广西专升本考试

公共科目

数 学

广西交通职业技术学院
通识教学部

典型例题

题型一：换元积分法

例1：不定积分计算（含复合函数）

（1）$\int (x+8)^{2025}\,\mathrm{d}x$；（2）$\int e^{(2x+6)}\,\mathrm{d}x$

（3）$\int \sin(3-2x)\,\mathrm{d}x$

解答

练习1. 计算不定积分

（1）$\int (x-3)^6\,\mathrm{d}x$

（2）$\int e^{4x}\,\mathrm{d}x$

（3）$\int \cos(6x+9)\,\mathrm{d}x$

知识储备

1.换元积分法的分类

- 凑微分法
- 第二类换元积分法*

2.凑微分法的步骤：

$$\int f[\varphi(x)]\cdot \varphi'(x)\,dx$$

$$=\int f[\varphi(x)]\cdot d\big(\varphi(x)\big)$$

$$=\int f(u)du \quad （设u=\varphi(x)）$$

$$=F(u)+C$$

$$=F(\varphi(x))+C$$

注意：凑微分法适用于被积函数含有复合函数$f[\varphi(x)]$，且出现了被复合项的导数$\varphi'(x)$。

例题解答

（1）$\int (x+8)^{2025}\ dx$

解：原式$=\int (x+8)^{2025}\cdot(x+8)'\,dx$

$$=\int (x+8)^{2025}\,d(x+8)$$

$$=\int\ u^{2025}\,du$$

$$=\frac{u^{2026}}{2026}+C$$

$$=\frac{(x+8)^{2026}}{2026}+C$$

（2）$\int e^{2x+6}\ dx$

解：原式$=\int e^{2x+6}\,(2x+6)'\cdot\frac{1}{2}\,dx$

$$=\int e^{2x+6}\cdot\frac{1}{2}\,d(2x+6)$$

$$=\int\ e^{u}\cdot\frac{1}{2}\,du$$

$$=\frac{1}{2}e^{u}+C$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x+6}+C$$

（3）$\int \sin(3-2x)\,d\,x$

解：原式$=\int \sin(3-2x)\,(3-2x)'\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)d\,x$

$$=\int \sin(3-2x)\left(-\frac{1}{2}\right)d\,(3-2x)$$

$$=\int\ \sin u\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du$$

$$=-\frac{1}{2}\int\ \sin u\,du$$

$$=-\frac{1}{2}(-\cos u)+C$$

$$=\frac{1}{2}\cos u+C$$

$$=\frac{1}{2}\cos(3-2x)+C$$

■ 模块三 一元函数导数的应用 通识教学部

……6分钟后

练习解答

(1) $\int (x-3)^6\ dx$

解：原式$=\int (x-3)^6 \cdot (x-3)'\, dx$

$$= \int (x-3)^6\, \mathrm{d}(x-3)$$

$$= \int u^6\ du$$

$$= \frac{u^7}{7} + C$$

$$= \frac{(x-3)^7}{7} + C$$

(2) $\int\ e^{4x} dx$

解：原式$=\int \mathrm{e}^{4x} \cdot (4x)' \cdot \frac{1}{4} \mathrm{d}x$

$$= \int \mathrm{e}^{4x} \cdot \frac{1}{4} \mathrm{d}(4x)$$

$$= \int e^{u} \cdot \frac{1}{4}\ du$$

$$= \frac{1}{4} e^{u} + C$$

$$= \frac{1}{4} e^{4x} + C$$

(3) $\int\ \cos(6x+9)\, dx$

解：原式$=\int\ \cos(6x+9) \cdot (6x+9)' \cdot \frac{1}{6} dx$

$$= \int\ \cos(6x+9) \cdot \frac{1}{6} d(6x+9)$$

$$= \int \cos u \cdot \frac{1}{6} du$$

$$= \frac{1}{6} \sin u + C$$

$$= \frac{1}{6} \sin(6x+9) + C$$

典型例题

题型一：换元积分法

例2：不定积分计算（含有导数关系的函数对）

(4) $\int \frac{3x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$；　(5) $\int \frac{e^x}{1-2e^x}\,\mathrm{d}x$

