6.4.3 Determinante

Definition 6.19 Permutation & symmetrische Gruppe

Sei $n \in \mathbb{N}^+$. Die symmetrische Gruppe vom Grad n ist die Menge der n-stelligen Permutationen, d.h.

$$S_n := \{p : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} \mid p \text{ ist bijektiv } \} \tag{6.100}$$

Diese Permutationen spielen eine zentrale Rolle bei der Definition der Determinante einer Matrix.

Definition 6.21 Determinante

Für eine Matrix $A \in \mathbb{M}(n, n, \mathbb{R})$ mit $n \in \mathbb{N}^+$ ist die Determinante gegeben durch

$$\det(A) := \sum_{p \in S_n} \sigma(p) \cdot A^{p(1)}{}_1 \cdot \ldots \cdot A^{p(n)}{}_n \tag{6.108}$$

wobei $\sigma(p)$ das Vorzeichen der Permutation p ist und S_n die symmetrische Gruppe der Permutationen der Zahlen $1, \ldots, n$ darstellt.

Eigenschaften der Determinante

Multiplikativität

Für zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{M}(n, n, \mathbb{R})$ gilt:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Invarianz unter Transposition

Die Determinante einer Matrix bleibt unter Transposition unverändert:

$$\det(A^T) = \det(A)$$

Verhalten unter Zeilen- und Spaltenoperationen

Die Determinante ändert ihr Vorzeichen bei Vertauschung zweier Zeilen oder Spalten. Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit einem Skalar c multipliziert die Determinante mit c.

Berechnung spezieller Matrizen

Die Determinante einer Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$ ist 1, und die Determinante einer Diagonalmatrix ist das Produkt ihrer Diagonalelemente.

Anwendung

Die Determinante einer Matrix ist ein wichtiges Werkzeug in der linearen Algebra und Analyse, da sie unter anderem Aufschluss darüber gibt, ob ein lineares Gleichungssystem eindeutig lösbar ist oder ob eine Matrix invertierbar ist.