

广西专升本考试

公共科目

数 学



广西交通职业技术学院
通识教学部

题型一：定积分的换元积分法

例1：计算 $\int_0^1 x^2 \sqrt{1+x^3} dx$

解：原式 = $\int_0^1 \sqrt{1+x^3} \cdot (1+x^3)' \cdot \frac{1}{3} dx$

$= \frac{1}{3} \int_0^1 (1+x^3)^{\frac{1}{2}} d(1+x^3)$

$= \frac{1}{3} \int_1^2 u^{\frac{1}{2}} du$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{2}{9} (\sqrt{2^3} - 1)$

$= \frac{2}{9} (2\sqrt{2} - 1)$

$u = 1+x^3$

$x=0 \text{ 时}$

$u=1$

$x=1 \text{ 时}$

$u=2$

$x: 0 \rightarrow 1$

$u: 1 \rightarrow 2$

知识储备

- 不定积分的换元积分公式

$$\begin{aligned} \int f[g(x)]g'(x)dx &= \int f[g(x)]d[g(x)] \\ &= \int f(u)du \end{aligned}$$

- 定积分的换元积分公式

$$\begin{aligned} \int_a^b f[g(x)]g'(x)dx &= \int_a^b f[g(x)]d[g(x)] \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du \end{aligned}$$

定积分换元的同时，须更换上下限

题型一：定积分的换元积分法

练习1：计算定积分

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx$$

$$(2) \int_2^e \frac{dx}{x \ln x}$$

$$(3) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$(4) \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} dx$$

知识储备

- 不定积分的换元积分公式

$$\begin{aligned} \int f[g(x)]g'(x)dx &= \int f[g(x)]d[g(x)] \\ &= \int f(u)du \end{aligned}$$

- 定积分的换元积分公式

$$\begin{aligned} \int_a^b f[g(x)]g'(x)dx &= \int_a^b f[g(x)]d[g(x)] \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du \end{aligned}$$

定积分换元的同时，须更换上下限

■ 模块四 一元函数积分学

通识教学部



$$\begin{aligned}
 (1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x d(\sin x) \\
 &= \int_0^1 u^3 du \quad (\text{设 } u = \sin x) \\
 &= \left[\frac{u^4}{4} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{4} - 0 \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} d(1+x^2) \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{du}{\sqrt{u}} \quad (\text{设 } u = 1+x^2) \\
 &= \frac{1}{2} [2\sqrt{u}]_1^2 \\
 &= \sqrt{2} - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \int_2^e \frac{dx}{x \ln x} &= \int_2^e \frac{1}{\ln x} d(\ln x) \\
 &= \int_{\ln 2}^1 \frac{du}{u} \quad (\text{设 } u = \ln x) \\
 &= [\ln |u|]_{\ln 2}^1 \\
 &= \ln 1 - \ln(\ln 2) \\
 &= 0 - \ln(\ln 2) \\
 &= -\ln(\ln 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad &\text{设 } u = \sqrt{x}, \text{ 则 } x = u^2, dx = 2u du. \\
 &\text{当 } x = 1 \text{ 时, } u = 1; \text{ 当 } x = 4 \text{ 时, } u = 2. \\
 \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} dx &= \int_1^2 \frac{2u du}{u(1+u)} \\
 &= 2 \int_1^2 \frac{du}{1+u} \\
 &= 2 [\ln |1+u|]_1^2 \\
 &= 2(\ln 3 - \ln 2) \\
 &= 2 \ln \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

题型二：定积分的分部积分法

知识储备

- 不定积分的分部积分公式

$$\int u v' dx = uv - \int u' v dx$$

- 定积分的分部积分公式

$$\int_a^b uv' dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b u' v dx$$

拆分定积分，记得处理积分上下限

例2：计算 $\int_0^1 x \cos x dx$

反对幂指三

解：原式 = $\int_0^1 x \cdot (\sin x)' dx$

$$\begin{aligned} &= x \cdot \sin x \Big|_0^1 - \int_0^1 x' \cdot \sin x dx \\ &= (1 \cdot \sin 1 - 0) - \int_0^1 \sin x dx \\ &= \sin 1 + \cos x \Big|_0^1 \\ &= \sin 1 + (\cos 1 - \cos 0) \\ &= \sin 1 + \cos 1 - 1 \end{aligned}$$

题型二：定积分的分部积分法

练习2：计算定积分

$$(1) \int_0^1 x^2 e^x dx$$

$$(2) \int_1^e x \ln x dx$$

$$(3) \int_0^1 x e^{-x} dx$$

$$(4) \int_0^{\pi} x \sin 2x dx$$

知识储备

- 不定积分的分部积分公式

$$\int u v' dx = uv - \int u' v dx$$

- 定积分的分部积分公式

$$\int_a^b u v' dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b u' v dx$$

拆分定积分，记得处理积分上下限

■ 模块四 一元函数积分学

通识教学部



$$\begin{aligned}(1) \int_0^1 x^2 e^x dx &= [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx \\&= (1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0) - 2 \int_0^1 x e^x dx \\&= e - 2 \left([x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \right) \\&= e - 2 \left((1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0) - [e^x]_0^1 \right) \\&= e - 2 (e - (e^1 - e^0)) \\&= e - 2 (e - e + 1) \\&= e - 2 \cdot 1 \\&= e - 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \int_1^e x \ln x dx &= \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\&= \left(\frac{e^2}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 0 \right) - \frac{1}{2} \int_1^e x dx \\&= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^e \\&= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \\&= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \\&= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \int_0^1 x e^{-x} dx &= [-x e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x}) dx \\&= (-1 \cdot e^{-1} - 0 \cdot e^0) + \int_0^1 e^{-x} dx \\&= -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1 \\&= -e^{-1} + (-e^{-1} + e^0) \\&= -e^{-1} - e^{-1} + 1 \\&= 1 - 2e^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) \int_0^\pi x \sin 2x dx &= \left[-\frac{x}{2} \cos 2x\right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) dx \\&= \left(-\frac{\pi}{2} \cos 2\pi - 0 \cdot \cos 0\right) + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos 2x dx \\&= -\frac{\pi}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi \\&= -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}(\sin 2\pi - \sin 0) \\&= -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}(0 - 0) \\&= -\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

历年真题

题目1 (某省2020年真题)

计算定积分 $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx$ 。

题目2 (某省2019年真题)

求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x dx$ 。

题目3 (某省2018年真题)

计算 $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$ (提示: 可先凑微分再换元)。

题目4 (某省2017年真题)

求定积分 $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} dx$ 。

题目5 (某省2021年真题)

计算定积分 $\int_0^1 x e^x dx$ 。

题目6 (某省2020年真题)

求 $\int_0^{\pi} x \sin x dx$ 。

题目7 (某省2019年真题)

计算 $\int_0^1 x \ln(1+x) dx$ 。

题目8 (某省2018年真题)

求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx$ 。

题目9 (某省2017年真题)

计算 $\int_1^e x \ln x dx$ 。

题目10 (某省2016年真题)

求 $\int_0^2 x\sqrt{x+1} dx$ (可先换元再使用分部积分法)。

广西专升本考试

谢谢观看！



广西交通职业技术学院
通识教学部