广西专升本考试

公共科目

数 学

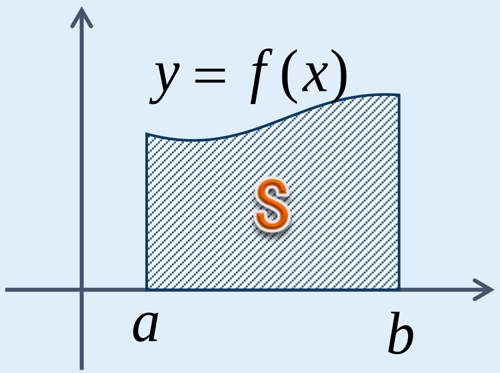
广西交通职业技术学院
通识教学部

■ 模块四 一元函数积分学

题型：利用定积分计算平面图形的面积

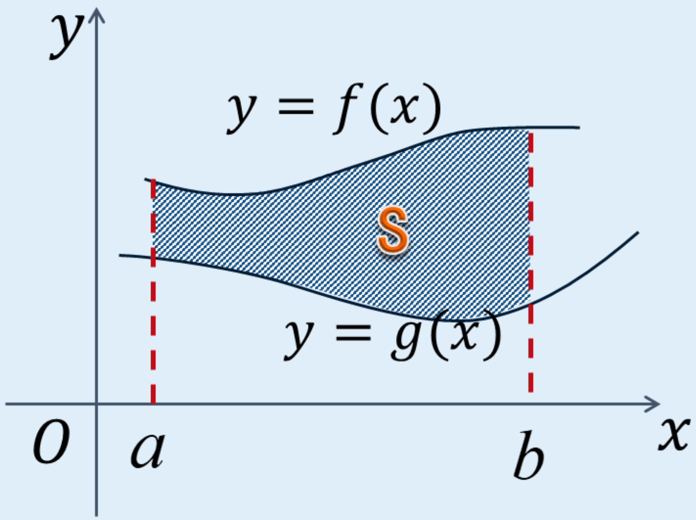
1. 曲边梯形的面积

$f(x) \geq 0$时



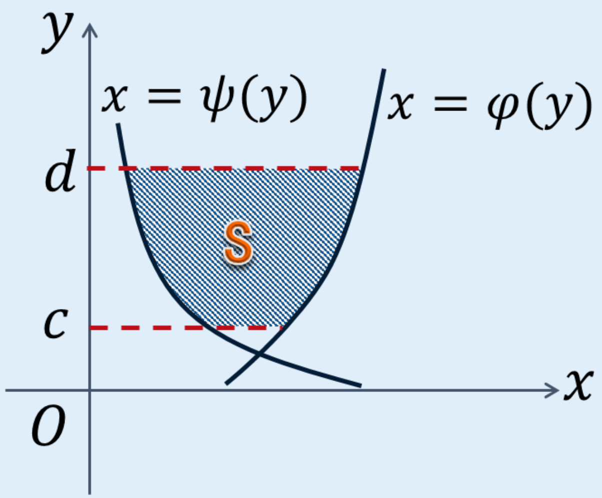
面积 $S=\int_a^b f(x)\,dx$

2. X型图形的面积



面积 $S=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$

3. Y型图形的面积



面积 $S=\int_c^d [\varphi(y)-\psi(y)]\,dy$

熟记曲线：$y=kx, y=x^2, y=x^3, y=\frac{1}{x}, y=\ln x, y=e^x, y=e^{-x}$

题型：利用定积分计算平面图形的面积

例1：计算面积

（1）曲线$y = x^2, y = x$围成图形的面积

（2）曲线$y = \sin x$在$[0, \pi]$上与x轴围成图形的面积

（2）曲线$x = y^2, x = y + 2$围成图形的面积

题型：利用定积分计算平面图形的面积

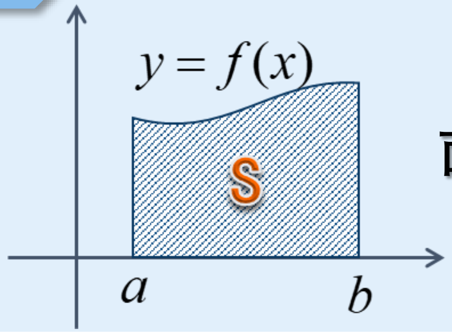
练习1：计算面积

(1) 曲线$y=x^2, y=2x$围成图形的面积;

