

## Suche Rechenbeispiel Kurzen

Hier sind die relevanten Formeln und ein Rechenbeispiel zum Thema Divergenz aus dem bereitgestellten Kontext: **Definition der Divergenz:** Ein differentierbares Vektorfeld  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit Komponenten  $v(x_1, \dots, x_n)$  hat die Divergenz definiert als:

$$\operatorname{div}(v) := \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}.$$

**Rechenregeln für Divergenzen:**  
**Faktor-Regel:**  $\operatorname{div}(a \cdot v) = a \cdot \operatorname{div}(v)$   
**Summen-Regel:**  $\operatorname{div}(v+w) = \operatorname{div}(v) + \operatorname{div}(w)$   
**Linearität:**  $\operatorname{div}(a \cdot v + b \cdot w) = a \cdot \operatorname{div}(v) + b \cdot \operatorname{div}(w)$   
**Produkt-Regel:**  $\operatorname{div}(f \cdot v) = \langle \nabla f, v \rangle + f \cdot \operatorname{div}(v)$   
**Rechenbeispiel:** Betrachten wir das Vektorfeld  $v(x, y) = \begin{bmatrix} x \cdot y^2 \\ x^3 \cdot y^3 \end{bmatrix}$ .

Die Divergenz von  $v$  ist gegeben durch:

$$\operatorname{div}(v) = \frac{\partial}{\partial x}(x \cdot y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^3 \cdot y^3).$$

Berechnung der partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x \cdot y^2) = y^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3 \cdot y^3) = 3x^3 \cdot y^2.$$

Daher ist die Divergenz:

$$\operatorname{div}(v) = y^2 + 3x^3 \cdot y^2 = y^2(1 + 3x^3).$$

Dieses Beispiel zeigt, wie die Divergenz eines Vektorfeldes in zwei Dimensionen berechnet wird, wobei die Divergenz selbst ein Skalarfeld ist, das die Quellendichte des Vektorfeldes misst.