广西专升本考试

公共科目

数 学

广西交通职业技术学院
通识教学部

题型一：微分方程的基本概念

概念	含义
微分方程	含有未知函数及其导数的方程。 如：$y''+3y'+2y=0$
微分方程的**阶**	微分方程中出现的最高阶导数的阶数。
微分方程的**通解**	包含任意常数的解，表示微分方程的所有可能解。 如：$y=x^2+C$是 $y'=2x$的通解。
微分方程的**初始条件**	给定某个点的函数值或导数值，用于确定特解。
微分方程的**特解**	满足初始条件的解。

举例

- 微分方程 $y'=y$的通解为：$y=Ce^x$，
- 微分方程$y'=y$，$y|_{x=0}=3$ 的特解为：$y=3e^x$。

初始条件

线性微分方程的一般形式：

$$y^{(n)}+\underbrace{a_1(x)}_{\text{系数}}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=\underbrace{f(x)}_{\text{非齐次项}}$$

系数

非齐次项

★当此项为0，方程称为**齐次方程**

举例

- $y''+3xy'+2y=\sin x$是__二阶线性非齐次__常微分方程
- $yy'+y=x$是__一阶非线性非齐次__常微分方程.

典型例题

题型一：微分方程的基本概念

例1：

(1).微分方程$\frac{d^3y}{dx^3}+2\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+y=\sin x$是【　】

A.二阶线性非齐次方程　B.三阶线性非齐次方程

C.三阶非线性非齐次方程　D.二阶非线性非齐次方程

(2)方程$y'''+y''y'+y=0$是【　】

A.一阶非线性方程　B.二阶非线性方程

C.三阶非线性方程　D.三阶线性方程

(3)微分方程$(y'')^2+3y'+y=0$的阶数是________.

(4)已知微分方程$y'-5y=0$，满足初始条件$y(0)=2$的特解是【　】

A.$y=2e^{5x}$　B.$y=2e^{-5x}$

C.$y=e^{5x}+1$　D.$y=e^{-5x}+1$

知识储备

1.微分方程的基本概念

概念	含义
微分方程	含有未知函数及其导数的方程。如：$y''+3y'+2y=0$
微分方程的**阶**	微分方程中出现的最高阶导数的阶数。
微分方程的**通解**	包含任意常数的解，表示微分方程的所有可能解。如：$y=Cx^2$是$xy'=2y$的通解。
微分方程的**初始条件**	给定某个点的函数值或导数值，用于确定特解。
微分方程的**特解**	满足初始条件的解。

- **线性微分方程的一般形式：**

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

- **注意**：

通解中包含的任意常数个数=微分方程的阶数

典型例题

题型一：微分方程的基本概念

练习1

（1）微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$ 的通解是（ ）

A. $y=cos(\omega x)$　B. $y=Csin(\omega x)$

C. $y=C_1cos(\omega x)+C_2sin(\omega x)$　D. $y=Ccos(\omega x)+Csin(\omega x)$

（2）微分方程 $(y')^6+3y'''y'-e^xy''=4cot\,x$ 的阶数是________.

（3）下列方程中，不是微分方程的是（ ）

A. $xyy''+x(y')^3-y^4\cdot y'=0$　B. $\frac{dy}{dx}cosx+y\cdot sinx=0$

C. $y^2-\frac{y}{x}=\frac{x}{y}$　D. $3y^2dy+3x^2dx=1$

（4）方程 $3\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+e^x=1$ 的通解中应含的任意常数个数为____

（5）$y=e^{-x}$是微分方程$y''+ay'-2y=0$的一个解，则 $a=$ __________.

（6）方程 $(y''')^2-xy'+cosy=x^2+1$ 是_____阶微分方程。

知识储备

1.微分方程的基本概念

概念	含义
微分方程	含有未知函数及其导数的方程。 如：$y''+3y'+2y=0$
微分方程的**阶**	微分方程中出现的最高阶导数的阶数。
微分方程的**通解**	包含任意常数的解，表示微分方程的所有可能解。 如：$y=Cx^2$是$xy'=2y$的通解。
微分方程的**初始条件**	给定某个点的函数值或导数值，用于确定特解。
微分方程的**特解**	满足初始条件的解。

- **线性微分方程的一般形式：**

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

- **注意**：

通解中包含的任意常数个数=微分方程的阶数

典型例题

题型一：微分方程的基本概念

练习1

（1）微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$ 的通解是（ C ）

A. $y=\cos(\omega x)$　　B. $y=C\sin(\omega x)$

C. $y=C_1\cos(\omega x)+C_2\sin(\omega x)$　　D. $y=C\cos(\omega x)+C\sin(\omega x)$

（2）微分方程 $(y')^6+3y'''y'-e^x y''=4\cot x$ 的阶数是 3 .

（3）下列方程中，不是微分方程的是（ C ）

A. $xyy''+x(y')^3-y^4\cdot y'=0$　　B. $\frac{dy}{dx}\cos x+y\cdot\sin x=0$

C. $y^2-\frac{y}{x}=\frac{x}{y}$　　D. $3y^2dy+3x^2dx=1$

（4）方程 $3\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+e^x=1$ 的通解中应含的任意常数个数为 2 。

（5）$y=e^{-x}$是微分方程$y''+ay'-2y=0$的一个解，则 $a=$ -1 .

