Beispiel einer parametrisierten Fläche

Betrachten wir eine parametrisierte Fläche gegeben durch eine Parametrisierung der Form:

$$\mathbf{P}(u,v) = \begin{bmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{bmatrix}, \quad u \in [0, 2\pi],\ v \in [0, \pi].$$

Diese Parametrisierung stellt eine Sphäre mit Radius 1 dar.

Oberflächenintegral über die Fläche

Nehmen wir an, wir wollen das Oberflächenintegral der Funktion $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ über die gesamte Fläche der Sphäre berechnen. Da die Funktion f überall auf der Sphäre den Wert $1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$ hat, reduziert sich das Berechnen des Oberflächenintegrals auf das Berechnen des Flächeninhalts der Sphäre multipliziert mit 3.

Berechnung des Flächeninhalts

Der Flächeninhalt der Sphäre kann berechnet werden durch:

$$\text{Flächeninhalt} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \|\mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v\| \; dv\, du,$$

wobei $\mathbf{P}_u$ und $\mathbf{P}_v$ die partiellen Ableitungen von $\mathbf{P}$ nach u bzw. v sind.

Berechnen wir die partiellen Ableitungen:

$$\mathbf{P}_u = \begin{bmatrix} -\sin u \sin v \\ \cos u \sin v \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_v = \begin{bmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ -\sin v \end{bmatrix}.$$

Das Kreuzprodukt von $\mathbf{P}_u$ und $\mathbf{P}_v$ ist:

$$\mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v = \begin{bmatrix} -\sin u \sin^2 v \\ \cos u \sin^2 v \\ \sin v(\cos^2 v + \sin^2 v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin u \sin^2 v \\ \cos u \sin^2 v \\ \sin v \end{bmatrix}.$$

Die Norm dieses Vektors ist:

$$\|\mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v\| = \sqrt{\sin^2 u \sin^4 v + \cos^2 u \sin^4 v + \sin^2 v} = \sin v.$$

Daher ist der Flächeninhalt der Sphäre:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin v \, dv\, du = 2\pi \left[-\cos v\right]_0^{\pi} = 2\pi(1+1) = 4\pi.$$

Das Oberflächenintegral von f über die Fläche ist somit $3 \times 4\pi = 12\pi$.