(2) 曲线$y=\sqrt{x}, y=x$围成图形的面积;

(3) 曲线$x=y^2, x=y+6$围成图形的面积

知识储备

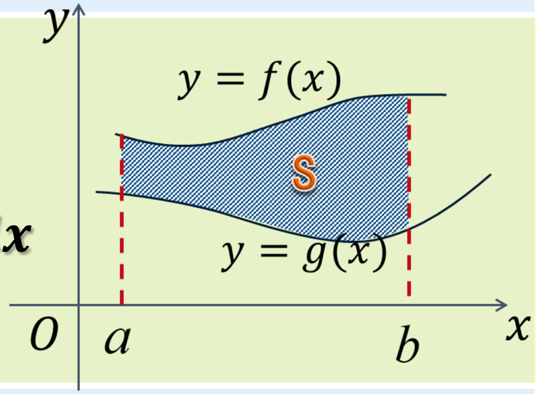


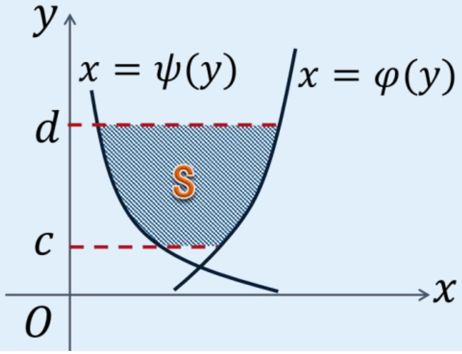
面积 $S=\int_a^b f(x)\,dx$

$(f(x)\geq 0$时$)$

面积

$S=\int_a^b[f(x)-g(x)]\,dx$





面积

$S=\int_c^d[\varphi(y)-\psi(y)]\,dy$

1. 曲线 $y=x^2$ 与 $y=2x$ 围成图形的面积

解：

方程组：

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x \end{cases}$$

解得 $x^2=2x$，即 $x(x-2)=0$，所以 $x=0$ 或 $x=2$。交点为 (0,0) 和 (2,4)。

面积表达式：

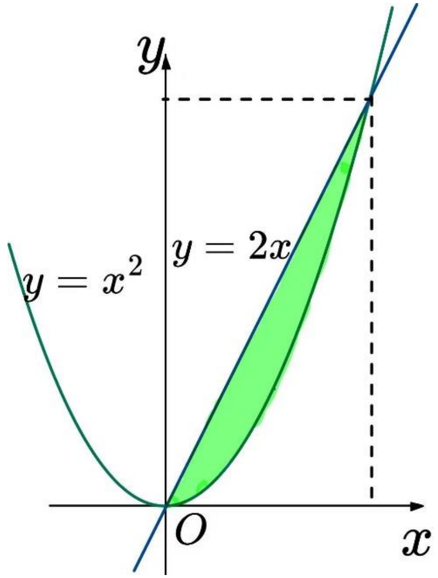
$$A=\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx$$

