第九章《多元函数微分学》

1．单项选择题

（1）二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$ 和 $f'_y(x_0,y_0)$ 都存在，则 $f(x,y)$（　　）

(A)在该点可微；　(B) 在该点连续可微；

(C)在该点沿任意方向的方向导数存在；(D) 以上结论都不对.

（2）函数 $f\left(x,y\right)=x^2-ay^2\left(a>0\right)$ 在 $\left(0,0\right)$ 处（　　）

(A) 不取极值；　(B) 取极小值；　(C) 取极大值；　(D)是否取极值依赖于 a.

（3）在曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 的所有切线中，与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线（　　）

（A）只有 1 条；　（B）只有 2 条；　（C）至少有 3 条；　（D）不存在.

（4）设 $z=f\left(u,v\right)$，其中 $u=\mathrm{e}^{-x},v=x+y$，下面运算中（　　）

$$I:\frac{\partial z}{\partial x}=-\mathrm{e}^{-x}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v},\quad II:\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

(A) I 、II 都不正确；　(B) I 正确，II 不正确；

(C) I 不正确，II 正确；　(D) I 、II 都正确.

2．填空题

（1） $z=\arcsin\dfrac{x^2+y^2}{9}+\sqrt{x^2+y^2-4}$ 的定义域是________________；

（2） $z=\ln[x\ln(y-x)]$ 的定义域是________________；

（3）函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{x}, & x\neq 0\\ y, & x=0\end{cases}$ 的连续范围是________________；

（4）设 $f(x,y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$，则 $f_x(3,4)=$________________；

（5）设 $f\left(x,y\right)=\ln\left(x+\dfrac{y}{2x}\right)$，则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=$________________；

（6）曲线 $\Gamma:\begin{cases}z=\dfrac{x^2+y^2}{4}\\ y=4\end{cases}$ 在点 $\left(2,4,5\right)$ 处的切线与 Ox 轴正向的倾角是________________；

（7）已知理想气体状态方程 $PV=RT$，则 $\dfrac{\partial P}{\partial V}\cdot\dfrac{\partial V}{\partial T}\cdot\dfrac{\partial T}{\partial P}=$________________；

（8）设 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}+\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$，则 $\mathrm{d}z=$________________；

（9）函数 $u=\sqrt[z]{\dfrac{x}{y}}$ 在点 $(1,1,1)$ 的梯度为________________；

（10）已知 $\dfrac{x}{z}=\varphi\left(\dfrac{y}{z}\right)$，其中 φ 为可微函数，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________________；

（11）已知曲面 $z=xy$ 上的点 P 处的法线 l 平行于直线 $l_1:\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{2z-1}{2}$，则该法线的方程为________________；

（12）在梯度向量的方向上，函数的变化率________________；

（13）函数在给定点的方向导数的最大值就是梯度的________________.

3．求下列极限

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3-\sqrt{9+xy}}{xy}$；

（2）$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}$.

4．讨论极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 是否存在.

5．证明 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0\,,\,0)$ 分别对于每个自变量 x 或 y 都连续，但作为二元函数在点 $(0\,,\,0)$ 却不连续.

6．设$u = z\arctan\dfrac{x}{y}$， 计算 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

7．设 $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^2\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

求 $f_x(0,0), f_y(0,0)$.

8．设函数 $f(x,y)=\begin{cases}x^2(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

（1）试求 $f(x,y)$的偏导函数；（2）考察偏导函数在$(0,3)$点处是否连续.

9. 设$z=xf\left(\frac{y}{x}\right)+yg(x,\frac{x}{y})$，其中 f,g 均为二阶可微函数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

10. 设$u=xy,v=\frac{x}{y}$，试以新变量u,v变换方程$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，其中$z$对各变量有二阶连续偏导数.

11. 已知$z=f(x,y),x=\varphi(y,z)$，其中 f,φ 均为可微函数，求$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

12. 设$\vec{n}$是曲面$z=x^2+\frac{y^2}{2}$在$P(1,2,3)$处指向外侧的法向量，求函数$u=\sqrt{\frac{3x^2+3y^2+z^2}{x}}$在点$P$处沿方向$\vec{n}$的方向导数.

13. 在第一卦限内作椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的切平面，使该切平面与三个坐标平面围成的四面体的体积最小，求切点的坐标.

14．设 $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^2\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

（1）求$\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$；

（2）$\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$是否在原点连续？$f(x,y)$在原点是否可微？说明理由.

15．已知 x, y, z 为常数，且 $\mathrm{e}^{x} + y^{2} + |z| = 3$，求证：$\mathrm{e}^{x} y^{2} |z| \leq 1$.（必须用拉格朗日乘数法）

16．求由方程组 $\begin{cases} z = x^{2} + y^{2} \\ x^{2} + 2y^{2} + 3z^{2} = 20 \end{cases}$ 所确定的 $y(x)$ 及 $z(x)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x}$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}\, z}{\mathrm{d}\, x}$.

17．设函数 $z = f(u)$，又方程 $u = \varphi(u) + \int_{y}^{x} P(t)\,\mathrm{d}t$ 确定 u 是 x, y 的函数，其中 $f(u)$ 与 $\varphi(u)$ 均可微；$P(t), \varphi'(u)$ 连续，且 $\varphi'(u) \neq 1$. 试证：$P(y)\dfrac{\partial z}{\partial x} + P(x)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

18．设函数 $f\left(u\right)$ 具有二阶连续偏导数，而 $z=f\left(\mathrm{e}^x\sin y\right)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z\mathrm{e}^{2x}$，求 $f\left(u\right)$.

19．求二元函数 $z=x^2-xy+y^2$ 在点 $\left(-1,1\right)$ 沿方向 $\vec{l}=\left\{2,1\right\}$ 的方向导数及梯度，并指出 z 在该点沿哪个方向减少得最快？沿哪个方向 z 的值不变？