2.3.2 Dreifach-Integrale

Die Theorie der Integrale in 3D ist ganz analog zur Theorie in 2D. Exemplarisch betrachten wir dazu den folgenden Satz.

Satz 2.7 Fubini-Satz für Quader
Seien $x_0, x_\mathrm{E}, y_0, y_\mathrm{E}, z_0, z_\mathrm{E} \in \mathbb{R}$ mit $x_0 < x_\mathrm{E}, y_0 < y_\mathrm{E}$ und $z_0 < z_\mathrm{E}, f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion sowie Q der Quader

$$Q := [x_0, x_\mathrm{E}] \times [y_0, y_\mathrm{E}] \times [z_0, z_\mathrm{E}] . \tag{2.90}$$

Dann gilt

$$\int_Q f \ \mathrm{d}V = \int_{z_0}^{z_\mathrm{E}} \int_{y_0}^{y_\mathrm{E}} \int_{x_0}^{x_\mathrm{E}} f(x; y; z) \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}z. \tag{2.91}$$

2.5.1 Partielle Ableitungen

Wir betrachten die folgende Definition.

Definition 2.18 Partielle Ableitung

Seien $n \in \mathbb{N}^+$und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. Die partiellen Ableitungen von f sind die Ableitungen von f nach jeweils einer der n Variablen, wobei die anderen als Konstanten betrachtet werden.

Bemerkungen:
i) Eine reellwertige Funktion heisst differntierbar, wenn alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind.
ii) Wie die Ableitung in 1D können auch die partiellen Ableitungen in nD mit Hilfe des Newton-Differenzenquotienten definiert werden gemäss

$$f_{,\mu} \left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right) := \lim_{\delta s \to 0} \frac{f\left(x_1; x_2; \ldots; x_\mu + \delta s; \ldots; x_n\right) - f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)}{\delta s}. \tag{2.134}$$

2.5.4 Divergenz

Wir betrachten die folgende Definition.

Definition 2.22 Divergenz

Seien $n \in \mathbb{N}^+$und $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein differentierbares Vektorfeld mit Komponenten

$$\mathbf{v}\left(x^1; \ldots; x^n\right) = \begin{bmatrix} v^1\left(x^1; \ldots; x^n\right) \\ \vdots \\ v^n\left(x^1; \ldots; x^n\right) \end{bmatrix}. \tag{2.149}$$

Die Divergenz von $\mathbf{v}$ ist

$$\mathrm{div}(\mathbf{v}) := v^1{}_{,1} + v^2{}_{,2} + \ldots + v^n{}_{,n}. \tag{2.150}$$

2.6.4 Zerlegungssatz

Wir betrachten den folgenden Satz.
Satz 2.23 Zerlegungssatz für Vektorfelder in 3D
Jedes differentierbare Vektorfeld $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lässt sich zerlegen in eine Summe aus einem wirbelfreien Vektorfeld $\mathbf{q} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, einem quellenfreien Vektorfeld $\mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und einem homogenen Vektorfeld $\mathbf{h} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gemäss

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{q} + \mathbf{h}. \tag{2.186}$$

5.2.1 Elementare Entsprechungen

Wir betrachten das folgende Diagramm.

Bemerkungen:
i) Die Re-Achse entspricht den reellen Zahlen.
ii) Die Gauss-Ebene entspricht den komplexen Zahlen gemäss

$$x + y \cdot \mathrm{i} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{5.15}$$