Alles

Das charakteristische Polynom einer Matrix A ist ein zentrales Konzept in der linearen Algebra, das eng mit der Theorie der Eigenwerte und Eigenvektoren verbunden ist. Es wird definiert als das Polynom, das man erhält, wenn man die Determinante der Matrix $\lambda I - A$ berechnet, wobei λ eine skalare Variable und I die Einheitsmatrix der gleichen Dimension wie A ist.

Definition des charakteristischen Polynoms Für eine $n \times n$-Matrix A über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ definiert durch:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

Hierbei ist λ eine reelle oder komplexe Variable und I die $n \times n$-Einheitsmatrix.

Eigenschaften des charakteristischen Polynoms - Das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ ist ein Polynom vom Grad n. - Der führende Koeffizient des Polynoms ist 1. - Der Koeffizient des Terms λ^{n-1} ist $-\mathrm{tr}(A)$, die Spur der Matrix A. - Der konstante Term a_0 des Polynoms ist $(-1)^n \det(A)$.

Berechnungsbeispiel Betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom wird berechnet durch:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 7 & -2 \\ -3 & \lambda - 8 \end{pmatrix}$$

Die Determinante dieser Matrix ist:

$$(\lambda - 7)(\lambda - 8) - (-2)(-3) = \lambda^2 - 15\lambda + 56 - 6 = \lambda^2 - 15\lambda + 50$$

Also ist das charakteristische Polynom:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 15\lambda + 50$$

Anwendung Das charakteristische Polynom wird verwendet, um die Eigenwerte der Matrix zu finden, indem man die Nullstellen des Polynoms bestimmt. In diesem Beispiel würden die Eigenwerte durch Lösen der Gleichung $\lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0$ gefunden.