Kapitel 1

Lineare Modifikation

Satz 1.1 Integration durch lineare Modifikation
Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion mit Stammfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $m, q, x_0, x_\mathrm{E} \in \mathbb{R}$ mit $m \neq 0$ und $x_0 < x_\mathrm{E}$, dann gilt folgendes.
(a) $\int f(m \cdot x + q)\mathrm{d}x = \frac{1}{m} \cdot F(m \cdot x + q) + c$
(b) $\int_{x_0}^{x_\mathrm{E}} f(m \cdot x + q)\mathrm{d}x = \frac{1}{m} \cdot \left(F\left(m \cdot x_\mathrm{E} + q\right) - F\left(m \cdot x_0 + q\right)\right)$
Beweis: Übung.
Beispiele:

- Wir betrachten ein unbestimmtes Elementarintegral und eine lineare Modifikation.

$$\text{elementär: } \int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x) + c$$
$$\text{linear modifiziert: } \int \cos(2x+3)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin(2x+3) + c$$

- Weiteres Beispiel für ein unbestimmtes Integral

$$f(x) = \int (7x-2)^3\mathrm{d}x = \frac{1}{28}(7x-2)^4 + c$$

- Und ein weiteres

$$f(x) = \int 3^{2x+9}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\ln(3)}3^{2x+9} + c$$