema di equipartizione dell'energia afferma che, in condizioni di equilibrio termico, ogni grado di libertà di un sistema contribuisce con  $\frac{1}{2}kT$  all'energia interna, dove  $k$  è la costante di Boltzmann.

Per un gas ideale monoatomico con 3 gradi di libertà traslazionali:

$$U = \frac{3}{2}nRT \Rightarrow C_{V,m} = \frac{3}{2}R \quad (731)$$

Per un gas ideale biatomico con 3 gradi di libertà traslazionali e 2 rotazionali:

$$U = \frac{5}{2}nRT \Rightarrow C_{V,m} = \frac{5}{2}R \quad (732)$$

### 13.19 Equilibrio termico tra due sostanze

Quando due sostanze a temperature diverse vengono messe a contatto termico, si verifica uno scambio di calore fino al raggiungimento dell'equilibrio termico. Questo processo è governato dal principio di conservazione dell'energia e dalla seconda legge della termodinamica.

Consideriamo due corpi A e B con masse  $m_A$  e  $m_B$ , calori specifici  $c_A$  e  $c_B$ , e temperature iniziali  $T_A$  e  $T_B$  rispettivamente. Assumiamo che  $T_A > T_B$ .

Il calore ceduto dal corpo A sarà uguale al calore assorbito dal corpo B:

$$Q_A = -Q_B \quad (733)$$

Esprimiamo il calore in termini di variazione di temperatura:

$$m_A c_A (T_f - T_A) = -m_B c_B (T_f - T_B) \quad (734)$$

dove  $T_f$  è la temperatura finale di equilibrio.

Risolvendo per  $T_f$ :

$$T_f = \frac{m_A c_A T_A + m_B c_B T_B}{m_A c_A + m_B c_B} \quad (735)$$

Questa equazione ci permette di calcolare la temperatura di equilibrio conoscendo le masse, i calori specifici e le temperature iniziali dei due corpi.

#### Equilibrio termico

L'equilibrio termico tra due sostanze si raggiunge quando la temperatura finale è tale che il calore ceduto da una sostanza è esattamente uguale al calore assorbito dall'altra.

È importante notare che questo processo è irreversibile, poiché comporta un aumento dell'entropia totale del sistema.

## 13.20 Trasmissione del calore

La trasmissione del calore può avvenire attraverso tre meccanismi principali: convezione, irraggiamento e conduzione. Ciascuno di questi processi ha caratteristiche e leggi specifiche che ne governano il comportamento.

### 13.20.1 Convezione

#### Convezione

La convezione è un processo di trasferimento di calore che coinvolge il movimento di un fluido (liquido o gas)

Si distinguono due tipi di convezione:

- Convezione naturale: causata da differenze di densità dovute a gradienti di temperatura
- Convezione forzata: causata da forze esterne come pompe o ventilatori

La legge di Newton del raffreddamento descrive il trasferimento di calore per convezione:

$$\dot{Q} = hA(T_s - T_\infty) \quad (736)$$

dove:

- $\dot{Q}$  è il tasso di trasferimento di calore [W]
- $h$  è il coefficiente di convezione [W/(m<sup>2</sup>·K)]
- $A$  è l'area della superficie di scambio [m<sup>2</sup>]
- $T_s$  è la temperatura della superficie [K]
- $T_\infty$  è la temperatura del fluido lontano dalla superficie [K]

Il coefficiente di convezione  $h$  dipende da vari fattori, tra cui la geometria della superficie, le proprietà del fluido e il tipo di flusso (laminare o turbolento).

### 13.20.2 Irraggiamento

#### Irraggiamento

L'irraggiamento è il trasferimento di energia termica attraverso onde elettromagnetiche. A differenza della convezione e della conduzione, non richiede un mezzo materiale per propagarsi.

La legge di Stefan-Boltzmann descrive la potenza emessa per irraggiamento da un corpo nero:

$$P = \sigma AT^4 \quad (737)$$

dove:

- $P$  è la potenza irradiata [W]
- $\sigma$  è la costante di Stefan-Boltzmann ( $5.67 \times 10^{-8} \text{W}/(\text{m}^2 \times \text{K}^4)$ )
- $A$  è l'area della superficie [ $\text{m}^2$ ]
- $T$  è la temperatura assoluta della superficie [K]

Per corpi reali, introduciamo l'emissività  $\varepsilon$ :

$$P = \varepsilon \sigma A T^4 \quad (738)$$

dove  $\varepsilon$  è un numero adimensionale compreso tra 0 e 1 che rappresenta l'efficienza di emissione rispetto a un corpo nero.

