Université de Montréal

DEVOIR 3

LAURENCE DUPUIS

NAM VU

BACCALAURÉAT EN MATHÉMATIQUES

FACULTÉ DES ARTS ET DES SCIENCES

TRAVAIL PRÉSENTÉ À PIERRE DUCHESNE

POUR LE COURS STT3220

MÉTHODES DE PRÉVISION

16 AVRIL 2023

Question 1

Considérons le modèle ARIMA suivant :

$$\left(1-\Phi B^{4}\right) X_{t}=(1+\theta B)\left(1+\Theta B^{4}\right) a_{t}, t \in \mathbb{Z},$$

(a) Identifier le modèle en utilisant la notation des modèles SARIMA, ARIMA$(p, d, q) \times(P, D, Q)_{s}$

Le modèle SARIMA est de la forme

$$\Phi\left(B^{s}\right) \phi(B)(1-B)^{d}\left(1-B^{s}\right)^{D} X_{t}=\theta_{0}+\Theta\left(B^{s}\right) \theta(B) a_{t}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\Phi\left(B^{s}\right)=1-\Phi B^{4}, \text { alors } P=1 \text { et } s=4 \\
&\phi(B)=1 \text { alors } p=0 \\
&(1-B)^{d}=1 \text { alors } d=0 \\
&\left(1-B^{s}\right)^{D}=1 \text { alors } D=0 \\
&\Theta\left(B^{s}\right)=1+\theta B^{4} \text { alors } Q=1 \\
&\theta(B)=1+\theta B \text { alors } q=1
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient le modèle suivant :

$$\operatorname{ARIMA}(0,0,1) \times(1,0,1)_{4}$$

(b) Donner des conditions sur θ et Θ afin que le modèle $\left\{X_{t}\right\}$ soit inversible. Trouver les poids- π de la représentation inversible pour $\left\{X_{t}\right\}$.

Le modèle $\left\{X_{t}\right\}$ est inversible si et seulement si $\theta(z) \neq 0$ pour chaque $|z|<1$ et $\Theta(z) \neq 0$ pour chaque $|z|<1$. On a donc l'équation

$$\theta(z)=1+\theta z=0$$

La racine de cette équation est $z=-\frac{1}{\theta}$. Si $\theta \neq 0$ on a $\left|-\frac{1}{\theta}\right|=\frac{1}{|\theta|}>1$. Alors on doit avoir $|\theta|<1$ pour que le modèle $\left\{X_{t}\right\}$ soit inversible.

Ensuite, on a l'équation suivante pour $\Theta(z)$:

$$\Theta(z)=1+\theta z^{4}=0$$

Les racines de cette équation sont $z_{1}=-\frac{1}{\Theta^{1/4}}$ et $z_{2}=\frac{1}{\Theta^{1/4}}$. Si $\Theta \neq 0$ on a $\left|\frac{1}{\Theta^{1/4}}\right|=\frac{1}{\left|\Theta^{1/4}\right|}>1 \Leftrightarrow\left|\Theta^{1/4}\right|<1$ pour z_{1} et z_{2}. Alors on doit avoir $|\Theta|<1$ pour que le modèle $\left\{X_{t}\right\}$ soit inversible.

On trouve ensuite les poids π

$$\begin{aligned}
\left(1-\Phi B^{4}\right) X_{t} &=(1+\theta B)\left(1+\Theta B^{4}\right) a_{t} \\
(1+\theta B)^{-1}\left(1-\Phi B^{4}\right) X_{t} &=(1+\theta B)^{-1}(1+\theta B)\left(1+\Theta B^{4}\right) a_{t} \\
(1+\theta B)^{-1}\left(1-\Phi B^{4}\right) X_{t} &=\left(1+\Theta B^{4}\right) a_{t} \\
\left(1+\Theta B^{4}\right)^{-1}(1+\theta B)^{-1}\left(1-\Phi B^{4}\right) X_{t} &=a_{t} \\
\Pi(B) X_{t} &=a_{t}
\end{aligned}$$

On a donc que

$$\Pi(B) = \frac{(1-\Phi B^4)}{(1+\theta B)(1+\Theta B^4)}$$

$$\left(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \cdots\right)\left(1+\theta B + \Theta B^4 + \theta\Theta B^5\right) = 1 - \Phi B^4$$

$$\left(1+\theta B + \Theta B^4 + \theta\Theta B^5 - \pi_1 B - \theta\pi_1 B^2 - \Theta\pi_1 B^5 - \theta\Theta\pi_1 B^6 - \pi_2 B^2 - \theta\pi_2 B^3 - \Theta\pi_2 B^6 - \theta\Theta\pi_2 B^7 \cdots\right) = 1 - \Phi B^4$$

$$\begin{array}{ll}
B^1 : -\pi_1 + \theta = 0 & \pi_1 = \theta \\
B^2 : -\pi_2 - \theta\pi_1 = 0 & \pi_2 = -\theta\pi_1 = -\theta^2 \\
B^3 : -\pi_3 - \theta\pi_2 = 0 & \pi_3 = -\theta\pi_2 = \theta^3 \\
B^4 : -\pi_4 - \theta\pi_3 + \Theta = -\Phi & \pi_4 = \Phi - \theta\pi_3 + \Theta = -\theta^4 + \Theta + \Phi \\
B^5 : -\pi_5 - \theta\pi_4 - \Theta\pi_1 + \theta\Theta = 0 & \pi_5 = -\theta\pi_4 - \Theta\pi_1 + \theta\Theta = \theta^5 + \theta\Theta - \Phi\theta \\
B^6 : -\pi_6 - \theta\pi_5 - \theta\Theta\pi_1 - \Theta\pi_2 = 0 & \pi_6 = -\theta\pi_5 - \theta\Theta\pi_1 - \Theta\pi_2 = -\theta^6 - \theta^2\Theta + \Phi\theta^2 \\
B^7 : -\pi_7 - \theta\pi_6 - \theta\Theta\pi_2 - \Theta\pi_3 = 0 & \pi_7 = \theta^7 + \theta^3\Theta - \Phi\theta^3
\end{array}$$

On trouve donc les poids π suivants :

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \theta \\
\pi_2 &= -\theta^2 \\
\pi_3 &= \theta^3 \\
\pi_4 &= -\theta^4 + \Theta + \Phi \\
\pi_j &= (-1)^{j+1}\left(\theta^j + \theta^{j-4}\Theta - \Phi\theta^{j-4}\right) \\
&= (-1)^{j+1}\left(\theta^j + \theta^{j-4}(\Theta - \Phi)\right) \text{ pour } j \geqslant 5
\end{aligned}$$

(c) Donner la condition sur Φ pour que le processus soit stationnaire. Trouvez la représentation comme un processus linéaire, en explicitant les poids ψ.

