Formelzusammenfassung Seiten 30–50

Seite 30

Definition des Integrals über ein Gebiet:

$$\int_G f\,dA \equiv \text{Volumen zwischen } G \text{ und dem Graphen von } f. \tag{2.64}$$

Einheiten des Integrals:

$$\left[\int_G f\,dA\right] = [V] = [A]\cdot[f] = [x]\cdot[y]\cdot[f] = [x]\cdot[y]\cdot[z]. \tag{2.65}$$

Seite 31

Alternative Schreibweisen für Integrale:

$$I = \int_G f\,dA = \int_G f\,dG = \int_G f\,dR^2 = \int_G f\,dx^2 = \int_G f\,d^2x = \int_G f\,d\mu$$
$$= \iint_G f\,dA = \iint_G f\,dG = \iint_G f\,dR^2 = \iint_G f\,dx^2 = \iint_G f\,d^2x = \iint_G f\,d\mu$$
$$= \int_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint_G f(x,y)\,dx\,dy.$$

(2.66)

Beitrag eines kleinen Flächenstücks:

$$\delta I \approx f(x,y)\cdot\delta A.$$

(2.67)

Berechnung der Gesamtgröße durch Integration über das Gebiet G:

$$I = \int_G f\,dA.$$

(2.68)

Linearität des Integrals in 2D:

$$\int_G a\cdot g\,dA = a\int_G g\,dA.$$

(2.69)

$$\int_G (g+h)\,dA = \int_G g\,dA + \int_G h\,dA.$$

(2.70)

$$\int_G (a\cdot g + b\cdot h)\,dA = a\int_G g\,dA + b\int_G h\,dA.$$

(2.71)

Seite 32

Zerlegungssatz in 2D (2.72): $\displaystyle\int_{G\cup H} f\,dA = \int_G f\,dA + \int_H f\,dA - \int_{G\cap H} f\,dA.$

Flächensatz (2.73): $\displaystyle A = \int_G 1\,dA.$

Einheiten des Flächeninhalts (2.74): $[A] = \left[\int_G 1\,dA\right] = [x] \cdot [y] \cdot [1] = [x] \cdot [y].$

Definition des Rechtecks G (2.75): $G := [x_0, x_E] \times [y_0, y_E].$

Fubini-Satz für Rechtecke (2.76): $\int_G f\,dA = \int_{y_0}^{y_E} \int_{x_0}^{x_E} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{x_E} \int_{y_0}^{y_E} f(x,y)\,dy\,dx.$

Seite 33

$$\textbf{Querschnittsfläche:} \quad AQ(x) = \int_{y_0}^{y_E} f(x,y)\,dy \tag{2.77}$$

$$\textbf{Volumen eines kleinen Streifens:} \quad \delta I \approx AQ(x) \cdot \delta x \tag{2.78}$$

$$\textbf{Gesamtvolumen durch Integration über x:} \quad I = \int_{x_0}^{x_E} AQ(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_E} \int_{y_0}^{y_E} f(x,y)\,dy\,dx \tag{2.79}$$

Seite 34

Definition des Rechtecks G:

$$G := [x_0, x_E] \times [y_0, y_E]$$

Konstanten-Regel:

$$\int_G C\,dA = C \cdot (x_E - x_0) \cdot (y_E - y_0)$$

Separation-Regel:

$$\int_G g(x) \cdot h(y)\,dA = \left(\int_{x_0}^{x_E} g(x)\,dx\right) \cdot \left(\int_{y_0}^{y_E} h(y)\,dy\right)$$

Beweis der Separation-Regel:

$$\begin{aligned}
\int_G g(x) \cdot h(y)\,dA &= \int_{y_0}^{y_E} \int_{x_0}^{x_E} g(x) \cdot h(y)\,dx\,dy \\
&= \int_{y_0}^{y_E} h(y) \cdot \left(\int_{x_0}^{x_E} g(x)\,dx\right)\,dy \\
&= \left(\int_{x_0}^{x_E} g(x)\,dx\right) \cdot \left(\int_{y_0}^{y_E} h(y)\,dy\right)
\end{aligned}$$

Beweis der Konstanten-Regel (Variante 1):

$$\begin{aligned}
\int_G C\,dA &= \int_{y_0}^{y_E} \int_{x_0}^{x_E} C\,dx\,dy \\
&= C \int_{y_0}^{y_E} \int_{x_0}^{x_E} 1\,dx\,dy \\
&= C \int_{y_0}^{y_E} (x_E - x_0)\,dy \\
&= C \cdot (x_E - x_0) \int_{y_0}^{y_E} 1\,dy \\
&= C \cdot (x_E - x_0) \cdot (y_E - y_0)
\end{aligned}$$

