高等数学

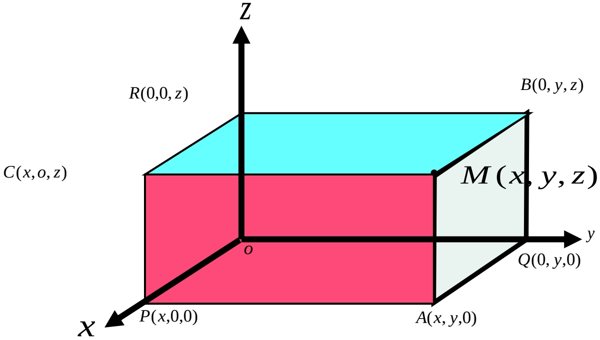
Ch8　空间解析几何

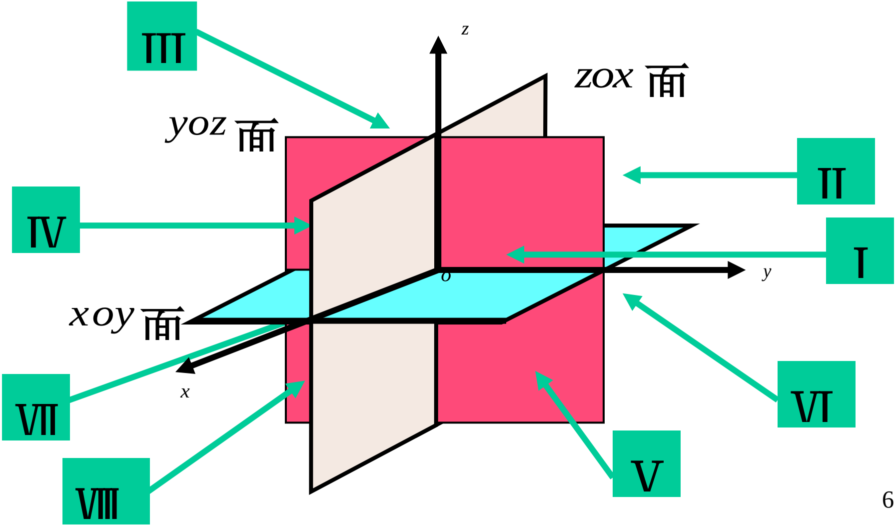
§1　向量及其线性运算

空间的点 $\xleftrightarrow{1--1}$ 有序数组 (x,y,z)

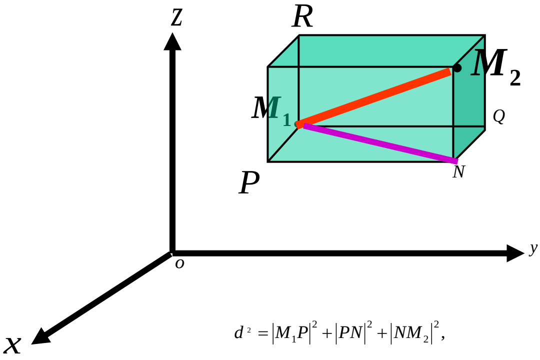
坐标轴上的点 $P,\quad Q,\quad R,$

坐标面上的点 $A,\quad B,\quad C,\quad O(0,0,0)$




Ⅲ
z
zox 面
yoz 面
Ⅱ
Ⅳ
Ⅰ
o
y
xoy 面
x
Ⅶ
Ⅵ
Ⅷ
Ⅴ

设$M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两点



$d=|M_1M_2|=?$

在直角ΔM_1NM_2及直角ΔM_1PN中，使用勾股定理知

$d^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2,$

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

例 1 在 z 轴上求与 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点。

例2 求点 $A(4,-3,5)$ 到坐标原点及坐标轴的距离。

例1　求 xoy 面分点 $A(2,-1,7)$ 和点 $B(4,5,-2)$ 之间的线段之比，并求其分点的坐标。

例 1　设已知两点 $M_1(1,-2,3)$ 和 $M_2(4,2,-1)$，求 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模和方向余弦。

例 2　设已知 $A(4,0,5)$ 和 $B(7,1,3)$，求方向和 $\overrightarrow{AB}$ 一致的单位向量。

例 3　已知 $\vec{a}$ 的方向角为 $\alpha=\gamma=60^\circ$，$\beta=45^\circ$，$|\vec{a}|=3$ 求 $\vec{a}$ 的坐标。

例 4　给定 $\vec{F}_1=\{1,2,3\},\vec{F}_2=\{-2,3,-4\},\vec{F}_3=\{3,-4,5\}$ 三力同时作用于一点，求合力的大小和方向余弦。

§2　向量的乘积

例 1　$M(1,1,1), A(2,2,1), B(2,1,2)$，求 $\overrightarrow{MA}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 的夹角 θ。

