Rechenregeln von Matrizen

Matrizen sind in vielen Bereichen der Mathematik und ihrer Anwendungen unverzichtbar. Die Rechenregeln für Matrizen umfassen verschiedene Operationen, von denen einige hier exemplarisch aufgeführt werden.

Matrixmultiplikation

Die Multiplikation zweier Matrizen A und B ist definiert, wenn die Spaltenanzahl von A gleich der Zeilenanzahl von B ist. Das Element in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte des Produktes AB wird berechnet als:

$$(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

Dieser Prozess wird für alle Elemente der resultierenden Matrix durchgeführt.

Quadratische Matrizen

Bei quadratischen Matrizen stimmt die Anzahl der Zeilen mit der Anzahl der Spalten überein. Das Produkt von zwei quadratischen Matrizen ist wieder eine quadratische Matrix. Ferner kann man Potenzen von quadratischen Matrizen bilden:

$$A^p = A \times \cdots \times A \quad (p\text{-mal})$$

Orthogonale Matrizen

Eine Matrix A ist orthogonal, wenn gilt:

$$A^{-1} = A^T$$

Hierbei ist A^T die transponierte Matrix und A^{-1} die Inverse der Matrix A. Orthogonale Matrizen haben die Eigenschaft, dass das Produkt mit ihrer Transponierten die Einheitsmatrix ergibt:

$$AA^T = A^T A = I$$

wobei I die Einheitsmatrix darstellt.

Spezielle orthogonale Matrizen

Ein Beispiel für spezielle orthogonale Matrizen sind die sog. Householder-Matrizen, welche zur Spiegelung in $\mathbb{R}^n$ verwendet werden können:

$$S(\hat{\mathbf{n}}) = I - 2\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}^T$$

Hierbei ist $\hat{\mathbf{n}}$ ein normierter Vektor und I die Einheitsmatrix. Diese Matrizen werden unter anderem in numerischen Verfahren zur Matrixdiagonalisierung eingesetzt.

Kommutator

Der Kommutator zweier quadratischer Matrizen A und B ist definiert als:

$$[A, B] = AB - BA$$

Der Kommutator misst, inwieweit zwei Matrizen nicht vertauschbar sind.