# Definitionen

Hier folgen die Definitionen wichtiger mathematischer Begriffe aus dem Skript:

## Matrizen und lineare Abbildungen

- **Matrix:** Eine reelle $m \times n$-Matrix $A$ ist eine Tabelle mit $m$ Zeilen und $n$ Spalten, den Dimensionen $m$ und $n$. Jede Eintrag $A_{ij}$ ist eine reelle Zahl. Die Menge aller solcher Matrizen wird mit $\mathbb{R}^{m \times n}$ bezeichnet.

- **Lineare Abbildung:** Eine Abbildung $a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ heißt linear, wenn sie die Form $a(x) = A \cdot x$ hat, wobei $A$ eine $n \times m$ Matrix ist. Lineare Abbildungen respektieren Addition und skalare Multiplikation.

## Orthogonale Matrizen

- Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **orthogonal**, falls $A^{-1} = A^T$ gilt. Das bedeutet, dass das Produkt $AA^T$ die Einheitsmatrix ergibt.

## Eigenwerte und Eigenvektoren

- Ein Vektor $v \neq 0$ heißt **Eigenvektor** einer Matrix $A$, wenn für einen Skalar $\lambda$, der Eigenwert, gilt: $Av = \lambda v$. Die Menge aller Eigenwerte von $A$ wird als das Spektrum von $A$ bezeichnet.

## Vektorräume

- Ein **Vektorraum** über einem Körper $\mathbb{K}$ ist eine Menge $V$ zusammen mit zwei Operationen (Vektoraddition und Skalarmultiplikation), die bestimmten Axiomen genügen, wie Kommutativität und Distributivität der Addition und Multiplikation, Existenz von additives Inverses und Neutrales Element.

## Weitere lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen

- Eine Abbildung zwischen zwei Vektorräumen über dem gleichen Körper $\mathbb{K}$ ist linear, wenn die Abbildung $a : V \to W$ die Form $a(u+v) = a(u) + a(v)$ und $a(\alpha u) = \alpha a(u)$ für alle $u, v \in V$ und alle Skalare $\alpha \in \mathbb{K}$ erfüllt.