$$=\left[x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2$$

$$=\left(4-\frac{8}{3}\right)-(0-0)$$

$$=\frac{4}{3}$$

最终面积为 $\frac{4}{3}$。



2. 曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=x$ 围成图形的面积

解：

方程组：

$$\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=x \end{cases}$$

解得 $\sqrt{x}=x$，即 $x=0$ 或 $x=1$。交点为 (0,0) 和 (1,1)。

面积表达式：

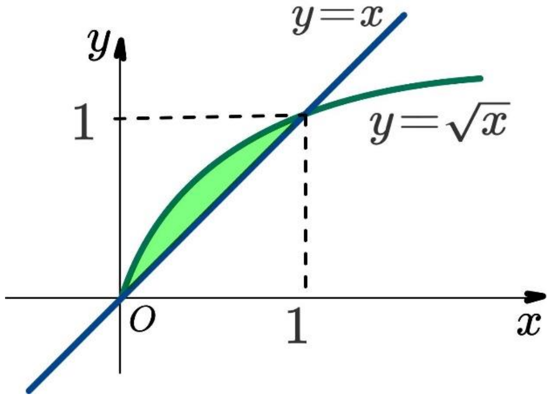
$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x)dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)-(0-0)$$

$$=\frac{1}{6}$$

最终面积为 $\frac{1}{6}$。



3. 曲线 $x = y^2$ 与 $x = y + 6$ 围成图形的面积

解：

方程组：

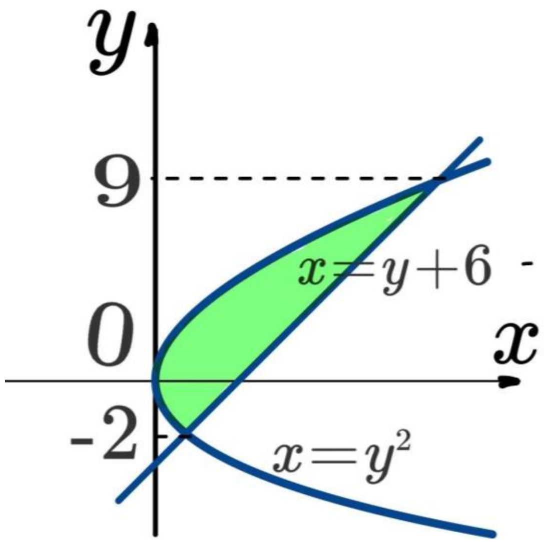
$$\begin{cases} x = y^2 \\ x = y + 6 \end{cases}$$

解得 $y^2 = y + 6$，即 $y^2 - y - 6 = 0$，所以 $y = 3$ 或 $y = -2$。交点为 $(9,3)$ 和 $(4,-2)$。

面积表达式：

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{3} \left(y + 6 - y^2\right) dy \\ &= \left[\frac{1}{2}y^2 + 6y - \frac{1}{3}y^3\right]_{-2}^{3} \\ &= \left(\frac{9}{2} + 18 - 9\right) - \left(2 - 12 + \frac{8}{3}\right) \\ &= \frac{27}{2} - \left(-\frac{22}{3}\right) \\ &= \frac{125}{6} \end{aligned}$$

