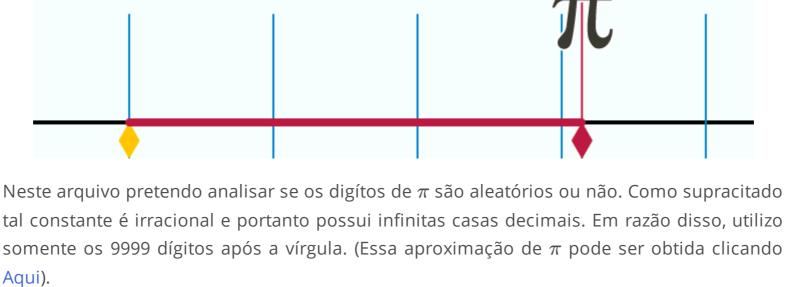
Renan Oliveira 20/02/2021

O π é a décima sexta letra do alfabeto grego. Todavia ele é mais conhecido por, na área da

O número π

matemática, representar o número irracional resultado da divisão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo. Segue abaixo uma representação visual do exposto acima.



pi_digits = "14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582 23172 53594 08128 48111 74502 84102 70193 85211 05559 64462 29489 54930 38196

```
44288 10975 66593 34461 28475 64823 37867 83165 27120 19091
45648 56692 34603 48610 45432 66482 13393 60726 02491 41273
72458 70066 06315 58817 48815 20920 96282 92540 91715 36436
78925 90360 01133 05305 48820 46652 13841 46951 94151 16094
33057 27036 57595 91953 09218 61173 81932 61179 31051 18548
07446 23799 62749 56735 18857 52724 89122 79381 83011 94912
98336 73362 44065 66430 86021 39494 63952 24737 19070 21798
60943 70277 05392 17176 29317 67523 84674 81846 76694 05132
00056 81271 45263 56082 77857 71342 75778 96091 73637 17872
14684 40901 22495 34301 46549 58537 10507 92279 68925 89235
42019 95611 21290 21960 86403 44181 59813 62977 47713 09960
51870 72113 49999 99837 29780 49951 05973 17328 16096 31859
50244 59455 34690 83026 42522 30825 33446 85035 26193 11881
71010 00313 78387 52886 58753 32083 81420 61717 76691 47303
59825 34904 28755 46873 11595 62863 88235 37875 93751 95778
18577 80532 17122 68066 13001 92787 66111 95909 21642 01989
38095 25720 10654 85863 27886 59361 53381 82796 82303 01952
03530 18529 68995 77362 25994 13891 24972 17752 83479 13151
55748 57242 45415 06959 50829 53311 68617 27855 88907 50983
81754 63746 49393 19255 06040 09277 01671 13900 98488 24012
85836 16035 63707 66010 47101 81942 95559 61989 46767 83744
94482 55379 77472 68471 04047 53464 62080 46684 25906 94912
93313 67702 89891 52104 75216 20569 66024 05803 81501 93511
25338 24300 35587 64024 74964 73263 91419 92726 04269 92279
67823 54781 63600 93417 21641 21992 45863 15030 28618 29745
55706 74983 85054 94588 58692 69956 90927 21079 75093 02955
32116 53449 87202 75596 02364 80665 49911 98818 34797 75356
63698 07426 54252 78625 51818 41757 46728 90977 77279 38000
81647 06001 61452 49192 17321 72147 72350 14144 19735 68548
16136 11573 52552 13347 57418 49468 43852 33239 07394 14333
45477 62416 86251 89835 69485 56209 92192 22184 27255 02542
56887 67179 04946 01653 46680 49886 27232 79178 60857 84383
82796 79766 81454 10095 38837 86360 95068 00642 25125 20511
73929 84896 08412 84886 26945 60424 19652 85022 21066 11863
06744 27862 20391 94945 04712 37137 86960 95636 43719 17287
46776 46575 73962 41389 08658 32645 99581 33904 78027 59009
94657 64078 95126 94683 98352 59570 98258 22620 52248 94077
26719 47826 84826 01476 99090 26401 36394 43745 53050 68203
49625 24517 49399 65143 14298 09190 65925 09372 21696 46151
57098 58387 41059 78859 59772 97549 89301 61753 92846 81382
68683 86894 27741 55991 85592 52459 53959 43104 99725 24680
84598 72736 44695 84865 38367 36222 62609 91246 08051 24388
