高等数学下复习补充 2014 级

第 8 章

1 基本关系：

（1）多元函数一阶偏导数连续，一阶偏导存在，可导（这两个同义），连续，可微，方向导数存在之间的关系？

（2）多元函数二阶偏导数连续与二阶混合偏导相等关系？

例如：P72—1

2 下列各极限都存在，则 $f_x(0,0)$ 定义为（ B ）

A $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(\Delta x,0)}{\Delta x}$　　B $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$

C $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta x}$　　D $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta x}$

3 下列各极限都存在，则 $f_x(1,0)$ 定义为（ B ）

A $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x,0+\Delta y)-f(1+\Delta x,0)}{\Delta x}$　　B $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x,0)-f(1,0)}{\Delta x}$

C $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x,0+\Delta y)-f(1,0)}{\Delta x}$　　D $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1,0+\Delta y)-f(1,0)}{\Delta x}$

4 函数 $z=3x^2y$ 在（0，0）点（ A ）

A 无极值　　B 有极小值　　C 不是驻点　　D 有极大值

5 函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在（0，0）点（ A ）

A 有极小值　　B 有极大值　　C 无极值　　D 是驻点

6 函数 $z=x^3+y^3$ 在（0，0）点（ C ）

A 有极小值　　B 有极大值　　C 无极值　　D 不是驻点

7 函数在一点处沿梯度方向的方向导数最大，方向导数最大值等于梯度的模。

例：单元测试（二）第四大题

第 9 章

1 设 $D:x^2+y^2\le 1$，则 $\iint_D x^3\cos y d\sigma=$ ____0____.

2 设 $D:x^2+y^2\le 1$，则 $\iint_D x\sin(x^2+y^2)d\sigma=$ ____0____.

3 设 $D:x^2+y^2\le 4$，则 $\iint_D 2dxdy=$ ____8π____.(对比第 10 章题 1)

4 设一薄板在平面内占有有界区域 D，面密度为连续函数 $\mu(x,y)$，则此薄板的质量用二重积分表示为________。 $\iint_D \mu(x,y)d\sigma$

5 面密度为 $\mu=2x^2+y+3z$ 的球壳 Σ 的质量的积分表达式为________。 $\iint_\Sigma (2x^2+y+3z)dS$

6 求面密度为 $\mu=\sqrt{1+4z}$ 的壳 $z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$ 的质量。

解：$\iint_{\Sigma}\sqrt{1+4z}dS=3\pi$

7 设一物体占有有界空间闭区域 $\Omega:0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1$，密度 $\mu=x+y+z$，求物体质量。

解：$\iiint_{\Omega}(x+y+z)dxdydz=3\iiint_{\Omega}zdxdydz=3\int_0^1 zdz\iint_{D_z}dxdy=3\int_0^1 zdz=\frac{3}{2}$

8 书 P89——例题 5，注意与 P131——3（4）差别

第 10 章

1 设 L 为圆周 $x^2+y^2=1$的下半圆周，$y=-\sqrt{1-x^2}$ 则 $\int_L(x^2+y^2)ds=$______ π ______________。

2 设 L: $x^2+y^2=1$，取逆时针，则 $\oint_L(y+x\sin y)dx+\frac{1}{2}x^2\cos ydy=$ ________ π _____________。

(注意 1 与 2 计算过程中差别)

3 设 L 为平面曲线 $x=x_0(0\le y\le\frac{3}{2})$，则 $\int_L 4ds=$_______6_____________。

4 设 L 为圆周 $(x-1)^2+(y-1)^2=3$，则 $\oint_L ds=$_______ $2\sqrt{3}\pi$ _____________。

5 设 S 表示上半球面 $x^2+y^2+z^2=4(z\ge 0)$,则 $\iint_S dS=$ _____ 8π ________________。

6. 设 $I=\oint_L xy^2\,\mathrm{d}y-yx^2\,\mathrm{d}x$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$ 沿逆时针方向，以下计算该线积分的方法是否正确？为什么？

由 Green 公式得

$$I=\iint_D(y^2+x^2)\mathrm{d}\sigma=\iint_D a^2\,\mathrm{d}\sigma=\pi\sigma^4.$$

