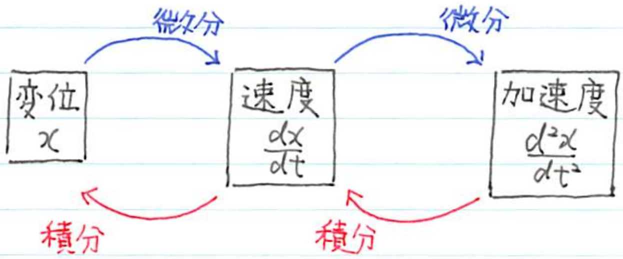
第4章　直線運動



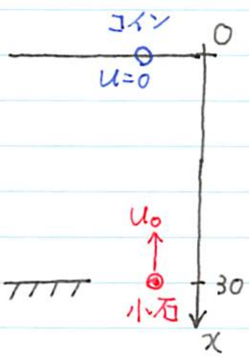
この関係，覚えて下さい。

変位　速度　加速度

Δx　$\frac{\Delta x}{\Delta t}$　$\frac{\Delta x}{(\Delta t)^2}$ $\left(=\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$

の関係と全く同じことです。
ただし，上の式は平均の速度しか扱えません
ですから，公式
$v=v_0+at$，$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$ とかは
忘れてもらって大丈夫です。
全て微分・積分で求まります。

例題 4.2



コイン

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g$$，符号注意!!

コインには下向きに加速度 g が働いています。↓⊕ です。
これから，加速度 ↓積分 速度 ↓積分 変位 となることを示します。

tで積分

$$\frac{dx}{dt}=gt+C_1$$

$t=0$で $\frac{dx}{dt}(=u)=0$から，

$$C_1=0$$

$$\frac{dx}{dt}=gt \quad \cdots①$$

Cは積分定数です。
速度の一般式が求まりました。

さらに，t で積分

$$x=\frac{1}{2}gt^2+C_2$$

$t=0$ で $x=0$ から，$C_2=0$

$$x=\frac{1}{2}gt^2 \quad \cdots②$$

変位の一般式

ちゃんと初期条件を代入して積分定数を求める作業をして下さい!

小石

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g$$

小石もコインと同様，働いている力は重力で　働いている加速度は g。

tで積分

$$\frac{dx}{dt}=gt+C_3$$

$t=0$で $\frac{dx}{dt}(=u)=-u_0$ から，

座標 ↓⊕ です。

$$C_3=-u_0$$

$$\frac{dx}{dt}=gt-u_0 \quad \cdots③$$

さらに t で積分

$$x = \frac{1}{2}gt^2 - u_0 t + C_4$$

t=0 で x=30 から、$C_4 = 30$

$$x = \frac{1}{2}gt^2 - u_0 t + 30 \quad \cdots ④$$

と、ぶっちゃけ、物理で習った公式で求まります、が!!
等加速度（等速度）といった簡単な問題だからです。
1時間 ず〜っと 60 km/h で車を走らせるなんてこと日常でないですよね？
瞬間の 速度・加速度が与えられても微積なら解けます。その練習をしているだけ。

ここで、25 m まで上がる
→ x=5 まで達する

← これ、u_0 を求めるための条件です。

このときの時刻を t_1 とすると、

③から $0 = g\cdot t_1 - u_0 \quad \therefore t_1 = \frac{u_0}{g}$

最高到達点なので速度はゼロ。

④に代入

$$5 = \frac{g}{2}\left(\frac{u_0}{g}\right)^2 - u_0\left(\frac{u_0}{g}\right) + 30$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_0^2}{2g} = 25$$

$$\Leftrightarrow u_0^2 = 50g$$

$$\therefore u_0 = 22.136$$

u_0 が求まりました。これで式が使えます。

④式は

$$x = \frac{1}{2}gt^2 - 22.136t + 30 \quad \cdots ④'$$

お分かりかと思いますが、今ここで使える式は
- ① コイン速度
- ② コイン変位
- ③ 小石速度
- ④' 小石変位　だけです。

式ができたら、やることは足し算・ひき算だけなので、ややこしく考えないで下さい。

（コイン & 小石）
同じ高さになる時刻を t_2 とする。
②と④'が同じになる時なので

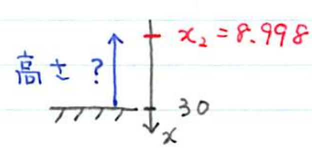
$$\frac{1}{2}gt_2^2 = \frac{1}{2}gt_2^2 - 22.136t_2 + 30$$