例 2　求向量 $\vec{a}=\{5,2,5\}$ 在 $\vec{b}=\{2,-1,2\}$ 上的投影。

例 3　已知 $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1,\ (\vec{a}\,\hat{\cdot}\,\vec{b})=\frac{\pi}{3}$，求 $\vec{m}=2\vec{a}+\vec{b}$，

$\vec{n}=\vec{a}-4\vec{b}$ 的夹角。

例 4 在 xoy 上平面上求一单位向量与已知向量 $\vec{a}=\{-4,3,7\}$ 垂直。

例 1　$\vec{a}=\{2,1,-1\}$，$\vec{b}=\{1,-1,2\}$，求$\vec{a}\times\vec{b}$。

例 2　已知$\vec{a}=\{1,-3,2\},\vec{b}=\{2,-1,3\}$，求同时垂直于$\vec{a}$、$\vec{b}$的单位向量。

例 3　$A(1,2,3)$，$B(3,4,5)$，$C(2,4,7)$，求$S_{\Delta ABC}$。

例 4　平行四边形 $ABCD$ 两邻边 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}-2\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{a}-3\vec{b}$，其中 $|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=3$，$(\widehat{\vec{a}\cdot\vec{b}})=\frac{\pi}{6}$，求 $S_{\square ABCD}$。

例 5　已知 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$，$\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$，证明 $\vec{a}-\vec{d}$ 与 $\vec{b}-\vec{c}$ 共线。

例 6　已知$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$满足条件$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$，证明：

$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$。

例 7　已知单位向量$\overrightarrow{OA}$与三个坐标轴的夹角相等，B点是$M(1，-3，2)$，关于$N(-1,2,1)$的对称点，求$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$。

例 8　证明：$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\vec{a}\cdot\vec{a})\cdot(\vec{b}\cdot\vec{b})$。

例 1　讨论四点 $O(0,0,0)$， $A(1,1,-1)$， $B(2,-1,3)$， $C(4,1,1)$ 是否共面？若不共面，求四面体 $O-ABC$ 的体积。

例 2　证明：$(\vec{A}+\vec{B})\cdot[(\vec{A}+\vec{C})\times\vec{B}]=-\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$。

例 3　三矢量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 满足 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}=\vec{0}$，且 O,B,C 不共线，求证：

①$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$共面。

②A、B、C共线。

例 4　设$\vec{a}=\{-1,3,2\},\vec{b}=\{2,-3,-4\},\vec{c}=\{-3,12,6\}$，证明三向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$共面，并用$\vec{a}$、$\vec{b}$表示$\vec{c}$。

§5　曲面及其方程

例 1　yoz 面上过原点 O 的直线 $z=ky$ $(k=\mathrm{ctg}\,\alpha)$，绕 z 轴旋转一周得圆锥曲面，求圆锥曲面方程。

例2　将 xoz 面的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 z 轴、x 轴旋转一周，求所得旋转曲面的方程。

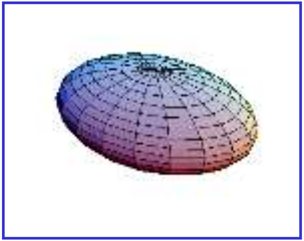
例 3　下面方程在空间直角坐标下表示怎样的曲面？

①$x^2 + y^2 = R^2$

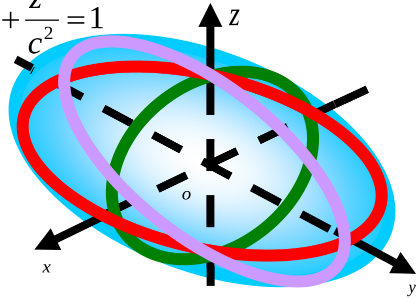
②　$y^2 = 2x$

③$x - y = 0$

二次曲面

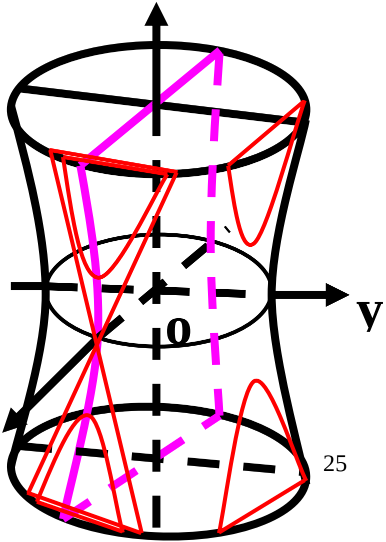


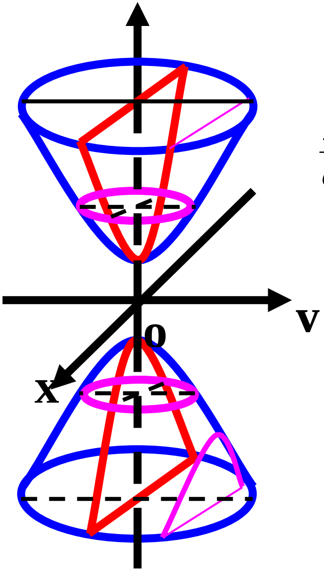
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



