0pt

Formeln S77 S78

Da der Text nur die Seiten 3.2.1.2 und 3.2.2 enthält, gehe ich davon aus, dass dies die relevanten Seiten sind. Hier sind die mathematischen Formeln und vollständigen Rechenschritte:

—

Definition des uneigentlichen Integrals mit zwei unendlichen Grenzen:

wobei $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{x_0} f(x)\,dx + \lim_{s\to\infty}\int_{x_0}^{s} f(x)\,dx$$

wobei $x_0 \in \mathbb{R}$.

Zweiseitiger Grenzwert für uneigentliche Integrale:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{s\to\infty}\int_{-s}^{s} f(x)\,dx$$

Beispiel für konvergentes uneigentliches Integral:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \lim_{s\to\infty}\int_{-s}^{s} x\,dx = \lim_{s\to\infty}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-s}^{s} = \lim_{s\to\infty}\left(\frac{1}{2}(s^2-(-s)^2)\right) = \frac{1}{2}\lim_{s\to\infty} 0 = 0$$

Beispiel für divergentes uneigentliches Integral:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \lim_{s\to\infty}\int_{-s}^{s+1} x\,dx = \lim_{s\to\infty}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-s}^{s+1} = \lim_{s\to\infty}\left(\frac{1}{2}((s+1)^2-(-s)^2)\right) = \frac{1}{2}\lim_{s\to\infty}(2s+1) = \infty$$

—

Definition des uneigentlichen Integrals über eine Polstelle:

wobei $x_0, x_p, x_E \in \mathbb{R}$ und $x_0 \leq x_p \leq x_E$.

$$\int_{x_0}^{x_E} f(x)\,dx := \lim_{r\uparrow x_p}\int_{x_0}^{r} f(x)\,dx + \lim_{s\downarrow x_p}\int_{s}^{x_E} f(x)\,dx$$

wobei $x_0, x_p, x_E \in \mathbb{R}$ und $x_0 \leq x_p \leq x_E$.

Spezialfall, wenn die Polstelle am Anfang des Intervalls ist:

$$\int_{x_E}^{x_0} f(x)\,dx = \int_{x_E}^{x_p} f(x)\,dx = \lim_{s \downarrow x_p} \int_{s}^{x_E} f(x)\,dx$$

Spezialfall, wenn die Polstelle am Ende des Intervalls ist:

$$\int_{x_E}^{x_0} f(x)\,dx = \int_{x_p}^{x_0} f(x)\,dx = \lim_{r \uparrow x_p} \int_{x_0}^{r} f(x)\,dx$$

Beispiel für ein Integral mit einer Polstelle:

mit einem Pol bei $x = 2$.

$$I = \int_0^3 \frac{2x-4}{1-e^{2-x}}\,dx$$

mit einem Pol bei $x = 2$.