广西专升本考试

公共科目

数 学

广西交通职业技术学院
通识教学部

题型：无穷小量的比较

- **考试大纲要求：**

（9）※※无穷小与无穷大的概念、性质及两者之间的关系；	☆☆	●●
（10）※※无穷小阶的比较方法， ※※※用等价无穷小代换法求极限；	☆☆☆	●●

- **基础知识：**

1.关于无穷大与无穷小的概念

若$\lim\limits_{x\to\Delta} f(x)=0$，称$f(x)$是$x\to\Delta$时的**无穷小**（**量**）

若$\lim\limits_{x\to\Delta} f(x)=\infty$，称$f(x)$是$x\to\Delta$时的**无穷大**（**量**）

2.无穷大和无穷小的关系

$$\frac{1}{0}=\infty,\qquad \frac{1}{\infty}=0$$

题型：无穷小量的比较

● **基础知识：**

3.无穷小的性质

① 无穷小+无穷小=无穷小

② 无穷小×无穷小=无穷小

③ 无穷小×有界函数=无穷小

请判断下面极限值：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=$ __0__，

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\sin x+3\cos x}{x}=$ __0__，

（3）$\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=$ __0__.

题型：无穷小量的比较

● **基础知识：**

4.两个无穷小量的比较

已知$\lim\limits_{x\to\Delta}\alpha(x)=0,\lim\limits_{x\to\Delta}\beta(x)=0$，那么

$$\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\begin{cases}0\text{，则称}\alpha(x)\text{是比}\beta(x)\textbf{高阶}\text{的无穷小}\\ \infty\text{，则称}\alpha(x)\text{是比}\beta(x)\textbf{低阶}\text{的无穷小}\\ C(\text{常数}C\neq 1)\text{，则称}\alpha(x)\text{是与}\beta(x)\textbf{同阶}\text{的无穷小}\\ 1\text{，则称}\alpha(x)\text{是与}\beta(x)\textbf{等价}\text{的无穷小，记为}\alpha(x)\sim\beta(x)\end{cases}$$

重点关注

题型：无穷小量的比较

- 基础知识：

4.两个无穷小量的比较

已知$\lim\limits_{x\to\Delta}\alpha(x)=0, \lim\limits_{x\to\Delta}\beta(x)=0$，那么

$$\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\begin{cases}0, & \text{则称}\alpha(x)\text{是比}\beta(x)\textbf{高阶}\text{的无穷小}\\ \infty, & \text{则称}\alpha(x)\text{是比}\beta(x)\textbf{低阶}\text{的无穷小}\\ C(\text{常数}C\neq1), & \text{则称}\alpha(x)\text{是与}\beta(x)\textbf{同阶}\text{的无穷小}\\ 1, & \text{则称}\alpha(x)\text{是与}\beta(x)\textbf{等价}\text{的无穷小，记为}\alpha(x)\sim\beta(x)\end{cases}$$

重点关注

5.常见等价无穷小（$x\to0$时）

$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，

$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，

$e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$(1+x)^a-1\sim ax$

典型例题

题型：无穷小量的比较

填空：

1) $\sin x \sim$ ________, 2) $\arcsin x \sim$ ________,

3) $\tan x \sim$ ________, 4) $\arctan x \sim$ ________,

5) $e^x - 1 \sim$ ________, 6) $\ln(1+x) \sim$ ________,

7) $1-\cos x \sim$ ________, 8) $(1+x)^k - 1 \sim$ ________,

9) $\sin 2x \sim$ ________, 10) $e^{x^2} - 1 \sim$ ________,

11) $\ln(1+\sin x) \sim$ ________, 12) $\ln(1-x^2) \sim$ ________.

知识储备

5.常见等价无穷小（$x \to 0$时）

$\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$,

$\arcsin x \sim x$, $\arctan x \sim x$,

$e^x - 1 \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$,

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $(1+x)^a - 1 \sim ax$

典型例题

题型：无穷小量的比较

例题：计算下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)}{e^{3x}-1}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

知识储备

5.常见等价无穷小（$x\to 0$时）

$\sin x\sim x$，　$\tan x\sim x$，
$\arcsin x\sim x$，　$\arctan x\sim x$，
$e^x-1\sim x$，　$\ln(1+x)\sim x$，
$1-\cos x\sim \frac{1}{2}x^2$，　$(1+x)^a-1\sim ax$

6.等价无穷小替换定理

当$x\to\Delta$时，如果$\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$，$\beta(x)\sim\beta_1(x)$，且$\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$存在，则

$$\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)}$$

典型例题

题型：无穷小量的比较

例题：计算下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)}{e^{3x}-1}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

替换定理使用注意：

$$\lim_{x\to\Delta}\frac{A(x)+\alpha(x)}{B(x)+\beta(x)}\neq\lim_{x\to\Delta}\frac{A(x)+\alpha_1(x)}{B(x)+\beta_1(x)}$$

$$\lim_{x\to\Delta}\frac{A(x)\cdot\alpha(x)}{B(x)\cdot\beta(x)}=\lim_{x\to\Delta}\frac{A(x)\cdot\alpha_1(x)}{B(x)\cdot\beta_1(x)}$$

