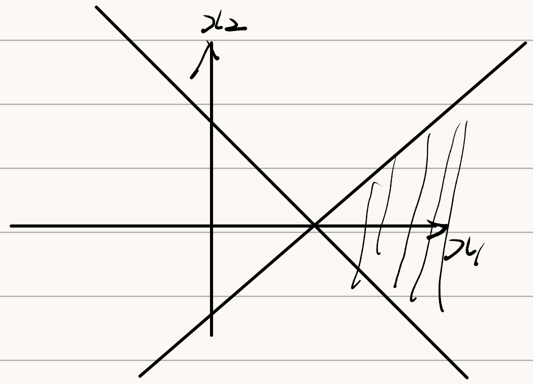
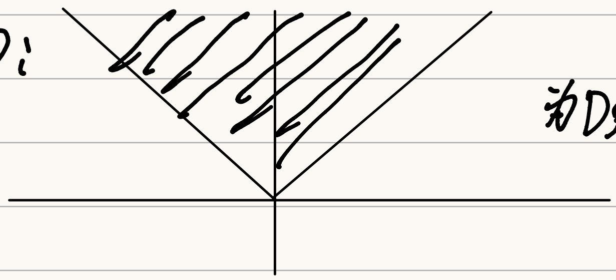
1.解 (1) D:



为D所示集合
∴D为凸集

(2) D:



为D所示集合
∴D为凸集

(3) 为x_1与x_2组成的二维空间中，D为一个圆
∴显然，是凸集

2.证明 对于D中$\forall a,b$，满足$ab\subset D$
$A(D)$有 $a'=Aa$, $b'=Ab$, $\forall \alpha\in[0,1]$
有 $Aa+\alpha(Ab-Aa)$
$=A(a+\alpha(b-a))\subset A(D)$
∴$A(D)$为凸集

3.设A_1,A_2为凸集，
$\forall a,b\in(A_1\cap A_2)$
显然 $a,b\in A_1$ 且 $a,b\in A_2$
则有$\forall\alpha\in[0,1]$，$a+\alpha(b-a)\in A_1$且A_2，即$A_1\cap A_2$
∴$A_1\cap A_2$为凸集
当$A_1\cap A_2=\varnothing$，$\forall a\in A_1$，$\forall b\in A_2$
则$\forall\alpha\in[0,1]$，有 $a+\alpha(b-a)\in A_1\cap A_2=\varnothing$ 即不存在
但 $a,b\in A_1\cup A_2$ ∴$A_1\cup A_2$不总是凸集

4.(1) $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 3x_2^2+4x_2 e^{x_1x_2} \\ 6x_1x_2+4x_1 e^{x_1x_2} \end{pmatrix}$

$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 4x_2x_2 e^{x_1x_2} & 6x_2+4e^{x_1x_2}(1+x_1x_2) \\ 6x_2+4e^{x_1x_2}(1+x_1x_2) & 6x_1+4x_1^2 e^{x_1x_2} \end{pmatrix}$

(2) $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_2 x_1^{x_2-1}+x_1^{-1} \\ x_1^{x_2}\ln x_1 + x_2^{-1} \end{pmatrix}$

$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} x_2(x_2-1)x_1^{x_2-2}-x_1^{-2} & x_1^{x_2-1}+x_2x_1^{x_2-1}\ln x_1 \\ x_1^{x_2-1}+x_2x_1^{x_2-1}\ln x_1 & x_1^{x_2}(\ln x_1)^2-x_2^{-2} \end{pmatrix}$

(3) $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} (x_1+1)e^{x_1+x_2+x_3} \\ x_1 e^{x_1+x_2+x_3} \\ x_1 e^{x_1+x_2+x_3} \end{pmatrix}$ $\dfrac{\nabla^2 f(x)}{e^{x_1+x_2+x_3}} = \begin{pmatrix} x_1+2 & x_1+1 & x_1+1 \\ x_1+1 & x_1 & x_1 \\ x_1+1 & x_1 & x_1 \end{pmatrix}$

(4) $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{2x_1+x_2}{x_1^2+x_1x_2+x_2^2} \\ \dfrac{2x_2+x_1}{x_1^2+x_1x_2+x_2^2} \end{pmatrix}$ $\nabla^2 f(x)\cdot(x_1^2+x_2x_1+x_2^2)^2 = \begin{pmatrix} -2(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+3x_2^2 & -(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)-3x_1x_2 \\ -(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)-3x_1x_2 & -2(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+3x_1^2 \end{pmatrix}$

