Formelzusammenfassung Seiten 30–40

Seite 30

Definition des Integrals über ein Gebiet:

$$\int_G f\,dA \equiv \text{Volumen zwischen } G \text{ und dem Graphen von } f.$$

Maßeinheit des Integrals:

$$\left[\int_G f\,dA\right] = [V] = [A]\cdot[f] = [x]\cdot[y]\cdot[f] = [x]\cdot[y]\cdot[z].$$

Seite 31

Alternative Schreibweisen für Integrale:

$$\begin{aligned} I &= \int_G f\,dA = \int_G f\,dG = \int_G f\,dR^2 = \int_G f\,dx^2 = \int_G f\,d^2x = \int_G f\,d\mu \\ &= \iint_G f\,dA = \iint_G f\,dG = \iint_G f\,dR^2 = \iint_G f\,dx^2 = \iint_G f\,d^2x = \iint_G f\,d\mu \\ &= \int_G f(x;y)\,dx\,dy = \iint_G f(x;y)\,dx\,dy \qquad (2.66) \end{aligned}$$

Lokaler Beitrag:

$$\delta I \approx f(x;y)\cdot \qquad (2.67)$$

Globale Integration:

$$I = \int_G f\,dA \qquad (2.68)$$

Linearität des Integrals in 2D (Satz 2.2):

(a) Faktor-Regel:

$$\int_G a\cdot g\,dA = a\int_G g\,dA \qquad (2.69)$$

(b) Summen-Regel:

$$\int_G (g+h)\,dA = \int_G g\,dA + \int_G h\,dA \qquad (2.70)$$

(c) Linearität:

$$\int_G (a\cdot g + b\cdot h)\,dA = a\int_G g\,dA + b\int_G h\,dA \qquad (2.71)$$

Seite 32

Zerlegungssatz in 2D (Satz 2.3)

$$\int_{G \cup H} f\,dA = \int_G f\,dA + \int_H f\,dA - \int_{G \cap H} f\,dA \tag{2.72}$$

Flächensatz (Satz 2.4)

$$A = \int_G 1\,dA \tag{2.73}$$

Einheiten des Flächeninhalts

$$[A] = \left[\int_G 1\,dA\right] = [x] \cdot [y] \cdot [1] = [x] \cdot [y] \tag{2.74}$$

Definition des Rechtecks G

$$G := [x_0, x_E] \times [y_0, y_E] \tag{2.75}$$

Fubini-Satz für Rechtecke (Satz 2.5)

$$\int_G f\,dA = \int_{y_0}^{y_E} \int_{x_0}^{x_E} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{x_E} \int_{y_0}^{y_E} f(x,y)\,dy\,dx \tag{2.76}$$

Seite 33

$$\textbf{Querschnittsfläche AQ(x):} \quad AQ(x) = \int_{y_0}^{y_E} f(x,y)\,dy \tag{2.77}$$

$$\textbf{Volumen eines kleinen Streifens:} \quad \delta I \approx AQ(x) \cdot \delta x \tag{2.78}$$

$$\textbf{Gesamtvolumen I:} \quad I = \int_{x_0}^{x_E} AQ(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_E} \int_{y_0}^{y_E} f(x,y)\,dy\,dx \tag{2.79}$$

Seite 34

Definition des Rechtecks G:

$$G := [x_0, x_E] \times [y_0, y_E]$$

Konstanten-Regel:

$$\int_G C\,dA = C \cdot (x_E - x_0) \cdot (y_E - y_0)$$

Separation-Regel:

$$\int_G g(x) \cdot h(y)\,dA = \left(\int_{x_0}^{x_E} g(x)\,dx\right) \cdot \left(\int_{y_0}^{y_E} h(y)\,dy\right)$$

Beweis der Separation-Regel:

$$\begin{aligned}
\int_G g(x) \cdot h(y)\,dA &= \int_{y_0}^{y_E} \int_{x_0}^{x_E} g(x) \cdot h(y)\,dx\,dy \\
&= \int_{y_0}^{y_E} h(y) \left(\int_{x_0}^{x_E} g(x)\,dx\right) dy \\
&= \left(\int_{x_0}^{x_E} g(x)\,dx\right) \cdot \left(\int_{y_0}^{y_E} h(y)\,dy\right)
\end{aligned}$$