On a un processus stationnaire si et seulement si $\Phi(z) \neq 0$ pour chaque $|z| < 1$. On a l'équation suivante

$$\Phi(z) = 1 - \Phi z^4 = 0$$

Les racines de cette équation sont $z_1 = -\frac{1}{\Phi^{1/4}}$ et $z_2 = \frac{1}{\Phi^{1/4}}$. Si $\Phi \neq 0$ on a $\left|\frac{1}{\Phi^{1/4}}\right| = \frac{1}{|\Phi^{1/4}|} > 1 \Leftrightarrow \left|\Phi^{1/4}\right| < 1$. Alors on doit avoir $|\Phi| < 1$ pour que le processus soit stationnaire.

Ensuite, on trouve les poids ψ :

$$\begin{aligned}
\left(1 - \Phi B^4\right) X_t &= (1+\theta B)\left(1 + \Theta B^4\right) a_t \\
X_t &= \left(1 - \Phi B^4\right)^{-1}(1+\theta B)\left(1+\Theta B^4\right) a_t \\
X_t &= \Psi(B) a_t \\
\Psi(B) &= \frac{(1+\theta B)(1+\Theta B^4)}{(1-\Phi B^4)}
\end{aligned}$$

$$\left(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \ldots\right)\left(1 - \Phi B^4\right) = 1 + \theta B + \Theta B^4 + \theta\Theta B^5$$

$$\left(1 - \Phi B^4 + \psi_1 B - \Phi\psi_1 B^5 + \psi_2 B^2 - \Phi\psi_2 B^6 + \psi_3 B^3 - \Phi\psi_3 B^7 + \psi_4 B^4 - \Phi\psi_4 B^8 + \ldots\right) = 1 + \theta B + \Theta B^4 + \theta\Theta B^5$$

$$
\begin{array}{lll}
B^1: & \psi_1 = \theta & \\
B^2: & \psi_2 = 0 & \\
B^3: & \psi_3 = 0 & \\
B^4: & \psi_4 - \Phi = \Theta & \psi_4 = \Theta + \Phi \\
B^5: & \psi_5 - \Phi\psi_1 = \theta\Theta & \psi_5 = \theta\Theta + \Phi\psi_1 = \theta\Theta + \theta\Phi \\
B^6: & \psi_6 - \Phi\psi_2 = 0 & \psi_6 = 0 \\
B^7: & \psi_7 - \Phi\psi_3 = 0 & \psi_7 = 0 \\
B^8: & \psi_8 - \Phi\psi_4 = 0 & \psi_8 = \Phi\psi_4 = \Theta\Phi + \Phi^2 \\
B^9: & \psi_9 - \Phi\psi_5 = 0 & \psi_9 = \Phi\psi_5 = \theta\Theta\Phi + \theta\Phi^2 \\
B^{10}: & \psi_{10} - \Phi\psi_6 = 0 & \psi_{10} = 0 \\
B^{11}: & \psi_{11} - \Phi\psi_7 = 0 & \psi_{11} = 0 \\
B^{12}: & \psi_{12} - \Phi\psi_8 = 0 & \psi_{12} = \Phi\psi_8 = \Theta\Phi^2 + \Phi^3 \\
B^{13}: & \psi_{13} - \Phi\psi_9 = 0 & \psi_{13} = \Phi\psi_9 = \theta\Theta\Phi^2 + \theta\Phi^3
\end{array}
$$

On trouve donc les poids ψ suivant

$$
\begin{aligned}
&\psi_1 = \theta \\
&\psi_{4_j} = \Phi^{j-1}(\Theta + \Phi) \text{ pour } j \geqslant 1 \\
&\psi_{\psi_{4j+1}} = \theta\Phi^{j-1}(\Theta + \Phi) \text{ pour } j \geqslant 1 \\
&\psi_j = 0 \quad \text{sinon.}
\end{aligned}
$$

Question 2

Déterminer si les processus ARMA suivants sont stationnaires et inversibles. Dans chaque cas $\{a_t\}$ est un bruit blanc.

$$\text{ARMA} : \phi(B)X_t = \theta(B)a_t$$

On a un processus stationnaire si et seulement si $\phi(z) \neq 0$ pour chaque $|z| \leqslant 1$ et inversible si et seulement si $\theta(z) \neq 0$ pour chaque $|z| \leqslant 1$.

(a) $X_t = 0.80X_{t-1} - 0.15X_{t-2} + a_t - 0.30a_{t-1}$.

$$X_t - 0,80X_{t-1} + 0,15X_{t-2} = a_t - 0,30a_{t-1}$$

La solution de $\phi(z) = 1-0,80z+0,15z^2 = 0$ est $z_1 = 10/3$ et $z_2 = 2$ comme $|z_1| > 1$ et $|z_2| > 1$, alors ce processus est stationnaire. La solution de $\theta(z) = 1-0,30z = 0$ est $z = 10/3$, $\theta(z) = 0$, alors ce processus est non inversible.

(b) $X_t = X_{t-1} - 0.50X_{t-2} + a_t - a_{t-1}$.

$$X_t - X_{t-1} + 0,50X_{t-2} = a_t - a_{t-1}$$

La solution de $\phi(z) = 1 - z + 0,50z^2 = 0$ est $z_1 = z_2 = 1$. Comme $\phi(z_1) = \phi(z_2) = 0,5 \neq 0$, alors ce processus est stationnaire. La solution de $\theta(z) = 1 - z = 0$ est $z = 1$, $\theta(z) = 0$, alors ce processus est non inversible.

(c) $X_t + 1.6X_{t-1} + 0.64X_{t-2} = a_t$.

$$X_t + 1,6X_{t-1} + 0,64X_{t-2} = a_t$$

La solution de $\phi(z) = 1 + 1,6z + 0,64z^2 = 0$ est $z = -1,25$ comme $|z| > 1$, alors ce processus est stationnaire. Aussi $\theta(z) = 1 \neq 0$, alors ce processus est inversible.

(d) $X_t - 0.40X_{t-1} - 0.45X_{t-2} = a_t$.

$$X_t - 0,40X_{t-1} - 0,45X_{t-2} = a_t$$

La solution de $\phi(z) = 1 - 0,40z - 0,45z^2 = 0$ est $z_1 = -2$ et $z_2 = 10/9$ comme $|z_1| > 1$ et $|z_2| > 1$, alors ce processus est stationnaire. Aussi, $\theta(z) = 1 \neq 0$, alors ce processus est inversible.

(e) $X_t + 1.6X_{t-1} = a_t - 0.4a_{t-1} + 0.04a_{t-2}$.

$$X_t + 1,6X_{t-1} = a_t - 0,4a_{t-1} + 0,04a_{t-2}$$

La solution de $\phi(z) = 1 + 1,6z = 0$ est $z = -5/8 = -0.625$ et $\phi(z) = 0$, alors ce processus est non stationnaire. La solution de $\theta(z) = 1 - 0,4z + 0,04z^2 = 0$ est $z_1 = z_2 = 5$ comme $|z_1| > 1$ et $|z_2| > 1$, alors ce processus est inversible.

