Kapitel 2

Vektoranalysis

2.1 Grundlagen

2.1.1 Skalarfelder

2.1.1.1 Definition

Wir betrachten die folgende Definition.

Definition 2.1 Reellwertige Funktion in mehreren reellen Variablen

Seien $n \in \mathbb{N}^+, A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $B \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion auf A der Form $f : A \to B$ heißt reellwertige Funktion in n reellen Variablen.

$$n = 1: \quad f(x) = \ldots \tag{2.1}$$
$$n = 2: \quad f(x; y) = \ldots \tag{2.2}$$
$$n = 3: \quad f(x; y; z) = \ldots \tag{2.3}$$
$$\text{allg:} \quad f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = \ldots \tag{2.4}$$

2.5.4 Divergenz

Definition 2.22 Divergenz

Seien $n \in \mathbb{N}^+$ und $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein differentierbares Vektorfeld mit Komponenten

$$\mathbf{v}(x^1; \ldots; x^n) = \begin{bmatrix} v^1(x^1; \ldots; x^n) \\ \vdots \\ v^n(x^1; \ldots; x^n) \end{bmatrix}.$$

Die Divergenz von $\mathbf{v}$ ist

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) := v^1_{,1} + v^2_{,2} + \ldots + v^n_{,n}.$$

2.6 Hauptsätze der Vektoranalysis

2.6.1 Gauss-Integralsatz

Satz 2.19 Gauss-Integralsatz in 3D

Seien $K \subset \mathbb{R}^3$ ein Körper mit Oberfläche ∂K, äußerem Einheitsnormalen-Vektorfeld $\hat{\mathbf{n}}$ im Bereich eines differentierbaren Vektorfeldes $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dann gilt

$$\oint_{\partial K} \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, \mathrm{d}A = \Phi_{\mathbf{v}} = \int_K \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, \mathrm{d}V.$$

2.6.4 Zerlegungssatz

Satz 2.23 Zerlegungssatz für Vektorfelder in 3D

Jedes differentierbare Vektorfeld $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lässt sich zerlegen in eine Summe aus einem wirbelfreien Vektorfeld $\mathbf{q} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, einem quellenfreien Vektorfeld $\mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und einem homogenen Vektorfeld $\mathbf{h} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gemäß

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{q} + \mathbf{h}.$$

Gemäß den Potential-Sätzen hat $\mathbf{q}$ ein Skalarpotential ϕ und $\mathbf{w}$ ein Vektorpotential A, so dass gilt

$$\mathbf{q} = \nabla\phi \quad \text{und} \quad \mathbf{w} = \mathrm{rot}(\mathbf{A}).$$