Z

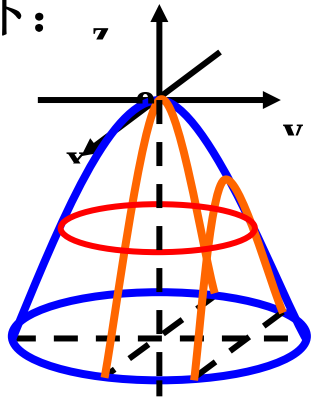
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



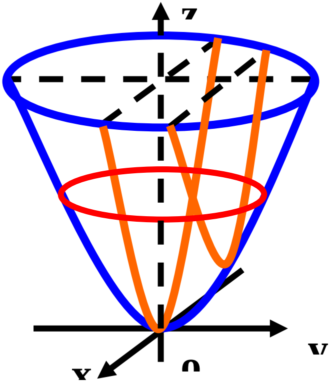


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

椭圆抛物面的图形如下：



$p<0, \quad q<0$



$p>0, \quad q>0$

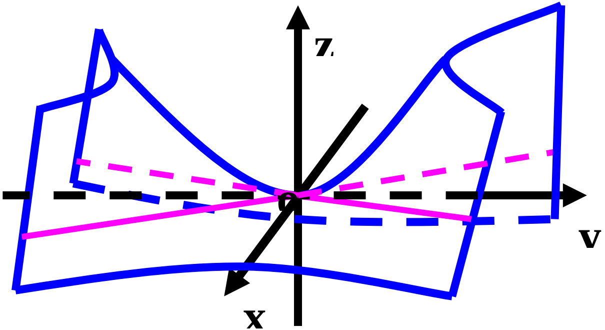
p q

双曲抛物面（马鞍面）

：

$p>0,\ q>0$

图形如下：



例 1　求直线$L:\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$绕 z 轴旋转所产生的旋转曲面Σ的方程。

例 2　求直线$l_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}$绕直线$L:x=y=z$旋转所得的旋转曲面的方程。

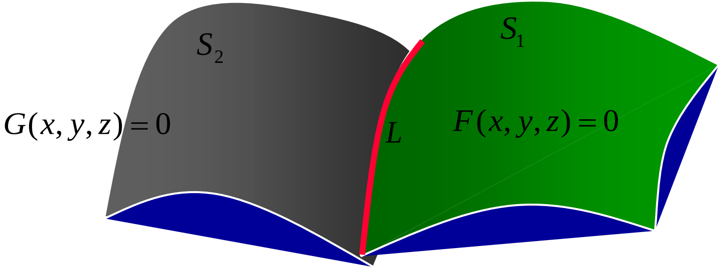
例 3　设锥面的顶点在原点，准线为$C\begin{cases} y^2+z^2=4 \\ x=1 \end{cases}$，

求锥面方程。

例 4 证明 $f\left(\frac{y}{m}-\frac{z}{p},\frac{z}{p}-\frac{x}{l},\frac{x}{l}-\frac{y}{m}\right)=0$（其中 l、m、p 均不为 0）表示母线平行于直线的柱面。

§6　曲线及其方程

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

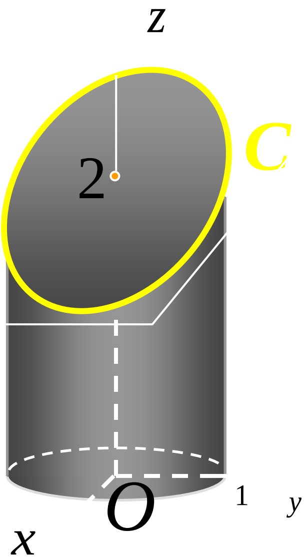

S_2
S_1
$G(x,y,z)=0$
L
$F(x,y,z)=0$

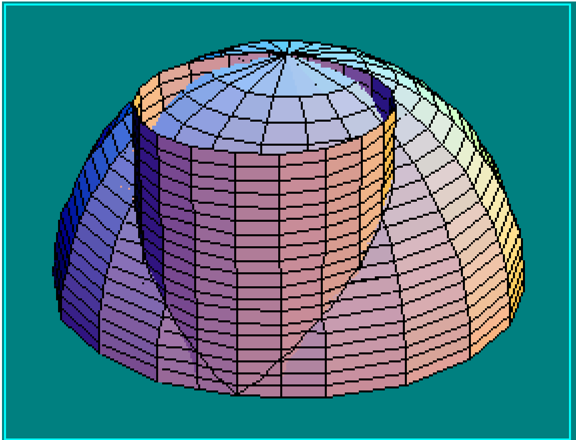
例 1 画出下列方程所表示的曲线

1．$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\mathrm{R}^2 \\ \mathrm{z}=0 \end{cases}$

