Phương trình
hồi quy tuyến tính

Nội dung

- Khái niệm
- Phân loại
- Phương trình hồi quy tuyến tính đồng nhất
- Phương trình hồi quy tuyến tính không đồng nhất

Khái niệm

- Dãy hồi quy: dãy x_0, x_1, …, x_n là hồi quy nếu mỗi phần tử của nó là hàm tuyến tính của các phần tử đứng trước.

Ví dụ: Dãy Fibonaci có:
- hàm tuyến tính: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$;
- điều kiện ban đầu: $F_0 = F_1 = 1$;

Ví dụ: (Bài toán Tháp Hà nội): số lần chuyển n đĩa:
- hàm tuyến tính: $T_n = 2T_{n-1} + 1$;
- điều kiện ban đầu: $T_1 = 1$;

Ví dụ: Dãy cấp số nhân (còn gọi là dãy hình học) có:
- hàm tuyến tính: $G_n = r.G_{n-1}$;
  (r được gọi là tỉ lệ chung)
- điều kiện ban đầu: $G_1 = a$;

Khái niệm

- Hàm tuyến tính của dãy hồi quy được gọi là *phương trình hồi quy* hay *quan hệ hồi quy.*

→ Cần tìm nghiệm dạng hiện (không phải dạng hồi quy) của phương trình hồi quy:

$$\boxed{\mathbf{x_n = f(n)\ ?}}$$

Ví dụ: Dãy cấp số nhân có:
- hàm tuyến tính: $G_n = r.G_{n-1}$;
- điều kiện ban đầu: $G_0 = a$;

➡

Có nghiệm hiện:

$$G_n = a.r^n$$

Phân loại phương trình hồi quy tuyến tính

- Có 2 loại:
  - Phương trình hồi quy tuyến tính đồng nhất
  - Phương trình hồi quy tuyến tính không đồng nhất

Phương trình hồi quy tuyến tính đồng nhất

- Là phương trình có dạng:

$$\mathbf{x_n = a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + \dots + a_kx_{n-k}}$$

  với $a_1, a_2, \dots, a_k$ là các hằng số thực và $a_k \neq 0$

  k được gọi là bậc của phương trình

- Phương trình này cần có k điều kiện ban đầu:

$$\mathbf{x_0 = c_0; \qquad x_1 = c_1; \qquad \dots \qquad x_{k-1} = c_{k-1};}$$

với $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ là các hằng số thực

Ví dụ

Ví dụ: Dãy Fibonaci có:

- hàm tuyến tính: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$;
- điều kiện ban đầu: $F_0 = F_1 = 1$;

⇒ Hàm hồi quy tuyến tính đồng nhất

Ví dụ: (Bài toán Tháp Hà nội): số lần chuyển n đĩa:

- hàm tuyến tính: $T_n = 2T_{n-1} + 1$;
- điều kiện ban đầu: $T_1 = 1$;

⇒ Hàm hồi quy tuyến tính không đồng nhất

Giải phương trình hồi quy tuyến tính đồng nhất

- Bổ đề 1:

  Cho phương trình HQTTĐN $x_n = a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + \ldots + a_kx_{n-k}$. Giả sử a_n và b_n đều thỏa mãn phương trình. Khi đó ta có $c_n = a_n + b_n$ và $d_n = \alpha a_n$ đều thỏa mãn phương trình.

- Bổ đề 2:

  Từ bổ đề 1 ta suy ra nếu phương trình HQTTĐB có một số nghiệm thì tổ hợp tuyến tính bất kỳ của chúng cũng là nghiệm của phương trình.

Tìm nghiệm hiện có dạng: $x_n = r^n$

Giải phương trình hồi quy tuyến tính đồng nhất

- Giả sử phương trình HQTTĐN $x_n = a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + \dots + a_kx_{n-k}$ có nghiệm dạng $x_n = r^n$, thay vào ta có:

$$r^n = a_1r^{n-1} + a_2r^{n-2} + \dots + a_kr^{n-k}$$

$$\Leftrightarrow \quad r^k - a_1r^{k-1} - a_2r^{k-2} - \dots - a_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Phương trình đặc trưng}$$

Giải phương trình hồi quy tuyến tính đồng nhất

- Bổ đề 3:

  r là nghiệm của phương trình đặc trưng:

$$r^k - a_1 r^{k-1} - a_2 r^{k-2} - \dots - a_k = 0$$

  nếu và chỉ nếu r^n là nghiệm của phương trình HQTTĐN tương ứng:

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \dots + a_k x_{n-k}.$$

Ví dụ: Cho dãy F_n có hàm tuyến tính: $F_n = 4F_{n-1} – 4F_{n-2}$;

- Phương trình đặc trưng của dãy:

  $r^2 – 4r + 4 = (r - 2)^2 = 0$

  Nên ta có r = 2

- Ta thấy Fn = 2^n thỏa mãn phương trình hồi quy:

  $2^n = 4.\ 2^{n-1} -4.\ 2^{n-2}$

  $4 = 4.2 - 4$

Giải phương trình hồi quy tuyến tính đồng nhất

- Định lý 1:

Cho quan hệ HQTTĐN bậc k: $x_n = a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + \ldots + a_kx_{n-k}$.