知识储备

5.常见等价无穷小（$x\to 0$时）

$\sin x\sim x$，　$\tan x\sim x$，

$\arcsin x\sim x$，　$\arctan x\sim x$，

$e^x-1\sim x$，　$\ln(1+x)\sim x$，

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，　$(1+x)^a-1\sim ax$

6.等价无穷小替换定理

当$x\to\Delta$时，如果$\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$，$\beta(x)\sim\beta_1(x)$，且$\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$存在，则

$$\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)}$$

典型例题

题型：无穷小量的比较

练习：

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\arctan x}{e^{x}-1}$,　　2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+x)}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$,　　4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\arcsin 2x}$

知识储备

5.常见等价无穷小（$x\to 0$时）

$\sin x\sim x$,　　$\tan x\sim x$,

$\arcsin x\sim x$,　　$\arctan x\sim x$,

$e^{x}-1\sim x$,　　$\ln(1+x)\sim x$,

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$,　　$(1+x)^{a}-1\sim ax$

6.等价无穷小替换定理

当$x\to\Delta$时，如果$\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$，$\beta(x)\sim\beta_1(x)$，且$\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$存在，则

$$\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)}$$

……5分钟后

练习解答

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\arctan x}{e^x-1}$

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3$

分析:
当$x\to 0$时,
$\arctan x\sim x$, $e^x-1\sim x$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\ln(1+x)}$

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3$

分析:
当$x\to 0$时,
$\sin 2x\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$

分析:
当$x\to 0$时,
$e^{x^2}-1\sim x^2$, $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\arcsin 2x}$

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$

分析:
当$x\to 0$时,
$\ln(1+3x)\sim 3x$, $\arcsin 2x\sim x$.

典型例题

题型：无穷小量的比较

例题：计算下列极限

（3） $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(x^2-1)}{x+1}$

知识储备

5.常见等价无穷小（$x\to0$时）

$\sin x\sim x$，　$\tan x\sim x$，
$\arcsin x\sim x$，　$\arctan x\sim x$，
$e^x-1\sim x$，　$\ln(1+x)\sim x$，
$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，　$(1+x)^a-1\sim ax$

6.等价无穷小替换定理

当$x\to\Delta$时，如果$\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$，$\beta(x)\sim\beta_1(x)$，且$\lim\limits_{x\to\Delta}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$存在，则

$$\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)}$$

典型例题

题型：无穷小量的比较

例题：计算下列极限

（3） $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x+1}$

练习：

5） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot\ln(1+x)}{x^2}$，

6） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\sin\frac{2}{x}}{\tan x}$，

7） $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin[\sin(x-1)]}{\ln x}$

知识储备

5.常见等价无穷小（$x\to 0$时）

$\sin x\sim x$， $\tan x\sim x$，
$\arcsin x\sim x$， $\arctan x\sim x$，
$e^x-1\sim x$， $\ln(1+x)\sim x$，
$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$， $(1+x)^a-1\sim ax$

6.等价无穷小替换定理

当$x\to\Delta$时，如果$\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$，$\beta(x)\sim\beta_1(x)$，且$\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$存在，则

$$\lim_{x\to\Delta}\frac{\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x})}=\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)}$$

……18分钟后

练习解答

5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x\cdot\ln(1+x)}{x^2}$

原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot x}{x^2}=1$

分析:
当$x\to0$时,
$\sin x \sim x,\ln(1+x)\sim x$

6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\cdot\sin\frac{2}{x}}{\tan x}$

原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\cdot\sin\frac{2}{x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}x\cdot\sin\frac{2}{x}$

$=0$

分析:
当$x\to0$时, $\tan x\sim x$.

7) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin[\sin(x-1)]}{\ln x}$

原式$=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{\ln[1+(x-1)]}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{x-1}$

$=1$

分析:
设$u=\sin(x-1)$,
当$x\to1$时, $u\to0$, 所以$\sin u\sim u$

典型例题

题型：无穷小量的比较

练习：

8）当$x \to 0$时，$\ln(1-ax^2)$与$e^{x^2}-1$是等价无穷小，则$a=$ ________.

知识储备

5.常见等价无穷小（$x \to 0$时）

$\sin x \sim x$，　$\tan x \sim x$，

$\arcsin x \sim x$，　$\arctan x \sim x$，

$e^x - 1 \sim x$，　$\ln(1+x) \sim x$，

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$，　$(1+x)^a - 1 \sim ax$

6.等价无穷小替换定理

当$x \to \Delta$时，如果$\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$，$\beta(x) \sim \beta_1(x)$，且$\lim\limits_{x\to\Delta}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$存在，则

$$\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)}$$

练习解答

8) 根据等价无穷小的定义，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-ax^2)}{\mathrm{e}^{x^2}-1}=1$$

因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-ax^2)}{\mathrm{e}^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-ax^2}{x^2}=-a$

所以，$a=-1$.

分析:

当$x\to 0$时,

$\ln(1-ax^2)\sim -ax^2$，$\mathrm{e}^{x^2}-1\sim x^2$

广西专升本考试

谢谢观看！

广西交通职业技术学院
通识教学部