Suche$_{h}essematrix_{g}emaess$

Die Hesse-Matrix einer zweifach differentierbaren reellwertigen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist wie folgt definiert:
Definition 2.20: Hesse-Matrix
Seien $n \in \mathbb{N}_+$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweifach differentierbare reellwertige Funktion. Die Hesse-Matrix von f ist das Vektorfeld $\nabla^2 f$, definiert als:

$$\nabla^2 f := \begin{bmatrix} f_{,1,1} & f_{,1,2} & \cdots & f_{,1,n} \\ f_{,2,1} & f_{,2,2} & \cdots & f_{,2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{,n,1} & f_{,n,2} & \cdots & f_{,n,n} \end{bmatrix}.$$

(Gleichung 2.142)
Beispiel für eine Funktion $f(x, y) := x^2 \cdot y^2$:
- Der Gradient ∇f ist:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2xy^2 \\ 2x^2y \end{bmatrix}.$$

- Die Hesse-Matrix $\nabla^2 f$ ist:

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{bmatrix}.$$

(Gleichung 2.145)
Satz 2.14: Schwarz-Clairaut-Young-Satz
Die Hesse-Matrix H einer zweifach differentierbaren Funktion f ist symmetrisch, d.h., $H^T = H$.
(Gleichung 2.146)
Dies impliziert, dass die partiellen Ableitungen vertauscht werden dürfen, also $f_{,\nu,\mu} = f_{,\mu,\nu}$ für alle $\mu, \nu \in \{1, \ldots, n\}$.
(Gleichung 2.147)