### 13.20.3 Conduzione

#### Conduzione

La conduzione è il trasferimento di calore attraverso un mezzo materiale senza movimento macroscopico di materia.

È governata dalla legge di Fourier:

$$\dot{Q} = -kA \frac{dT}{dx} \quad (739)$$

dove:

- $\dot{Q}$  è il tasso di trasferimento di calore [W]
- $k$  è la conducibilità termica del materiale [ $\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ]
- $A$  è l'area della sezione trasversale [ $\text{m}^2$ ]
- $\frac{dT}{dx}$  è il gradiente di temperatura [K/m]

Il segno negativo indica che il calore fluisce nella direzione opposta al gradiente di temperatura.

Per una parete piana di spessore  $L$ , la legge di Fourier può essere scritta come:

$$\dot{Q} = kA \frac{T_1 - T_2}{L} \quad (740)$$

dove  $T_1$  e  $T_2$  sono le temperature delle due facce della parete.

## 13.21 I Principio della Termodinamica

Il Primo Principio della Termodinamica è una formulazione del principio di conservazione dell'energia applicato ai sistemi termodinamici. Esso stabilisce che la variazione di energia interna di un sistema è uguale alla somma del calore fornito al sistema e del lavoro compiuto sul sistema:

$$dU = \delta Q + \delta W \quad (741)$$

dove  $\delta Q$  e  $\delta W$  sono forme differenziali inesatte, poiché dipendono dal cammino della trasformazione.

- $dU$  è la variazione infinitesima di energia interna del sistema
- $\delta Q$  è il calore infinitesimo fornito al sistema
- $\delta W$  è il lavoro infinitesimo compiuto sul sistema

### Primo Principio della Termodinamica

In una generica trasformazione  $Q$  e  $L$  dipendono dalla trasformazione, tuttavia la variazione di energia interna dipende solo dallo stato finale e dallo stato iniziale

#### 13.21.1 Conseguenze

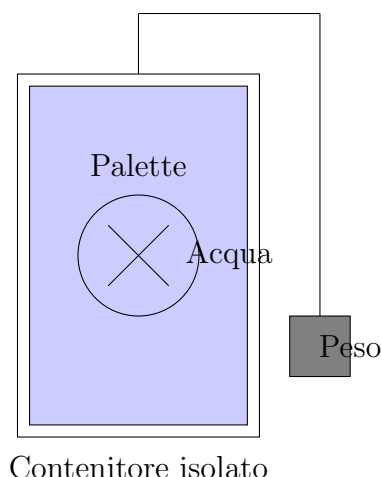
Il Primo Principio ha diverse importanti conseguenze:

- **Impossibilità del moto perpetuo di prima specie:** Non è possibile costruire una macchina che produca lavoro senza consumare energia.
- **Conservazione dell'energia:** L'energia non può essere creata né distrutta, ma solo trasformata da una forma all'altra.
- **Definizione di funzione di stato:** L'energia interna  $U$  è una funzione di stato, ovvero il suo valore dipende solo dallo stato del sistema e non dal percorso seguito per raggiungerlo.
- **Relazione tra calore e lavoro:** Calore e lavoro sono forme equivalenti di trasferimento di energia. Un sistema può aumentare la sua energia interna sia ricevendo calore che subendo un lavoro.

## 13.22 Esperimento di Joule: Relazione tra calorie e joule

L'esperimento di Joule, condotto da James Prescott Joule nel 1845, fu fondamentale per stabilire l'equivalenza tra lavoro meccanico e calore, contribuendo alla formulazione del Primo Principio della Termodinamica.

L'apparato sperimentale consisteva in un contenitore isolato termicamente contenente acqua, all'interno del quale era posto un sistema di palette collegate a un peso attraverso una puleggia. Il peso, scendendo, faceva ruotare le palette, agitando l'acqua.



Joule misurò l'aumento di temperatura dell'acqua causato dalla caduta del peso e calcolò il rapporto tra il lavoro meccanico compiuto (dato dal prodotto del peso per l'altezza di caduta) e il calore generato (calcolato dal prodotto della massa d'acqua, del suo calore specifico e dell'aumento di temperatura).

Il risultato dell'esperimento fu che questo rapporto era costante, indipendentemente dalle condizioni specifiche dell'esperimento. Joule determinò che:

$$1 \text{ caloria} = 4.186 \text{ joule} \quad (742)$$

Questo valore è noto come equivalente meccanico del calore.

L'esperimento di Joule dimostrò che:

- Il calore è una forma di energia.
- L'energia meccanica può essere convertita in energia termica.
- Il lavoro e il calore sono equivalenti in termini di trasferimento di energia.