（6）方程 $(y''')^2-xy'+\cos y=x^2+1$ 是 3 阶微分方程。

知识储备

1.微分方程的基本概念

概念	含义
微分方程	含有未知函数及其导数的方程。 如：$y''+3y'+2y=0$
微分方程的**阶**	微分方程中出现的最高阶导数的阶数。
微分方程的**通解**	包含任意常数的解，表示微分方程的所有可能解。 如：$y=Cx^2$是 $xy'=2y$的通解。
微分方程的**初始条件**	给定某个点的函数值或导数值，用于确定特解。
微分方程的**特解**	满足初始条件的解。

- **线性微分方程的一般形式：**

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

- **注意**：

通解中包含的任意常数个数=微分方程的阶数

典型例题

题型二：一阶可分离变量微分方程

例2：

（1）求微分方程$\frac{dy}{dx}=2xy$的通解.

（2）求微分方程$y'=e^{2x-y}$，$y|_{x=0}=0$的特解

知识储备

2.一阶可分离变量微分方程

- 形式：

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$$

若微分方程中的导数以y'形式出现，先改写为$\frac{dy}{dx}$.

- 解法：

① 将方程分离变量：$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$

② 两边积分：$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$

③ 求出通解后，根据初始条件求特解。

典型例题

题型二：一阶可分离变量微分方程

练习2

（7）求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x+\sin x}{\mathrm{e}^{y}}$ 的通解。

（8）求微分方程 $y'=\frac{2y}{x}$ 且 $y(1)=4$ 的特解。

知识储备

2.一阶可分离变量微分方程

- 形式：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$$

若微分方程中的导数以y'形式出现，先改写为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

- 解法：

① 将方程分离变量：$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$

② 两边积分：$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$

③ 求出通解后，根据初始条件求特解。

(7) 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+\sin x}{e^y}$ 的通解

解： 将方程变形为：$e^y\,dy=(2x+\sin x)\,dx$

对两边积分：$\int e^y\,dy=\int (2x+\sin x)\,dx$

计算积分：$e^y=x^2-\cos x+C$

因此，通解为：

$$e^y=x^2-\cos x+C$$

或 $$y=\ln(x^2-\cos x+C)$$

(8) 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}$ 且 $y(1)=4$ 的特解

解： 将方程变形为：$\frac{dy}{y}=\frac{2}{x}\,dx$

对两边积分：$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{2}{x}\,dx$

计算积分：$\ln|y|=2\ln|x|+C$

化简：$\ln|y|=\ln(x^2)+C$

$$|y|=e^{\ln(x^2)+C}=e^C\cdot x^2$$

令 $C_1=e^C$，则通解为：

$$y=C_1x^2$$

根据初始条件 $y(1)=4$，代入通解：

$$y(1)=C_1\cdot 1^2=C_1=4$$

因此，特解为：

$$y=4x^2$$

典型例题

题型三：二阶常系数齐次线性微分方程

例3：

（1）求微分方程$2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-10\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-12y=0$的通解.

（2）求微分方程$y''-2y'+2y=0$的通解。

知识储备

3.二阶常系数齐次线性微分方程

- **形式：**

$$y''+py'+qy=0,$$

其中 p 和 q 是常数。

- **通解的求解步骤：**

① 写出对应的特征方程$r^2+pr+q=0$;

② 求出特征方程的根r_1,r_2，其称为特征根;

③ 根据特征根的不同情形，按下列形式写出微分方程对应的通解:

特征方程的根r_1,r_2	微分方程的通解
两个不相等的实根$r_1\neq r_2$	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
两个相等的实根$r_1=r_2=-\frac{p}{2}$	$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
两个共轭复根$r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

典型例题

题型三：二阶常系数齐次线性微分方程

练习3

（9）求微分方程 $y''-2y'-35y=0$ 的通解。

（10）求微分方程 $y''+y'=0$ 且 $y(0)=1$，$y'(0)=2$ 的特解。

知识储备

3.二阶常系数齐次线性微分方程

- 形式：

$$y''+py'+qy=0,$$

其中 p 和 q 是常数。

- 通解的求解步骤：

① 写出对应的特征方程$r^2+pr+q=0$;

② 求出特征方程的根r_1,r_2，其称为特征根;

③ 根据特征根的不同情形，按下列形式写出微分方程对应的通解:

特征方程的根r_1,r_2	微分方程的通解
两个不相等的实根$r_1\neq r_2$	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
两个相等的实根$r_1=r_2=-\frac{p}{2}$	$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
两个共轭复根$r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

(9) 求微分方程 $y'' - 2y' - 35y = 0$ 的通解

解:

特征方程为:

$$r^2 - 2r - 35 = 0$$

求解特征根:

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4+140}}{2} = \frac{2 \pm 12}{2}$$

$$r_1 = 7, \quad r_2 = -5$$

通解为:

$$y = C_1 e^{7x} + C_2 e^{-5x}$$

(10) 求微分方程 $y'' + y' = 0$ 且 $y(0) = 1$，$y'(0) = 2$ 的特解

解:

特征方程为:

$$r^2 + r = 0$$

求解特征根: $r_1 = 0, r_2 = -1$

通解为: $y = C_1 + C_2 e^{-x}$

根据初始条件 $y(0) = 1$ 和 $y'(0) = 2$，代入通解及其导数:

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1$$

$$y'(0) = -C_2 = 2$$

联立方程组:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_2 = 2 \end{cases}$$

解得:

$$C_2 = -2, C_1 = 3$$

特解为:

$$y = 3 - 2e^{-x}$$

广西专升本考试

谢谢观看！

广西交通职业技术学院
通识教学部