

## ■ 模块二 一元函数导数与微分

## 典型例题

## 题型一:复合函数的导数

## 例1: 计算导数 y'

$$(1) y = (2x + 5)^4$$

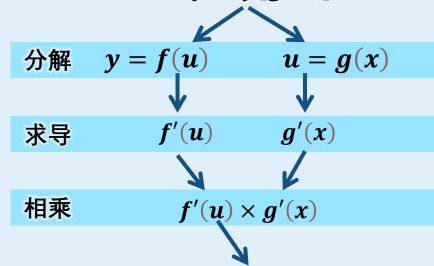
$$(2) \quad y = \cos(x^2 - \ln x)$$

(3) 
$$y = \frac{1}{\sqrt{4x^3 + 2x}}$$

### 知识储备

## 1. 复合函数求导法则

复合函数y = f[g(x)]的导数



还原符号  $y' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$ 

# ■ 模块二 一元函数导数与微分

#### 典型例题

题型一:复合函数的导数

## 练习1. 计算导数

1) 
$$y = (3x + 8)^5$$

2) 
$$y = \sin(3x + 7)$$

3) 
$$y = \sqrt{x^2 - 3}$$

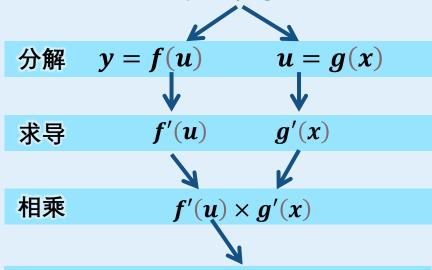
$$4) \quad y = \cos^2 x + \sin 3x$$

$$5) \ y = e^{2x} \cdot \cos x$$

#### 知识储备

## 1. 复合函数求导法则

复合函数y = f[g(x)]的导数



还原符号  $y' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$ 

## 通识教学部



# ……18分钟后



## 练习解答

1) 
$$y = (3x + 8)^5$$

解:

设 
$$y = u^{5}, u = 3x + 8$$
  
 $y'_{x} = y'_{u} \cdot u'_{x}$   
 $= 5u^{4} \cdot 3$   
 $= 15(3x + 8)^{4}$ 

**2)** 
$$y = \sin(3x + 7)$$

解:

设 
$$y = \sin u$$
,  $u = 3x + 7$   

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

$$= \cos u \cdot 3$$

$$= 3\cos(3x + 7)$$

**3)** 
$$y = \sqrt{x^2 - 3}$$

解:

设 
$$y = u^{1/2}, u = x^2 - 3$$
  
 $y'_x = y'_u \cdot u'_x$   
 $= \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$   
 $= \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}$ 

**4)** 
$$y = \cos^2(x) + \sin(3x)$$

解:

$$y' = [\cos^2 x]' + [\sin(3x)]'$$

$$= 2\cos x \cdot (-\sin x) + \cos(3x) \cdot 3$$

$$= -2\cos x \cdot \sin x + 3\cos(3x)$$

$$5) y = e^{2x} \cdot \cos(x)$$

解:

$$y' = (e^{2x})' \cdot \cos x + e^{2x} \cdot (\cos x)'$$
$$= 2e^{2x} \cdot \cos x + e^{2x} \cdot (-\sin x)$$
$$= e^{2x}(2\cos x - \sin x)$$



题型二: 求函数的二阶导数

题型三: 求函数的微分

例2: 计算

(1) 
$$y = x^2 \ln x + e^{\sin x}$$
,  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$ 

(2) 
$$y = \ln(\sin x) + \ln x \cdot \cos x$$
,  $\Re dy$ 

### 知识储备

2. 二阶导数计算

$$y = f(x)$$

$$\downarrow$$
求导  $y', f'(x)$  或  $\frac{dy}{dx}$ 

再次求导 
$$y'', f''(x)$$
或 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 

3. 函数y = f(x)微分

$$dy = y'dx$$

$$df(x) = f'(x)dx$$

题型二: 求函数的二阶导数

题型三: 求函数的微分

## 练习2.

- **6)**  $y = 3e^x \ln x$ ,  $\Re \frac{d^2y}{dx^2}$
- 7)  $f(x) = (x-1)^5$ ,  $\Re y''|_{x=3}$
- **8)**  $y = e^{5x^2 3}$ ,求dy

### 知识储备

2. 二阶导数计算

$$y = f(x)$$

$$\downarrow$$
求导  $y', f'(x)$  或  $\frac{dy}{dx}$ 

再次求导 y'', f''(x)或 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 

3. 函数y = f(x)微分

$$dy = y'dx$$

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x$$

## 通识教学部



# ……15分钟后



## 练习解答

6) 
$$y = 3e^x - \ln(x)$$
,  $\Re y''$ 

#### 解:

$$y' = (3e^x)' - (\ln x)'$$
$$= 3e^x - \frac{1}{x}$$

$$y'' = (3e^{x} - \frac{1}{x})'$$
$$= 3e^{x} + \frac{1}{x^{2}}$$

7) 
$$f(x) = (x-1)^5$$
,求  $y''|_{x=3}$ 解:

$$y' = [(x-1)^5]'$$
  
= 5(x-1)<sup>4</sup>

$$y'' = (5(x-1)^4)'$$
$$= 20(x-1)^3$$

$$y'' \Big|_{x=3} = 20(3-1)^3$$
  
=  $20 \times 2^3$   
=  $160$ 

#### 解:

$$y' = (e^{5x^2 - 3})'$$

$$= e^{5x^2 - 3} \cdot (5x^2 - 3)'$$

$$= e^{5x^2 - 3} \cdot 10x$$

$$dy = y'dx$$
$$= 10xe^{5x^2-3}dx$$



题型二: 求函数的二阶导数

## 练习3. 填空

9) 
$$d(3 - \sin x) = ($$

) dx

10) 
$$d( ) = x^4 dx$$

$$)=\frac{1}{\sqrt{x}}\mathbf{d}x$$

$$= \cos 2x \, \mathbf{d}x$$

### 知识储备

2. 二阶导数计算

$$y = f(x)$$

$$\downarrow$$
求导  $y', f'(x)$  或  $\frac{dy}{dx}$ 

再次求导 y'', f''(x)或 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 

3. 函数y = f(x)微分

$$dy = y'dx$$

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x$$

## 通识教学部



# ……6分钟后



题型二: 求函数的二阶导数

## 练习3. 填空

9) 
$$d(3 - \sin x) = (-\cos x) dx$$

10) 
$$d\left(\frac{1}{5}x^5 + C\right) = x^4 dx$$

11) 
$$d(2x^{\frac{1}{2}} + C) = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

12) 
$$\mathbf{d}\left(\frac{1}{2}\sin 2x + C\right) = \cos 2x \, \mathbf{d}x$$

### 知识储备

2. 二阶导数计算

$$y = f(x)$$

$$\downarrow$$
求导
$$y', f'(x) 或 \frac{dy}{dx}$$

再次求导 y'', f''(x)或 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 

3. 函数y = f(x)微分

$$dy = y'dx$$

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x$$

