Mehrfachintegrale

1. **Fubini-Satz für Quader (Satz 2.7)**: Dieser Satz ermöglicht es, ein Integral über einen dreidimensionalen Quader Q als dreifaches Integral zu berechnen:

$$\int_Q f\,dV = \int_{z_0}^{z_E} \int_{y_0}^{y_E} \int_{x_0}^{x_E} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Dieser Satz ist grundlegend für die Berechnung von Volumenintegralen in der Physik und Ingenieurwissenschaft.

2. **Lokale und globale Beiträge in 3D (S1 und S2 für Dreifach-Integrale)**: Die lokale Approximation eines kleinen Volumenstücks δV im Raum und dessen Beitrag zur Größe I wird durch

$$\delta I \approx f(x,y,z) \cdot \delta V$$

beschrieben. Global ergibt sich durch Integration über das gesamte Gebiet G:

$$I = \int_G f\,dV.$$

3. **Masseberechnung eines Körpers**: Die Masse m eines Körpers K mit Dichte $\rho(x,y,z)$ wird durch das Integral über das Volumen K berechnet:

$$m = \int_K \rho\,dV.$$

Dies ist ein praktisches Beispiel für die Anwendung von Dreifachintegralen in der Physik.

4. **Alternative Schreibweisen für Flächenintegrale**: Die verschiedenen Notationen für das Integral über ein zweidimensionales Gebiet G umfassen:

$$\int_G f\,dA = \int_G f\,dG = \int_G f\,dR^2 = \int_G f\,dx^2 = \int_G f\,d^2x = \int_G f\,d\mu = \iint_G f\,dx\,dy.$$

Diese Vielfalt an Notationen zeigt die Flexibilität und Anpassungsfähigkeit der Integralnotation an verschiedene Kontexte und Konventionen.

5. **Linearität des Integrals in 2D (Satz 2.2)**: Die Linearitätseigenschaften des Integrals in zwei Dimensionen sind analog zu denen in einer Dimension und umfassen:

$$\int_G a \cdot g\,dA = a \int_G g\,dA, \quad \int_G (g+h)\,dA = \int_G g\,dA + \int_G h\,dA, \quad \int_G (a \cdot g + b \cdot h)\,dA = a \int_G g\,dA + b \int_G h\,dA.$$

Diese Eigenschaften sind wesentlich für das Arbeiten mit linearen Systemen und Überlagerungsprinzipien in vielen Anwendungen.