Beweis der Konstanten-Regel (Variante 2):

$$\begin{aligned}\int_G C\,dA &= C\int_G 1\,dA\\ &= C\int_G 1\cdot 1\,dA\\ &= C\left(\int_{x_0}^{x_E} 1\,dx\right)\cdot\left(\int_{y_0}^{y_E} 1\,dy\right)\\ &= C\cdot(x_E-x_0)\cdot(y_E-y_0)\end{aligned}$$

Beweis der Konstanten-Regel (Variante 3):

$$\int_G C\,dA = C\int_G 1\,dA = C\cdot A = C\cdot\Delta x\cdot\Delta y = C\cdot(x_E-x_0)\cdot(y_E-y_0)$$

Seite 35

Integration über allgemeine Gebiete durch Fubini-Satz:
1. **Integration über ein in y-Richtung durch Graphen begrenztes Gebiet:**

$$\int_G f\,dA = \int_{x_0}^{x_E}\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

(2.87)
2. **Integration über ein in x-Richtung durch Graphen begrenztes Gebiet:**

$$\int_G f\,dA = \int_{y_0}^{y_E}\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

(2.88)

Seite 36

Fubini-Satz für ein dreieckartiges Gebiet: $\int_G f\,dA = \int_{x_0}^{x_E}\int_{y_0}^{g(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{y_0}^{y_E}\int_{x_0}^{g^{-1}(y)} f(x,y)\,dx\,dy$ (2.89)

Seite 37

Definition des Quaders: $Q := [x_0,x_E]\times[y_0,y_E]\times[z_0,z_E]$

Fubini-Satz für Quader (2.91): $\int_Q f\,dV = \int_{z_0}^{z_E}\int_{y_0}^{y_E}\int_{x_0}^{x_E} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

Lokaler Beitrag zur Größe I (2.92): $\delta I \approx f(x,y,z)\cdot\delta V$

Globale Berechnung der Größe I (2.93): $I = \int_G f\,dV$

Lokale Masse eines Volumenstücks (2.94): $\delta m \approx \rho(x,y,z)\cdot\delta V$

Globale Berechnung der Masse m (2.95): $m = \int_K \rho\,dV$

Seite 38

Lokales Trägheitsmoment eines Volumenelements:

$$\delta I \approx r^2 \cdot \delta m \approx r^2 \cdot \rho \cdot \delta V = r^2(x,y,z) \cdot \rho(x,y,z) \cdot \delta V$$

Globales Trägheitsmoment des Körpers K:

$$I = \int_K r^2 \cdot \rho \, dV$$

Seite 39

Definition 2.11 - Parametrisierte Fläche
Die Parametrisierung einer Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ durch ein Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch die Funktion:

$$P : U \to \mathbb{R}^3, \quad (u,v) \mapsto P(u,v) = \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{bmatrix}$$

wobei $M = P(U)$.

Seite 40

Parametrisierung einer Ebene:

$$P(u,v) = P_0 + u \cdot v + v \cdot w \tag{2.99}$$

Parametrisierung einer Sphäre:

$$P(\theta,\phi) = \begin{bmatrix} x(\theta,\phi) \\ y(\theta,\phi) \\ z(\theta,\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\phi) \\ R \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \\ R \cdot \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{2.100}$$

Seite 41

Definition der Koordinatenbasis-Vektorfelder:

$$\mathbf{e}_u(u,v) := P_u(u,v)$$
$$\mathbf{e}_v(u,v) := P_v(u,v)$$

Definition des Normalen-Vektors:

$$\mathbf{n} := \mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_v$$

Seite 42

Einheitsnormalen-Vektor: $\hat{n} := \pm \frac{1}{|n|} \cdot n$ (2.103)

Metrik (Gram-Matrix): $G := \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle \end{pmatrix}$ (2.104)

Symmetrie der Metrik: $G^T = G$ (2.105)

Positiv Definitheit der Metrik: $g := \det(G) = g_{11} \cdot g_{22} - g_{21} \cdot g_{12} > 0$ (2.106)

$$\textbf{Orthogonalität der Basisvektoren:} \quad e_1 \perp e_2 \Leftrightarrow G \text{ ist diagonal} \tag{2.107}$$

$$\textbf{Definition der Mass-Funktion:} \quad g := \det(G) \tag{2.108}$$

$$\textbf{Mass-Funktion:} \quad \text{Mass-Funktion} = \sqrt{g}$$

$$\textbf{Beziehung zwischen Normalen-Vektor und Mass-Funktion:} \quad \sqrt{g} = |n| \tag{2.109}$$

