Definition und Formel des Flussintegrals

Die mathematische Definition des Flusses eines Vektorfeldes durch eine parametrisierte Fläche, zusammen mit der grundlegenden Formel, die das Konzept beschreibt, lässt sich wie folgt darstellen.

Definition 2.17 (Fluss eines Vektorfeldes)

Betrachten wir eine parametrisierte Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ mit einem Einheitsnormalen-Vektor $\hat{\mathbf{n}}$ und einem Vektorfeld $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, das überall in $\mathbb{R}^3$ definiert ist. Der Fluss des Vektorfeldes $\mathbf{v}$ durch die Fläche M ist definiert als das Skalarprodukt des Vektorfeldes $\mathbf{v}$ mit dem Normalenvektor $\hat{\mathbf{n}}$ über die Fläche M. Dies wird mathematisch ausgedrückt durch das Integral

$$\Phi = \int_M \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, dA,$$

wobei dA das Flächenelement auf M bezeichnet.

Bedeutung und Berechnung

Das Flussintegral Φ misst, wie viel des Vektorfeldes $\mathbf{v}$ durch die Fläche M "fließt", wobei die Richtung und Stärke des Feldes ebenso wie die Orientierung der Fläche berücksichtigt werden. Physikalisch kann der Fluss beispielsweise die Menge einer Flüssigkeit oder eines Gases beschreiben, die pro Zeiteinheit durch eine Fläche strömt.

Um das Flussintegral konkret zu berechnen, benötigt man eine Parametrisierung der Fläche M in der Form $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ für $(u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$. Weiterhin ist $\hat{\mathbf{n}}$ als der normalisierte Kreuzproduktvektor der partiellen Ableitungen $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ geben. Das vollständig ausgeschriebene Flussintegral lautet dann:

$$\Phi = \int \int_D \langle \mathbf{v}(\mathbf{r}(u, v)), \hat{\mathbf{n}}(u, v) \rangle \sqrt{g(u, v)} \, du \, dv,$$

mit $g(u, v) = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|^2$ als der Determinante der ersten Fundamentalform, welche das lokale Flächenelement beschreibt.