解：不正确

7. 设 $I=\oiint_{\Sigma}xy^2dy\wedge dz+yz^2dz\wedge dx+zx^2dx\wedge dy$. 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 外侧，以下计算该面积分的方法是否正确？为什么？

由 Gauss 公式得

$$I=\iiint_{(V)}(y^2+z^2+x^2)dV=\iiint_{(V)}a^2dV=\frac{4}{3}\pi a^3\cdot a^2=\frac{4}{3}\pi a^5$$

其中 (V) 为球体 $x^2+y^2+z^2\le a^2$。

解：不正确

注意：从 6，7 两题体会什么时候可以代，什么时候不能代

第 11 章

（一） 傅里叶级数

1 $S(x)$ 是 $f(x)=x(0\le x<1)$ 展成以 2 为周期的余弦级数的和函数，则 $S(-\frac{1}{3})=$ ______$\frac{1}{3}$______。

2 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases} x+\pi & -\pi\le x<0 \\ \dfrac{x^2}{\pi} & 0\le x<\pi \end{cases}$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=-\pi$ 是(　　A　　)

A　$\frac{\pi}{2}$　　　B　π　　　C　0　　　D　发散

3 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，它在 $(-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases} -1 & -\pi<x\le 0 \\ 1+x^2 & 0<x\le\pi \end{cases}$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=\pi$ 处收敛于 ___$\frac{\pi^2}{2}$___________。

4 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases} e^x & -\pi\le x<0 \\ -x & 0\le x<\pi \end{cases}$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=2\pi$ 处收敛于 ___$\frac{1}{2}$___________。

（二） 幂级数

1 $f(x)$ 的麦克劳林级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，则 $a_n=$___$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$___________。

2 $f(x)$ 的泰勒级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$，则 $a_n=$___$\frac{f^{(n)}(1)}{n!}$___________。

3 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 x=4 发散 ，则以下确定的是（　B　）

A　$x=-1$ 处发散　　B　$x=-3$ 处发散　　C　收敛半径 $R>3$　　D　收敛半径 $R=3$

4 求 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的和函数

（三） 数项级数

1 下列级数发散的是(　　B　　)

A　$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(n+1)}$　　B　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n-1}$　　C　$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}$　　D　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

2 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数，则下列结论正确的是（　B　）

A 若 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

B 若存在非零常数 λ，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lambda$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

C 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 ，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$

D 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则存在非零常数 λ，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lambda$

解析：A 反例：$a_n = \dfrac{1}{n\ln n}$,可用积分判别法证发散，超纲

B 成立，因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lambda$， $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与调和级数的敛散性一致

C 反例：$a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$

D 反例：$a_n = \dfrac{1}{\ln n}$

3 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \sin \dfrac{\pi^2}{n}$ （ B ）

A 条件收敛　　B 绝对收敛　　C 发散　　D 收敛性不能确定

4 设常数 $k > 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \sin \dfrac{k}{n^3}$ （ A ）

A 绝对收敛　　B 条件收敛　　C 发散　　D 收敛性不能确定

5 设常数 $k > 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{k+n}{n^2}$ （ B ）

A 绝对收敛　　B 条件收敛　　C 发散　　D 收敛性不能确定

6 设常数 $k > 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{k}{n}$ （ B ）

A 绝对收敛　　B 条件收敛　　C 发散　　D 收敛性不能确定

7 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，以下错误的是（ B ）

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛（k 是常数）　　B $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛

C $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$ 发散　　　　D $\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_{2n-1}+u_{2n}\right)$ 收敛

8 判断对错

（1） 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)^2$ 收敛

（2） 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛

（3） 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$

（4） 若 $u_n\ge 0$ 且 $\lim_{n\to\infty}nu_n=l(0<l<+\infty)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

解：（1）（3）正确；（2）（4）错误

9 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$ 条件收敛。

10 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1-\cos\sqrt{\frac{1}{n}})$ 的敛散性，若收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

解：条件收敛

11 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n>0, n=1,2\ldots$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+b_n}}$ 绝对收敛。