Formelzusammenfassung Seiten 105–115

Seite 105

Definition der Nullmatrix:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Identifikation aller Nullmatrizen:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \dots$$

Algebraische Eigenschaften der Nullmatrix:

$$A + 0 = A$$

$$0 \cdot A = 0$$

Seite 106

Definition der Einheitsmatrix:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

(6.20)

Identität der Einheitsmatrizen verschiedener Dimensionen:

$$I = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \cdots$$

(6.21)

Multiplikative Eigenschaft der Einheitsmatrix:

$$I \cdot A = A \cdot I = A$$

(6.22)

Kommutator der Einheitsmatrix mit einer quadratischen Matrix:

$$[A, I] = A \cdot I - I \cdot A = A - A = 0$$

(6.23)

Seite 107

Definition einer invertierbaren Matrix:

$$A^{-1} \cdot A = I \qquad (6.24)$$

Kommutativität der Matrixmultiplikation für invertierbare Matrizen:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I \qquad (6.25)$$

Berechnung des Kommutators:

$$[A, A^{-1}] = A \cdot A^{-1} - A^{-1} \cdot A = I - I = 0 \tag{6.26}$$

Invertierbarkeit der Einheitsmatrix:

$$I^{-1} = I \tag{6.27}$$

Involutionseigenschaft der Inversion:

$$(A^{-1})^{-1} = A \tag{6.28}$$

Beispiel für die Inverse einer 1x1 Matrix:

$$\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Beispiel für die Inverse einer 2x2 Matrix:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Seite 108

Elementare Rechenregeln der Inversion

$$\begin{aligned}
&(a) \quad (a \cdot A)^{-1} = \frac{1}{a} \cdot A^{-1} \\
&(b) \quad (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \\
&(c) \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \\
&(d) \quad (A^{-1})^{-1} = A
\end{aligned}$$

Diagonal-Matrix

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Kommutativität diagonaler Matrizen

$$[D, \tilde{D}] = 0$$

Inverse einer Diagonal-Matrix

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

Seite 109

Der gegebene Text enthält keine expliziten mathematischen Formeln oder detaillierten Rechenschritte, die eine Umformung oder Berechnung beinhalten. Er beschreibt lediglich, wie diagonale Matrizen in verschiedenen Programmiersprachen erzeugt werden können. Hier sind die relevanten Code-Snippets, die jedoch keine mathematischen Formeln im traditionellen Sinne darstellen:

MATLAB/Octave: ‘‘‘matlab M = diag([1,2,3]) ‘‘‘

Mathematica/WolframAlpha: ‘‘‘mathematica M = DiagonalMatrix[1,2,3] ‘‘‘

Python/Numpy: ‘‘‘python import numpy as np; M = np.diag([1,2,3]) ‘‘‘

Python/Sympy: “‘python import sympy as sp; M = sp.diag(1,2,3) “‘

Die Beispiele zeigen spezifische diagonale Matrizen, aber ohne zusätzliche mathematische Kontext oder Berechnungen, sind sie einfach Darstellungen von Matrizen und keine Formeln, die weiter analysiert oder umgeformt werden können.

Seite 110

Definition einer linearen Abbildung - Version 1:

$$a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto a(x) := A \cdot x \tag{6.32}$$

Definition einer linearen Abbildung - Version 2:

$$a(x \cdot v + y \cdot w) = x \cdot a(v) + y \cdot a(w) \tag{6.33}$$

Äquivalenz der Definitionen:

$$a(x \cdot v + y \cdot w) = A \cdot (x \cdot v + y \cdot w) = A \cdot x \cdot v + A \cdot y \cdot w = x \cdot A \cdot v + y \cdot A \cdot w = x \cdot a(v) + y \cdot a(w) \tag{6.34}$$

Abbildung der Nullvektors:

$$a(0) = A \cdot 0 = 0 \tag{6.35}$$

Vergleich von linearer Funktion und linearer Abbildung:

$$\text{Analysis: } f(x) = m \cdot x + q$$

$$\text{Lineare Algebra: } a(x) = A \cdot x \tag{6.36}$$

Seite 111

Verknüpfungssatz:

$$C = B \cdot A$$

(6.38)

Beweis des Verknüpfungssatzes:

$$c(x) = b(a(x)) = b(A \cdot x) = B \cdot (A \cdot x) = (B \cdot A) \cdot x =: C \cdot x$$

