Formelzusammenfassung Seiten 45–55

Seite 45

Definition des Flusses eines Vektorfeldes:

$$\Phi = \int_M \langle v, \hat{n} \rangle \, dA \tag{2.121}$$

Maßeinheit des Flusses:

$$[\Phi] = |\langle v, \hat{n} \rangle| \cdot [A] = [v] \cdot 1 \cdot [A] = [v] \cdot [A] \tag{2.122}$$

Berechnung des Flussintegrals:

$$\Phi = \int_{u_0}^{u_E} \int_{v_0}^{v_E} \langle v(x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \hat{n}(u,v) \rangle \sqrt{g(u,v)} \, dv \, du \tag{2.123}$$

Alternative Schreibweisen für Flussintegrale:

$$\Phi = \int_M \langle v, \hat{n} \rangle dA = \int_M v \cdot dA \tag{2.124}$$

Seite 46

$$\textbf{Definition des Flussintegrals über eine geschlossene Fläche:} \quad \Phi = \oint_M \langle v, \hat{n} \rangle dA \tag{2.125}$$

$$\textbf{Satz 2.10: Fluss bei konstantem Anteil senkrecht zur Fläche} \quad \Phi = C \cdot A \tag{2.126}$$

$$\textbf{Beweis von Satz 2.10:} \quad \Phi = \int_M \langle v, \hat{n} \rangle dA = \int_M C dA = C \int_M 1 dA = C \cdot A \tag{2.127}$$

$$\textbf{Anwendung in Strömungsdynamik:} \quad \Phi_v = \int_M \langle v, \hat{n} \rangle dA \quad \text{(Volumen-Fluss des Mediums durch die Fläche)} \tag{2.128}$$

$$\textbf{Elektrodynamik - Fall 1 (geschlossene Fläche):} \quad \Phi_E = \oint_M \langle E, \hat{n} \rangle dA = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot Q_{\text{eg}} \tag{2.129}$$

$$\textbf{Elektrodynamik - Fall 1 (geschlossene Fläche für magnetisches Feld):} \quad \Phi_B = \oint_M \langle B, \hat{n} \rangle dA = 0 \tag{2.130}$$

Seite 47

Stromstärke durch die Fläche:

$$\Phi_J = I$$

(2.131)

Leistung durch die Fläche:

$$\Phi_S = P$$

(2.132)

Induzierte Spannung:

$$U_{\text{ind}} = \oint_\gamma \langle E, \hat{e} \rangle \, ds = -\int_M \langle B, \hat{n} \rangle \, dA = -\dot{\Phi}_B$$

(2.133)

Seite 48

Partielle Ableitung:

$$f_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \lim_{\delta s \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_\mu + \delta s, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\delta s}$$

(2.134)

Masseinheit der partiellen Ableitung:

$$[f_\mu] = \frac{[f]}{[x_\mu]}$$

(2.135)

Verschiedene Schreibweisen für partielle Ableitungen:

$$f_\mu = f_{,x_\mu} = f_{x_\mu} = \frac{\partial f}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} f = \partial_\mu f$$

(2.136)

Gradient:

$$\nabla f := \begin{bmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \\ \vdots \\ f_{,n} \end{bmatrix}$$

(2.137)

Seite 49

Gradient eines Skalarfeldes:

$$f(x, y) := x^2 \cdot y^2$$

$$\text{Gradient von } f, \nabla f = \begin{pmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \cdot y^2 \\ x^2 \cdot 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^2 \\ 2x^2 y \end{pmatrix}$$

Gradient eines weiteren Skalarfeldes:

$$f(x, y, z) := x^2 \cdot y + z$$

$$\text{Gradient von } f, \nabla f = \begin{bmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \\ f_{,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \cdot y + 0 \\ x^2 \cdot 1 + 0 \\ 0 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy \\ x^2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Elementare Rechenregeln für Gradienten (Satz 2.12):

$$\begin{aligned} \text{(a) Faktor-Regel:} \quad & \nabla(a \cdot g) = a \cdot \nabla g \\ \text{(b) Summen-Regel:} \quad & \nabla(g + h) = \nabla g + \nabla h \\ \text{(c) Linearität:} \quad & \nabla(a \cdot g + b \cdot h) = a \cdot \nabla g + b \cdot \nabla h \\ \text{(d) Produkt-Regel:} \quad & \nabla(g \cdot h) = (\nabla g) \cdot h + g \cdot \nabla h \end{aligned}$$

