Formeln zum Thema Determinante

Definitionen und grundlegende Eigenschaften

Die Determinante einer Matrix $A \in \mathbb{M}(n, n, \mathbb{R})$ wird definiert als:

$$\det(A) := \sum_{p \in S_n} \sigma(p) \cdot A_1^{p(1)} \cdot \ldots \cdot A_n^{p(n)} \tag{6.108}$$

Spezielle Determinanten

- Determinante einer 2×2-Matrix:
$$\det(A) = A_1^1 \cdot A_2^2 - A_1^2 \cdot A_2^1 \tag{6.110}$$
- Determinante einer 3×3-Matrix:
$$\det(A) = A_1^1 \cdot A_2^2 \cdot A_3^3 + A_1^2 \cdot A_2^3 \cdot A_3^1 + A_1^3 \cdot A_2^1 \cdot A_3^2 - A_1^3 \cdot A_2^2 \cdot A_3^1 - A_1^1 \cdot A_2^3 \cdot A_3^2 - A_1^2 \cdot A_2^1 \cdot A_3^3 \tag{6.112}$$

Rechenregeln für Determinanten

- Transponierte:
$$\det(A^T) = \det(A)$$
- Produkt zweier Matrizen:
$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \tag{6.122}$$
- Skalarmultiplikation:
$$\det(a \cdot A) = a^n \cdot \det(A)$$
- Inverse:
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}, \quad \text{falls } A \text{ regulär ist} \tag{6.120}$$

Spezifische Determinanten

- Diagonalmatrix:
$$\det(D) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$
- Dreiecksmatrix:
$$\det(L) = L_1^1 \cdot L_2^2 \cdot \ldots \cdot L_n^n \tag{6.115}$$
$$\det(R) = R_1^1 \cdot R_2^2 \cdot \ldots \cdot R_n^n \tag{6.116}$$

Beispielberechnungen von Determinanten

- $\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right) = 4 - 6 = -2$
- $\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\right) = 12 - 12 = 0$
- $\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = 6 - 0 = 6$

Softwarebeispiele für Determinantenberechnungen

- MATLAB/Octave: `det = det(A);`
- Mathematica/WolframAlpha: `det = Det[A];`
- Python (NumPy): `import numpy as np; det = np.linalg.det(A);`
- Python (SymPy): `import sympy as sp; det = sp.Matrix(A).det();`