2025 年广西普通高等教育专升本考试

模拟卷（2）答案及解析

一、单项选择题

1. **答案：**B
解析：因为$y' = 12x^2 + \cos x - 0$，所以$\mathrm{d}y = (12x^2 + \cos\ x)\mathrm{d}x$，代入$x = 0$得$\mathrm{d}y|_{x=0} = \mathrm{d}x$（因为cos 0=1）。

2. **答案：**B
解析：$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$（当$x \neq 1$时），$x = 1$为可去间断点。

3. **答案：**A
解析：设$g(x) = f(x) - f(-x)$，因为$g(-x) = f(-x) - f(x) == -g(x)$，
所以$g(x)$是奇函数。

4. **答案：**C
解析：利用等价无穷小替换，原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$。

5. **答案：**D
解析：选项 A 中，$1 - \cos\ x \sim \frac{1}{2}x^2$，是$x^2$的同阶无穷小；选项 B 中，$x\ln(1 + 2x) \sim x \cdot 2x = 2x^2$，与$x^2$为同阶无穷小；选项 C，$\frac{1}{2}x$阶数低于$x^2$，非等价；而选项 D，$\sin x^2 \sim x^2$，满足等价无穷小定义。

6. **答案：**C
解析：$f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$，$f''(x) = -\frac{2}{x^2}$。

7. **答案：**B
解析：根据不定积分的性质$f'(x) = [\int \sin x\, \mathrm{d}x]' = \sin\ x$，所以$f'(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$。

8. **答案：**B
解析：因为$\sin\ 2x$为奇函数，而奇函数对称区间积分为零。

9. **答案：**A
解析： $f'(x) = 3x^2 - 3$，可知驻点为$x_{1,2} = \pm 1$，比较$f(-2) = -2$，$f\big(-1\big) = 2$，$f(1) = -2$，$f(2) = 2$，所以最大值为2。

10. **答案**：D

解析：根据特征方程$r^2-3r-4=0$得特征根$r_{1,2}=-1,4$，所以通解为$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{4x}$。

二、填空题

11. **答案**：$(2,+\infty)$

解析：分母 $\sqrt{x^2-x-2}$ 要求 $x^2-x-2>0$，即$x<-1$或$x>2$。

另外 $\ln(x-1)$要求 $x>1$，综合得 $x>2$。

12. **答案**：$y=2x+\frac{1}{3}$

解析：$f(1)=\frac{1}{3}+2-\ln 1=\frac{7}{3}$，$f'(x)=x^2+2-\frac{1}{x}$，$f'(1)=2$，切线方程为 $y-\frac{7}{3}=2(x-1)$。

13. **答案**：$y=1-\frac{3}{x}$

解析：交换 x 和 y，解方程 $x=\frac{3}{1-y}$ 得反函数$y=1-\frac{3}{x}$。

14. **答案**：$\frac{3}{4}$

解析：极限为$\frac{0}{0}$型，使用洛必达法则，原式=.$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\int_0^x 3tdt)'}{(2x^2)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{4x}=\frac{3}{4}$（其中分子是变上限积分函数）。

三、计算题

15. **解**：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin 3x}{\tan x}$ （$\frac{0}{0}$型，使用洛必达法则）

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-3\cos 3x}{\sec^2 x}=\frac{1-3}{1}=-2.$

16. **解**：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x}\right)^{2x}$

原式$=\lim\limits_{x\to\infty}[1+\left(-\frac{4}{x}\right)]^{-\frac{x}{4}\times(-8)}=\mathrm{e}^{-8}.$

17. **解**：$f'(x)=2x(1-3x)^4+x^2\cdot 4(1-3x)^3\cdot(-3)$

所以$f'(1)=2(1)(-2)^4+1\cdot 4(-2)^3\cdot(-3)=32+96=128$

18. **解**：函数的定义为$(-\infty,+\infty)$

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$。

令$f'(x)=0$，得驻点$x_1=-2,x_2=1$

根据导数与单调性的关系，可知

增区间为$(-\infty,-2)$和$(1,+\infty)$，减区间为$(-2,1)$，

极大值为 $f(-2)=21$，极小值为 $f(1)=-6$。

19. **解**：原式$=\int\frac{(x+4)-(x+3)}{(x+3)(x+4)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right)\mathrm{d}x=\ln\left|x+3\right|-\ln\left|x+4\right|+\mathrm{C}$

20. **解**：原式$=\int_1^2\frac{1}{3}\left(x^3\right)'\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\ln x\Big|_1^2-\int_1^2\frac{1}{3}x^3\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{8}{3}\ln 2-0-\frac{1}{3}\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$

$=\frac{8}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{8}{3}\ln 2-\frac{1}{9}\left(8-1\right)=\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}$

21. **解**：分离变量：$(y^2+1)\mathrm{d}y=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

两边积分：$\int(y^2+1)\,\mathrm{d}y=\int\ \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

即 $\frac{1}{3}y^3+y=\mathrm{e}^x+C$

所以方程的通解为 $\frac{1}{3}y^3+y=\mathrm{e}^x+C$

四、应用题

22. **解**：（1）设底面半径为r米，高为h米。由容积公式得：

$$V=\pi r^2h=108\pi$$

由此可知 $h=\frac{108}{r^2}$

考虑总造价，其由上下底和侧面组成，有

顶面和底面，$2\times 12\pi\mathrm{r}^2=24\pi\mathrm{r}^2$ 元

侧面：$6\times 2\pi\mathrm{rh}=12\pi\mathrm{r}\times\frac{108}{\mathrm{r}^2}=\frac{1296\pi}{\mathrm{r}}$ 元

所以，总造价函数为：$C(r)=24\pi r^2+\frac{1296\pi}{r}\ (r>0)$.

（2）因为 $C'(r) = 48\pi r - \frac{1296\pi}{r^2}$

令$C'(r) = 0$，得$r = 3$，

又因为$C''(r) = 48\pi + \frac{2592\pi}{r^3} > 0$ (当$r > 0$ 时)

故当半径 $r = 3$ 米时取得最小值。

此时高度 $h = \frac{108}{3^2} = 12$ 米

23. **解**：（1）解方程组：

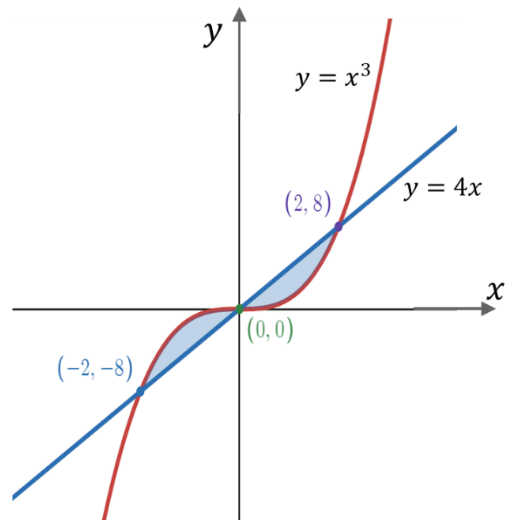
$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 4x \end{cases}$$

得：$x_1 = 0,\ x_2 = -2,\ x_3 = 2$

因此交点为：$(0,0)$、$(2,8)$、$(-2,-8)$.

（2）由图像的对称性(见右图)，

所求区域 D 的面积



$$S = 2\int_0^2 (4x - x^3)dx = 2\left[2x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 2(8-4) = 8$$