2025年广西普通高等教育专升本考试模拟卷(3)答案及解析

1. 答案：A

答案解析：因为$\left|-\frac{\pi}{6}\right| = \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4}$，所以$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，答案选 A.

2. 答案：B

答案解析：函数在某点连续，则该点处左右极限相等且等于该点的函数值. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(2^x + \sin x) = 2^0 + \sin 0 = 1$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = a + 0^3 = a$，因为函数在$x = 0$ 处连续，所以$a = 1$，答案选 B.

3. 答案：A

答案解析：$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x + 2(x \neq 2)$，$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 4$，但函数在$x = 2$ 处无定义，所以$x = 2$ 是可去间断点，答案选 A.

4.**答案：**D

答案解析：

选项 A：因为$\left|\cos\sqrt{x}\right| \leq 1$，当$x \to +\infty$时，$\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$，根据有界函数与无穷小的乘积是无穷小，所以$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$.

选项 B：因为$|3\cos x + 2\sin x| \leq |3\cos x| + |2\sin x| \leq 3 + 2 = 5$，当$x \to \infty$时，$\frac{1}{x} \to 0$，根据有界函数与无穷小的乘积是无穷小，所以$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3\cos x + 2\sin x}{x} = 0$.

选项 C：因为$\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$，当$x \to 0$ 时，$x^3 \to 0$，根据有界函数与无穷小的乘积是无穷小，所以$\lim\limits_{x\to 0} x^3 \sin\frac{1}{x} = 0$.

选项 D：$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1 \neq 0$，答案选 D.

5.**答案：B**

答案解析：左导数$f'_{-}(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\frac{1}{3}(x^3-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{3}(x^2+x+1)=1$；右导数$f'_{+}(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{3^x-\frac{1}{3}}{x-1}=\infty$，所以左导数存在、右导数不存在，答案选 B.

6. **答案**：B

答案解析：先求一阶导数$f'(x)=-3\mathrm{e}^{-3x}$，再求二阶导数$f''(x)=(-3)\times(-3)\mathrm{e}^{-3x}=9\mathrm{e}^{-3x}$，答案选 B.

7. **答案**：D

答案解析：根据不定积分与求导的互逆关系，$\int f''(x)\mathrm{d}x=f'(x)+C$，答案选 D.

8. **答案**：A

答案解析：根据定积分的线性性质，$\int_a^b[2f(x)-3g(x)]\mathrm{d}x=2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-3\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=2\times3-3\times2=0$，答案选 A.

9.**答案**：B

答案解析：该函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$, $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$，令$f'(x)=0$，解得驻点$x_1=0$，$x_2=2$，无不可导点.$f''(x)=6x-6$，$f''(0)=-6<0$，所以在$x=0$ 处取得极大值$f(0)=0^3-3\cdot0^2+2=2$，答案选 B.

10.答案：A

答案解析：将微分方程变形为$\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=(3x+\cos x)\mathrm{d}x$，两边积分$\int\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=\int(3x+\cos x)\mathrm{d}x$，得$\mathrm{e}^y=\frac{3}{2}x^2+\sin x+C$，答案选 A.

11.答案：$[\frac{2}{3},4)$

答案解析：要使根式有意义，则 $3x-2\geq0$，即$x\geq\frac{2}{3}$；要使对数有意义，则 $4-x>0$，即$x<4$.所以定义域为$[\frac{2}{3},4)$.

12.**答案**：$16x+y-12=0$

答案解析：先对$y'=(\frac{1}{x^2})'=(x^{-2})'=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$，在点$\left(\frac{1}{2},4\right)$处的切线斜率$k=y'|_{x=\frac{1}{2}}=-\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=-16$.根据点斜式方程，切线方程为$y-4=-16\left(x-\frac{1}{2}\right)$，整理得 $16x+y-12=0$.

13. **答案**： 0

答案解析：设$f(x)=\frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^4 x}$，$f(-x)=\frac{sin(-x)\cos^3(-x)}{1+\cos^4(-x)}=-\frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^4 x}=-f(x)$，所以$f(x)$是奇函数.根据奇函数在关于原点对称的区间上积分为 0，所以$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^4 x}\mathrm{d}x=0$.