$$\therefore t_2 = \frac{30}{22.136} = \underline{1.355\ s}$$

このときの位置 x_2 は、②に代入

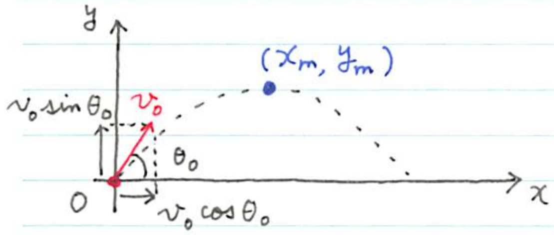
$$x_2 = \frac{1}{2}g \times 1.355^2 = 8.998$$

高さは $30 - 8.998 = \underline{21.00\ m}$



第5章　平面運動

例題 5.1



これも物理でやった斜方投射です。
公式でも求まりますが、積分の練習です。
もうできると思います。高速で解説を終えます。

積分であれば、
x 方向に加速度はなく、y 方向に加速度 $-g$
(力)　(重力 mg)

ということだけ分かっていれば黙々と、

$$\text{加速度} \xrightarrow[\text{積分}]{} \text{速度} \xrightarrow[\text{積分}]{} \text{変位}$$

を求めるだけです。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

t で積分

$$\frac{dx}{dt} = C_1 \quad , \quad \frac{dy}{dt} = -gt + C_2$$

$t=0$ で $dx/dt = v_0 \cos\theta_0$, $dy/dt = v_0 \sin\theta_0$ から

$$C_1 = v_0 \cos\theta_0 \quad , \quad C_2 = v_0 \sin\theta_0$$

よって、

$$\underline{\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\theta_0} \quad , \quad \underline{\frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\theta_0} \quad \cdots ①$$

← x 方向、y 方向 速度の一般式
時刻を代入したら、その値がピッタリ求まる式
C とか分からない数が無い式

さらに t で積分

$$x = v_0 \cos\theta_0 \cdot t + C_3 \, , \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta_0 \cdot t + C_4$$

$t=0$ で $x=0$, $y=0$ から

$$C_3 = 0 \quad , \quad C_4 = 0$$

よって

$$\underline{x = v_0 \cos\theta_0 \cdot t} \quad , \quad \underline{y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta_0 \cdot t} \cdots ②$$

← x 方向、y 方向 変位の一般式
以降 ①と② を足し引きするだけです。

経路は ②式から t を消去した

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\theta_0} + x \tan\theta_0 \,//$$

落下点は $y=0$ であり、

$$0 = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\theta_0} + x \tan\theta_0$$

$x \neq 0$ から　　　両辺 $\div x$ をした

$$\frac{gx}{2v_0 \cos^2\theta_0} = \tan\theta_0$$

$$\therefore x_n = \frac{2v_0^2 \cos^2\theta_0}{g} \cdot \frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0} = \frac{v_0^2 \cdot 2\sin\theta_0 \cos\theta_0}{g}$$

$$= \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} \,//$$

← $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

最高高度で $dy/dt = 0$ となるので、①式から　　↓以下，けっこう どうでも良い話です．

$$t = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g}$$

これを②式に代入

$$\begin{cases} x_m = \dfrac{v_0^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0}{g} = \underline{\dfrac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{2g}} \\ y_m = -\dfrac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{2g} + \dfrac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{g} = \underline{\dfrac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{2g}} \end{cases}$$

。x_m が最大となるのは　　　　サイン（コサイン）は中身が何であれ．
$\sin 2\theta_0 = 1$ のときであるので，　　$-1 \sim \sin \sim 1$ ですよね？

$$2\theta_0 = \frac{\pi}{2} \qquad \therefore \theta_0 = \underline{\frac{\pi}{4}}$$

（$\theta_0 = 45°$ のとき
もっともよく飛ぶ）

Q？
$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$ の公式
言えますか？

$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

このとき

$$x_m = \frac{v_0^2}{2g}$$

。y_m が最大となるのは $\sin\theta_0 = 1$ のとき
であるので，

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

このとき

$$y_m = \frac{v_0^2}{2g}$$

Q？
$\sin ax$，$\cos ax$ の積分できますか？

$-\frac{1}{a}\cos ax$，$\frac{1}{a}\sin ax$