Seite 43

$$\begin{aligned}\textbf{Berechnung von } \sqrt{g} : \sqrt{g} &= \sqrt{\det(G)} = \sqrt{g_{11} \cdot g_{22} - g_{12} \cdot g_{21}} = \sqrt{\langle e_1, e_1\rangle \cdot \langle e_2, e_2\rangle - \langle e_1, e_2\rangle \cdot \langle e_2, e_1\rangle} \\ &= \sqrt{|e_1|^2 \cdot |e_2|^2 - \langle e_1, e_2\rangle^2} = \sqrt{|e_1|^2 \cdot |e_2|^2 - |e_1|^2 \cdot |e_2|^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \\ &= \sqrt{|e_1|^2 \cdot |e_2|^2 \cdot (1 - \cos^2(\alpha))} = \sqrt{|e_1|^2 \cdot |e_2|^2 \cdot \sin^2(\alpha)} = |e_1| \cdot |e_2| \cdot \sin(\alpha) \\ &= |e_1 \times e_2| = |n|.\end{aligned}$$

$$\textbf{Eigenschaft von } \sqrt{g} : \sqrt{g} > 0.$$

$$\textbf{Definition des Einheitsnormalen-Vektors} : \hat{n} := \pm\frac{1}{\sqrt{g}} \cdot n.$$

Seite 44

Funktion auf einer parametrisierten Fläche:

$$f : U \to \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto f(u, v) := f(P(u, v))$$

Definition des Flächenintegrals über eine parametrisierte Fläche:

$$\int_M f\, dA := \int_U f \sqrt{g}\, dU$$

Berechnung des Flächeninhalts einer parametrisierten Fläche:

$$A = \int_M 1\, dA = \int_U \sqrt{g}\, dU$$

Einheiten des Flächenintegrals:

$$\left[\int_M f\, dA\right] = [f] \cdot [A] = [f] \cdot [\sqrt{g}] \cdot [u] \cdot [v]$$

Berechnung des Flächenintegrals über ein Rechteck:

$$I = \int_M f\, dA := \int_U f \sqrt{g}\, dU = \int_{u_0}^{u_E} \int_{v_0}^{v_E} f(u, v) \sqrt{g(u, v)}\, dv\, du$$

Approximation eines kleinen Flächenstücks:

$$\delta A \approx \sqrt{g} \cdot \delta U = \sqrt{g} \cdot \delta u \cdot \delta v$$

Seite 45

$$\textbf{Definition des Flusses eines Vektorfeldes:} \quad \Phi := \int_M \langle v, \hat{n} \rangle \, dA \tag{2.121}$$

$$\textbf{Maßeinheit des Flusses:} \quad [\Phi] = \langle v, \hat{n} \rangle \cdot [A] = [v] \cdot 1 \cdot [A] = [v] \cdot [A] \tag{2.122}$$

$$\textbf{Berechnung des Flussintegrals:} \quad \Phi = \int_{u_0}^{u_E} \int_{v_0}^{v_E} \langle v\,(x(u;v), y(u;v), z(u;v)) \,, \hat{n}(u;v) \rangle \sqrt{g(u;v)} \, dv \, du \tag{2.123}$$

$$\textbf{Alternative Schreibweisen für Flussintegrale:} \quad \Phi = \int_M \langle v, \hat{n} \rangle \, dA = \int_M v \cdot dA \tag{2.124}$$

Seite 46

$$\textbf{Definition des Flussintegrals:} \quad \Phi = \oint_M \langle v, \hat{n} \rangle \, dA \tag{2.125}$$

$$\textbf{Fluss bei konstantem Anteil senkrecht zur Fläche:} \quad \Phi = C \cdot A \tag{2.126}$$

$$\textbf{Beweis des Flusses bei konstantem Anteil:} \quad \Phi = \int_M \langle v, \hat{n} \rangle \, dA = \int_M C \, dA = C \int_M 1 \, dA = C \cdot A \tag{2.127}$$

$$\textbf{Volumen-Fluss in der Strömungsdynamik:} \quad \Phi_v = \int_M \langle v, \hat{n} \rangle \, dA \quad (\text{Einheiten: } \frac{m^3}{s}) \tag{2.128}$$

$$\textbf{Elektrodynamik - Fall 1 (geschlossene Fläche):} \quad \Phi_E = \oint_M \langle E, \hat{n} \rangle \, dA = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot Q_{\text{eg}} \tag{2.129}$$

$$\textbf{Elektrodynamik - Fall 1 (geschlossene Fläche für magnetisches Feld):} \quad \Phi_B = \oint_M \langle B, \hat{n} \rangle \, dA = 0 \tag{2.130}$$