14.**答案**：$\mathrm{e}^{x^3}+\sqrt[3]{4-3x}$

答案解析：根据积分上限函数求导公式，$\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(x)$，所以$\int_2^x\left(\mathrm{e}^{t^3}+\sqrt[3]{4-3t}\right)\mathrm{d}t$关于$x$的导数为$\mathrm{e}^{x^3}+\sqrt[3]{4-3x}$.

15.求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\sin 4x-x\sin 2x}{6\sin x}$.

（法一）解：$原式=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\sin 4x-x\sin 2x}{6x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(4\sin 4x-x\sin 2x)'}{(6x)'}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{16\cos 4x-(\sin 2x+2x\cos 2x)}{6}=\frac{8}{3}$$

（法二）解：$原式=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\sin 4x-x\sin 2x}{6x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{6x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{6x}$

$$=\frac{4}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}-\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\sin 2x=\frac{8}{3}$$

16.求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$.

解：$原式=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^{\frac{x}{3}\cdot 3}=[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^{\frac{x}{3}}]^3=\mathrm{e}^3$

17.已知函数$y=\ln(x^4+3\mathrm{e}^x)$，求微分 $\mathrm{d}y$.

解：$y'=[\ln(x^4+3\mathrm{e}^x)]'=\dfrac{1}{x^4+3\mathrm{e}^x}\cdot(x^4+3\mathrm{e}^x)'=\dfrac{4x^3+3\mathrm{e}^x}{x^4+3\mathrm{e}^x}$

所以 $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\dfrac{4x^3+3\mathrm{e}^x}{x^4+3\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$

18.求不定积分$\int x^3\mathrm{e}^{x^4+5}\,\mathrm{d}x$.

解：原式 $=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int \mathrm{e}^{x^4+5}\,\mathrm{d}(x^4+5)=\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{x^4+5}+C$

19.求微分方程$y'''=x+2$ 的通解.

解：$y''=\displaystyle\int(x+2)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x^2+2x+C_1$

$y'=\displaystyle\int(\dfrac{1}{2}x^2+2x+C_1)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{6}x^3+x^2+C_1x+C_2$

$y=\displaystyle\int(\dfrac{1}{6}x^3+x^2+C_1x+C_2)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{24}x^4+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3$

故微分方程的通解为

$y=\dfrac{1}{24}x^4+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3$

20.求定积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x\sin x\mathrm{d}x$

解：原式 $=-2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}(\cos x)=-2(x\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x)$

$=-2(x\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}})=-2(0-1)=2$

21.求微分方程 y′′+4y′+3y = 0 的通解.

解：分解因式求解特征方程：$r^2+4r+3=(r+1)(r+3)=0$

解得特征根为: $r_1=-1$，$r_2=-3$

所以原微分方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-3x}$，其中$C_1$，$C_2$为任意常数.

22.解：设$BD = xkm$，则$DC = (80 - x)km$

$\mathrm{AD} = \sqrt{15^2 + \mathrm{x}^2} = \sqrt{225 + \mathrm{x}^2}\mathrm{km}$（$0 \le \mathrm{x} \le 80$）

设铁路运费单价为 $2k$，公路运费单价为 $3k$（$k > 0$）

则总运费$y = 2k(80 - x) + 3k\sqrt{225 + x^2}$

$$y' =- 2k + 3k\frac{x}{\sqrt{x^2 + 225}}$$

令$y' = 0$，解得$x = 6\sqrt{5}$（唯一驻点）

当 $0 < x < 6\sqrt{5}$时，$y' < 0$，函数y单调递减；当 $6\sqrt{5} < x < 80$ 时，$y' > 0$，函数y单调递增.所以当$x = 6\sqrt{5}km$时，运费最少.

23.解:（1）当$x = 2$ 时，$y = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$, 交点坐标为$\left(2,\frac{1}{4}\right)$; 当$x = 4$ 时，$y = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$, 交点坐标为$\left(4,\frac{1}{16}\right)$.

（2）如图所示，所求图形面积为

$$S = \int_2^4 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_2^4 x^{-2}\,\mathrm{d}x = (-\frac{1}{x})|_2^4 - \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$