广西专升本考试

公共科目

数 学

广西交通职业技术学院
通识教学部

极限计算

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$：代入$x=a$

2. $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$型：约去公因式

3. 有理分式型

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots b_1x+b_0}=\begin{cases}\frac{a_n}{b_m}, & m=n\\ 0, & m>n\\ \infty, & m<n\end{cases}$$

（这里，$a_n \neq 0, b_m \neq 0, m$、$n$为正整数）

4. $\infty-\infty$型：

通分，转变为$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$或其他形式

5. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$：“$\frac{0}{0}$”型

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$：“$1^\infty$”型

6. 无穷小替换：“$\frac{0}{0}$”型

典型例题

题型：使用洛必达法则计算极限

例1：计算下面极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1-2x}{x^2}$

知识储备

等价无穷小替换定理

回顾

当$x\to\Delta$时，如果$\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$，$\beta(x)\sim\beta_1(x)$，且$\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$存在，则

$$\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)}$$

替换定理使用注意：

$$\lim_{x\to\Delta}\frac{A(x)+\alpha(x)}{B(x)+\beta(x)}\neq\lim_{x\to\Delta}\frac{A(x)+\alpha_1(x)}{B(x)+\beta_1(x)}$$

$$\lim_{x\to\Delta}\frac{A(x)\cdot\alpha(x)}{B(x)\cdot\beta(x)}=\lim_{x\to\Delta}\frac{A(x)\cdot\alpha_1(x)}{B(x)\cdot\beta_1(x)}$$

典型例题

题型：使用洛必达法则计算极限

例1：计算下面极限

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2x}-1-2x}{x^2}$

知识储备

1.洛必达法则

定理： 设函数$f(x)$和$g(x)$在x_0的某去心邻域可导，且满足下列条件：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$,;

(2) $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (或∞);

则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\ (\text{或}\infty)$$

洛必达法则的推广：

对于极限$\lim\limits_{x\to ■}\frac{f(x)}{g(x)}$，在$x\to x_0, x\to\infty$的情况下，未定式“$\frac{0}{0}$”和“$\frac{\infty}{\infty}$”均有相应的洛必达法则.

典型例题

题型：使用洛必达法则计算极限

例1：计算下面极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1-2x}{x^2}$

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^3}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

知识储备

1.洛必达法则

定理： 设函数$f(x)$和$g(x)$在x_0的某去心邻域可导，且满足下列条件：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$,;

(2) $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (或∞);

则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\ (\text{或}\infty)$$

洛必达法则的推广：

对于极限$\lim\limits_{x\to \blacksquare}\dfrac{f(x)}{g(x)}$，在$x\to x_0, x\to\infty$的情况下，未定式“$\frac{0}{0}$”和“$\frac{\infty}{\infty}$”均有相应的洛必达法则.

典型例题

题型：使用洛必达法则计算极限

练习1.计算下面极限

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{e^x}$

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

4*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$

知识储备

1.洛必达法则

定理： 设函数$f(x)$和$g(x)$在x_0的某去心邻域可导，且满足下列条件:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$,;

(2) $g'(x)\neq0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (或∞);

则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\ (\text{或}\infty)$$

洛必达法则的推广：

对于极限$\lim\limits_{x\to■}\dfrac{f(x)}{g(x)}$，在$x\to x_0, x\to\infty$的情况下，未定式“$\dfrac{0}{0}$”和“$\dfrac{\infty}{\infty}$”均有相应的洛必达法则.

……15分钟后

练习解答

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{e^x}$

解： 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3x)'}{(e^x)'}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{e^x}$

$=0$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$

解： 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-e^{-x})'}{x'}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{1}$

$=2$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

解：

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x)'}{(2x)'}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{2}$

$=\dfrac{1}{2}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$

解：

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\tan x-x)'}{(x-\sin x)'}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{(1-\cos x)\cos^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos x}{\cos^2 x}$

$=2$

典型例题

题型：使用洛必达法则计算极限

例2：计算下面极限

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$

(5) $\lim\limits_{x\to +0^{+}} x^{2}\ln x$

知识储备

使用洛必达法则的其他形式：

$0\cdot\infty$型 和“$\infty-\infty$”型

转换为“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型则可以考虑使用洛必达法则。

使用洛必达法则的注意事项：

(1)洛必达法则可连续使用，每次使用洛必达法则前须检验极限是否为“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型;

(2)若极限$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$不存在（不包括∞的情况），则不能由此判定原极限$\lim\frac{f(x)}{g(x)}$也不存在.

……15分钟后

典型例题

题型：使用洛必达法则计算极限

练习2.计算下面极限

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \cdot e^{-x}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$

7*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2\ln(x+1)}$

知识储备

使用洛必达法则的其他形式：

$0\cdot\infty$型 和“$\infty-\infty$”型

转换为“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型则可以考虑使用洛必达法则。

使用洛必达法则的注意事项：

(1)洛必达法则可连续使用，每次使用洛必达法则前须检验极限是否为“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型；

(2)若极限$\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$不存在（不包括∞的情况），则不能由此判定原极限$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$也不存在.

练习解答

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot e^{-x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}$

$=0$

6) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-(e^x-1)}{x(e^x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-e^x}{e^x-1+xe^x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-e^x}{e^x+e^x+xe^x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-e^x}{2e^x+xe^x}$

$=-\frac{1}{2}$

7*) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2\ln(x-1)}$

解：（法一）

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2x\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{2\ln(1+x)+\frac{2x}{1+x}+\frac{2x+x^2}{(1+x)^2}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x}{2\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{2(1+x)-2x}{(1+x)^2}+\frac{(2+2x)(1+x)^2-(2x+x^2)(2+2x)}{(1+x)^4}}$

$=\frac{1}{6}$

7*) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2\ln(x+1)}$

解：（法二）

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2\cdot x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$

典型例题

知识储备

题型：使用洛必达法则计算极限

练习3.选择题

1. 下列求极限问题中不能使用洛必达法则的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}$　B. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{\cos 2x}$　C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$　D. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+\ln x}{x-1}$

2. 下列求极限问题中使用洛必达法则失效的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$　C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$　D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$

……5分钟后

典型例题

知识储备

题型：使用洛必达法则计算极限

练习3.选择题

1. 下列求极限问题中不能使用洛必达法则的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}$　B. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{\cos 2x}$　C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$　D. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+\ln x}{x-1}$

2. 下列求极限问题中使用洛必达法则失效的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$　C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$　D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$

广西专升本考试

谢谢观看！

广西交通职业技术学院
通识教学部