Ketten-Regeln für Gradienten (Satz 2.13):

$$\begin{aligned} \text{(a) Ketten-Regel A:} \quad & f(x_1, \ldots, x_n) := g\left(h(x_1, \ldots, x_n)\right) \Rightarrow \nabla f = g'\left(h(x_1, \ldots, x_n)\right) \cdot \nabla h \\ \text{(b) Ketten-Regel B:} \quad & f(x) := g\left(h(x)\right) \Rightarrow f'(x) = \nabla g\left(h(x)\right) \cdot h'(x) \end{aligned}$$

Seite 50

Definition der Hesse-Matrix:

Sei $n \in \mathbb{N}^+$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweifach differentierbare reellwertige Funktion.

$$\text{Die Hesse-Matrix von } f \text{ ist das Vektorfeld } \nabla^2 f := \begin{bmatrix} f_{,1,1} & f_{,1,2} & \cdots & f_{,1,n} \\ f_{,2,1} & f_{,2,2} & \cdots & f_{,2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{,n,1} & f_{,n,2} & \cdots & f_{,n,n} \end{bmatrix}. \tag{2.142}$$

Beispiel für Hesse-Matrix:

$$f(x, y) := x^2 \cdot y^2 \tag{2.143}$$

Der Gradient von f ist

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \cdot y^2 \\ x^2 \cdot 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^2 \\ 2x^2 y \end{pmatrix} \tag{2.144}$$

Die Hesse-Matrix von f ist

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} f_{,1,1} & f_{,1,2} \\ f_{,2,1} & f_{,2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix} \tag{2.145}$$

Schwarz-Clairaut-Young-Satz:

Seien $n \in \mathbb{N}^+$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweifach differentierbare reellwertige Funktion mit Hesse-Matrix $H \in M(n, n, \mathbb{R})$, da

$$H^T = H. \tag{2.146}$$

Die Symmetrie der Hesse-Matrix gemäß Schwarz-Clairaut-Young-Satz ist äquivalent zur Tatsache, dass die partiellen Ab

$$f_{,\nu,\mu} = f_{,\mu,\nu}. \tag{2.147}$$

Definition der Laplace-Ableitung:

Seien $n \in \mathbb{N}^+$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweifach differentierbare reellwertige Funktion. Die Laplace-Ableitung von f ist

$$\Delta f := \operatorname{tr}(\nabla^2 f) = f_{,1,1} + f_{,2,2} + \ldots + f_{,n,n}. \tag{2.148}$$

Seite 51

Definition der Divergenz eines Vektorfeldes:

$$\mathrm{div}(v) := v_{1},_{1} + v_{2},_{2} + \ldots + v_{n},_{n}$$

(2.150)

Beispiel für die Berechnung der Divergenz:

$$v(x, y) := \begin{bmatrix} x \cdot y^2 \\ x^3 \cdot y^3 \end{bmatrix}$$

(2.151)

$$\mathrm{div}(v) = v_{1},_{x} + v_{2},_{y} = \frac{\partial}{\partial x}(x \cdot y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^3 \cdot y^3) = 1 \cdot y^2 + x^3 \cdot 3 \cdot y^2 = y^2 \cdot (1 + 3x^3)$$

(2.152)

Bedingung für ein quellenfreies Vektorfeld:

$$\mathrm{div}(v) = 0$$

(2.153)

Elementare Rechenregeln für Divergenzen:

$$\begin{aligned} \text{(a) Faktor-Regel:} \quad & \mathrm{div}(a \cdot v) = a \cdot \mathrm{div}(v) \\ \text{(b) Summen-Regel:} \quad & \mathrm{div}(v + w) = \mathrm{div}(v) + \mathrm{div}(w) \\ \text{(c) Linearität:} \quad & \mathrm{div}(a \cdot v + b \cdot w) = a \cdot \mathrm{div}(v) + b \cdot \mathrm{div}(w) \\ \text{(d) Produkt-Regel:} \quad & \mathrm{div}(f \cdot v) = \langle \nabla f, v \rangle + f \cdot \mathrm{div}(v) \end{aligned}$$