2．$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2\mathrm{x}+3\mathrm{z}=6 \end{cases}$

3．$\begin{cases} \mathrm{z}=\sqrt{\mathrm{a}^2-\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2} \\ (\mathrm{x}-\dfrac{\mathrm{a}}{2})^2+\mathrm{y}^2=(\dfrac{\mathrm{a}}{2})^2 \end{cases}$


z
2
C
1
y
O
x



例 1　将下列曲线的一般方程化为参数方程。

① $$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ y=x \end{cases}$$

② $$\begin{cases} (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4 \\ z=0 \end{cases}$$

例1 求曲线$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 2y \end{cases}$在三个坐标面上的投影柱面方程。

例2 分别写出曲线$\begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \\ z = 2 - x^2 \end{cases}$关于 xoy 平面的投影柱面方程、投影曲线方程。

例 3　画出曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x^2+y^2=2az(a>0)$ 的交线在 xoy 面上的投影。

例 4　求曲线 $\begin{cases} y^2+4z^2=4 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得旋转曲面与平面 $y+z=1$ 的交线在三坐标面上的投影曲线。

§3　平面及其方程

例 1　求过三点 $M_1(2,-1,4), M_2(-1,3,-2)$， $M_3(0,2,3)$ 的平面方程。

例 2　分别按下列条件求平面方程。

①过 y 轴且通过点 $M(4,-3,-1)$

②平行于 yoz 面且过点 $M(2,-5,-3)$

③平行于 x 轴且过 $M_1(4,0,-2), M_2(5,1,7)$

例 1　求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面的夹角的余弦。

例 2　求过 $M_0(1,-2,1)$，且平行于平面 $3x-2y+z-4=0$ 的平面方程。

例3　设 $M_1(1,1,1)\in\pi$， $M_2(0,1,-1)\in\pi$，且 $\pi\perp\pi_1$，$\pi_1: x+y+z=0$，求 π。

例 1　求两平行平面：$\pi_1: 3x+2y+6z-35=0$，

$\pi_2: 3x+2y+6z-56=0$之间的距离。

例 2　求通过$A(3,0,0)$和$B(0,0,1)$且与xoy面成$\dfrac{\pi}{3}$角的平面的方程。

§4 空间直线及其方程

例1、　将直线方程的一般式化为对称式

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$$

例 1　求过点(0, 2, 4)且与平面$x+2z=1$及$y-3z=2$都平行的直线方程。

例 2 求过点$A(2,1,3)$且与直线$L:\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$垂直相交的直线方程。

例3　求过点(1, -2, 4)且与平面$2x-3y+z-4=0$垂直的直线方程，并求直线与平面的交点。

例 1　设有直线$L_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{4}$，

$L_2:\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y+4}{6}=\dfrac{z+2}{8}$，则$L_1$（　　）

(A) 与L_2重合，（B）平行于L_2但不重合，

（C）与L_2垂直，　（D）与L_2斜交

例 2 判断直线$L:\begin{cases}x+y+z=0\\3x-y+2z=1\end{cases}$与平面$\pi:x+y-2z=5$是否相交，若相交，求出交点，并求出直线与平面的夹角。

例 3 求点$P(3,-1,2)$到直线$L\begin{cases}x+y-z+1=0\\2x-y+z-4=0\end{cases}$的距离。

例 1* 求过点 $A(-1,0,4)$，且平行于平面 $\pi: 3x-4y+z-10=0$，又与直线 $L_1: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$ 相交的直线方程

例 2* 判定直线 $L_1:\begin{cases} x-y-z=2 \\ x-5y+z=8 \end{cases}$ 与

$L_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{3}$ 是否共面？是否相交？

例 3* 求与已知直线 $L_1:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z}{1}$ 及

$L_2:\dfrac{x-10}{5}=\dfrac{y+7}{4}=\dfrac{z}{1}$ 相交且和 $L_3:\dfrac{x+2}{8}=\dfrac{y-1}{7}=\dfrac{z-3}{1}$

平行的直线方程。

例 1　求过直线 $L:\begin{cases} x+5y+z=0 & (\pi_1) \\ x-z+4=0 & (\pi_2) \end{cases}$ 且与平面

$\pi_3: x-4y-8z+12=0$ 且成 $\frac{\pi}{4}$ 角的平面方程。

例 2　求直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投

影直线的方程。

。