(6.39)

$$C = B \cdot A$$

(6.40)

Inversionssatz:

$$\text{(a)} \quad a \text{ bijektiv} \Rightarrow n = m$$

$$\text{(b)} \quad a \text{ bijektiv} \Leftrightarrow A \text{ regulär}$$

$$\text{(c)} \quad a \text{ bijektiv} \Rightarrow a^{-1}(y) = A^{-1} \cdot y$$

Bemerkungen zur Verknüpfung von linearen Abbildungen:

$$a(x) := a_N(\ldots a_2(a_1(x))\ldots) \Rightarrow A = A_N \cdot \ldots \cdot A_2 \cdot A_1$$

(6.41)

Seite 112

Matrix A und Standard-Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \hat{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(6.42)

Abbildung von $\hat{e}_1$ durch A:

$$a(\hat{e}_1) = A \cdot \hat{e}_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot 1 + b \cdot 0 \\ c \cdot 1 + d \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$$

(6.43)

Abbildung von $\hat{e}_2$ durch A:

$$a(\hat{e}_2) = A \cdot \hat{e}_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot 0 + b \cdot 1 \\ c \cdot 0 + d \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

(6.44)

Spalten-Vektor-Satz:

$$A = \begin{bmatrix} a(\hat{e}_1) & a(\hat{e}_2) & \dots & a(\hat{e}_m) \end{bmatrix}$$

(6.46)

Beweis für $a(\hat{e}_1)$:

$$a(\hat{e}_1) = A \cdot \hat{e}_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ A_{31} & A_{32} & \dots & A_{3m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{bmatrix}$$

(6.47)

Beweis für $a(\hat{e}_2)$:

$$a(\hat{e}_2) = A \cdot \hat{e}_2 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ A_{31} & A_{32} & \dots & A_{3m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \\ \vdots \\ A_{n2} \end{bmatrix}$$

(6.48)

Seite 113

Matrix-Vektor-Produkt:

$$a(\hat{e}_m) = A \cdot \hat{e}_m = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ A_{31} & A_{32} & \cdots & A_{3m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1m} \\ A_{2m} \\ A_{3m} \\ \vdots \\ A_{nm} \end{bmatrix}$$

Matrix-Darstellung durch Spaltenvektoren:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ \vdots \\ A_{n2} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} A_{1m} \\ A_{2m} \\ \vdots \\ A_{nm} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(\hat{e}_1) & a(\hat{e}_2) & \cdots & a(\hat{e}_m) \end{bmatrix}$$

Beispiele von linearen Abbildungen:
- **Identität:**

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Streckung am Ursprung um den Faktor λ:**

$$Z_\lambda = \lambda \cdot I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

- **Punktspiegelung am Ursprung:**

$$P = -I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- **Projektion auf die x-Achse:**

$$P_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Projektion auf die y-Achse:**

$$P_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Spiegelung an der x-Achse:**

$$S_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Seite 114

Spiegelung an der y-Achse:

$$S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spiegelung an der Geraden y = x:

$$S_{xy} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Drehung um den Ursprung um $\pi/2$:

$$R(\pi/2) = i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Drehung um den Ursprung um $-\pi/2$:

$$R(-\pi/2) = -i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Drehung um den Ursprung um ϕ:

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Eigenschaften der symplektischen Matrix i:

$$i^2 = R^2(\pi/2) = R(\pi/2) \cdot R(\pi/2) = R(\pi) = P = -1$$

Seite 115

Definition orthogonale Matrix:

$$A^{-1} = A^T \tag{6.52}$$

Definition orthogonale Gruppe:

$$O(n) := \{A \in M(n, n, \mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\} \tag{6.53}$$

Eigenschaften der orthogonalen Gruppe:

(a) Endogenität: $A \cdot B \in O(n)$

(b) Assoziativität: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

(c) Neutrales Element: $1 \in O(n)$

(d) Inverse Elemente: $A^{-1} \in O(n)$

Neutrales Element in $O(n)$:

$$1^{-1} = 1 = 1^T \tag{6.54}$$

Orthogonale symmetrische Matrizen:

$$A^{-1} = A^T = A \Rightarrow A^2 = A \cdot A = A^{-1} \cdot A = 1 \tag{6.55}$$

Orthogonale schiefsymmetrische Matrizen:

$$A^{-1} = A^T = -A \Rightarrow A^2 = -A^{-1} \cdot A = -1 \tag{6.56}$$