Das charakteristische Polynom einer Matrix

Das charakteristische Polynom einer quadratischen Matrix A ist ein zentrales Konzept in der linearen Algebra, das vielfältig in der Theorie der Matrizen und linearen Transformationen verwendet wird. Es bietet wichtige Einblicke in die Eigenwertstruktur der Matrix.

Definition des charakteristischen Polynoms

Für eine gegebene $n \times n$-Matrix A mit Einträgen aus einem Feld $\mathbb{K}$ (typischerweise $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), wird das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ wie folgt definiert:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A),$$

wo λ eine Variable ist, I die $n \times n$-Einheitsmatrix und det die Determinante der Matrix bezeichnet.

Konsequenzen und Nutzung

Das charakteristische Polynom ist ein Polynom vom Grad n in λ. Die Nullstellen dieses Polynoms sind die Eigenwerte der Matrix A. Das Studium dieser Nullstellen liefert somit wichtige Informationen über das Verhalten von linearen Transformationen, die durch A repräsentiert werden.

Berechnungsbeispiel

Betrachten wir eine 2×2-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A berechnet sich dann als:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{pmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - d) - (-b)(-c).$$

Dies vereinfacht sich zu:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc).$$

Hier sind $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$ die charakteristische Gleichung, deren Lösungen die Eigenwerte von A sind.

Geometrische Bedeutung

Die Eigenwerte einer Matrix können interpretiert werden als Skalierungen oder Drehungen im Raum, abhängig von der Natur der Transformation. Die Determinante $\det(A)$, die aus dem konstanten Term $(ad-bc)$ des charakteristischen Polynoms abgeleitet wird, informiert über das Volumenänderungsverhalten unter der durch A induzierten Transformation.

Zusammenfassung

Das charakteristische Polynom ist ein mächtiges Werkzeug in der linearen Algebra, das hilft, die Struktur und Eigenschaften von Matrizen zu verstehen. Es dient als Brücke zur Untersuchung von Eigenwerten, die sowohl theoretische als auch praktische Relevanz in vielen Bereichen der Mathematik und angewandten Wissenschaften haben.