## 13.23 Relazione di Mayer

La relazione di Mayer, formulata da Julius Robert von Mayer nel 1842, stabilisce una connessione tra il calore specifico a pressione costante ( $c_p$ ) e il calore specifico a volume costante ( $c_v$ ) per un gas ideale. Questa relazione è una conseguenza diretta del Primo Principio della Termodinamica.

Per derivare la relazione di Mayer, consideriamo un gas ideale che subisce due trasformazioni differenti:

- Riscaldamento a volume costante
- Riscaldamento a pressione costante

### 13.23.1 Derivazione della relazione di Mayer

Per un processo a volume costante, il gas non compie lavoro ( $W = 0$ ). Quindi, dal Primo Principio:

$$\Delta U = Q_v = nc_v\Delta T \quad (743)$$

dove  $n$  è il numero di moli del gas.

### 13.23.2 Riscaldamento a pressione costante

Per un processo a pressione costante, il gas compie lavoro espandendosi. Il lavoro compiuto è:

$$W = P\Delta V = nR\Delta T \quad (744)$$

Il calore fornito è:

$$Q_p = nc_p\Delta T \quad (745)$$

Dal Primo Principio:

$$\Delta U = Q - W \implies nc_v\Delta T = nc_p\Delta T - nR\Delta T \quad (746)$$

Otteniamo dunque quella che è la relazione di Mayer:

#### Relazione di Mayer

Per un gas ideale, la differenza tra il calore specifico molare a pressione costante e il calore specifico molare a volume costante è uguale alla costante universale dei gas:

$$c_p - c_v = R \quad (747)$$

### 13.23.3 Dimostrazione alternativa della relazione di Mayer

Per un gas ideale, la relazione tra  $c_P$  e  $c_V$  è data dalla relazione di Mayer:

$$c_P - c_V = R \quad (748)$$

dove  $R$  è la costante universale dei gas divisa per la massa molare del gas.

Partiamo dalle definizioni di  $c_P$  e  $c_V$  per un gas ideale:

$$c_P = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P = \left( \frac{\partial(U + PV)}{\partial T} \right)_P \quad (749)$$

$$c_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \quad (750)$$

Per un gas ideale,  $U = U(T)$  e  $PV = nRT$ . Quindi:

$$c_P = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_P + \left( \frac{\partial(PV)}{\partial T} \right)_P \quad (751)$$

$$= c_V + \left( \frac{\partial(nRT)}{\partial T} \right)_P \quad (752)$$

$$= c_V + nR \quad (753)$$

Dividendo entrambi i lati per la massa  $m$ , otteniamo:

$$c_P - c_V = \frac{nR}{m} = R \quad (754)$$

### 13.23.4 Conseguenze

Il rapporto dei calori specifici, noto anche come esponente adiabatico o costante di Laplace, è definito come:

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} \geq 1 \quad (755)$$

Per un gas ideale monoatomico,  $\gamma = \frac{5}{3} \approx 1.67$ , mentre per un gas ideale biatomico,  $\gamma = \frac{7}{5} = 1.4$ .

Traiamo dunque le seguenti conclusioni

- $c_p$  è sempre maggiore di  $c_v$  per un gas ideale.
- La differenza tra  $c_p$  e  $c_v$  è indipendente dalla temperatura e dalla natura del gas.
- Conoscendo uno dei due calori specifici, è possibile calcolare l'altro.

### 13.24 Trasformazioni adiabatiche reversibili

Una trasformazione adiabatica è un processo termodinamico durante il quale non avviene scambio di calore tra il sistema e l'ambiente circostante. Se inoltre la trasformazione è reversibile, possiamo applicare le leggi dei gas ideali e il Primo Principio della Termodinamica per derivare importanti relazioni.

Per una trasformazione adiabatica,  $Q = 0$ . Quindi, dal Primo Principio:

$$dU = -dW \quad (756)$$

Per un gas ideale,  $dU = nc_v dT$  e  $dW = PdV$ . Sostituendo:

$$nc_v dT = -PdV \quad (757)$$

Usando l'equazione di stato dei gas ideali  $PV = nRT$ , possiamo eliminare  $P$ :

$$nc_v dT = -\frac{nRT}{V} dV \quad (758)$$

Riarrangiando e usando la relazione di Mayer  $c_p - c_v = R$ , otteniamo:

$$\frac{c_v}{R} \frac{dT}{T} = -\frac{dV}{V} \quad (759)$$

Definendo  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ , possiamo scrivere:

$$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0 \quad (760)$$

Integrando questa equazione, otteniamo:

$$\ln T + (\gamma - 1) \ln V = \text{costante} \quad (761)$$

Che può essere riscritta come:

$$TV^{\gamma-1} = \text{costante} \quad (762)$$

Questa è una delle equazioni fondamentali per le trasformazioni adiabatiche reversibili. Utilizzando l'equazione di stato dei gas ideali, possiamo derivare altre forme equivalenti:

$$PV^\gamma = \text{costante} \quad (763)$$

$$TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{costante} \quad (764)$$

#### Trasformazioni adiabatiche reversibili

Per un gas ideale che subisce una trasformazione adiabatica reversibile, valgono le seguenti relazioni:

$$TV^{\gamma-1} = \text{costante} \quad (765)$$

$$PV^\gamma = \text{costante} \quad (766)$$

$$TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{costante} \quad (767)$$



## 14 Flusso

### Flusso (I)

Il flusso rappresenta la quantità di una grandezza vettoriale che attraversa una superficie in un determinato intervallo di tempo, rendendo questo concetto estremamente potente e versatile.

### 14.1 Definizione Matematica

#### Flusso (II)

Il flusso di un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  attraverso una superficie  $S$  è definito matematicamente come l'integrale di superficie del prodotto scalare tra il campo vettoriale e il vettore normale alla superficie.

$$\Phi = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} \quad (768)$$

Dove  $d\mathbf{A}$  è un elemento infinitesimale di area della superficie, orientato nella direzione del vettore normale alla superficie.

Per comprendere meglio questa definizione, analizziamo i suoi componenti:

- $\mathbf{F}$  è un qualsiasi campo vettoriale (elettrico, magnetico, campo di velocità in un fluido...)
- $d\mathbf{A}$  è un vettore infinitesimale che rappresenta un elemento di area della superficie; il suo modulo è pari all'area dell'elemento, e la sua direzione è perpendicolare alla superficie in quel punto.
- Il prodotto scalare  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$  ci dà la componente del campo vettoriale che è perpendicolare alla superficie in quel punto, moltiplicata per l'area dell'elemento.
- L'integrale somma questi contributi su tutta la superficie, dando il flusso totale.

È importante notare che il flusso può essere positivo, negativo o zero, a seconda dell'orientazione relativa del campo vettoriale e della superficie. Un flusso positivo indica che il campo vettoriale attraversa la superficie nella direzione del vettore normale, mentre un flusso negativo indica che il campo vettoriale attraversa la superficie nella direzione opposta al vettore normale.

### 14.2 Interpretazione Fisica

- In elettromagnetismo, il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è proporzionale alla carica elettrica contenuta all'interno della superficie (Legge di Gauss).
- In fluidodinamica, il flusso di un campo di velocità attraverso una superficie rappresenta il volume di fluido che attraversa la superficie nell'unità di tempo.

- In termodinamica, il flusso di calore rappresenta la quantità di energia termica che attraversa una superficie nell'unità di tempo.

In tutti questi casi, il flusso ci fornisce informazioni cruciali sul comportamento del sistema fisico.

## 14.3 Il Teorema di Gauss e l'Angolo Solido

### 14.3.1 Enunciato

Il teorema di Gauss, anche noto come teorema della divergenza, è un risultato fondamentale che collega il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie chiusa alla divergenza del campo all'interno del volume racchiuso dalla superficie. Consideriamo un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  e una superficie chiusa  $S$  che racchiude un volume  $V$ . Il teorema di Gauss afferma che:

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV \quad (769)$$

### 14.3.2 Definizione di Angolo Solido

#### Angolo solido

L'angolo solido è l'analogo tridimensionale dell'angolo piano, misura la porzione di spazio racchiusa da un cono con vertice in un punto dato.

L'angolo solido  $\Omega$  sotteso da una superficie  $S$  rispetto a un punto  $P$  è definito come:

$$\Omega = \int_S \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{A}}{r^3} \quad (770)$$

Dove  $\mathbf{r}$  è il vettore che va dal punto  $P$  a un punto sulla superficie  $S$ , e  $r$  è la sua magnitudine.

### 14.3.3 Dimostrazione Semplificata

Consideriamo una carica puntiforme  $q$  al centro di una superficie sferica di raggio  $r$ ; il campo elettrico generato dalla carica a distanza  $r$  è:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \boldsymbol{\mu}_r \quad (771)$$

dove  $\boldsymbol{\mu}_r$  è il versore radiale; il flusso attraverso un elemento di superficie  $dA$  è:

$$d\Phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dA \quad (772)$$

L'angolo solido sotteso da  $dA$  rispetto al centro della sfera è:

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} \quad (773)$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione del flusso:

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad (774)$$

Il flusso totale attraverso l'intera superficie sferica si ottiene integrando su tutto l'angolo solido:

$$\Phi = \int d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega \quad (775)$$

L'angolo solido totale sotteso da una superficie chiusa che racchiude un punto è sempre  $4\pi$  steradiani. Quindi:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (776)$$

Questo risultato è indipendente dalla forma della superficie, purché essa racchiuda completamente la carica.

