Rechenregeln für den Gradienten

Der Gradient ∇f einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist definiert als der Vektor der partiellen Ableitungen:

$$\boldsymbol{\nabla} f := \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Rechenregeln

Es gelten verschiedene Rechenregeln, wenn man mit Operatoren wie dem Gradienten arbeitet. Hier sind einige wichtige:

- **Linearität**: Der Gradient ist ein linearer Operator. Für zwei differenzierbare Funktionen f und g und beliebige reelle Zahlen a und b gilt:

  $$\nabla(af + bg) = a\nabla f + b\nabla g.$$

- **Produktregel**: Für das Produkt zweier differenzierbarer Funktionen f und g gilt die folgende Regel:

  $$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f.$$

- **Quotientenregel**: Für den Quotienten zweier differenzierbarer Funktionen f und g, wobei $g \neq 0$, gilt:

  $$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}.$$

- **Kettenregel**: Für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und eine differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei g eine Funktion von f ist (d.h. $g = h(f(x_1, \ldots, x_n))$), gilt:

  $$\nabla g = h'(f)\nabla f.$$

Diese Regeln ermöglichen es, Gradienten unter verschiedenen mathematischen Operationen effektiv zu berechnen und spielen eine fundamentale Rolle in Gebieten wie dem maschinellen Lernen, der Optimierung und in vielen physikalischen Anwendungen.