(f) $X_t - 1.20X_{t-1} + 0.85X_{t-2} = a_t$.

$$X_t - 1,20X_{t-1} + 0,85X_{t-2} = a_t$$

La solution de $\phi(z) = 1 - 1,20z + 0,85z^2 = 0$ est $z_1 = z_2 = 0,705882352$ et $\phi(z) \neq 0$, alors ce processus est stationnaire. Aussi, $\theta(z) = 1 \neq 0$ alors ce processus est inversible.

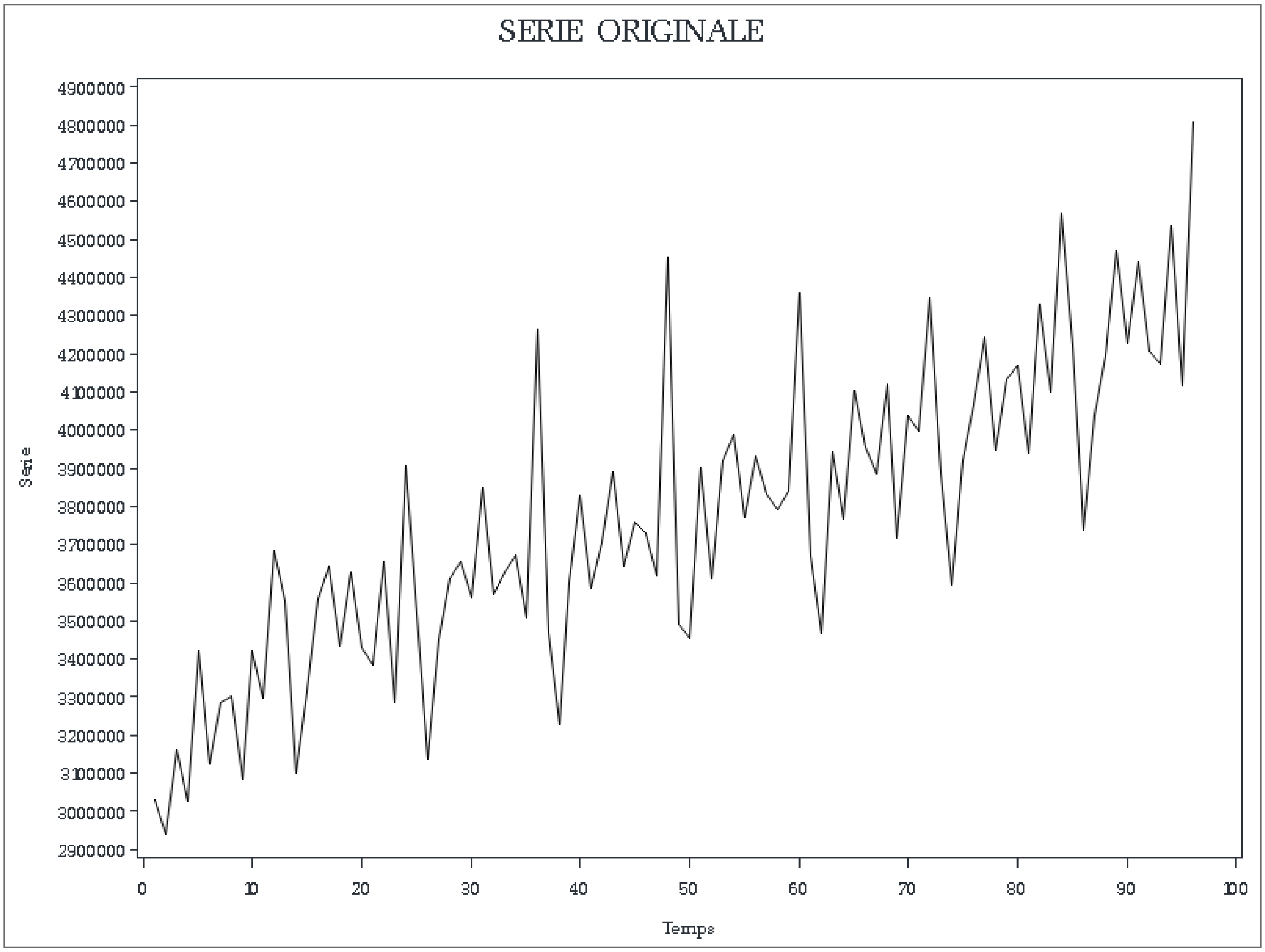
Question 3

Dans ce projet de fin de session, considérer une série chronologique saisonnière provenant de CANSIM, de votre choix. Vous devez clairement indiquer le numéro d'identification de la série. Considérer l'ajustement de cette série avec la méthodologie des modèles ARIMA. Votre série, transformée pour devenir stationnaire, ne doit pas se réduire à un bruit blanc pour éviter les trivialités. Procédez exactement comme dans les analyses précédentes, en considérant un maximum de 112 données, et tronquer les 12 plus récentes. Dans le cas des données annuelles, tronquer par exemple la dernière année.

Représenter graphiquement votre série chronologique. Représenter également graphiquement les prévisions et les bornes de prévision. Fournissez les sorties et les programmes SAS en annexe.

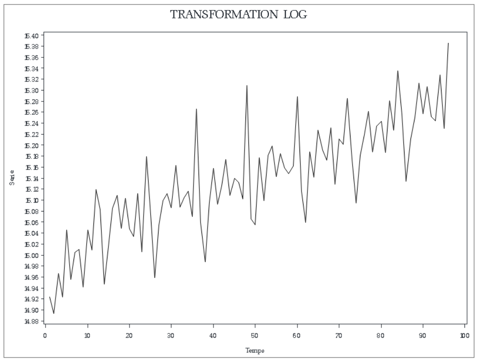
RAPPORT - SÉRIE CHRONOLOGIQUE

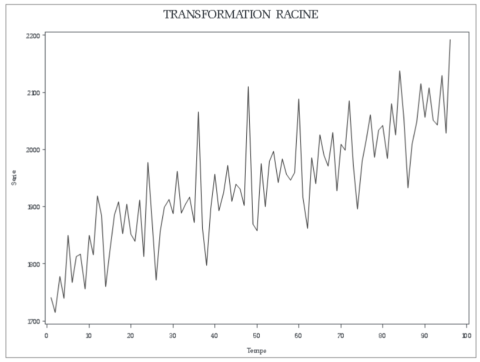
CANSIM - Jeu de données : **V822788** / de **2008-01-01** à **2016-12-31**

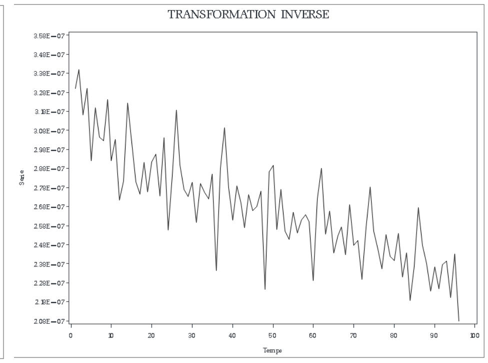


(a) Est-ce que la série doit être transformée ?