Beweis der Konstanten-Regel (Variante 1):

$$\begin{aligned}
\int_G C\,dA &= \int_{y_0}^{y_E}\int_{x_0}^{x_E} C\,dx\,dy \\
&= C\int_{y_0}^{y_E}\int_{x_0}^{x_E} 1\,dx\,dy \\
&= C\int_{y_0}^{y_E}(x_E - x_0)\,dy \\
&= C\cdot(x_E - x_0)\int_{y_0}^{y_E} 1\,dy \\
&= C\cdot(x_E - x_0)\cdot(y_E - y_0)
\end{aligned}$$

Beweis der Konstanten-Regel (Variante 2):

$$\begin{aligned}
\int_G C\,dA &= C\int_G 1\,dA \\
&= C\left(\int_{x_0}^{x_E} 1\,dx\right)\cdot\left(\int_{y_0}^{y_E} 1\,dy\right) \\
&= C\cdot(x_E - x_0)\cdot(y_E - y_0)
\end{aligned}$$

Beweis der Konstanten-Regel (Variante 3):

$$\begin{aligned}
\int_G C\,dA &= C\int_G 1\,dA \\
&= C\cdot A \\
&= C\cdot\Delta x\cdot\Delta y \\
&= C\cdot(x_E - x_0)\cdot(y_E - y_0)
\end{aligned}$$

Seite 35

$$\textbf{Integration über ein in y-Richtung begrenztes Gebiet:}\ \int_G f\,dA = \int_{x_0}^{x_E}\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\,dy\,dx \tag{2.87}$$

$$\textbf{Integration über ein in x-Richtung begrenztes Gebiet:}\ \int_G f\,dA = \int_{y_0}^{y_E}\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)\,dx\,dy \tag{2.88}$$

Seite 36

Fubini-Satz für ein dreieckartiges Gebiet:

$$\int_G f\,dA = \int_{x_0}^{x_E}\int_{y_0}^{g(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{y_0}^{y_E}\int_{x_0}^{g^{-1}(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Seite 37

$$\textbf{Definition des Quaders:}\quad Q := [x_0, x_E]\times[y_0, y_E]\times[z_0, z_E]$$

$$\textbf{Fubini-Satz für Quader:}\quad \int_Q f\,dV = \int_{z_0}^{z_E}\int_{y_0}^{y_E}\int_{x_0}^{x_E} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\textbf{Lokaler Beitrag zur Größe I:} \quad \delta I \approx f(x, y, z) \cdot \delta V$$

$$\textbf{Globale Berechnung der Größe I:} \quad I = \int_G f \, dV$$

$$\textbf{Lokale Masse eines Volumenstücks:} \quad \delta m \approx \rho(x, y, z) \cdot \delta V$$

$$\textbf{Globale Berechnung der Masse m:} \quad m = \int_K \rho \, dV$$

Seite 38

Lokales Trägheitsmoment eines Volumenelements:

$$\delta I \approx r^2 \cdot \delta m \approx r^2 \cdot \rho \cdot \delta V = r^2(x, y, z) \cdot \rho(x, y, z) \cdot \delta V$$

Globales Trägheitsmoment des Körpers K:

$$I = \int_K r^2 \cdot \rho \, dV$$

Seite 39

Definition einer parametrisierten Fläche

$$P : U \to \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto P(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix}$$

Hierbei ist $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche, wobei $M = P(U)$.

Seite 40

Parametrisierung einer Ebene:

$$P(u, v) = P_0 + u \cdot v + v \cdot w \tag{2.99}$$

Parametrisierung einer Sphäre:

$$P(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} x(\theta, \phi) \\ y(\theta, \phi) \\ z(\theta, \phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\phi) \\ R \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \\ R \cdot \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{2.100}$$