Definition des Gradienten (Definition 2.19): Der Gradient einer differenzierbaren reellwertigen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld $\boldsymbol{\nabla} f$ definiert durch:

$$\boldsymbol{\nabla} f := \begin{bmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \\ \vdots \\ f_{,n} \end{bmatrix}.$$

Hierbei sind $f_{,i}$ die partiellen Ableitungen von f bezüglich der Koordinaten.
Bemerkungen:

- Der Gradient transformiert ein Skalarfeld in ein Vektorfeld.
- Geometrisch repräsentiert $\boldsymbol{\nabla} f$ an jedem Punkt die Richtung des steilsten Anstiegs von f.

Beispiele für den Gradienten:

- $f(x, y) = x^2y^2$ hat den Gradienten $\boldsymbol{\nabla} f = \begin{bmatrix} 2xy^2 \\ 2x^2y \end{bmatrix}$.
- $f(x, y, z) = x^2y + z$ hat den Gradienten $\boldsymbol{\nabla} f = \begin{bmatrix} 2xy \\ x^2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Rechenregeln für Gradienten (Sätze 2.12 und 2.13):

- **Linearität:** $\boldsymbol{\nabla}(af + bg) = a\boldsymbol{\nabla} f + b\boldsymbol{\nabla} g$ für skalare Felder f, g und Konstanten a, b.
- **Produktregel:** $\boldsymbol{\nabla}(fg) = (\boldsymbol{\nabla} f)g + f\boldsymbol{\nabla} g$.
- **Kettenregel:**
  - Für $f(x) = g(h(x))$: $\boldsymbol{\nabla} f = g'(h(x))\boldsymbol{\nabla} h$.
  - Für $f(x) = g(\mathbf{h}(x))$: $f'(x) = \langle \boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{h}(x)), \mathbf{h}'(x)\rangle$.