1. D'abord, on va vérifier s'il faut transformer le modèle pour que la variance soit stable.



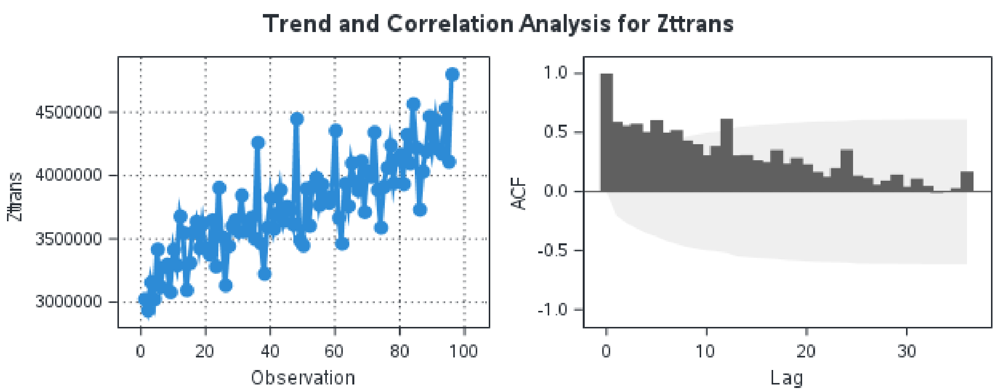




On constate que, selon le graphique de la série originale, la variance est assez stable par rapport au temps t. De plus, lorsqu'on essaie d'appliquer les transformations (log, racine, inverse), il y a seulement l'échelle des valeurs qui change, mais pas la variabilité des variances. **Alors on n'a pas besoin de transformer la série pour que la variance soit stable !**

$$Z_{ttrans} = Z_t$$

2. Est-ce que la série est stationnaire ?

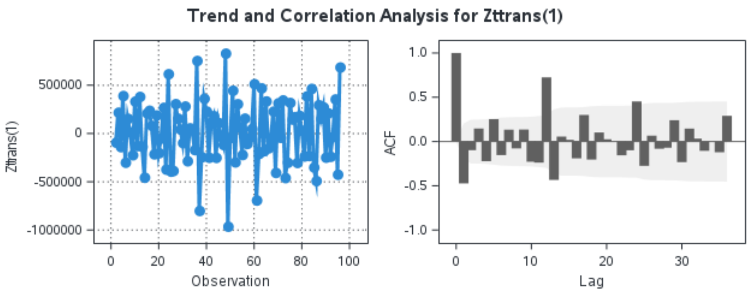


Selon les graphiques, on constate que la moyenne Z_{ttrans} est dépendante du temps t, elle a tendance à augmenter avec le temps. De plus, avec le graphique de la fonction d'autocorrélation (ACF), on voit que les r(k) descendent plus rapidement qu'une tendance linéaire mais pas aussi rapidement qu'une tendance exponentielle. **Alors, on conclut que la série n'est pas stationnaire et on a besoin de transformer en utilisant le degré de différentiation.**

(b) Choix du degré de différentiation.

À cette étape, on essaie 2 valeur de différentiation **d = 1** et **d = 12**. La raison derrière le choix de d = 12 vient du fait qu'on constate que la série semble être saisonnière à chaque 12 mois.

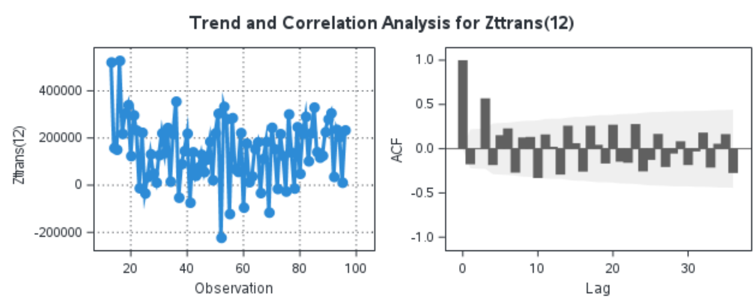
1. <u>Cas 1 : d = 1</u>



Autocorrelation Check for White Noise									
To Lag	Chi-Square	DF	Pr > ChiSq	Autocorrelations					
6	39.04	6	<.0001	-0.473	-0.098	0.147	-0.223	0.252	-0.154
12	113.74	12	<.0001	0.134	-0.078	0.135	-0.229	-0.239	0.725
18	155.15	18	<.0001	-0.434	0.056	0.019	-0.190	0.300	-0.204
24	187.39	24	<.0001	0.102	0.025	-0.002	-0.156	-0.099	0.453
30	215.31	30	<.0001	-0.275	0.066	-0.082	-0.070	0.241	-0.233
36	235.61	36	<.0001	0.146	0.032	-0.105	-0.003	-0.121	0.290

Pour la transformation avec la différenciation d = 1, on voit que la moyenne semble être indépendante du temps. Aussi, pour le graphique de ACF, on remarque que les r(k) décroissent vers 0 de façon exponentielle. Ici, on voit aussi que la valeur de r(12) est très élevée, et donc 12 pourrait être un candidat pour le paramètre q du modèle ARIMA. Pour le test Bruit Blanc, jusqu'au délai 36, on rejette l'hypothèse que c'est du bruit blanc (valeur-p très significative), alors la série transformée n'est pas un processus stochastique (Bruit Blanc). Elle est donc conforme pour modéliser un modèle.

2. <u>Cas 2 : d = 12</u>



Autocorrelation Check for White Noise									
To Lag	Chi-Square	DF	Pr > ChiSq	Autocorrelations					
6	41.68	6	<.0001	-0.176	0.004	0.569	-0.185	0.153	0.229
12	65.16	12	<.0001	-0.271	0.127	0.133	-0.332	0.161	0.022
18	95.85	18	<.0001	-0.293	0.260	0.062	-0.259	0.260	0.044
24	129.79	24	<.0001	-0.167	0.271	-0.147	-0.159	0.278	-0.256
30	146.53	30	<.0001	-0.126	0.167	-0.207	-0.055	0.084	-0.185
36	173.56	36	<.0001	-0.031	0.182	-0.214	0.056	0.165	-0.275

Pour la transformation avec la différenciation d = 12, on voit que la moyenne semble être indépendante du temps. Aussi, pour le graphique de ACF, on remarque que les r(k) décroissent vers 0 de façon exponentielle. Pour le test Bruit Blanc, jusqu'au délai 36, on rejette l'hypothèse que c'est du bruit blanc (valeur-p très significative), alors la série transformée n'est pas un processus stochastique (Bruit Blanc) et alors elle est conforme pour modéliser un modèle.

