# Stokes-Integralsatz

Der Stokes-Integralsatz ist ein fundamentales Theorem in der Vektoranalysis, welches die Beziehung zwischen einem Linienintegral entlang einer geschlossenen Kurve und einem Flächenintegral über die Fläche, die von dieser Kurve begrenzt wird, beschreibt.

## Formulierung des Satzes

Betrachten wir ein Vektorfeld $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ mit einer Randkurve $\partial G$, dann lautet der Stokes-Integralsatz:

$$\oint_{\partial G} \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{e}} \rangle \mathrm{d}s = \Upsilon_{\mathbf{v}} = \int_G \langle \mathrm{rot}(\mathbf{v}), \hat{\mathbf{n}} \rangle \mathrm{d}A \tag{2.172}$$

Hierbei ist $\hat{\mathbf{e}}$ der Tangentialvektor entlang der Kurve $\partial G$, und $\hat{\mathbf{n}}$ das Normalenvektorfeld auf der Fläche $G$. Das Linienintegral links in der Gleichung misst die Zirkulation des Vektorfelds entlang der Randkurve, und das Flächenintegral rechts misst den Fluss der Rotation des Vektorfelds durch $G$.

## Interpretation und Anwendungen

Die physikalische Interpretation des Stokes-Integralsatzes ist, dass die Zirkulation eines Vektorfeldes um eine geschlossene Kurve gleich dem Fluss der Rotation dieses Vektorfeldes durch eine beliebige Fläche ist, die von der Kurve begrenzt wird. Diese Eigenschaft ist besonders nützlich in der Elektrodynamik und der Strömungsmechanik.

In der Elektrodynamik wird der Satz beispielsweise verwendet, um die Maxwell'schen Gleichungen in integraler Form zu umschreiben. In Strömungsmechanik kann er zur Analyse von Wirbelfeldern in Flüssigkeiten und Gasen genutzt werden.

## Bemerkungen

- Der Stokes-Integralsatz gilt allgemein sowohl in 2D als auch in 3D.
- Der Satz ist auch als Verallgemeinerung der Newton-Leibniz-Formel anzusehen.
- Die Bedeutung der Rotation in diesem Kontext ist, dass sie die Wirbeldichte eines Feldes angibt. Daher zeigt der Integralsatz, dass die Gesamtwirbelstärke innerhalb einer Fläche gleich der Zirkulation um den Rand dieser Fläche ist.
- Ein besonders interessanter Spezialfall ergibt sich, wenn $\mathrm{rot}(\mathbf{v}) = 0$ überall in $G$, dann verschwindet die Zirkulation entlang $\partial G$, was darauf hinweist, dass das Feld wirbelfrei ist.

## Abschließende Betrachtung

Der Stokes-Integralsatz ist nicht nur ein kraftvolles mathematisches Werkzeug, sondern auch fundamental für das Verständnis und die Beschreibung physikalischer Phänomene in vielen naturwissenschaftlichen und technischen Disziplinen. Die Anwendungen reichen von der Vorhersage von Wettermustern bis hin zur Konstruktion von Elektromotoren.