2.6.4 Zerlegungssatz

Wir betrachten den folgenden Satz.

Satz 2.23 Zerlegungssatz für Vektorfelder in 3D
Jedes differentierbare Vektorfeld $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lässt sich zerlegen in eine Summe aus einem wirbelfreien Vektorfeld $\mathbf{q} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, einem quellenfreien Vektorfeld $\mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und einem homogenen Vektorfeld $\mathbf{h} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gemäß

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{q} + \mathbf{h}. \tag{2.186}$$

Bemerkungen:

i) Bei einer solchen Zerlegung ist $\mathbf{w}$ ein reines Wirbelfeld und $\mathbf{q}$ ein reines Quellenfeld.

ii) Für jedes differentierbare Vektorfeld gibt es unendlich viele Möglichkeiten, eine Zerlegung der Form (2.186) zu wählen.

iii) Gemäß den Potential-Sätzen hat $\mathbf{q}$ ein Skalarpotential ϕ und $\mathbf{w}$ ein Vektorpotential $\mathbf{A}$, so dass gilt

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\nabla}\phi \quad \text{und} \quad \mathbf{w} = \mathrm{rot}(\mathbf{A}). \tag{2.187}$$

Mit Hilfe dieser Potentiale lässt sich die Zerlegung (2.186) schreiben gemäß

$$\underline{\underline{\mathbf{v}}} = \mathbf{w} + \mathbf{q} + \mathbf{h} = \mathrm{rot}(\mathbf{A}) + \boldsymbol{\nabla}\phi + \mathbf{h}. \tag{2.188}$$