

Câu 1: Trong không gian metric  $(M, d)$ , điểm  $y$  nằm trong quả cầu mở tâm  $a$ , bán kính  $r$  nếu và chỉ nếu

KEY :  $d(y, a) < r$

Câu 2: Trong không gian metric  $(M, d)$ , điểm  $x$  nằm trong quả cầu đóng tâm  $a$ , bán kính  $r$  nếu và chỉ nếu

KEY :  $d(x, a) \leq r$

Câu 3: Quả cầu đóng tâm  $x_0$ , bán kính  $r$  trong  $(\mathbb{R}, d)$ ;  $d(x, y) = |x - y|$  là

KEY :  $[x_0 - r, x_0 + r]$

Quả cầu đóng mở  $x_0$ , bán kính  $r$  trong  $(\mathbb{R}, d)$ ;  $d(x, y) = |x - y|$  là

KEY :  $(x_0 - r, x_0 + r)$

Câu 4: Trong không gian metric  $(M, d)$ , tập  $\emptyset$  và  $M$  là

KEY : cả đóng và mở

Câu 4 : Trong không gian metric  $(M, d)$ , tập  $\{x \in M: d(x, a) < r\}$  là

KEY : mở

Câu 5 : Nếu  $C$  là tập đóng trong không gian metric  $(M, d)$ , thì  $M \setminus C$  là

KEY : mở

Nếu  $C$  là tập mở trong không gian metric  $(M, d)$ , thì  $M \setminus C$  là

KEY : đóng

Câu 6 : Nếu  $A$  là lân cận của  $x_0$  và  $A \subset B$  thì

KEY :  $B$  là lân cận của  $x_0$

Câu 7: Tìm phần trong của  $[a, b]$  trong  $\mathbb{R}$  với metric thông thường

KEY :  $(a, b)$

Câu 8: Giả sử  $(M_i, d_i)$ ,  $i = 1, 2$  là các không gian metric,  $f: M_1 \rightarrow M_2$  là ánh xạ liên tục. Khi đó

KEY :  $f^{-1}(U)$  mở trong  $M_1$ , với mọi  $U$  mở trong  $M_2$

Câu 9: Trong không gian metric  $\mathbb{R}^2$  với khoảng cách Euclide, tập  $C = \{(x, 0): a < x < b\}$  là

KEY : bị chặn

Câu 10: Cho  $B = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, 3): 0 < x \leq 1\}$  trong  $\mathbb{R}^2$ . Tìm biên  $\partial B$  của  $B$

KEY :  $\partial B = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, 3): 0 \leq x \leq 1\}$

Câu 11: Cho  $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ . Khi đó

KEY :  $A$  không là tập đóng trong  $\mathbb{R}$

Câu 12: Nếu  $f, g$  là các hàm liên tục trên không gian metric  $(M, d)$  thì  $A = \{x \in M: f(x) \leq g(x)\}$  là tập

KEY : đóng

Câu 13: Trong  $\mathbb{R}$  cho  $A = [0, +\infty)$  và  $B = \mathbb{Z}$ . Khi đó

KEY : Cả  $A$  và  $B$  đều đóng

Câu 14: Cho  $B = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, 3): 0 < x \leq 1\}$  trong  $\mathbb{R}^2$ . Tìm phần trong  $\text{int}B$ , bao đóng  $\bar{B}$  của  $B$

KEY :  $\text{int}B = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1\}; \bar{B} = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, 3): 0 \leq x \leq 1\}$

Câu 15: Bất đẳng thức nào sau không nhất thiết đúng trong không gian định chuẩn  $X$

KEY :  $\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\|, \forall x, y \in X$

Câu 16: Khẳng định nào sau đây đúng?

