人工智能数学基础作业与实验报告

学　　号：20221001555

班　　号：075223

姓　　名：叶正楠

教　　师：曾三友

成　　绩：

中国地质大学(武汉)机械与电子信息学院

2024 年 6 月

Date: Page: Weather:

1. 解：要想判断两个向量是否为实内积空间中的内积，需满足以下四个条件

①对称性：内积应该是对称的，即对于任意向量x和y，有$\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$

②齐次性：内积应该是线性的，$\langle ax,y\rangle=a\langle x,y\rangle$

③可加性：$\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$

④正定性：$\langle x,x\rangle=0$

7. 若 $A^H=A^T=A$，则A为Hermite矩阵

$\because A+A^H=(a_{ij}+a_{ji})_{n\times n}$

$(A+A^H)^H=(\bar{a}_{ji}+a_{ij})_{n\times n}=A+A^H$

若$A+A^H$为Hermite矩阵

$\because (A\cdot A^H)=(A^H)^H A^H=AA^H$

$\therefore A\cdot A^H$为Hermite矩阵

$(A^HA)^H=A^H(A^H)^H=A^H\cdot A$

$\therefore A^HA$为Hermite矩阵

Date: Page: Weather:

3. $\because A, B$ 为Hermite矩阵

$\therefore A^H = A, B^H = B \quad \therefore (AB)^H = B^H \cdot A^H = BA$

若 $(AB)^H = AB$ 则 $BA = AB$

$\because AB = BA, \quad \therefore (AB)^H = (BA)^H = A^H B^H = AB$

$\therefore AB = (AB)^H \quad \therefore AB$ 为Hermite矩阵

4. 令 $\{V_k \mid k = 1 \dots n\}$ 为正交向量

$\therefore$ 有 $K_1 V_1 + K_2 V_2 + \dots + K_n V_n = 0$

$\Rightarrow (K_1 V_1 + K_2 V_2 + \dots + K_n V_n) V_m = 0 \cdot V_m = 0 \quad m \in [1, m]_R$

$\Rightarrow (K_1 V_1 + K_2 V_2 + \dots + K_n V_n) V_m = K_m V_m \cdot V_m$

$\therefore K_m \cdot V_m \cdot V_m = 0$

$\therefore$ 则 $K_m = 0$ 即有 $K_m = 0$ 用于 $K_1 V_1 + \dots + K_n V_n = 0$

$\therefore$ 正交向量组为线性无关向量组

5、解 $g_{11}=(\varepsilon_1,\varepsilon_1)=3$, $g_{12}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=2$

$g_{13}=(\varepsilon_1,\varepsilon_3)=1$, $g_{21}=2$

$g_{22}=2$, $g_{23}=1$, $g_{31}=1$, $g_{32}=1$, $g_{33}=1$

$$G=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

6、$\because$ $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1-i\\1+i\\1\end{pmatrix}$ $\varepsilon_2=\begin{pmatrix}i\\1\\0\end{pmatrix}$ $\varepsilon_3=\begin{pmatrix}1+i\\0\\0\end{pmatrix}$

(1) $\alpha=(-i,i,1)$ $\therefore \alpha=-i\varepsilon_1+i\varepsilon_2+\varepsilon_3=(-1,1,-i)$

同理 $\beta=(i,3,1-i)$

(2) $G_{11}=(\varepsilon_1,\varepsilon_1)=5$, $\cancel{G_{21}=0}$ $G_{33}=(\varepsilon_3,\varepsilon_3)=2$

$G_{12}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=0$ $G_{22}=(\varepsilon_2,\varepsilon_2)=2$

$G_{13}=(\varepsilon_1,\varepsilon_3)=-2i$ $G_{23}=(\varepsilon_2,\varepsilon_3)=1+i$

$$\therefore G=\begin{pmatrix}5 & 0 & 2i\\ 0 & 2 & 1-i\\ -2i & 1+i & 2\end{pmatrix}$$

Date: Page: Weather:

(3) $(\alpha,\beta)=x^H G y=4$

(4) $\|\alpha\|=\sqrt{x^H G x}=\sqrt{3}$

$\|\beta\|=\sqrt{y^H G y}=2\sqrt{3}$

$d(\alpha,\beta)=\sqrt{7}$

$\alpha_\beta=\frac{(\beta,\alpha)}{\|\beta\|^2}\beta=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}i\\3\\1-i\end{bmatrix}$

$\beta_\alpha=\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|^2}\alpha=\frac{4}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\-i\end{bmatrix}$

(5) $\because$ ~~#~~ $x^H G y=(i,-i,1)\begin{bmatrix}5 & 0 & 2i\\0 & 2 & 1-i\\-2i & 1+i & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1-i\\1\\1+i\end{pmatrix}=4$

又$\because (\alpha,\beta)=4$

$\therefore (\alpha,\beta)=x^H G y$

7. 证明：$\|f(t)\|_1=\int_a^b |f(t)|\,dt$

① 正定性 $|f(t)|\geq 0$

② 齐次性 $\|\alpha f(t)\|=\int_a^b|\alpha f(t)|dt=|\alpha|\int_a^b|f(t)|dt$

③ 三角不等式 $\|f(t)+g(t)\|=\int_a^b|f(t)+g(t)|dt\leq\|f(t)\|_1+\|g(t)\|_1$

$\therefore \|f(t)\|_1$ 是 $C[a,b]$ 中的范数

(2) $\|f(t)\|_\infty = \max\limits_{a\le t\le b} |f(t)|dt$

① 正定性满足

② 齐次性满足

③ $\|f(t)+g(t)\|_\infty = \max\limits_{a\le t\le b} |f(t)+g(t)|dt \le \max\limits_{a\le t\le b} |f(t)|dt + \max\limits_{(a,b)} |g(t)|dt$

$= \|f(t)\|_\infty + \|g(t)\|_\infty$

∴ $\|f(t)\|_\infty$ 是 $C[a,b]$ 中的范数

8. 证明：$\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$

① 正定性：$\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k| \ge 0$

② 齐次性满足

③ 三角不等式：$\|x+y\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k+y_k| \le \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k| + \sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|$

$= \|x\| + \|y\|$

∴ $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$ 是向量元的一种范数

Date: Page: Weather:

9 解

设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&3\\0&0&1\end{pmatrix}$

设 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\0&2-\lambda&3\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(2-\lambda)$

$\therefore$ 令 $|A-\lambda E|=0 \Rightarrow \lambda_1=1, \lambda_2=2$

① $\lambda=1$ 时，$(A-E)x=0$

$\therefore x_1=(1,0,0)$

② $\lambda=2$，$(A-2E)x=0$

$\therefore x_2=(1,1,0)$

10 解 $A=\begin{pmatrix}1&1-i\\1+i&2\end{pmatrix}$ $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&1-i\\1+i&2-\lambda\end{vmatrix}=0$

$\therefore \lambda^2-3\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0, \lambda_2=3$

① $\lambda=0$，$\begin{pmatrix}1&1-i\\1+i&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow x=\begin{pmatrix}1\\-\frac{1+i}{2}\end{pmatrix}x_1$

② $\lambda=3$，$x=\begin{pmatrix}\frac{1-i}{2}\\1\end{pmatrix}x_2$