Gauss-Integralsatz in der Vektoranalysis

Der Gauss-Integralsatz, einer der fundamentalen Lehrsätze der Vektoranalysis, verknüpft das Volumenintegral der Divergenz eines Vektorfeldes über ein Volumen K im $\mathbb{R}^3$ mit dem Flussintegral des Vektorfeldes über die Randfläche dieses Volumens, ∂K. Formal ausgedrückt:

$$\oint_{\partial K} \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, dA = \Phi_{\mathbf{v}} = \int_K \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dV.$$

Hierbei bezeichnet $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld, $\hat{\mathbf{n}}$ das äußere Einheits-Normalen-Vektorfeld auf ∂K, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt, dA das Oberflächenelement auf ∂K und dV das Volumenelement innerhalb K.

Der Satz hat die folgenden bemerkenswerten Implikationen:

- Die Quellstärke (oder Divergenz) des Vektorfeldes $\mathbf{v}$ im Volumen K wird direkt durch den Fluss des Vektorfeldes durch die begrenzende Fläche ∂K beschrieben.
- Ist das Vektorfeld quellenfrei ($\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$) in K, dann ist der Fluss durch jede geschlossene Oberfläche um K ebenfalls null:

$$\oint_{\partial K} \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, dA = 0.$$

Diese Gleichheit eines Flussintegrals mit einem Volumenintegral erlaubt vielfältige Anwendungen in verschiedenen naturwissenschaftlichen Bereichen:

- In der **Strömungsdynamik** kann aus der Inkompressibilität einer Flüssigkeit $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$ direkt auf das Verschwinden des Flusses durch jede geschlossene Oberfläche geschlossen werden.
- In der **Elektrodynamik** erleichtert der Integralsatz das Verständnis der Maxwell-Gleichungen bezüglich der Divergenz der elektrischen und magnetischen Felder ($\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$), indem er äquivalente integrale Formulierungen dieser Gesetze bietet. Für das elektrische Feld gilt beispielsweise:

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

und der Gauss-Integralsatz in diesem Kontext liefert:

$$\oint_{\partial V} \langle \mathbf{E}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, dA = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV.$$

Die allgemeine Anwendbarkeit des Satzes in der Analysis und physikalischen Theorien macht ihn zu einem Eckpfeiler der mathematischen Ausbildung in technischen und naturwissenschaftlichen Studiengängen.