广西专升本考试

公共科目

数 学

广西交通职业技术学院
通识教学部

题型：使用牛顿-莱布尼茨公式计算定积分

例1：

（1）计算$\int_0^1 \sqrt{x}(1+x^2)\,\mathrm{d}x$

解：原式 $=\int_0^1 (x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\cdot x^2)dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx + \int_0^1 x^{\frac{5}{2}}dx$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\Big|_0^1$

$= \frac{2}{3}(1-0) + \frac{2}{7}(1-0) = \frac{20}{21}$

（2）计算$\int_0^1 (x^5e^x)'\,\mathbf{d}x$

$\because \int f'(x)dx = f(x)+C$

说明 $f(x)$是 $f'(x)$的一个原函数

解：$\int_0^1 (x^5e^x)'dx = x^5e^x\Big|_0^1$

$= 1\cdot e^1 - 0$

$= e$

知识储备

牛顿-莱布尼茨公式

如果函数$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，那么

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

关于牛顿莱布尼茨公式代入的方法，例如：

$$(3x^3-4x)\Big|_1^2$$

（法一）$=(3\times 2^3-4\times 2)-(3\times 1^3-4\times 1)$

（法二）$=3\times(2^3-1^3)-4(2-1)$

题型：使用牛顿-莱布尼茨公式计算定积分

例1：

（3）已知$\int_1^b (2x+5)\,dx = 44$，则$b =$ 5或−10

解：$\int_1^b (2x+5)dx$

$= x^2\Big|_1^b + 5x\Big|_1^b = (b^2-1)+5(b-1) = 44$

$\Rightarrow b^2+5b-50=0$

$\Rightarrow (b+10)(b-5)=0$

$\Rightarrow b=5$ 或 -10

知识储备

牛顿-莱布尼茨公式

如果函数$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，那么

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

关于牛顿莱布尼茨公式代入的方法，例如：

$$(3x^3-4x)\Big|_1^2$$

（法一）$=(3\times 2^3 - 4\times 2) - (3\times 1^3 - 4\times 1)$

（法二）$=3\times(2^3-1^3) - 4(2-1)$

题型：使用牛顿-莱布尼茨公式计算定积分

知识储备

练习1：

1. 若$\int_1^b \ln x\,dx = 1$，则$b =$ ______。
2. 若$\int_0^1 (2x+k)dx = 2$，则$k =$ ______。
3. 计算 $\int_1^4 \left(x+\frac{2}{x^2}+\sqrt{x}\right)dx$
4. 计算$\int_0^1 (2^x+x^2)dx$
5. 计算$\int_0^2 e^x(1-e^{-x})dx$

牛顿-莱布尼茨公式

如果函数$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，那么

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

关于牛顿莱布尼茨公式代入的方法，例如：

$$(3x^3-4x)\Big|_1^2$$

（法一 ）$=(3\times 2^3-4\times 2)-(3\times 1^3-4\times 1)$

（法二）$=3\times(2^3-1^3)-4(2-1)$

……15分钟后

练习解答

1. 若 $\int_1^b \ln x\, dx = 1$，则 $b =$ ________.

解：

$$\int_1^b \ln x\, dx = [x\ln x - x]_1^b = (b\ln b - b) - (1\cdot\ln 1 - 1)$$

$$= b\ln b - b + 1$$

令其等于 1：

$$b\ln b - b + 1 = 1 \Rightarrow b\ln b - b = 0 \Rightarrow b(\ln b - 1) = 0$$

因为 $b > 0$，所以 $\ln b - 1 = 0 \Rightarrow \ln b = 1 \Rightarrow b = e$。

答案：$b = e$。

---

2. 若 $\int_0^1 (2x + k)\, dx = 2$，则 $k =$ ________.

解：

$$\int_0^1 (2x + k)\, dx = \left[x^2 + kx\right]_0^1 = (1^2 + k\cdot 1) - (0^2 + k\cdot 0) = 1 + k$$

令其等于 2：

$$1 + k = 2 \Rightarrow k = 1$$

答案：$k = 1$。

3. 计算 $\int_1^4 \left(x + \frac{2}{x^2} + \sqrt{x}\right) dx$

解：原式$= \int_1^4 x dx + \int_1^4 \frac{2}{x^2} dx + \int_1^4 \sqrt{x} dx$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^4 - \left[\frac{2}{x}\right]_1^4 + \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$= \frac{1}{2}(4^2 - 1^2) - (\frac{2}{4} - \frac{2}{1}) + \frac{2}{3}(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}})$$

$$= \frac{1}{2}(16 - 1) - (\frac{1}{2} - 2) + \frac{2}{3}(8 - 1)$$

$$= \frac{15}{2} + \frac{3}{2} + \frac{14}{3}$$

$$= 9 + \frac{14}{3} = \frac{41}{3}$$

4. 计算 $\int_0^1 (2^x + x^2)dx$

解：原式$= \int_0^1 2^x\, dx + \int_0^1 x^2\, dx$

$$= \left[\frac{2^x}{ln 2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{ln 2}\left(2^1 - 2^0\right) + \frac{1}{3}\left(1^3 - 0^3\right)$$

$$= \frac{1}{ln 2} + \frac{1}{3}$$

答案：$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{3}$。

5. 计算 $\int_0^2 e^x(1 - e^{-x})dx$

解：原式$= \int_0^2 e^x\, dx - \int_0^2 e^x \cdot e^{-x}\, dx$

$$= \int_0^2 e^x\, dx - \int_0^2 1\, dx$$

$$= [e^x]_0^2 - [x]_0^2$$

$$= \left(e^2 - e^0\right) - (2 - 0)$$

$$= e^2 - 1 - 2$$

$$= e^2 - 3$$

答案：$e^2 - 3$。

超星APP

课堂练习13-1

课堂练习13-2

广西专升本考试

谢谢观看！

广西交通职业技术学院
通识教学部