Seite 47

Stromstärke durch die Fläche:

$$\Phi_J = I$$

(2.131)

Leistung durch die Fläche:

$$\Phi_S = P$$

(2.132)

Induzierte Spannung:

$$U_{\text{ind}} = \oint_\gamma \langle E, \hat{e} \rangle \, ds = -\int_M \langle B, \hat{n} \rangle \, dA = -\dot{\Phi}_B$$

(2.133)

Seite 48

Definition der partiellen Ableitung:

$$f,\mu(x_1,x_2,\ldots,x_n) := \lim_{\delta s\to 0} \frac{f(x_1,x_2,\ldots,x_\mu+\delta s,\ldots,x_n) - f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\delta s} \tag{2.134}$$

Einheiten der partiellen Ableitungen:

$$[f,\mu] = \frac{[f]}{[x_\mu]} \tag{2.135}$$

Verschiedene Schreibweisen für partielle Ableitungen:

$$f,\mu = f,x_\mu = f_{x_\mu} = \frac{\partial f}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} f = \partial_\mu f \tag{2.136}$$

Definition des Gradienten:

$$\nabla f := \begin{bmatrix} f,1 \\ f,2 \\ \vdots \\ f,n \end{bmatrix} \tag{2.137}$$

Seite 49

Gradient eines Skalarfeldes:

$$f(x,y) := x^2 \cdot y^2 \quad (2.138)$$

Gradient von f :

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \cdot y^2 \\ x^2 \cdot 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^2 \\ 2x^2 y \end{pmatrix} \quad (2.139)$$

$$f(x,y,z) := x^2 \cdot y + z \quad (2.140)$$

Gradient von f :

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \\ f_{,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \cdot y + 0 \\ x^2 \cdot 1 + 0 \\ 0 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy \\ x^2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.141)$$

Satz 2.12: Elementare Rechenregeln für Gradienten

(a) Faktor-Regel:

$$\nabla(a \cdot g) = a \cdot \nabla g$$

(b) Summen-Regel:

$$\nabla(g+h) = \nabla g + \nabla h$$

(c) Linearität:

$$\nabla(a \cdot g + b \cdot h) = a \cdot \nabla g + b \cdot \nabla h$$

(d) Produkt-Regel:

$$\nabla(g \cdot h) = (\nabla g) \cdot h + g \cdot \nabla h$$

Satz 2.13: Ketten-Regeln für Gradienten

(a) Ketten-Regel A:

$$f(x_1,\ldots,x_n) := g\left(h(x_1,\ldots,x_n)\right)$$

$$\Rightarrow \nabla f = g'(h(x_1,\ldots,x_n)) \cdot \nabla h$$

(b) Ketten-Regel B:

$$f(x) := g\left(h(x)\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \nabla g\left(h(x)\right) \cdot h'(x)$$

Seite 50

Definition der Hesse-Matrix:

Sei $n \in \mathbb{N}^+$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweifach differentierbare reellwertige Funktion.

$$\text{Die Hesse-Matrix von } f \text{ ist das Vektorfeld } \nabla^2 f := \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,n} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n,1} & f_{n,2} & \cdots & f_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Beispiel für Hesse-Matrix:

$$f(x,y) := x^2 \cdot y^2$$

$$\text{Gradient von } f: \quad \nabla f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \cdot y^2 \\ x^2 \cdot 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^2 \\ 2x^2 y \end{pmatrix}$$

$$\text{Hesse-Matrix von } f: \quad \nabla^2 f = \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} \\ f_{2,1} & f_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}$$

Schwarz-Clairaut-Young-Satz:

Seien $n \in \mathbb{N}^+$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweifach differentierbare reellwertige Funktion mit Hesse-Matrix $H \in M(n,n,\mathbb{R})$, da

Symmetrie der Hesse-Matrix:

$$\text{Für alle } \mu, \nu \in \{1, \ldots, n\} \text{ gilt } f_{\nu,\mu} = f_{\mu,\nu}.$$

Definition der Laplace-Ableitung:

$$\text{Die Laplace-Ableitung von } f \text{ ist } \Delta f := \operatorname{tr}(\nabla^2 f) = f_{1,1} + f_{2,2} + \ldots + f_{n,n}.$$