Definition des Flussintegrals

Wir betrachten eine parametrisierte Fläche im Bereich eines Vektorfeldes. Die Situation ist in der folgenden Skizze dargestellt.

Definition 2.17 Fluss eines Vektorfeldes

Seien M eine parametrisierte Fläche mit Einheitsnormalen-Vektor $\hat{\mathbf{n}}$ und $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein integrierbares Vektorfeld. Der Fluss des Vektorfelds v durch die Fläche M ist gegeben durch das Flussintegral:

$$\Phi := \int_M \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, \mathrm{d}A$$

Dabei bezeichnet $\langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}} \rangle$ das Skalarprodukt von $\mathbf{v}$ und der Einheitsnormale $\hat{\mathbf{n}}$, und $\mathrm{d}A$ ist das Flächenelement.

Bemerkungen:

1. Die Begriffe Flux, Fluss und Flussintegral sind synonym.
2. Für die Masseinheit erhalten wir

$$[\Phi] = [\langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}} \rangle] \cdot [A] = [\mathbf{v}] \cdot 1 \cdot [A] = \text{Einheit von } \mathbf{v} \times \text{Einheit von } A$$

3. Das Flussintegral Φ hängt (bis auf das Vorzeichen) nur von der Fläche M ab und nicht von der spezifischen Parametrisierung, solange mehrfache Durchläufe entsprechend gezählt werden.

Berechnung des Flussintegrals

Zur Berechnung des Flussintegrals wird über die Parameter u und v der parametrisierten Fläche integriert:

$$\Phi = \int_{u_0}^{u_\mathrm{E}} \int_{v_0}^{v_\mathrm{E}} \langle \mathbf{v}(x(u;v), y(u;v), z(u;v)), \hat{\mathbf{n}}(u;v) \rangle \cdot \sqrt{g(u;v)} \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u$$

Hierbei ist $\sqrt{g(u;v)}$ der Betrag des Vektors der partiellen Ableitungen von der parametrisierten Fläche nach u und v, was der Flächenverzerrung beim Übergang vom Parameter- zum Raumgebiet entspricht.

In der Literatur findet man für Flussintegrale durch eine Fläche M auch die Schreibweisen:

$$\Phi = \int_M \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, \mathrm{d}A = \int_M \mathbf{v} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{A}$$

wobei $\mathrm{d}\mathbf{A} = \hat{\mathbf{n}} \, \mathrm{d}A$, das orientierte Flächenelement darstellt.