Matrizenoperationen

Die Grundoperationen von Matrizen umfassen Addition, Subtraktion, Multiplikation, Skalarmultiplikation und Transposition. Hier sind die Definitionen und Regeln für diese Operationen:

1. Addition und Subtraktion Zwei Matrizen A und B der gleichen Dimension $m \times n$ können addiert oder subtrahiert werden. Die resultierenden Matrizen $A + B$ und $A - B$ sind wie folgt definiert:

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \dots & A_{1n} + B_{1n} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \dots & A_{2n} + B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} + B_{m1} & A_{m2} + B_{m2} & \dots & A_{mn} + B_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} A_{11} - B_{11} & A_{12} - B_{12} & \dots & A_{1n} - B_{1n} \\ A_{21} - B_{21} & A_{22} - B_{22} & \dots & A_{2n} - B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} - B_{m1} & A_{m2} - B_{m2} & \dots & A_{mn} - B_{mn} \end{bmatrix}$$

2. Multiplikation Die Multiplikation zweier Matrizen A und B ist definiert, wenn die Spaltenanzahl von A gleich der Zeilenanzahl von B ist. Wenn A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times p$-Matrix ist, dann ist das Produkt AB eine $m \times p$-Matrix, definiert als:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

3. Skalarmultiplikation Eine Matrix A kann mit einem Skalar c multipliziert werden, indem jedes Element der Matrix mit c multipliziert wird:

$$cA = \begin{bmatrix} cA_{11} & cA_{12} & \dots & cA_{1n} \\ cA_{21} & cA_{22} & \dots & cA_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cA_{m1} & cA_{m2} & \dots & cA_{mn} \end{bmatrix}$$

4. Transposition Die Transposition einer Matrix A ist der Vorgang des Vertauschens ihrer Zeilen und Spalten. Die transponierte Matrix A^T einer Matrix A ist wie folgt definiert:

$$A^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

Rechenregeln für Matrizen

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$
- $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$
- $(a \cdot A) \cdot B = a \cdot (A \cdot B) = A \cdot (a \cdot B)$
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
- $A^T \cdot B^T = (B \cdot A)^T$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(a \cdot A)^T = a \cdot A^T$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Diese Regeln und Definitionen bilden die Grundlage für das Arbeiten mit Matrizen in vielen mathematischen und technischen Anwendungen.