Nếu phương trình đặc trưng của quan hệ HQTTĐN có m nghiệm $r_1, r_2, \ldots, r_m$ ($m \le k$) thì ta có:

$$x_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \ldots \alpha_m r_m^n$$

cũng là nghiệm của phương trình trên, với $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ là các hằng số bất kỳ.

Giá trị của các hằng số $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ được tính dựa trên các điều kiện ban đầu.

Ví dụ

- Tìm nghiệm của phương trình hồi quy: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$,
  với $a_0 = 4$ và $a_1 = 5$.

Đáp án:

- Phương trình đặc trưng của quan hệ trên:
  $r^2 – r – 2 = 0$
  $(r+1)(r-2) = 0$ ➔ Có 2 nghiệm $r_1 = -1$ và $r_2 = 2$;
- Suy ra nghiệm của quan hệ hồi quy: $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n = \alpha_1(-1)^n + \alpha_2 2^n$
- Tìm các giá trị α_1 và α_2 dựa vào các điều kiện ban đầu:
  $a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 4$
  $a_1 = -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 5$ ➔ $\alpha_1 = 1$ và $\alpha_2 = 3$
- Suy ra nghiệm của quan hệ hồi quy: $a_n = (-1)^n + 3.2^n$

Ví dụ: tìm nghiệm của dãy Fibonaci

- Phương trình hồi quy: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$,

  với $F_0 = 1$ và $F_1 = 1$.

Đáp án:

- Phương trình đặc trưng của quan hệ trên:

  $r^2 - r - 1 = 0$

  ➔ Có 2 nghiệm $r_1 = (1+\sqrt{5})/2$ và $r_2 = (1-\sqrt{5})/2$;
- Suy ra nghiệm của quan hệ hồi quy:

  $F_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n = \alpha_1((1+\sqrt{5})/2)^n + \alpha_2((1-\sqrt{5})/2)^n$
- Tìm các giá trị α_1 và α_2 dựa vào các điều kiện ban đầu:

  $F_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 1$

  $F_1 = -\alpha_1(1+\sqrt{5})/2) + \alpha_2(1-\sqrt{5})/2) = 1$ ➔ $\alpha_1 = (-1-\sqrt{5})/2$ và $\alpha_2 = (3+\sqrt{5})/2$
- Suy ra nghiệm của quan hệ hồi quy:

  $F_n = \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right).((1+\sqrt{5})/2)^n + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right).((1-\sqrt{5})/2)^n$

Giải phương trình hồi quy tuyến tính đồng nhất

- Bổ đề 4:

  Nếu một nghiệm r_i của phương trình đặc trưng là nghiệm bội bậc m+1, tức là trong phân tích ra thừa số của phương trình đặc trưng có thừa số $(r-r_i)^{m+1}$, thì không chỉ r_i^n là nghiệm của phương trình hồi quy, mà $n.r_i^n$, $n^2.r_i^n$, …, và $n^m.r_i^n$ cũng là các nghiệm.

Ví dụ:

- Phương trình hồi quy: $F_n = 2F_{n-1} - F_{n-2}$,

  với $F_0 = 1$ và $F_1 = 1$.

Nhận xét:

- Phương trình đặc trưng của quan hệ trên:

  $r^2 – 2r + 1 = (r - 1)^2 = 0$

  ➔ Có nghiệm kép $r_1 = r_2 = 1$;

- Khi đó, $r_1^n = 1$ và $n.r_1^n = n$ đều là nghiệm của quan hệ hồi quy.

Giải phương trình hồi quy tuyến tính đồng nhất

- Định lý 2:

  Cho quan hệ HQTTĐN bậc k: $x_n = a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + \ldots + a_kx_{n-k}$.

  Giả sử phương trình đặc trưng của quan hệ có m nghiệm $r_1, r_2, \ldots, r_m$ ($m \leq k$), với số bậc tương ứng là $d_1, d_2, \ldots, d_m$.

  Khi đó ta có:

$$x_n = \sum_{i=1}^{m} r_i^n \left(\sum_{j=0}^{d_i - 1} \alpha_{i,j} n^j \right)$$

  cũng là nghiệm của phương trình trên, với $\alpha_{i,j}$ là các hằng số bất kỳ.

Ví dụ:

- Tìm nghiệm của phương trình hồi quy: $a_n = 8a_{n-2} - 16a_{n-4}$,

  với $a_0 = 3$, $a_1 = -4$, $a_2 = 4$, và $a_3 = -32$.