43904 51244 13654 97627 80797 71569 14359 97700 12961 60894
41694 86855 58484 06353 42207 22258 28488 64815 84560 28506
01684 27394 52267 46767 88952 52138 52254 99546 66727 82398
64565 96116 35488 62305 77456 49803 55936 34568 17432 41125
15076 06947 94510 96596 09402 52288 79710 89314 56691 36867
22874 89405 60101 50330 86179 28680 92087 47609 17824 93858
90097 14909 67598 52613 65549 78189 31297 84821 68299 89487
22658 80485 75640 14270 47755 51323 79641 45152 37462 34364
54285 84447 95265 86782 10511 41354 73573 95231 13427 16610
21359 69536 23144 29524 84937 18711 01457 65403 59027 99344
03742 00731 05785 39062 19838 74478 08478 48968 33214 45713
86875 19435 06430 21845 31910 48481 00537 06146 80674 91927
81911 97939 95206 14196 63428 75444 06437 45123 71819 21799
98391 01591 95618 14675 14269 12397 48940 90718 64942 31961
56794 52080 95146 55022 52316 03881 93014 20937 62137 85595
66389 37787 08303 90697 92077 34672 21825 62599 66150 14215
03068 03844 77345 49202 60541 46659 25201 49744 28507 32518
66600 21324 34088 19071 04863 31734 64965 14539 05796 26856
10055 08106 65879 69981 63574 73638 40525 71459 10289 70641
40110 97120 62804 39039 75951 56771 57700 42033 78699 36007
23055 87631 76359 42187 31251 47120 53292 81918 26186 12586
73215 79198 41484 88291 64470 60957 52706 95722 09175 67116
72291 09816 90915 28017 35067 12748 58322 28718 35209 35396
57251 21083 57915 13698 82091 44421 00675 10334 67110 31412
67111 36990 86585 16398 31501 97016 51511 68517 14376 57618
35155 65088 49099 89859 98238 73455 28331 63550 76479 18535
89322 61854 89632 13293 30898 57064 20467 52590 70915 48141
65498 59461 63718 02709 81994 30992 44889 57571 28289 05923
23326 09729 97120 84433 57326 54893 82391 19325 97463 66730
58360 41428 13883 03203 82490 37589 85243 74417 02913 27656
18093 77344 40307 07469 21120 19130 20330 38019 76211 01100
44929 32151 60842 44485 96376 69838 95228 68478 31235 52658
21314 49576 85726 24334 41893 03968 64262 43410 77322 69780
28073 18915 44110 10446 82325 27162 01052 65227 21116 60396
66557 30925 47110 55785 37634 66820 65310 98965 26918 62056
47693 12570 58635 66201 85581 00729 36065 98764 86117 91045
33488 50346 11365 76867 53249 44166 80396 26579 78771 85560
84552 96541 26654 08530 61434 44318 58676 97514 56614 06800
70023 78776 59134 40171 27494 70420 56223 05389 94561 31407
11270 00407 85473 32699 39081 45466 46458 80797 27082 66830
63432 85878 56983 05235 80893 30657 57406 79545 71637 75254
20211 49557 61581 40025 01262 28594 13021 64715 50979 25923
09907 96547 37612 55176 56751 35751 78296 66454 77917 45011
29961 48903 04639 94713 29621 07340 43751 89573 59614 58901
93897 13111 79042 97828 56475 03203 19869 15140 28708 08599
04801 09412 14722 13179 47647 77262 24142 54854 54033 21571
85306 14228 81375 85043 06332 17518 29798 66223 71721 59160
77166 92547 48738 98665 49494 50114 65406 28433 66393 79003
97692 65672 14638 53067 36096 57120 91807 63832 71664 16274
88880 07869 25602 90228 47210 40317 21186 08204 19000 42296
61711 96377 92133 75751 14959 50156 60496 31862 94726 54736
