Definition und Satz von Richtungsableitungen

Wir betrachten die **Definition 2.26** von Seite 53 des Kapitels über die Vektoranalysis aus dem Abschnitt zur Funktionsdiskussion in mehreren Variablen, spezifischer der ersten Richtungsableitung.

Definition 2.26 - Richtungsableitung in nD:
Seien $n \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differentierbare Funktion und $\hat{e} \in \mathbb{R}^n$ ein Einheitsvektor. Dann ist die Richtungsableitung von f in Richtung $\hat{e}$ definiert als die reelle Zahl

$$\nabla_{\hat{e}} f = \langle \hat{e}, \nabla f \rangle.$$

Hierbei bezeichnet ∇f den Gradienten von f, und das Skalarprodukt $\langle \hat{e}, \nabla f \rangle$ misst die Änderungsrate von f in Richtung von $\hat{e}$.

Die **physikalische Interpretation** dieser Definition ist, dass die Richtungsableitung die Steigung der Funktion f in der Richtung des Einheitsvektors $\hat{e}$ angibt. Wenn beispielsweise $\hat{e}$ die Richtung des steilsten Anstiegs an einem Punkt ist, dann ist $\nabla_{\hat{e}} f$ der maximale Wert des Gradienten an diesem Punkt.

Beispiel:
Betrachten wir eine Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ in der Ebene. Der Gradient ∇f ist gegeben durch

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Für einen Einheitsvektor $\hat{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ist die Richtungsableitung

$$\nabla_{\hat{e}} f = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(2x + 2y) = \sqrt{2}(x + y).$$

Dies gibt die Änderungsrate von f entlang der Linie $y = x$.