2.5.3 Hesse-Matrix

Wir betrachten die folgende Definition.

Definition 2.20 Hesse-Matrix

Seien $n \in \mathbb{N}^+$und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweifach differentierbare reellwertige Funktion. Die HesseMatrix von f ist das Vektorfeld

$$\boldsymbol{\nabla}^2 f := \left[\begin{array}{cccc} f_{1,1} & f_{1,2} & \dots & f_{1,n} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \dots & f_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{,n,1} & f_{,n,2} & \dots & f_{,n,n} \end{array} \right]. \tag{2.142}$$

Beispiele:

- Wir betrachten
  $f(x;y) := x^2 \cdot y^2$.
  Der Gradient von f ist

$$\boldsymbol{\nabla} f = \left[\begin{array}{c} f_{,1} \\ f_{,2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 2x \cdot y^2 \\ x^2 \cdot 2y \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 2xy^2 \\ 2x^2 y \end{array} \right]. \tag{2.144}$$

Die Hesse-Matrix von f ist
Wir betrachten den folgenden Satz.

Satz 2.14 Schwarz-Clairaut-Young-Satz

Seien $n \in \mathbb{N}^+$und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweifach differentierbare reellwertige Funktion mit HesseMatrix $H \in \mathbb{M}(n, n, \mathbb{R})$, dann gilt

$$H^T = H. \tag{2.146}$$

Bemerkungen:
i) Die Symmetrie der Hesse-Matrix gemäss Schwarz-Clairaut-Young-Satz ist äquivalent zur Tatsache, dass die partiellen Ableitungen vertauscht werden dürfen, d.h. für alle $\mu, \nu \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$f_{\nu,\mu} = f_{,\mu,\nu}. \tag{2.147}$$

ii) Weil die Hesse-Matrix symmetrisch ist, ist sie diagonalisierbar, d.h. ähnlich zu einer diagonalen Matrix.
Wir betrachten die folgende Definition.

Definition 2.21 Laplace-Ableitung

Seien $n \in \mathbb{N}^+$und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweifach differentierbare reellwertige Funktion. Die Laplace-Ableitung von f ist

$$\Delta f := \operatorname{tr}\left(\nabla^2 f\right) = f_{,1,1} + f_{,2,2} + \ldots + f_{,n,n}. \tag{2.148}$$