42523 08177 03675 15906 73502 35072 83540 56704 03867 43513
62222 47715 89150 49530 98444 89333 09634 08780 76932 59939
78054 19341 44737 74418 42631 29860 80998 88687 41326 04721
56951 62396 58645 73021 63159 81931 95167 35381 29741 67729
47867 24229 24654 36680 09806 76928 23828 06899 64004 82435
40370 14163 14965 89794 09243 23789 69070 69779 42236 25082
21688 95738 37986 23001 59377 64716 51228 93578 60158 81617
55782 97352 33446 04281 51262 72037 34314 65319 77774 16031
99066 55418 76397 92933 44195 21541 34189 94854 44734 56738
31624 99341 91318 14809 27777 10386 38773 43177 20754 56545
32207 77092 12019 05166 09628 04909 26360 19759 88281 61332
31666 36528 61932 66863 36062 73567 63035 44776 28035 04507
77235 54710 58595 48702 79081 43562 40145 17180 62464 36267
94561 27531 81340 78330 33625 42327 83944 97538 24372 05835
31147 71199 26063 81334 67768 79695 97030 98339 13077 10987
04085 91337 46414 42822 77263 46594 70474 58784 77872 01927
71528 07317 67907 70715 72134 44730 60570 07334 92436 93113
83504 93163 12840 42512 19256 51798 06941 13528 01314 70130
47816 43788 51852 90928 54520 11658 39341 96562 13491 43415
95625 86586 55705 52690 49652 09858 03385 07224 26482 93972
85847 83163 05777 75606 88876 44624 82468 57926 03953 52773
48030 48029 00587 60758 25104 74709 16439 61362 67604 49256
27420 42083 20856 61190 62545 43372 13153 59584 50687 72460
29016 18766 79524 06163 42522 57719 54291 62991 93064 55377
99140 37340 43287 52628 88963 99587 94757 29174 64263 57455
25407 90914 51357 11136 94109 11939 32519 10760 20825 20261
87985 31887 70584 29725 91677 81314 96990 09019 21169 71737
27847 68472 68608 49003 37702 42429 16513 00500 51683 23364
35038 95170 29893 92233 45172 20138 12806 96501 17844 08745
19601 21228 59937 16231 30171 14448 46409 03890 64495 44400
61986 90754 85160 26327 50529 83491 87407 86680 88183 38510
22833 45085 04860 82503 93021 33219 71551 84306 35455 00766
82829 49304 13776 55279 39751 75461 39539 84683 39363 83047
46119 96653 85815 38420 56853 38621 86725 23340 28308 71123
28278 92125 07712 62946 32295 63989 89893 58211 67456 27010
21835 64622 01349 67151 88190 97303 81198 00497 34072 39610
36854 06643 19395 09790 19069 96395 52453 00545 05806 85501
95673 02292 19139 33918 56803 44903 98205 95510 02263 53536
19204 19947 45538 59381 02343 95544 95977 83779 02374 21617
27111 72364 34354 39478 22181 85286 24085 14006 66044 33258
88569 86705 43154 70696 57474 58550 33232 33421 07301 54594
05165 53790 68662 73337 99585 11562 57843 22988 27372 31989
87571 41595 78111 96358 33005 94087 30681 21602 87649 62867
44604 77464 91599 50549 73742 56269 01049 03778 19868 35938
14657 41268 04925 64879 85561 45372 34786 73303 90468 83834
36346 55379 49864 19270 56387 29317 48723 32083 76011 23029
91136 79386 27089 43879 93620 16295 15413 37142 48928 30722
01269 01475 46684 76535 76164 77379 46752 00490 75715 55278
19653 62132 39264 06160 13635 81559 07422 02020 31872 77605
27721 90055 61484 25551 87925 30343 51398 44253 22341 57623