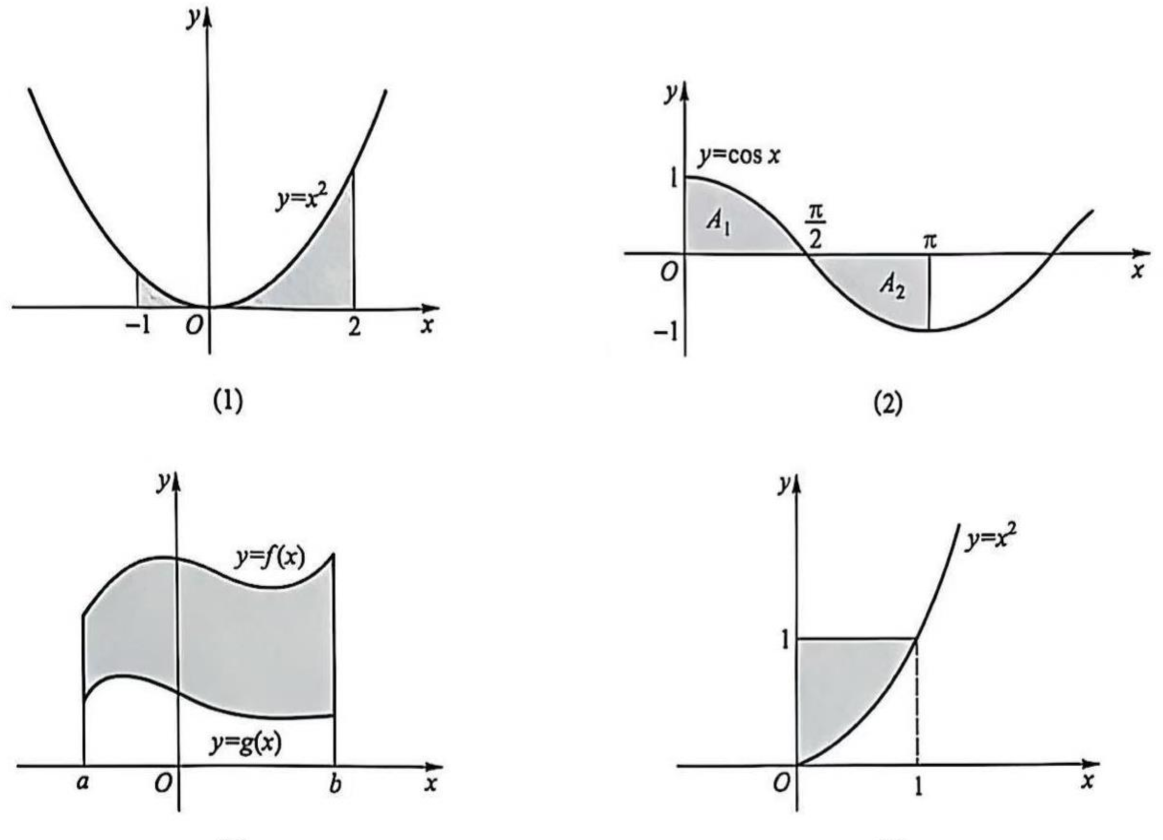
最终面积为 $\frac{125}{6}$。



题型：利用定积分计算平面图形的面积

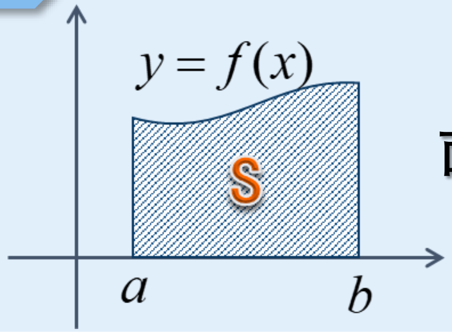
练习2

利用定积分表示图中各阴影部分的面积.



(1) (2) (3) (4)

