广西专升本考试

公共科目

数 学

广西交通职业技术学院
通识教学部

典型例题

题型一：函数在闭区间上的最值

例1：计算函数$f(x)=x^3-6x^2+9x+1$在区间$[0,2]$的最值。

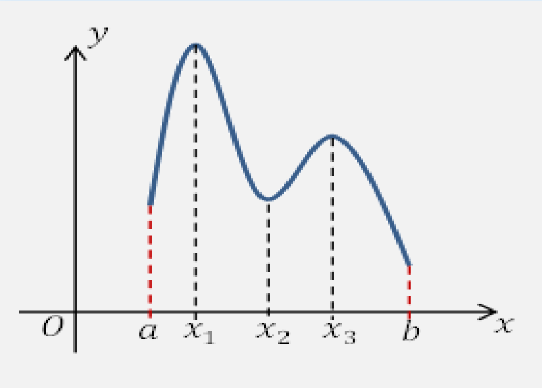
知识储备

1.计算函数$y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上最值的一般步骤

(1) 计算函数导数$f'(x)$，找到所有驻点和不可导点；

(2) 求上述驻点、不可导点和区间端点a,b处的函数值；

(3) 比较上一步骤各点的函数值的大小，得到最大值和最小值.



典型例题

题型一：函数在闭区间上的最值

练习1.计算下列函数在指定区间的最值

1) $f(x)=x^4-2x^2+3$，$[-\frac{3}{2},2]$

2) $f(x)=x^2-4x+5$，$[1,4]$

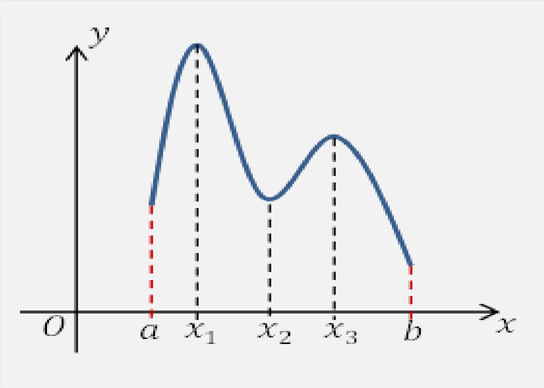
知识储备

1.计算函数$y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上最值的一般步骤

(1) 计算函数导数$f'(x)$，找到所有驻点和不可导点；

(2) 求上述驻点、不可导点和区间端点a,b处的函数值；

(3) 比较上一步骤各点的函数值的大小，得到最大值和最小值.



