Die fundamentalen Sätze der Vektoranalysis umfassen den Gauss'schen Integralsatz, den Stokes'schen Integralsatz und den Helmholtz'schen Zerlegungssatz. Diese Sätze verbinden jeweils bestimmte Integraloperationen mit differentialgeometrischen Eigenschaften von Vektorfeldern.

Gauss'scher Integralsatz

Der Gauss'sche Integralsatz, bekannt auch als Divergenzsatz, verbindet das Flächenintegral über eine geschlossene Oberfläche mit dem Volumenintegral der Divergenz des Vektorfeldes innerhalb des von der Oberfläche eingeschlossenen Volumens. Der Satz ist wie folgt formuliert:

$$\oint_{\partial K} \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, dA = \int_K \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dV,$$

wobei ∂K die geschlossene Oberfläche eines Körpers K im $\mathbb{R}^3$ ist, $\mathbf{v}$ ein Vektorfeld, das im Bereich von K definiert ist, und $\hat{\mathbf{n}}$ das äußere Einheitsnormalenvektorfeld auf ∂K.

Der Satz ist besonders wichtig in der Elektrodynamik und Strömungsmechanik, da er es erlaubt, die Quellendichte der Felder und Flüsse durch Oberflächen zu beschreiben.

Stokes'scher Integralsatz

Der Stokes'sche Integralsatz bildet eine Brücke zwischen dem Linienintegral eines Vektorfeldes entlang einer geschlossenen Kurve und dem Flächenintegral der Rotation dieses Feldes über eine Fläche, die von der Kurve begrenzt wird. Formal ausgedrückt durch:

$$\oint_{\partial G} \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{e}} \rangle \, ds = \int_G \langle \operatorname{rot}(\mathbf{v}), \hat{\mathbf{n}} \rangle \, dA,$$

wobei ∂G die Randkurve des Gebietes G in $\mathbb{R}^3$ ist, und $\hat{\mathbf{n}}$ wiederum das Einheitsnormalenvektorfeld auf G darstellt.

Der Satz wird häufig in der Theorie elektromagnetischer Felder und der Hydrodynamik verwendet, um die Zirkulation und Wirbelstärke von Feldern zu analysieren.

Helmholtz'scher Zerlegungssatz

Der Helmholtz'sche Zerlegungssatz besagt, dass jedes Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$ als Summe eines wirbelfreien und eines divergenzfreien Feldes dargestellt werden kann. Dies kann mathematisch wie folgt formuliert werden:

$$\mathbf{v} = \nabla\phi + \operatorname{rot}(\mathbf{A}),$$

wobei ϕ ein Skalarpotential und $\mathbf{A}$ ein Vektorpotential ist. Dieser Zerlegungssatz ist grundlegend in vielen Bereichen der Physik, weil er die Analyse komplexer Felder in einfachere Bestandteile ermöglicht.

Jeder dieser Sätze hilft, tiefere Einsichten in die Natur physikalischer Felder zu gewinnen und ist ein unverzichtbares Werkzeug in der angewandten Mathematik und Physik.