知识储备

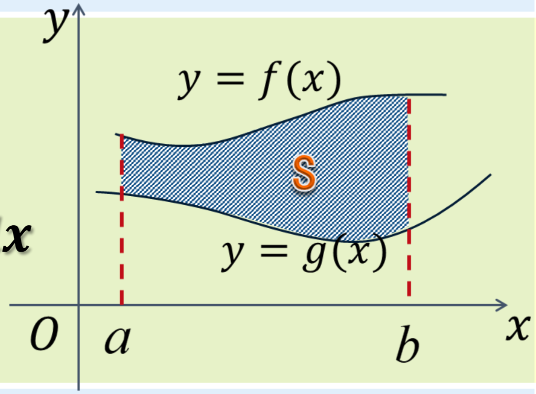


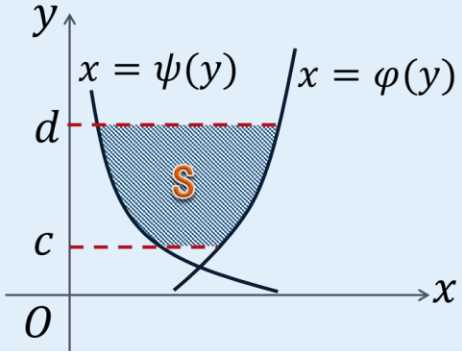
面积 $S=\int_a^b f(x)\,dx$

（$f(x)\geq 0$时）

面积

$S=\int_a^b[f(x)-g(x)]\,dx$





面积

$S=\int_c^d[\varphi(y)-\psi(y)]\,dy$

题型：利用定积分计算平面图形的面积

练习3：计算面积

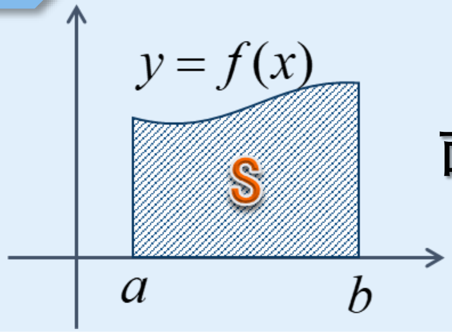
(1) 曲线$y=\ln x, x=2$和x轴围成图形的面积;

(2) 曲线$y=e^{x}, y=e^{-x}, x=2$围成图形的面积;

(3) 曲线$x=y^{2}, x=2-y^{2}$围成图形的面积

(4) 曲线$y=\sin x, y=\cos x$在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$围成图形的面积

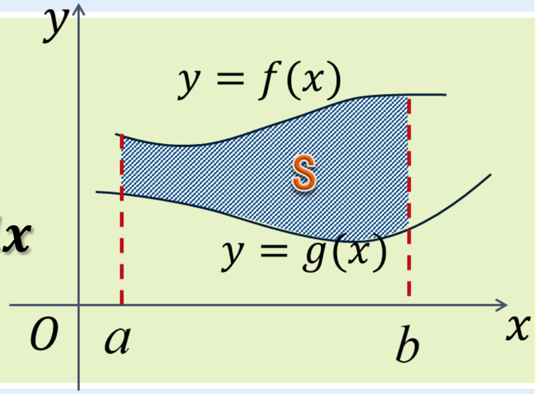
知识储备

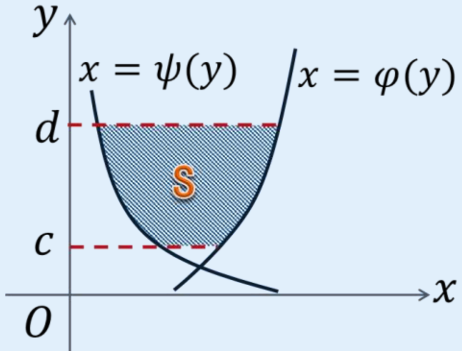


面积 $S=\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ （$f(x)\geq 0$时）

面积

$S=\int_{a}^{b}[f(x)-g(x)]\,dx$

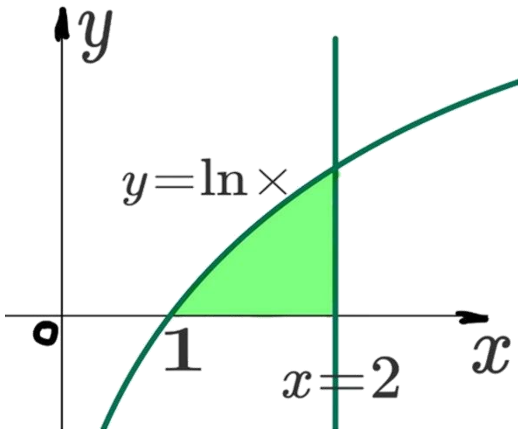




面积

$S=\int_{c}^{d}[\varphi(y)-\psi(y)]\,dy$

（1） 曲线 $y=\ln x, x=2$ 和 x 轴围成图形的面积



解:

方程组:

$$\begin{cases} y=\ln x \\ y=0 \end{cases}$$

解得 $\ln x=0$, 即 $x=1$。交点为 (1,0)。

面积表达式:

$$A=\int_1^2 ln\,x\,dx$$
$$=\left[x\ln x-x\right]_1^2$$
$$=(2ln2-2)-(1ln1-1)$$
$$=2\ln 2-1$$