练习解答

1) $f(x)=x^4-2x^2+3, [-\frac{3}{2},2]$

步骤1: 求导

$$f'(x)=4x^3-4x$$

步骤2: 推断驻点和不可导点

$$4x^3-4x=0$$

$$x=0, x=1, x=-1$$

步骤3: 比较函数值

- $f(-\frac{3}{2})=\frac{57}{16}$
- $f(2)=11$
- $f(0)=3$
- $f(1)=2$
- $f(-1)=2$

所以

- 最大值：11
- 最小值：2

2) $f(x)=x^2-4x+5, [1,4]$

步骤1: 求导

$$f'(x)=2x-4$$

步骤2: 推断驻点和不可导点

$$2x-4=0$$

$$x=2$$

步骤3: 比较间端点和驻点的函数值

- $f(1)=2$
- $f(4)=5$
- $f(2)=1$

所以

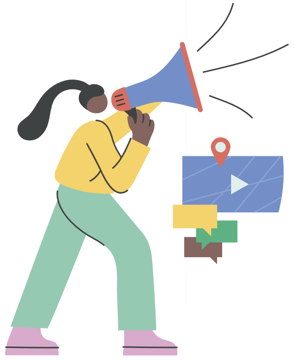
- 最大值：5
- 最小值：1

……10分钟后

■ 模块三 一元函数导数的应用

题型二：函数最值的应用

- **函数的最值**
  - **经济领域应用题**
    - **利润最大化问题**：求该公司利润最大时的产量 q 和最大利润。
    - **库存成本最小化问题**：求最优订货批量 q 以使总成本最小。
    - **广告投入优化问题**：求广告投入 x 为多少时，销售额最大。
  - **几何领域应用题**
    - **圆柱体积最大化问题**：求圆柱的高 h 和底面半径 r 为多少时，罐子的体积最大；
    - **矩形面积最大化问题**：求矩形的长和宽分别为多少时，面积最大。
    - **光线反射路径最短问题**：已知起点和终点，求光线在 x-轴上的反射点 P(x,0) 的坐标，使得光线的总路径最短。
  - **综合应用题**
    - **最优定价问题**：求价格 p 为多少时，利润最大。
    - **最优路径问题**：已知已知起点A、终点B和未知折返点P，求某人以不同速度从A到B，问折返点左边，使总时间最短。



题型二：函数最值的应用

例1：某司每天能生产A等轮胎$100x$个和B等轮胎$100y$个，且x和y满足以下关系：

$$y=\frac{40-10x}{5-x},(0\le x\le 4)$$

生产A等轮胎的利润是生产B等轮胎利润的2倍. 求总利润最大时A等轮胎和B等轮胎每天的产量.

知识储备

问题分析

根据题目，解题的关键为建立利润关于轮胎产量的函数。已知：

●每天生产A等轮胎的数量为 $100x$ 个，B等轮胎的数量为 $100y$ 个。

●x 和 y 满足关系式：$y=\frac{40-10x}{5-x},(0\le x\le 4)$

●生产A等轮胎的利润是生产B等轮胎利润的2倍。

——————————————————

解：设生产B等轮胎的利润为 p 元/个，则生产A等轮胎的利润为 $2p$ 元/个。

那么，总利润=A等轮胎利润+B等轮胎，所以总利润函数为：

$$\begin{aligned}P(x)&=100x\cdot 2p+100y\cdot p\\&=200p\cdot x+100p\cdot y\\&=200p\cdot x+100p\cdot\frac{40-10x}{5-x}\\&=100p\cdot\left(2x+\frac{40-10x}{5-x}\right)\end{aligned}$$

（这里$x\in[0,4]$）

因为 $P'(x)=100p\left[2+\left(\frac{40-10x}{5-x}\right)'\right]=100p\left[2-\frac{10}{(5-x)^2}\right]=100p\cdot\left[\frac{(5-x)^2-5}{(5-x)^2}\right]$

令$P'(x)=0$，得$(5-x)^2-5$，即$x_1=5-\sqrt{5}$ ，$x_2=5+\sqrt{5}$（舍去）

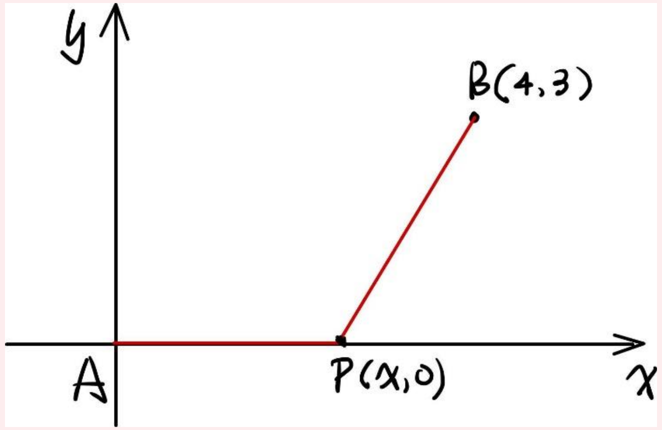
又因为 $P''(x)=100p\cdot\frac{-20}{(5-x)^3}$， 进而，$P''(5-\sqrt{5})=-100p\cdot\frac{20}{(\sqrt{5})^3}<0$

说明 $x=5-\sqrt{5}$ 是函数$P(x)$的最大值点。

所以，当A等轮胎每天的产量为$100(5-\sqrt{5})$个，B等轮胎每天的产量为$100y=100\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$个时，总利润最大。

