

2.3.2 Dreifach-Integrale

Die Theorie der Integrale in 3D ist ganz analog zur Theorie in 2D. Exemplarisch betrachten wir dazu den folgenden Satz.

Satz 2.7 Fubini-Satz für Quader

Seien $x_0, x_E, y_0, y_E, z_0, z_E \in \mathbb{R}$ mit $x_0 < x_E, y_0 < y_E$ und $z_0 < z_E, f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion sowie Q der Quader

$$Q := [x_0, x_E] \times [y_0, y_E] \times [z_0, z_E]. \quad (2.90)$$

Dann gilt

$$\int_Q f \, dV = \int_{z_0}^{z_E} \int_{y_0}^{y_E} \int_{x_0}^{x_E} f(x; y; z) dx \, dy \, dz. \quad (2.91)$$

2.5.1 Partielle Ableitungen

Wir betrachten die folgende Definition.

Definition 2.18 Partielle Ableitung

Seien $n \in \mathbb{N}^+$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. Die partiellen Ableitungen von f sind die Ableitungen von f nach jeweils einer der n Variablen, wobei die anderen als Konstanten betrachtet werden.

Bemerkungen:

- i) Eine reellwertige Funktion heisst differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind.
- ii) Wie die Ableitung in 1D können auch die partiellen Ableitungen in nD mit Hilfe des Newton-Differenzenquotienten definiert werden gemäss

$$f_{,\mu}(x_1; x_2; \dots; x_n) := \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{f(x_1; x_2; \dots; x_\mu + \delta s; \dots; x_n) - f(x_1; x_2; \dots; x_n)}{\delta s}. \quad (2.134)$$

2.5.4 Divergenz

Wir betrachten die folgende Definition.

Definition 2.22 Divergenz

Seien $n \in \mathbb{N}^+$ und $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein differentierbares Vektorfeld mit Komponenten

$$\mathbf{v}(x^1; \dots; x^n) = \begin{bmatrix} v^1(x^1; \dots; x^n) \\ \vdots \\ v^n(x^1; \dots; x^n) \end{bmatrix}. \quad (2.149)$$

Die Divergenz von \mathbf{v} ist

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) := v^1_{,1} + v^2_{,2} + \dots + v^n_{,n}. \quad (2.150)$$

2.6.4 Zerlegungssatz

Wir betrachten den folgenden Satz.

Satz 2.23 Zerlegungssatz für Vektorfelder in 3D

Jedes differentierbare Vektorfeld $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lässt sich zerlegen in eine Summe aus einem wirbelfreien Vektorfeld $\mathbf{q} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, einem quellenfreien Vektorfeld $\mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und einem homogenen Vektorfeld $\mathbf{h} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gemäss

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{q} + \mathbf{h}. \quad (2.186)$$

5.2.1 Elementare Entsprechungen

Wir betrachten das folgende Diagramm.

Bemerkungen:

- i) Die Re-Achse entspricht den reellen Zahlen.
- ii) Die Gauss-Ebene entspricht den komplexen Zahlen gemäss

$$x + y \cdot i \longleftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$