Begriffserklärung: Eigenvektoren

Eigenvektoren sind ein fundamentales Konzept in der linearen Algebra, besonders im Kontext von Matrixoperationen. Ein Eigenvektor einer Matrix A ist ein Vektor $\mathbf{v}$, der bei der Anwendung der Matrix A bis auf einen skalaren Faktor unverändert bleibt. Formell ausgedrückt erfüllt $\mathbf{v}$ die Gleichung

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

wobei λ als Eigenwert bezeichnet wird. Dies impliziert, dass der Vektor $\mathbf{v}$ von der Matrix A lediglich gestreckt oder gestaucht wird, aber seine Richtung beibehält.

Das Finden von Eigenvektoren und Eigenwerten ist entscheidend für viele Anwendungen, darunter Systemtheorie, Stabilitätsanalyse und viele Arten numerischer Analysen.

Zur Bestimmung der Eigenwerte einer Matrix löst man die charakteristische Gleichung

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

wobei I die Einheitsmatrix und $\det(\cdot)$ die Determinantenfunktion ist. Die Lösungen dieser Gleichung sind die Eigenwerte λ_i, und für jeden dieser Eigenwerte kann man anschließend die zugehörigen Eigenvektoren durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda_i I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

finden.

Beispiel:

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die charakteristische Gleichung ist

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right) = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

Die Lösungen sind $\lambda = 1, 3$. Für $\lambda = 1$, wird das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu $x = -y$. Der Eigenvektor zu $\lambda = 1$ ist also ein beliebiges Vielfaches von $(1, -1)^T$.

Für $\lambda = 3$, wird das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu $x = y$. Der Eigenvektor zu $\lambda = 3$ ist somit ein beliebiges Vielfaches von $(1, 1)^T$.