（2） 曲线 $y=e^x, y=e^{-x}, x=2$ 围成图形的面积

解：

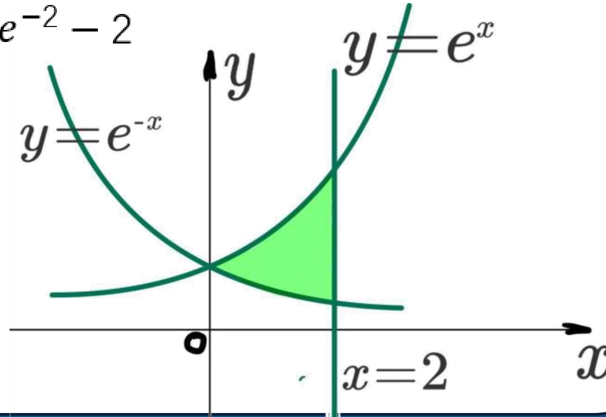
方程组：

$$\begin{cases} y=e^x \\ y=e^{-x} \end{cases}$$

解得 $e^x=e^{-x}$，即 $x=0$。交点为 (0,1)。

面积表达式：

$$A=\int_0^2(e^x-e^{-x})dx$$
$$=[e^x+e^{-x}]_0^2$$
$$=\left(e^2+e^{-2}\right)-\left(e^0+e^{-0}\right)$$
$$=e^2+e^{-2}-2$$



（3） 曲线 $x=y^2, x=2-y^2$ 围成图形的面积

解：

方程组：

$$\begin{cases} x=y^2 \\ x=2-y^2 \end{cases}$$

解得 $y^2=2-y^2$，即 $y=\pm1$。交点为（1,1）和 $(1,-1)$。

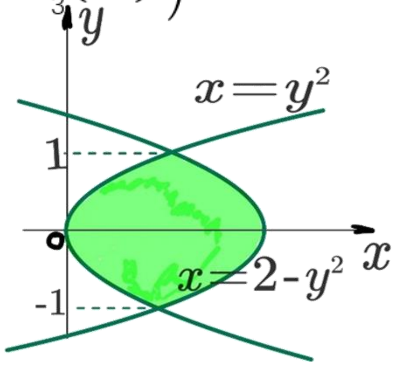
面积表达式：

$$A=\int_{-1}^{1}\left(2-y^2-y^2\right)dy$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(2-2y^2\right)dy=\left[2y-\frac{2}{3}y^3\right]_{-1}^{1}$$

$$=\left(2(1)-\frac{2}{3}(1)^3\right)-\left(2(-1)-\frac{2}{3}(-1)^3\right)$$

$$=\frac{8}{3}$$



（5） 曲线 $y=\sin x, y=\cos x$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 围成图形的面积

解：

方程组：

$$\begin{cases} y=\sin x \\ y=\cos x \end{cases}$$

解得 $\sin x=\cos x$，即 $x=\frac{\pi}{4}$。交点为 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$。

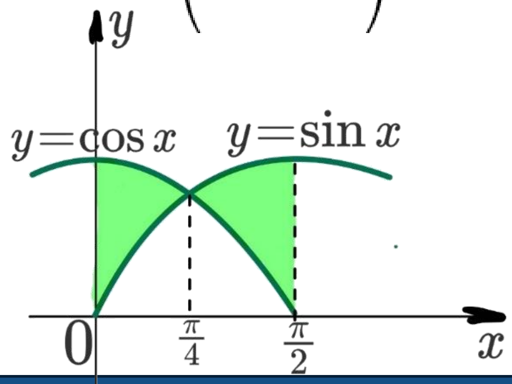
面积表达式：

$$A=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx$$

$$=[\sin x+\cos x]_{0}^{\frac{\pi}{4}}+[-\cos x-\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-(0+1)+(-0-1)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\sqrt{2}-1-1+\sqrt{2}$$



广西专升本考试

谢谢观看！

广西交通职业技术学院
通识教学部