Flussintegrale und ihre Berechnung

Definition des Flussintegrales

Gegeben sei eine parametrisierte Fläche M im Raum $\mathbb{R}^3$, zusammen mit einem Vektorfeld $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Das Flussintegral des Vektorfeldes $\mathbf{v}$ durch die Fläche M wird definiert als das Integral des Skalarprodukts von $\mathbf{v}$ und dem Einheitsnormalen-Vektor $\hat{\mathbf{n}}$ über die Fläche M:

$$\Phi := \int_M \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, dA.$$

Berechnung des Flussintegrales

Wir setzen voraus, dass M durch Parameter u und v über ein Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^2$ beschrieben wird. Dann kann das Flussintegral umgeschrieben werden als:

$$\Phi = \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} \langle \mathbf{v}(\mathbf{P}(u,v)), \hat{\mathbf{n}}(u,v) \rangle \sqrt{g(u,v)} \, dv \, du,$$

wobei $\mathbf{P}(u,v)$ die Parametrisierung der Fläche M, $\hat{\mathbf{n}}(u,v)$ der Einheitsnormalen-Vektor und $g(u,v)$ die Gramsche Determinante der ersten Fundamentalform ist.

Spezialfall: Konstanter Fluss

Falls $\langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}} \rangle = C$ konstant ist über die gesamte Fläche M, dann vereinfacht sich das Flussintegral zu:

$$\Phi = C \cdot A,$$

wobei A der Flächeninhalt von M ist:

$$A = \int_M 1 \, dA = \int_U \sqrt{g(u,v)} \, dU.$$

Zusammenhang und physikalische Interpretation

Das Flussintegral misst wie viel des Vektorfeldes $\mathbf{v}$ "durch"die Fläche M hindurchtritt, orientiert nach dem Normalenvektor $\hat{\mathbf{n}}$. Es findet Anwendung in verschiedenen physikalischen Kontexten wie der Strömungsdynamik, wo es den Volumenfluss eines Mediums durch eine Fläche beschreibt, und in der Elektrodynamik zum Berechnen des elektrischen Flusses durch eine geschlossene Fläche.