Pour la modélisation, on essaie 3 modèles différents et on poursuit pour l'analyse des questions c), d) et e) selon chaque modèle :

(a) **Modèle 1** : d = 1, p = (12), q = (12)

(b) **Modèle 2** : d = 12, p = (3), q = (1)(12)

(c) **Modèle 3** : d = 12, p = (3), q = (1,12)

Pour notre projet, on définit $\alpha = 5\%$

Modèle 1 : d = 1, p = (12), q = (12)

Model for variable Zt	
Estimated Mean	29308.99
Period(s) of Differencing	1

Autoregressive Factors	
Factor 1:	1 - 0.81764 B**(12)

Moving Average Factors	
Factor 1:	1 + 0.3196 B**(12)

(c) Statistiques diagnostics et autres diagnostics (tests d'ajustement, ACF et PACF des résidus).

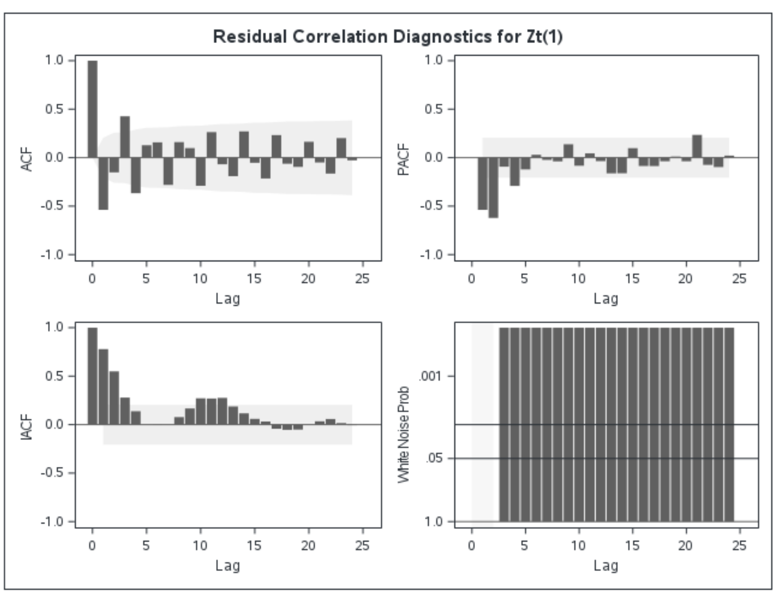
1. Les estimateurs :

Unconditional Least Squares Estimation

Parameter	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > |t|	Lag
MU	29309.0	93788.5	0.31	0.7554	0
MA1,1	-0.31960	0.11734	-2.72	0.0077	12
AR1,1	0.81764	0.08293	9.86	<.0001	12

Avec $\alpha = 0.05$, on constate que les estimateurs de ϕ_{12} et θ_{12} sont significatifs. Leurs valeur-p correspondantes est de 0.0077 et <0.0001. Ce qui est inférieur à α.

2. Les résidus :



Autocorrelation Check of Residuals									
To Lag	Chi-Square	DF	Pr > ChiSq	Autocorrelations					
6	66.73	4	<.0001	-0.538	-0.151	0.427	-0.366	0.128	0.158
12	95.99	10	<.0001	-0.281	0.161	0.099	-0.290	0.264	-0.068
18	120.96	16	<.0001	-0.191	0.271	-0.053	-0.214	0.232	-0.062
24	134.36	22	<.0001	-0.095	0.164	-0.049	-0.164	0.202	-0.028

Pour les résidus, on voit que le test de bruit blanc des résidus est rejetté, ce qui veut dire qu'il y a de la corrélation entre les résidus ! Et comme on a vu dans ce cas, **il y a un risque que le modèle soit invalide**. Aussi, si on regarde les graphiques ACF et PACF, on voit qu'il y a plusieurs valeurs qui ont dépassé l'intervalle de confiance, donc ce n'est pas un bon signe pour un modèle.

(d) Évaluation de la performance prévisionnelle de votre modèle, calcul des intervalles de prévision.

Comme le modèle semble invalide, alors on va passer les étapes de prévision et d'intervalles de confiance de prévision.

Modèle 2 : d = 12, p = (3), q = (1)(12)

Pour ce modèle, on considère l'effet saisonnier et on essaie un modèle SARIMA.

Model for variable Zt	
Estimated Mean	136262.2
Period(s) of Differencing	12

Autoregressive Factors	
Factor 1:	1 - 0.67478 B**(3)

Moving Average Factors	
Factor 1:	1 - 0.25129 B**(1)
Factor 2:	1 - 0.99999 B**(12)

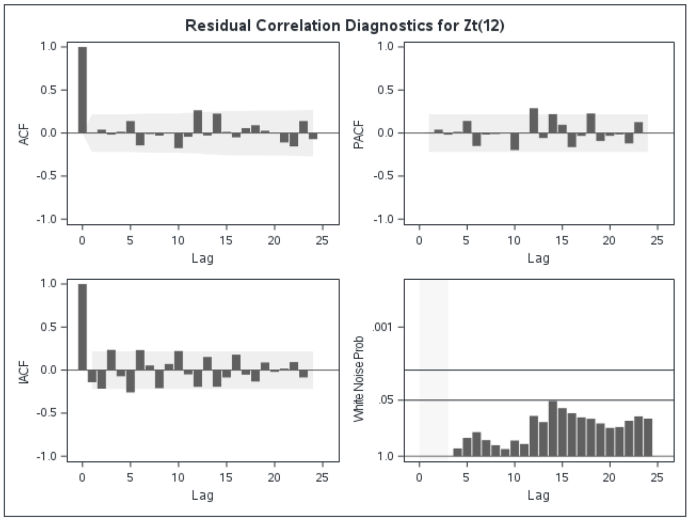
(c) Statistiques diagnostics et autres diagnostics (tests d'ajustement, ACF et PACF des résidus).