Per una distribuzione di carica arbitraria, possiamo suddividerla in cariche puntiformi infinitesimali e applicare il principio di **sovrapposizione**. Il flusso totale sarà la somma dei flussi dovuti a ciascuna carica infinitesimale, che è proporzionale alla carica totale racchiusa:

$$\Phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (777)$$

Il concetto chiave è che il flusso attraverso una superficie chiusa è proporzionale all'angolo solido sotteso dalla superficie, che è sempre  $4\pi$  per una superficie che racchiude completamente la carica.

## 14.4 Il Flusso in Fluidodinamica

In fluidodinamica, il concetto di flusso è fondamentale per descrivere il movimento dei fluidi: rappresenta la quantità di fluido che attraversa una superficie nell'unità di tempo.

### 14.4.1 Equazione di Continuità

L'equazione di continuità è una manifestazione del principio di conservazione della massa in fluidodinamica. Per un fluido incompressibile, essa si esprime come:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (778)$$

dove  $\mathbf{v}$  è il campo di velocità del fluido.

Questa equazione può essere derivata considerando il flusso di massa attraverso una superficie chiusa. Se la densità del fluido è costante, il flusso di volume deve essere conservato, portando all'equazione di continuità.

### 14.4.2 Flusso in un Tubo di Flusso

Consideriamo un tubo di flusso, ovvero una porzione di fluido delimitata da linee di flusso. Se  $A_1$  e  $A_2$  sono le aree di due sezioni trasversali del tubo, e  $v_1$  e  $v_2$  sono le velocità del fluido in queste sezioni, l'equazione di continuità implica:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (779)$$

Questa equazione esprime la conservazione del flusso di volume lungo il tubo di flusso.

## 14.5 Il Flusso in Gravitazione

Consideriamo una massa puntiforme  $M$  posta nell'origine di un sistema di coordinate. Il campo gravitazionale generato da questa massa a una distanza  $r$  è dato dalla legge di gravitazione universale di Newton:

$$g(r) = -\gamma \frac{M}{r^2} \boldsymbol{\mu}_r \quad (780)$$

dove  $\gamma$  è la costante gravitazionale e  $\boldsymbol{\mu}_r$  è il versore radiale

Calcoliamo ora il flusso di questo campo gravitazionale attraverso una superficie sferica di raggio  $R$  centrata sulla massa:

$$\Phi_g = \oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} \quad (781)$$

$$= \oint_S -G \frac{M}{R^2} \boldsymbol{\mu}_r \cdot R^2 \sin \theta d\theta d\phi \boldsymbol{\mu}_r \quad (782)$$

$$= -GM \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\phi \quad (783)$$

$$= -GM [2\pi] [-\cos \theta]_0^\pi \quad (784)$$

$$= -GM [2\pi] [2] \quad (785)$$

$$= -4\pi GM \quad (786)$$

Questo risultato dimostra il teorema di Gauss per la gravitazione nel caso di una massa puntiforme: il flusso del campo gravitazionale attraverso una superficie chiusa che racchiude la massa è proporzionale alla massa stessa, indipendentemente dalla forma della superficie.

## 14.6 Osservazioni

È interessante notare le similitudini e le differenze tra il teorema di Gauss per il campo elettrico e quello per il campo gravitazionale:

- Entrambi i teoremi collegano il flusso del campo attraverso una superficie chiusa alla quantità di "sorgente" (carica o massa) racchiusa dalla superficie.
- La forma matematica è simile, ma con segni opposti: il flusso elettrico è positivo per cariche positive, mentre il flusso gravitazionale è sempre negativo (la gravità è sempre attrattiva).
- Il teorema gravitazionale include la costante  $4\pi G$ , mentre nel teorema elettrico questa costante è assorbita nella definizione di  $\epsilon_0$ .

Il concetto di flusso in fisica è un potente strumento che ci permette di analizzare e descrivere una vasta gamma di fenomeni.

Il teorema di Gauss, nelle sue varie forme, fornisce un collegamento fondamentale tra il flusso di un campo e le sue sorgenti. Questo teorema non solo semplifica molti calcoli in elettrostatica e gravitazione, ma offre anche una profonda intuizione sulla natura di questi campi.