Rotation in 3D

Sei $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein differentierbares Vektorfeld. Die Komponenten des Vektorfeldes $\mathbf{v}$ seien durch die Funktionen $v^1(x^1, x^2, x^3)$, $v^2(x^1, x^2, x^3)$, und $v^3(x^1, x^2, x^3)$ gegeben, so dass gilt:

$$\mathbf{v}(x^1, x^2, x^3) = \begin{bmatrix} v^1(x^1, x^2, x^3) \\ v^2(x^1, x^2, x^3) \\ v^3(x^1, x^2, x^3) \end{bmatrix}.$$

Die **Rotation** von $\mathbf{v}$, oft symbolisiert als $\text{rot}(\mathbf{v})$ oder im Englischen **curl** von $\mathbf{v}$, ist eine weitere wichtige Funktion in der Vektoranalysis, insbesondere in 3D. Sie wird definiert durch die folgende Determinante von partiellen Ableitungen:

$$\text{rot}(\mathbf{v}) = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix},$$

was zu

$$\text{rot}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v^3}{\partial x^2} - \frac{\partial v^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial v^1}{\partial x^3} - \frac{\partial v^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial v^2}{\partial x^1} - \frac{\partial v^1}{\partial x^2} \end{bmatrix}$$

vereinfacht wird.

Diese Formel zeigt, dass der resultierende Vektor $\text{rot}(\mathbf{v})$ Komponenten hat, die jeweils den zirkulären Eigenschaften oder der lokalen Drehung des Vektorfeldes $\mathbf{v}$ um die entsprechende Achse entsprechen. Es ist ein Schlüsselelement in der Physik, beispielsweise in den Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik und in der Fluidmechanik, um Wirbeldynamiken zu verstehen.