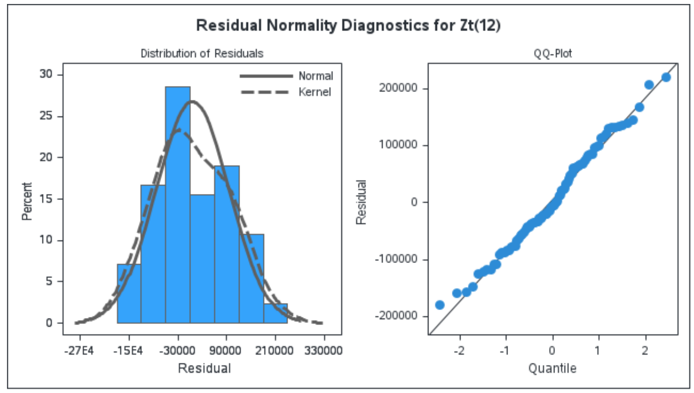
1. Les estimateurs :

Unconditional Least Squares Estimation					
Parameter	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > |t|	Lag
MU	136262.2	7924.4	17.20	<.0001	0
MA1,1	0.25129	0.10472	2.40	0.0187	1
MA2,1	0.99999	0.22411	4.46	<.0001	12
AR1,1	0.67478	0.09859	6.84	<.0001	3

Avec $\alpha = 0.05$, on constate que les estimateurs de ϕ_3, θ_1 et Θ_{12} sont significatifs. Leurs valeur-p correspondantes est de 0.0187, <0.0001 et <0.0001. Ce qui est inférieur à α.

2. Les résidus :



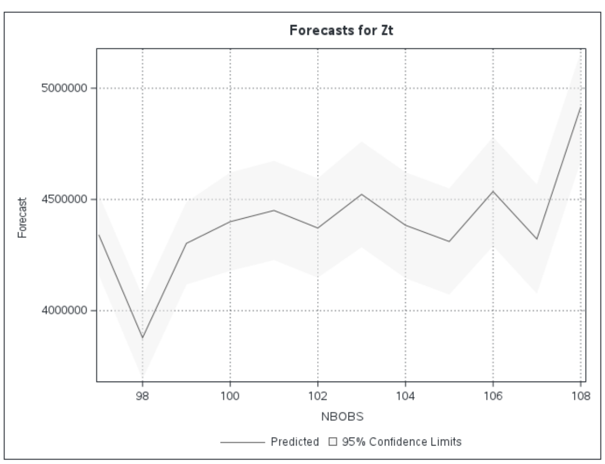


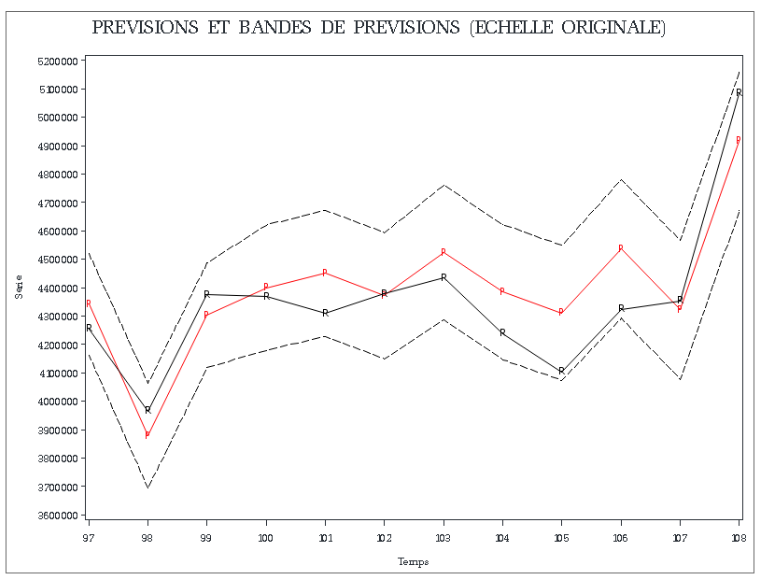
Autocorrelation Check of Residuals									
To Lag	Chi-Square	DF	Pr > ChiSq	Autocorrelations					
6	3.91	3	0.2710	0.010	0.041	-0.018	0.015	0.139	-0.145
12	14.20	9	0.1154	-0.015	-0.034	0.003	-0.178	-0.045	0.262
18	20.89	15	0.1405	-0.030	0.223	0.011	-0.053	0.054	0.088
24	28.30	21	0.1318	0.023	-0.010	-0.115	-0.160	0.135	-0.075

Pour les tests des résidus, on constate qu'on ne rejette pas l'hypothèse de bruit blanc des résidus, alors il est possible qu'il n'y ai pas de corrélation entre eux. Aussi, si on regarde les graphiques ACF et PACF, on voit que les valeurs se retrouvent dans la zone de confiance. Seulement au délai 12, r(12) est à la limite, ce qui veut dire qu'on a quand même une forte corrélation entre les temps 12 et 1.

Donc, avec des diagnostics des estimateurs et des résidus, on est assez satisfait avec notre modèle et on va essayer de vérifier la performance de la prévision.

(d) Évaluation de la performance prévisionnelle de votre modèle





PREVISIONS ET BANDES DE PREVISIONS (ECHELLE ORIGINALE)

MSE
1.563E10

Pour le graphique d'évaluation de la performance (comparaison entre les vraies valeurs et les valeurs de prévision pour les 12 prochains mois), la ligne rouge signifie les valeurs de prévision. Et on peut analyser la performance avec 2 aspects :

1. **La tendance** : Ici, on constate que notre prévision exprime la bonne tendance. Elle capte à peu près la même tendance que les vraies valeurs. Et pour les séries chronologiques, la tendance est un élément important, et donc nous sommes satisfait de notre modèle par rapport à cet aspect !
2. **Précision des prévisions** : En regardant le graphique, on constate que les valeurs de prévision sont assez proches en les comparant aux vraies valeurs, ce qui veut dire que la performance est assez bonne !

(e) Calcul des intervalles de prévision.

Forecasts for variable Zt				
Obs	**Forecast**	**Std Error**	**95% Confidence Limits**	
97	4341516.2	91271.87	4162626.6	4520405.8
98	3878417.3	94109.59	3693965.9	4062868.8
99	4302612.6	94109.59	4118161.2	4487064.0
100	4400118.7	112471	4179679.2	4620558.3
101	4450612.8	113531	4228095.9	4673129.7
102	4371641.1	113531	4149124.2	4594158.0
103	4522968.0	120899	4286011.2	4759924.9
104	4384223.0	121349	4146383.8	4622062.3
105	4311042.5	121349	4073203.3	4548881.8
106	4535859.6	124547	4291752.0	4779967.2
107	4322113.7	124746	4077615.7	4566611.8
108	4915049.8	124746	4670551.7	5159547.8

Modèle 3 : d = 12, p = (3), q = (1,12)

Model for variable Zt	
Estimated Mean	136553.4
Period(s) of Differencing	12

Autoregressive Factors	
Factor 1:	1 - 0.61889 B**(3)

Moving Average Factors	
Factor 1:	1 - 0.26059 B**(1) - 0.7394 B**(12)

