Über die zweite Richtungsableitung

Die zweite Richtungsableitung, ein wichtiges Konzept in der Vektoranalysis, untersucht die Krümmung einer Funktion in einer gegebenen Richtung. Im Folgenden betrachten wir eine zweifach differentierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Hesse-Formel in nD

Gegeben seien zwei Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^n$. Die Hesse-Matrix von f wird mit $H := \nabla^2 f$ bezeichnet. Die zweite Richtungsableitung in den Richtungen $\hat{\mathbf{w}}$ und $\hat{\mathbf{v}}$ kann dann durch die Hesse-Formel ausgedrückt werden:

$$\nabla^2_{\hat{\mathbf{w}}\hat{\mathbf{v}}} f = \nabla_{\hat{\mathbf{w}}}(\nabla_{\hat{\mathbf{v}}} f) = \langle \hat{\mathbf{w}}, H \cdot \hat{\mathbf{v}} \rangle.$$

Kommutation der zweiten Richtungsableitungen

Ein interessanter Aspekt ist die Symmetrie der Hesse-Matrix, die zu einer wichtigen Eigenschaft führt, nämlich der Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Richtungen in den zweiten Richtungsableitungen:

$$\nabla^2_{\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{w}}} f = \nabla^2_{\hat{\mathbf{w}}\hat{\mathbf{v}}} f.$$

Dies gilt wegen der Symmetrie der Hesse-Matrix und des Skalarproduktes.

Spezialfälle und physikalische Interpretation

Für die Fälle, dass die Richtungsvektoren $\hat{\mathbf{e}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_n$ die Standard-Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^n$ entlang der Koordinatenachsen sind, vereinfacht sich die Formel zu:

$$\nabla^2_{\hat{e}_\mu \hat{e}_\nu} f = f_{,\nu,\mu} = H_{\nu\mu}.$$

Dies zeigt, wie die zweiten Richtungsableitungen in Bezug auf die Koordinatenachsen direkt von den entsprechenden Einträgen der Hesse-Matrix abhängen. Außerdem verschwinden die zweiten Richtungsableitungen genau dann für alle Richtungen, wenn die Hesse-Matrix H die Nullmatrix ist. Dies kann Hinweise auf Sattelpunkte oder andere kritische Punkte der Funktion geben, abhängig von weiteren Bedingungen an die Funktionsgestalt.