I-45

Seite 52

$$\textbf{Vektorfeld in 2D:} \quad v(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} v_1(x_1, x_2) \\ v_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Rotation in 2D (rot):} \quad \mathrm{rot}(v) := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

$$\textbf{Vektorfeld in 3D:} \quad v(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} v_1(x_1, x_2, x_3) \\ v_2(x_1, x_2, x_3) \\ v_3(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix}$$

$$\textbf{Rotation in 3D (rot):} \quad \mathrm{rot}(v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\textbf{Bedingung für Wirbelfreiheit:} \quad \mathrm{rot}(v) = 0$$

Seite 53

$$\textbf{Faktor-Regel:} \quad \mathrm{rot}(a \cdot v) = a \cdot \mathrm{rot}(v)$$

$$\textbf{Summen-Regel:} \quad \mathrm{rot}(v + w) = \mathrm{rot}(v) + \mathrm{rot}(w)$$

$$\textbf{Linearität:}\quad \mathrm{rot}(a\cdot v + b\cdot w) = a\cdot \mathrm{rot}(v) + b\cdot \mathrm{rot}(w)$$

$$\textbf{Produkt-Regel für } n=3: \quad \mathrm{rot}(f\cdot v) = \nabla f \times v + f\cdot \mathrm{rot}(v)$$

$$\textbf{Divergenz eines Gradienten:}\quad \mathrm{div}(\nabla f) = \Delta f$$

$$\textbf{Rotation eines Gradienten für } n\in\{2,3\}: \quad \mathrm{rot}(\nabla f) = 0$$

$$\textbf{Divergenz einer Rotation für } n=3: \quad \mathrm{div}(\mathrm{rot}(v)) = 0$$

$$\textbf{Rotation einer Rotation für } n=3: \quad \mathrm{rot}(\mathrm{rot}(v)) = \nabla(\mathrm{div}(v)) - \Delta v$$

$$\textbf{Divergenz eines Vektor-Produkts:}\quad \mathrm{div}(v\times w) = \langle \mathrm{rot}(v), w\rangle - \langle v, \mathrm{rot}(w)\rangle$$

$$\textbf{Rotation eines Vektor-Produkts:}\quad \mathrm{rot}(v\times w) = \nabla_w v - \nabla_v w + \mathrm{div}(w)\cdot v - \mathrm{div}(v)\cdot w$$

$$\textbf{Divergenz eines Vektor-Produkts von Gradienten:}\quad \mathrm{div}(\nabla g \times \nabla h) = 0$$

Seite 54

Definition des Nabla-Operators in nD:

$$\vec{\nabla} := \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{bmatrix}$$

(2.159)

Divergenz und Rotation durch Nabla-Operator:

$$\mathrm{div}(v) = \langle \vec{\nabla}, v\rangle = \vec{\nabla}\cdot v$$

(2.160)

$$\mathrm{rot}(v) = \vec{\nabla}\times v$$

(2.161)

Anwendung in Strömungsdynamik (Quellenfreiheit):

$$\mathrm{div}(v) = 0$$

(2.162)

Maxwell-Gleichungen in Elektrodynamik:

$$\mathrm{div}(E) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\mathrm{rot}(E) = -\dot{B}$$
$$\mathrm{div}(B) = 0$$
$$\mathrm{rot}(B) = \epsilon_0\mu_0\dot{E} + \mu_0 J$$

(2.163)

Kontinuitätsgleichung (Ladungserhaltung):

$$\dot{\rho} + \mathrm{div}(J) = 0$$

(2.164)

Seite 55

Gauss-Integralsatz in 3D:

$$\int_{\partial K} \langle v, \hat{n} \rangle \, dA = \Phi_v = \int_K \operatorname{div}(v) \, dV \tag{2.165}$$

Perforation von v:

$$\text{Perforation von } v \equiv \text{Summe aller eingeschlossenen Quellen von } v \tag{2.166}$$

Spezialfall für quellenfreies Vektorfeld:

$$\Phi_v = \int_{\partial K} \langle v, \hat{n} \rangle \, dA = \int_K \operatorname{div}(v) \, dV = \int_K 0 \, dV = 0 \tag{2.167}$$