Đáp án:

- Phương trình đặc trưng của quan hệ trên:
  - $r^4 - 8r^2 + 16 = (r - 2)^2.(r+2)^2 = 0$
  - ➔ Có 2 nghiệm kép $r_1 = 2$ và $r_2 = -2$;
- Theo định lý 2 ta có nghiệm của PTHQ có dạng:

$$a_n = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}n)2^n + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}n)(-2)^n$$

- Ta cần tính giá trị các hằng số $\alpha_{i,j}$ dựa vào điều kiện ban đầu:

$$a_0 = \alpha_{1,0} + \alpha_{2,0} = 3$$
$$a_1 = 2(\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}) - 2(\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}) = -4$$
$$a_2 = 4(\alpha_{1,0} + 2\alpha_{1,1}) + 4(\alpha_{2,0} + 2\alpha_{2,1}) = 4$$
$$a_3 = 8(\alpha_{1,0} + 3\alpha_{1,1}) - 8(\alpha_{2,0} + 3\alpha_{2,1}) = -32$$

  ➔ $\alpha_{1,0} = 1$, $\alpha_{1,1} = -1$, $\alpha_{2,0} = 2$, $\alpha_{2,1} = 0$

- Thay vào ta có nghiệm của PTHQ:

$$a_n = (1 - n)\, 2^n + (2)(-2)^n$$

Phương trình hồi quy tuyến tính không đồng nhất

- Là phương trình có dạng:

$$\mathbf{x_n = a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + \ldots + a_kx_{n-k} + f(n)}$$

  với $a_1, a_2, \ldots, a_k$ là các hằng số thực và $a_k \neq 0$,

  k được gọi là bậc của phương trình,

  f(n) là hàm chỉ phụ thuộc vào n.

  Khi đó phương trình:

$$\mathbf{x_n = a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + \ldots + a_kx_{n-k}}$$

  được gọi là phương trình tuyến tính đồng nhất tương ứng

- Phương trình này cũng cần có k điều kiện ban đầu:

$$\mathbf{x_0 = c_0; \qquad x_1 = c_1; \quad \ldots \qquad x_{k-1} = c_{k-1};}$$

Ví dụ

- Một số phương trình tuyến tính hồi quy không đồng nhất:

  $T_n = 2T_{n-1} + 1;$

  $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + n;$

Giải phương trình hồi quy tuyến tính không đồng nhất

- Định lý 3:

  Cho phương trình hồi quy tuyến tính không đồng nhất x_n.

  Giả sử y_n là một nghiệm của phương trình.

  Khi đó, tồn tại một nghiệm z_n khác của phương trình khi và chỉ khi $t_n = y_n – z_n$ là nghiệm của phương trình tuyến tính đồng nhất tương ứng của x_n.

Giải phương trình hồi quy tuyến tính không đồng nhất

Định lý 3:

Cho phương trình hồi quy tuyến tính không đồng nhất x_n.

Giả sử y_n là một nghiệm của phương trình.

Khi đó, tồn tại một nghiệm z_n khác của phương trình khi và chỉ khi $t_n = y_n – z_n$ là nghiệm của phương trình tuyến tính đồng nhất tương ứng của x_n.

- Cách tính t_n đã biết
- Với nhiều hàm f(n) thông dụng, z_n thường có dạng tương tự như f(n)
- ➔ Tìm nghiệm y_n thỏa mãn phương trình x_n.

Giải phương trình hồi quy tuyến tính không đồng nhất

- Các bước thực hiện:
  - Bước 1: dự đoán z_n dựa trên f(n) bằng cách cho z_n bằng hàm tương tự như f(n).
  - Bước 2: thay z_n ở bước 1 vào phương trình hồi quy tuyến tính không thuần nhất x_n để xác định z_n cụ thể hơn.
  - Bước 3: Tính t_n từ phương trình hồi quy tuyến tính thuần nhất tương ứng của x_n, từ đó có nghiệm $t_n + z_n$ với các hệ số chưa cụ thể.
  - Bước 4: Thay nghiệm $t_n + z_n$ vào các điều kiện ban đầu để tìm các giá trị cụ thể cho các hệ số.

Ví dụ

- Tìm nghiệm của phương trình: $T_n = 2T_{n-1} + 1$,
  với điều kiện ban đầu $T_1 = 1$.

Đáp án:

- Bước 1: dự đoán z_n; do f(n) = 1, nên ta cho zn = b.
- Bước 2: thay z_n và T_n:
  $b = 2b + 1 \rightarrow b = -1$
- Bước 3: tính t_n:
  phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng: $T_n = 2T_{n-1}$
  phương trình đặc trưng: $r – 2 = 0 \rightarrow r = 2$
  $\rightarrow t_n = a2^n \rightarrow T_n = z_n + t_n = a2^n – 1$
- Bước 4: thay Tn vào điều kiện ban đầu để tìm a:
  $2a – 1 = 1 \rightarrow a = 1 \rightarrow T_n = 2^n – 1$