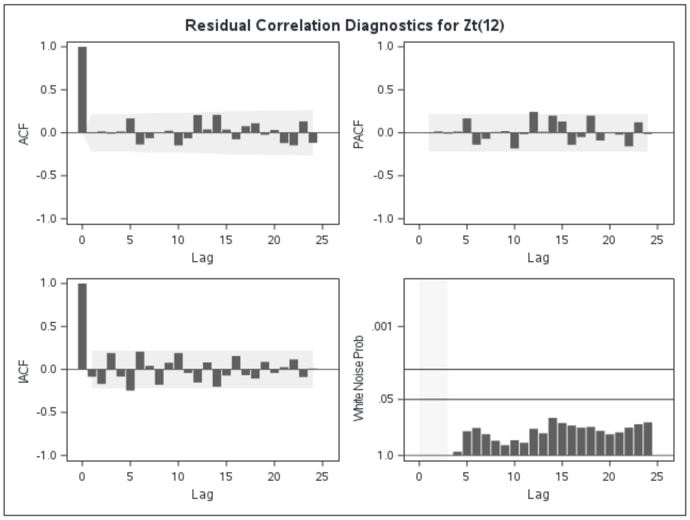
(c) Statistiques diagnostics et autres diagnostics (tests d'ajustement, ACF et PACF des résidus).

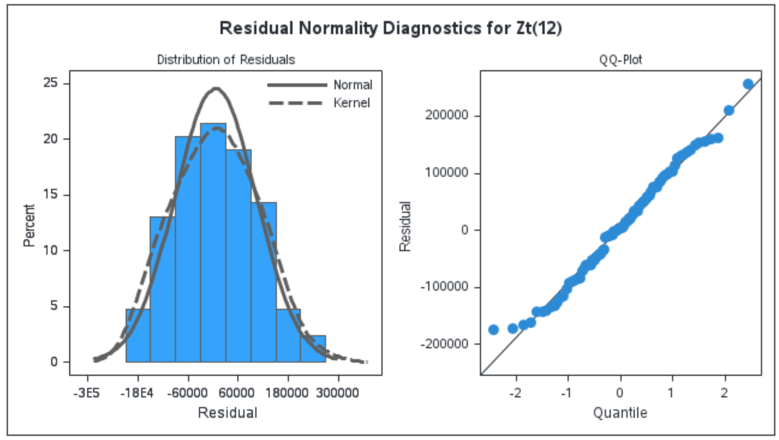
1. Les estimateurs :

Unconditional Least Squares Estimation					
Parameter	**Estimate**	**Standard Error**	**t Value**	**Approx Pr > |t|**	**Lag**
MU	136553.4	7714.7	17.70	<.0001	0
MA1,1	0.26059	0.11218	2.32	0.0227	1
MA1,2	0.73940	0.17197	4.30	<.0001	12
AR1,1	0.61889	0.09933	6.23	<.0001	3

Avec $\alpha = 0.05$, on constate que les estimateurs de ϕ_3, θ_1 et θ_{12} sont significatifs. Leurs valeur-p correspondantes est de 0.0227, <0.0001 et <0.0001. Ce qui est inférieur à α.

2. Les résidus :



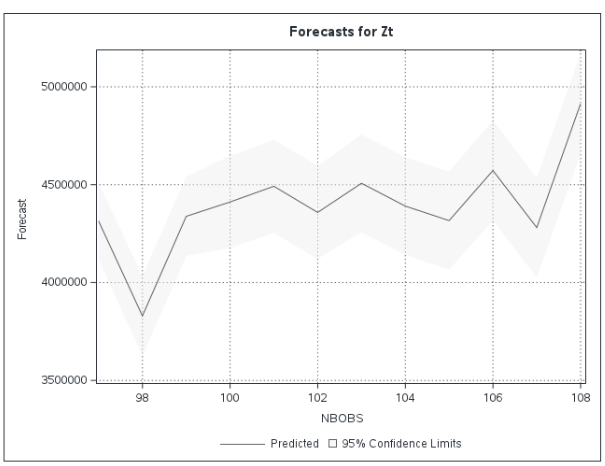


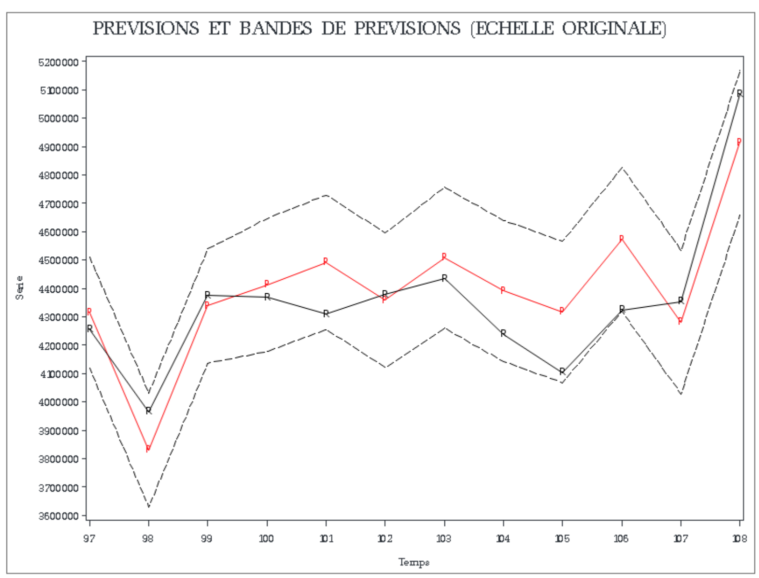
Autocorrelation Check of Residuals									
To Lag	**Chi-Square**	**DF**	**Pr > ChiSq**	**Autocorrelations**					
6	4.33	3	0.2275	-0.004	0.017	-0.010	0.014	0.166	-0.138
12	11.56	9	0.2391	-0.067	-0.005	0.020	-0.150	-0.065	0.204
18	18.72	15	0.2267	0.037	0.206	0.034	-0.079	0.074	0.107
24	27.09	21	0.1680	-0.027	0.027	-0.126	-0.151	0.128	-0.122

Pour les tests des résidus, on constate qu'on ne rejette pas l'hypothèse de bruit blanc des résidus, alors il est possible qu'il n'y ai pas de corrélation entre eux. Aussi, si on regarde les graphiques ACF et PACF, on voit que les valeurs se retrouvent dans la zone de confiance. Aussi, la distribution des résidus semble suivre une distribution normale.

Donc, avec les diagnostics des estimateurs et des résidus, on est satisfait avec notre 3-ième modèle et on va essayer également de vérifier la performance de la prévision.