(5) $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 1+x_2 e^{x_1x_2} \\ 2x_2+x_1 e^{x_1x_2} \end{pmatrix}$ $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} x_2^2 e^{x_1x_2} & (1+x_1x_2)e^{x_1x_2} \\ (1+x_1x_2)e^{x_1x_2} & 2+x_1^2 e^{x_1x_2} \end{pmatrix}$

5.(1) $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1+2x_2-10 \\ 2x_1+5 \end{pmatrix}$ $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(\nabla^2 f(x)-\lambda I) = (2-\lambda)(-\lambda)-4 = \lambda^2-2\lambda-4=0$

$\Rightarrow \lambda = 1\pm\sqrt{5}$

$\therefore f(x)$ 非凸非凹

(2) $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}$ $\det(\nabla^2 f(x)-\lambda I) = (\lambda+10)(\lambda+2)-4=0$

$\Rightarrow \lambda = -6\pm 2\sqrt{5}$

$\therefore f(x)$ 非凸非凹

(3) $\nabla^2 f(x) = 6(4-x)$

∴ 当 $x<4$, $\nabla^2 f(x) \geq 0$, $f(x)$ 为凸函数

(4) $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} x_1-2 & x_1-1 \\ x_1-1 & x_1 \end{pmatrix} \cdot e^{-(x_1+x_2)}$

$\det(\nabla^2 f(x) - \lambda I)$

$= e^{-(x_1+x_2)} \left[(x_1-2-\lambda)(x_1-\lambda) - (x_1-1)^2 \right]$

$= e^{-[x_1+x_2]} \left(x_1^2 - (2+2\lambda)x_1 + \lambda^2 + 2\lambda - x_1^2 + 2x_1 - 1 \right) = 0$

∴ $-2\lambda x_1 + \lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$

$\lambda^2 + (2-2x_1)\lambda + (2-2x_1)^2 = 1 + 4x_1^2 - 8x_1 + 4$

$\lambda = \pm\sqrt{1+(2x-2)^2} - 2 + 2x_1 \geq 0$

∴ $x_1 \geq 2$ 时, $f(x)$ 为凸函数

$x \in (0,2)$ 时, $f(x)$ 非凸非凹

$x < 0$ 时, $f(x)$ 为凹函数

6. (1) 对于 $f(x)$

$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 显然 $\lambda = 4, 2, 2$ ∴ $f(x)$ 为凸函数

条件 ① $g(x) = x_1^2 - x_2^2 + 4$ 为圆 ∴ 为凸集

② 为线性组合 ∴ 为凸集

③ 为线性组合 ∴ 为凸集

∴ (1) 为凸规划问题

(2) $f(x) = x_1 + 3x_2$ 为线性组合 ∴ 为凸函数

条件 $x_1^2 + x_2^2 \leq 9$ 为圆域 ∴ 为凸集

$x_2 \geq 0$ 为线性组合 ∴ 为凸集

∴ 综上, (2) 为凸规划

(3) $\nabla^2 f(x)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ 显然，$\lambda=2,2$ ∴为凸函数

条件 $x_1^2+x_2=5$ 不为仿射函数

∴ (3)不是凸规划

7. $\nabla f(x)=\begin{pmatrix}x_1^2-4\\ x_2^2-4x_2\end{pmatrix}$ $\nabla^2 f(x)=\begin{pmatrix}2x_1 & 0\\ 0 & 2x_2-4\end{pmatrix}$

$\det(\nabla^2 f(x)-\lambda I)=2(2x_1-\lambda)(x_2-2-\lambda)=0$

则 $\begin{cases}2x_1=\lambda>0\\ \text{or}\\ x_2-2=\lambda>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1>0 & \text{case1}\\ \text{or} & \\ x_2>2 & \text{case2}\end{cases}$

当 $\nabla f(x)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

∴在 case1 中有点 $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ 符合，它们是局部极小点（这时，$\lambda=1>0$）

case2 中有点 $\begin{pmatrix}2 & -2\\ 4 & 4\end{pmatrix}$ 符合，它们是局部极小点.（这时，$\lambda=2>0$）

∴局部最小点为 $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$