题型二：函数最值的应用

例2：一个人从点 $A(0,0)$ 出发，先以速度 $v_1=5\ \mathrm{km/h}$ 步行到点 $P(x,0)$，再以速度 $v_2=3\ \mathrm{km/h}$ 游泳到点 $B(4,3)$。求点 P 的坐标 x 为多少时，总时间最短。



知识储备

经济领域应用题

- 利润最大化问题 —— 求该公司利润最大时的产量 q 和最大利润。
- 库存成本最小化问题 —— 求最优订货批量 q 以使总成本最小。
- 广告投入优化问题 —— 求广告投入 x 为多少时，销售额最大。

几何领域应用题

- 圆柱体积最大化问题 —— 求圆柱的高 h 和底面半径 r 为多少时，罐子的体积最大；
- 矩形面积最大化问题 —— 求矩形的长和宽分别为多少时，面积最大。
- 光线反射路径最短问题 —— 已知起点和终点，求光线在 x-轴上的反射点 P(x,0) 的坐标，使得光线的总路径最短。

综合应用题

- 最优定价问题 —— 求价格 p 为多少时，利润最大。
- 最优路径问题 —— 已知已知起点A、终点B和未知折返点P，求某人以不同速度从A到B，问折返点左边，使总时间最短。

题型二：函数最值的应用

练习2.

1.一大型超市通过调查发现，某种毛巾的销量Q(条)与其成本C(单位：元)的关系为

$$C(Q)=1000+6Q-0.003Q^2+(0.01Q)^3.$$

现每条毛巾的定价为6元，求使利润最大的销量.

2.一艘轮船A以20 km/h的速度向东行驶，同一时间另一艘轮船B在其正北82 km以16 km/h的速度向南行驶，问经过多少时间后，两船相距最近?

请合理假设，并列出上面问题的目标函数，和自变量范围。

知识储备

经济领域应用题

- 利润最大化问题 —— 求该公司利润最大时的产量 q 和最大利润。
- 库存成本最小化问题 —— 求最优订货批量 q 以使总成本最小。
- 广告投入优化问题 —— 求广告投入 x 为多少时，销售额最大。

几何领域应用题

- 圆柱体积最大化问题 —— 求圆柱的高 h 和底面半径 r 为多少时，罐子的体积最大；
- 矩形面积最大化问题 —— 求矩形的长和宽分别为多少时，面积最大。
- 光线反射路径最短问题 —— 已知起点和终点，求光线在 x-轴上的反射点 P(x,0) 的坐标，使得光线的总路径最短。

综合应用题

- 最优定价问题 —— 求价格 p 为多少时，利润最大。
- 最优路径问题 —— 已知已知起点A、终点B和未知折返点P，求某人以不同速度从A到B，问折返点左边，使总时间最短。

……10分钟后

练习解答

1.解：设利润为L，所以总利润函数为

$L(Q)=6Q-[1000+6Q-0.003Q^2+(0.01Q)^3]$，　这里$Q\in(0,+\infty)$

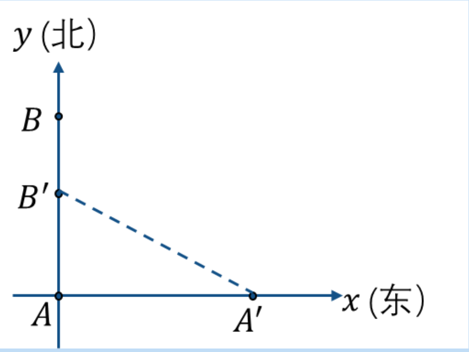
该题的目标是求函数$L(Q)$的最大值

2.解：设经过时间t后，A船移动到了点A'，B船移动到了点B'，两船的距离为y.

则两点坐标为 $A'(20t,0)$，$B'(0,\ 82-16t)$

所以有

$y=\sqrt{(20t)^2+(82-16t)^2}$　这里$t\in(0,+\infty)$



该题的目标是求函数$y=f(x)$的最大值

广西专升本考试

谢谢观看！

广西交通职业技术学院
通识教学部