Definition der Spur einer Matrix

Die **Spur** einer quadratischen Matrix A ist definiert als die Summe der Diagonalelemente dieser Matrix. Formal lässt sich die Spur einer $n \times n$ Matrix A ausdrücken als:

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii},$$

wobei a_{ii} das Element in der i-ten Zeile und der i-ten Spalte der Matrix A ist.

Eigenschaften der Spur

Die Spur hat mehrere wichtige Eigenschaften, die in verschiedenen mathematischen Kontexten nützlich sind:

1. **Invarianz unter Zyklischer Permutation:** Für alle quadratischen Matrizen A und B gilt:
$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

2. **Linearität:** Die Spur ist eine lineare Operation, d.h., für alle Matrizen A, B und alle Skalare c gilt:
$$\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$$
und
$$\operatorname{tr}(cA) = c \operatorname{tr}(A).$$

3. **Invarianz unter Transposition:** Die Spur einer Matrix ändert sich nicht, wenn die Matrix transponiert wird:
$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^T).$$

Diese Eigenschaften zeigen, dass die Spur ein zentraler Bestandteil in der Theorie der Matrizen und linearen Algebra ist.