

Integration durch Substitution

In der Integralrechnung ist die Substitutionsmethode ein weit verbreiteter Ansatz, um die Integration bestimmter Integrale zu vereinfachen, indem eine Variable durch eine Funktion einer anderen Variable ersetzt wird. Diese Methode basiert auf der Kettenregel der Differentialrechnung.

Definition der Substitution

Die Substitution ist eine Methode, bei der wir eine neue Variable u einführen, die durch eine Funktion $u = g(x)$ von der ursprünglichen Variablen x definiert wird. Anschließend wird das Differential dx durch du ersetzt, welches durch das Differenzial der Funktion g ausgedrückt wird:

$$du = g'(x) dx$$

Satz zur Substitution

Für eine Funktion f und eine differenzierbare Funktion g mit $u = g(x)$, gilt, dass:

$$\int f(x) dx = \int f(g(u))g'(u) du$$

vorausgesetzt, das Integral auf der rechten Seite existiert und g' ist die Ableitung von g .

Beispiele

1. Integriere $\int x^2 \sin(x^3) dx$ mittels Substitution.

Setze $u = x^3$, dann ist $du = 3x^2 dx$ und $dx = \frac{du}{3x^2}$. Das Integral wird zu:

$$\int x^2 \sin(x^3) dx = \int x^2 \sin(u) \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3} \int \sin(u) du = -\frac{1}{3} \cos(u) + C = -\frac{1}{3} \cos(x^3) + C$$

2. Berechne $\int e^{2x} dx$ über Substitution.

Setze $u = 2x$ und dann ist $du = 2 dx$ bzw. $dx = \frac{du}{2}$. Das Integral wird dann:

$$\int e^{2x} dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$