(6) $\int \frac{\ln x+2}{x}\,\mathrm{d}x$

练习2. 计算不定积分

(4) $\int x^3(1+x^4)^5\,\mathrm{d}x$

(5) $\int \mathrm{e}^x\sin(\mathrm{e}^x-1)\,\mathrm{d}x$

(6) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$

知识储备

1.换元积分法的分类

- 凑微分法
- 第二类换元积分法*

2.凑微分法的步骤：

$$\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)\,dx$$

$$=\int f[\varphi(x)]\cdot d(\varphi(x))$$

$$=\int f(u)du \quad （设u=\varphi(x)）$$

$$=F(u)+C$$

$$=F(\varphi(x))+C$$

注意：凑微分法适用于被积函数含有复合函数$f[\varphi(x)]$，且出现了被被复合项的导数$\varphi'(x)$。

……6分钟后

练习解答

(4) $\int x^3(1+x^4)^5\,\mathbf{d}x$

解：原式 $=\int \frac{1}{4}\cdot(1+x^4)'(1+x^4)^5dx$

$=\frac{1}{4}\int(1+x^4)^5d(1+x^4)$

$=\frac{1}{4}\int u^5du$

$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot u^6+C$

$=\frac{1}{24}(1+x^4)^6+C$

(5) $\int e^x\sin(e^x-1)\,dx$

解：原式$=\int \sin(\mathrm{e}^x-1)\cdot(\mathrm{e}^x-1)'\,\mathrm{dx}$

$=\int \sin(\mathrm{e}^x-1)\cdot \mathrm{d}(\mathrm{e}^x-1)$

$=\int \sin u\,du$

$=-\mathrm{cosu}+C$

$=-\cos u(e^x-1)+C$

(6) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$

解：原式$=-\int\frac{(\cos x)'}{\cos^3 x}\,dx$

$=-\int\frac{1}{\cos^3 x}d(\cos x)$

$=-\int\frac{1}{u^3}\,du$

$=\frac{1}{2}u^{-2}+C$

$=\frac{1}{2}(\cos x)^{-2}+C$

典型例题

题型一：换元积分法

例3：不定积分计算（含根号）

(7*) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(8*) $\int x\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x$

解答

练习3. 计算不定积分

(7*) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$ $-2\sqrt{1-x}+\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}+C$

知识储备

3.第二换元积分法步骤*

① 设根号部分为t，整理出x和dx的表达式；
② 变量x换成t，正常计算积分；
③ 成功计算出结果后，将变量t换回x.

注意：第二类换元积分法通常适用于被积函数含有根号$\sqrt{\ }$，个别形式涉及三角函数，复杂度提升。

例题解答

(7)* $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$

解：设$t=\sqrt{x}$，则$x=t^2$，$dx=2tdt$

$$原式=\int \frac{2t}{1+t}dt=\int \frac{2(t+1)-2}{1+t}dt$$

$$=\int (2-\frac{2}{1+t})dt$$

$$=2t-2\ln|1+t|+C$$

$$=2\sqrt{x}-2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+C$$

(8)* $\int x\sqrt{x-1}dx$

解：设$t=\sqrt{x-1}$，则$x=t^2+1$，$dx=2tdt$

$$原式=\int (t^2+1)\cdot t\cdot 2tdt=\int (2t^4+2t^2)dt$$

$$=\frac{2}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3+C$$

$$=\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C$$

典型例题

题型二：分部积分法

例4：不定积分计算（两类函数的乘积）

（9）$\int x^2 \sin x \, dx$

（10）$\int x^2 \ln x \, dx$

练习4. 计算不定积分

（8）$\int x \ln x \, dx$

（9）$\int x^2 e^x \, dx$

知识储备

4.分部积分公式：

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

注意：

1. 分部积分法适用于两类不同函数乘积的积分。
2. 选择 u的优先次序，可按口诀：

“反对幂指三”

（即：反三角函数、对数函数、幂函数、指数函数、三角函数）。

……6分钟后

练习解答

（8）$\int x\ln x\,dx$

解：原式 $= \int \ln x \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right)' dx$

$$= \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

（9）$\int x^2e^x\,dx$

解：原式$= \int x^2 \cdot (e^x)'\,dx$

$$= x^2e^x - \int e^x \cdot 2x\,dx$$

$$= x^2e^x - 2\int xe^x\,dx$$

$$= x^2e^x - 2\int x \cdot (e^x)'\,dx$$

$$= x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x\,dx\right)$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

$$= e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

广西专升本考试

谢谢观看！

广西交通职业技术学院
通识教学部