(d) Évaluation de la performance prévisionnelle de votre modèle





PREVISIONS ET BANDES DE PREVISIONS (ECHELLE ORIGINALE)

MSE
1.905E10

Pour le graphique d'évaluation de la performance (comparaison entre les vraies valeurs et les valeurs de prévision pour les 12 prochains mois), la ligne rouge signifie les valeurs de prévision. Et on peut analyser la performance avec 2 aspects :

1. **La tendance** : On constate aussi que notre prévision exprime la bonne tendance. Elle peut capter à peu près la même tendance que celle des vraies valeurs.
2. **Précision des prévisions** : En regardant le graphique, on constate que les valeurs de prévisions sont assez proches en les comparant aux vraies valeurs, ce qui veut dire que la performance est assez bonne !

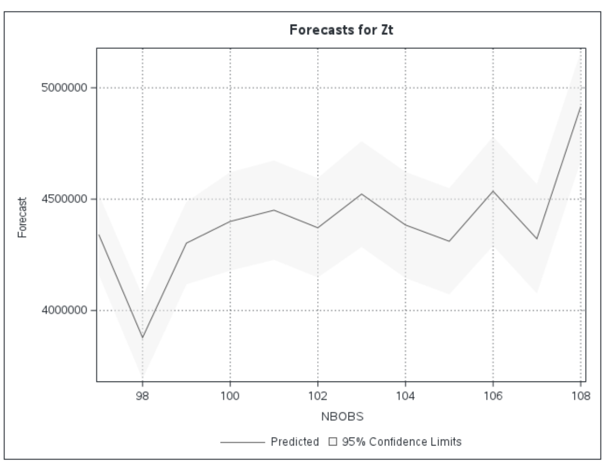
(e) Calcul des intervalles de prévision.

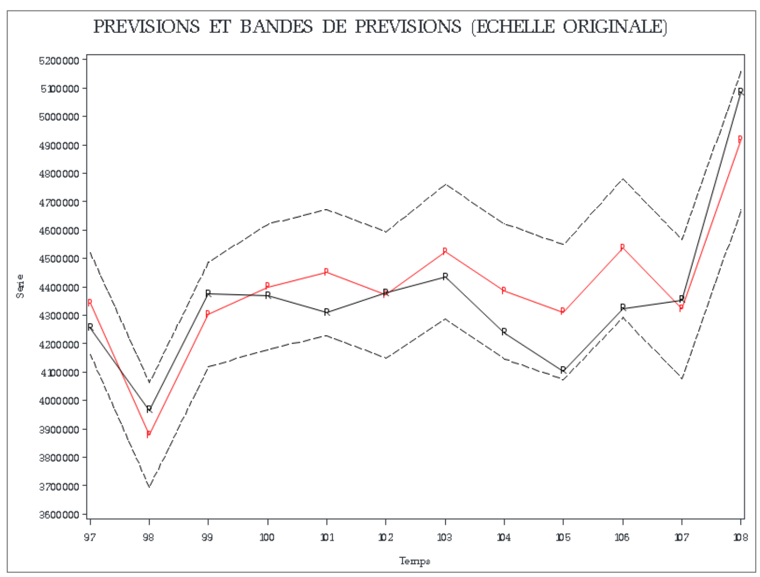
Forecasts for variable Zt

Obs	Forecast	Std Error	95% Confidence Limits	
97	4314575.9	99438.59	4119679.9	4509472.0
98	3829821.6	102759	3628416.8	4031226.3
99	4338392.5	102759	4136987.7	4539797.2
100	4411748.4	119778	4176987.5	4646509.4
101	4492011.8	120847	4255156.0	4728867.6
102	4358473.4	120847	4121617.6	4595329.1
103	4507441.5	126707	4259100.6	4755782.3
104	4390785.9	127095	4141684.4	4639887.4
105	4316684.8	127095	4067583.2	4565786.3
106	4572656.3	129262	4319306.8	4826005.8
107	4281117.7	129408	4027482.3	4534753.1
108	4913623.3	129408	4659987.9	5167258.7

Comparaison de la performance du modèle 2 et du modèle 3

Modèle 2

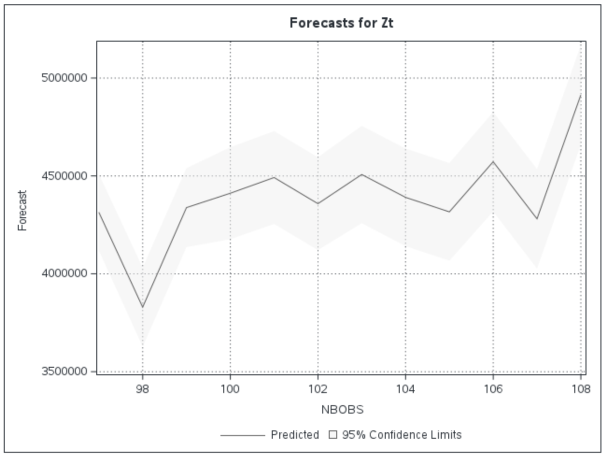


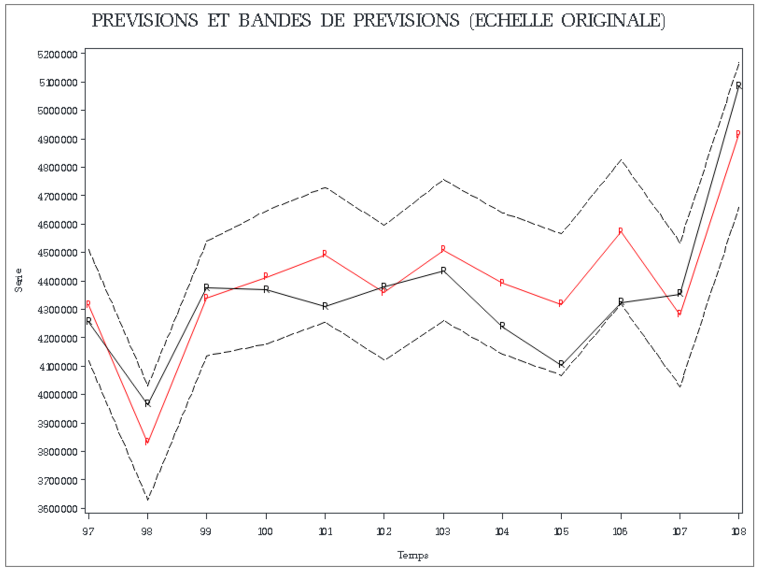


PREVISIONS ET BANDES DE PREVISIONS (ECHELLE ORIGINALE)

MSE
1.563E10

Modèle 3





PREVISIONS ET BANDES DE PREVISIONS (ECHELLE ORIGINALE)

MSE
1.905E10

Après avoir comparé les modèles 2 et 3, on remarque que le modèle 2 a une plus petite valeur de MSE pour les prévisions, on conclut donc que le modèle 2 est notre meilleur modèle pour ce projet.