KEY : mọi chuẩn trong không gian định chuẩn hữu hạn chiều là tương đương

Câu 17: Khẳng định nào đúng trong không gian định chuẩn

KEY : Giao của bất kỳ tập đóng là đóng

Câu 18: Xét các mệnh đề sau:

(i) Mỗi không gian con tuyến tính của không gian định chuẩn là lồi

(ii) Hợp của hai tập lồi là lồi

(iii) Giao của hai tập lồi là lồi

Khi đó:

KEY : cả (i) và (iii) đúng

Câu 19: Xét ba mệnh đề:

(i) Mỗi không gian con đầy đủ của không gian định chuẩn là tập đóng

(ii) Mỗi không gian con đầy đủ của không gian định chuẩn là tập mở

(iii) Mỗi không gian con đầy đủ của không gian định chuẩn là tập hữu hạn

Khi đó

KEY : chỉ (i) đúng

Câu 20: Cho  $X$  và  $Y$  là hai không gian định chuẩn và  $T: X \rightarrow Y$  là toán tử tuyến tính bị chặn. Khi đó

$$\text{KEY : } \|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$$

Câu 21: Cho  $A: X \rightarrow Y$  là toán tử tuyến tính giữa hai không gian định chuẩn, trong đó  $X$  là hữu hạn chiều. Khi đó

KEY :  $A$  là liên tục

Câu 22: Xét các mệnh đề sau

- (i) Mỗi toán tử compact là bị chặn
- (ii) Toán tử tuyến tính  $T: X \rightarrow X$  liên tục tại gốc 0
- (iii) Mỗi toán tử bị chặn là compact

Khi đó:

KEY : cả (i) và (ii) đúng

Câu 9: Trong một không gian metric compact

KEY: Mỗi dãy đều có 1 dãy con là dãy Cauchy

Câu 10: Cho  $A = (0,1)$ . Khi đó  $\bar{A} =$

KEY:  $[0,1]$

Câu 11: Cho  $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ . Khi đó  $\bar{A} =$

KEY :  $A \cup \{0\}$

Câu 12: Nếu  $f$  là hàm liên tục trên không gian metric  $(M, d)$  thì  $A = \{x \in M: f(x) < \alpha\}$  với  $\alpha \in \mathbb{R}$  có định là tập

KEY : MỞ

Câu 13: Cho  $E, F$  là hai tập con trong không gian metric  $(M, d)$ , khoảng cách giữa  $E$  và  $F$  được xác định bởi  $d(E, F) = \inf_{x \in E, y \in F} d(x, y)$ . Đặc biệt  $d(x, F) = d(\{x\}, F)$ . Khi đó  $x \in \bar{A}$  khi và chỉ khi

KEY :  $d(x, A) = 0$

Câu 15: Tính chất nào sau đây không thỏa mãn tiên đề của chuẩn

$$\text{KEY : } \|kx\| = k\|x\|, \forall x \in X, \forall k \in K$$

Câu 16: Một không gian định chuẩn đầy đủ gọi là

KEY : không gian Banach

Câu 17: Khẳng định nào đúng trong không gian định chuẩn

KEY : Hợp của bất kỳ tập mở là mở

Câu 18: Xét các mệnh đề sau:

- (i) Mỗi không gian định chuẩn hữu hạn chiều là không gian Banach
- (ii) Mỗi không gian Banach là không gian vectơ hữu hạn chiều

(iii) Không gian con đóng của không gian

Banach cũng là không gian Banach Khi đó:

KEY : cả (i) và (iii) đúng

Câu 19: Không gian  $\mathcal{L}(X, Y)$  các toán tử tuyến tính liên tục từ không gian định chuẩn  $X$  vào không gian định chuẩn  $Y$  là Banach khi và chỉ khi  $Y$  là

KEY : Banach

Câu 20: Cho  $X$  và  $Y$  là hai không gian định chuẩn và  $T: X \rightarrow Y$  là toán tử tuyến tính. Khi đó

KEY :  $T$  bị chặn khi và chỉ khi  $T$  biến các tập con bị chặn của  $X$  thành các tập con bị chặn của  $Y$

Câu 21: Cho  $X$  và  $Y$  là hai không gian định chuẩn và  $A: X \rightarrow Y$  là toán tử tuyến tính bị chặn. Khi đó  $\text{Ker}A = \{x \in X: A(x) = 0\}$  là

KEY : Không gian con đóng của  $X$

Câu 22: Xét các mệnh đề sau

(i) Mỗi toán tử compact là bị chặn

(ii) Mỗi toán tử bị chặn là compact

(iii) Toán tử đồng nhất  $I: X \rightarrow X$  là compact  $\Leftrightarrow X$  hữu hạn chiều Khi đó:

KEY : cả (i) và (iii) đúng