36106 42506 39049 75008 65627 10953 59194 65897 51413 10348
22769 30624 74353 63256 91607 81547 81811 52843 66795 70611
08615 33150 44521 27473 92454 49454 23682 88606 13408 41486
37767 00961 20715 12491 40430 27253 86076 48236 34143 34623
51897 57664 52164 13767 96903 14950 19108 57598 44239 19862
91642 19399 49072 36234 64684 41173 94032 65918 40443 78051
33389 45257 42399 50829 65912 28508 55582 15725 03107 12570
12668 30240 29295 25220 11872 67675 62204 15420 51618 41634
84756 51699 98116 14101 00299 60783 86909 29160 30288 40026
91041 40792 88621 50784 24516 70908 70006 99282 12066 04183
71806 53556 72525 32567 53286 12910 42487 76182 58297 65157
95984 70356 22262 93486 00341 58722 98053 49896 50226 29174
87882 02734 20922 22453 39856 26476 69149 05562 84250 39127
57710 28402 79980 66365 82548 89264 88025 45661 01729 67026
64076 55904 29099 45681 50652 65305 37182 94127 03369 31378
51786 09040 70866 71149 65583 43434 76933 85781 71138 64558
73678 12301 45876 87126 60348 91390 95620 09939 36103 10291
61615 28813 84379 09904 23174 73363 94804 57593 14931 40529
76347 57481 19356 70911 01377 51721 00803 15590 24853 09066
92037 67192 20332 29094 33467 68514 22144 77379 39375 17034
43661 99104 03375 11173 54719 18550 46449 02636 55128 16228
82446 25759 16333 03910 72253 83742 18214 08835 08657 39177
15096 82887 47826 56995 99574 49066 17583 44137 52239 70968
34080 05355 98491 75417 38188 39994 46974 86762 65516 58276
58483 58845 31427 75687 90029 09517 02835 29716 34456 21296
40435 23117 60066 51012 41200 65975 58512 76178 58382 92041
97484 42360 80071 93045 76189 32349 22927 96501 98751 87212
72675 07981 25547 09589 04556 35792 12210 33346 69749 92356
30254 94780 24901 14195 21238 28153 09114 07907 38602 51522
74299 58180 72471 62591 66854 51333 12394 80494 70791 19153
26734 30282 44186 04142 63639 54800 04480 02670 49624 82017
92896 47669 75831 83271 31425 17029 69234 88962 76684 40323
26092 75249 60357 99646 92565 04936 81836 09003 23809 29345
95889 70695 36534 94060 34021 66544 37558 90045 63288 22505
45255 64056 44824 65151 87547 11962 18443 96582 53375 43885
69094 11303 15095 26179 37800 29741 20766 51479 39425 90298
96959 46995 56576 12186 56196 73378 62362 56125 21632 08628
69222 10327 48892 18654 36480 22967 80705 76561 51446 32046
92790 68212 07388 37781 42335 62823 60896 32080 68222 46801
22482 61177 18589 63814 09183 90367 36722 20888 32151 37556
00372 79839 40041 52970 02878 30766 70944 47456 01345 56417
25437 09069 79396 12257 14298 94671 54357 84687 88614 44581
23145 93571 98492 25284 71605 04922 12424 70141 21478 05734
55105 00801 90869 96033 02763 47870 81081 75450 11930 71412
23390 86639 38339 52942 57869 05076 43100 63835 19834 38934
15961 31854 34754 64955 69781 03829 30971 64651 43840 70070
73604 11237 35998 43452 25161 05070 27056 23526 60127 64848
30840 76118 30130 52793 20542 74628 65403 60367 45328 65105
70658 74882 25698 15793 67897 66974 22057 50596 83440 86973
50201 41020 67235 85020 07245 22563 26513 41055 92401 90274
21624 84391 40359 98953 53945 90944 07046 91209 14093 87001
```

theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size = 15)) Proporção de algarismos 0.100 -

dados <- data.frame(table(pi_digits) / sum(table(pi_digits)))</pre>

x = "Algarismos", y = "Proporção dos algarismos") +

ggplot(dados, aes(x = pi_digits, y = Freq)) +

labs(title = "Proporção de algarismos",

proproção de ocorrência semelhelhante.

ggplot(dados, aes(y = y, x = x)) +

x = "", y = "Algarismos") +

dados \leftarrow data.frame(x = 1:200, y = pi_digits[1:200])

labs(title = "Algarismos da parte decimal de π ",

theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size = 15))

visualização).

geom_line() +

7.5 •

0

library(randomizeBE)

foram gerados de forma aleatória.

Tipo de Teste

geom_bar(stat = "identity", fill = "#99b898") +

Proporção dos algarismos 0.025 0.000 2 5 ż 6 Algarismos

Mediante a figura acima, percebe-se que todos os 10 algarismos apresentam uma

Abaixo, encontra-se um gráfico de linhas dos primeiros 200 valores (a fim de facilitar a

Algarismos da parte decimal de π

26456 00162 37428 80210 92764 57931 06579 22955 24988 72758 46101 26483 69998 92256 95968 81592 05600 10165 52563 7567"

[1] "1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062

Seguidamente, é feito um *split* na *string*, *i.e.*, cada valor presentre na string é separado,

ficando um vetor de algarismos de 0 à 9. Posteriormente, esses valores são transformados

[1] 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9 7 9 3 2 3 8 4 6 2 6 4 3 3 8 3 2 7 9 5 0 2 8 [38] 9 7 1 6 9 3 9 9 3 7 5 1 0 5 8 2 0 9 7 4 9 4 4 5 9 2 3 0 7 8 1 6 4 0 6 2

Em seguida, apresento um gráfico de barras para verificar a proporção de incidência de

[75] 6 2 0 8 9 9 8 6 2 8 0 3 4 8 2 5 3 4 2 1 1 7 0 6 7 9

Abaixo, "\n" (quebra de linha) e os espaços entre os dígitos são retirados.

pi_digits = gsub("[\n]", "", pi_digits) pi_digits = gsub("\\s", "", pi_digits)

em numéricos (até então eram do tipo character.)

pi_digits = strsplit(pi_digits, "")[[1]]

pi_digits = as.numeric(pi_digits)

pi_digits[1:100]

Análise Gráfica

cada algarismo.

library(ggplot2)

pi_digits

Algarismos 2.5 -0.0 -100 150 Aparentemente os valores aprensentam indícios de serem aleatórios. Segue o gráfico de autocorrelação da dízima não periódica. acf(pi_digits, main = "Função de autocorrelação", xlab = "Defasagem", ylab = "ACF", lag.max = 20)Função de autocorrelação

Neste cenários, as hipóteses que queremos testar são: $\begin{cases} H_0: \text{ a sequência foi gerada de forma aleatória;} \\ H_1 \text{ a sequência não foi gerada de forma aleatória.} \end{cases}$ Abaixo encontra-se o valor-p para o teste utilizando a distribuição exata, para o teste

10

Defasagem

Via a figura acima, conclui-se que os números decimais (9999 primeiros) de π apresentam

baixa estrutura de autocorrelação. Forte indício que os referidos valores são independentes.

Para verificar a aleatoriedade de dos 9999 dígitos de π faremos uso do Teste das

Teste das sequências de Wald-Wolfowitz

sequências de Wald-Wolfowitz (Wald-Wolfowitz runs test).

pvalueE = runs.pvalue(pi_digits, pmethod = "exact") pvalueN = runs.pvalue(pi_digits, pmethod = "normal") pvalueCC = runs.pvalue(pi_digits, pmethod = "cc")

15

20

Valor-p

0.9793287 Exato Normal 0.9710132 Com correção de continuidade 0.9793287

usando normalidade e para o teste usando a normalidade com correção de continuidade.

Da tabela acima, destaca-se que o valor-p do teste exato e do teste com correção de continuidade são iguais. Isso ocorre devido ao tamanho amostral, por ele ser "grande" temos que a função não consegue calcular a distribuição exata.

À vista disso, esses resultados podem ser analisados sob a perspectiva de que os dígitos de π não apresentam têndencia. Ao que tudo indica são independentes ao nível de significância de 5%.

Ressalto que, nesse contexto, "aleatoriedade" possui um sentido de independência.

Com 5% de significância não temos indícios para rejeitar a hipótese de que os dígitos de π