Definition, Satz und Bemerkung zu globalen Extrema

Definition

Lokale Extrema in nD: Sei $n \in \mathbb{N}^+$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweifach differentierbare Funktion. Ein Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ ist eine *kritische Stelle* von f, wenn gilt:

$$\boldsymbol{\nabla} f(P) = 0 \tag{2.204}$$

Satz

Lokale Extrema in nD: Unter den Bedingungen der obigen Definition und wenn $H = \boldsymbol{\nabla}^2 f(P)$ das Hessesche Matrix von f in Punkt P ist, gelten die folgenden Kriterien für lokale Extrema:

1. Falls alle Eigenwerte von H negativ sind, hat f bei P ein lokales Maximum.
2. Falls alle Eigenwerte von H positiv sind, hat f bei P ein lokales Minimum.
3. Falls die Eigenwerte von H sowohl positive als auch negative Werte annehmen, liegt bei P ein Sattelpunkt vor.

Bemerkungen

- Die kritischen Stellen einer Funktion können durch das Lösen des Gradienten ($\boldsymbol{\nabla} f = 0$) identifiziert werden.
- An einer kritischen Stelle kann entweder ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder ein Sattelpunkt liegen.
- Die Art des Extremums bei einer kritischen Stelle kann anhand der Eigenwerte der Hesseschen Matrix bestimmt werden.
- In 2D kann zudem die Determinante und die Spur der Hesseschen Matrix herangezogen werden, um das Vorliegen eines Extremums zu entscheiden:

  $$\text{Falls } \det(H) > 0, \text{ dann ist der kritische Punkt entweder ein Minimum oder ein Maximum, je na}$$

  $$\text{Falls } \det(H) < 0, \text{ dann liegt ein Sattelpunkt vor.}$$

- Eine kritische Stelle, bei der die Hessesche Matrix singulär ist, d.h., $\det(H) = 0$, ist in dieser Analyse nicht eindeutig klassifizierbar.