第十二章《无穷级数》测试题

1. B C A B

2. （1） 解：因为$\ln(n+1)<n+1$,所以$\dfrac{1}{\ln(n+1)}>\dfrac{1}{n+1}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$发散，从而该正项级数发散

（2）解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{\sqrt[3]{n^4+1}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}}=1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$收敛，从而该正项级数收敛

（3）解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}\ln\frac{n+2}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2}{n}}=1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n\sqrt{n}}$收敛，从而该正项级数收敛

（4）解：因为$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(n+1\right)^4+1}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{n^4+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{\left(1+n^{-4}\right)^4+n^{-4}}{1+n^{-4}}=0<1$

从而该正项级数收敛

（5）解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n+1}{n\left(n+2\right)}}{\frac{1}{n}}=1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，从而该正项级数发散

（6）解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{na+b}}{\frac{1}{na}}=1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{na}$发散，从而该正项级数发散

（7）解：因为$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}\left(n+1\right)!}{\left(n+1\right)^{n+1}}\cdot\dfrac{n^n}{3^n n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{\left(1+n^{-1}\right)^n}=\dfrac{3}{e}>1$，从而该正项级数发散

（8）解：用根值判别法$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\left(\sqrt[n]{3}-1\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\left(\sqrt[n]{3}-1\right)=1\cdot(1-1)=0<1$

该正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(\sqrt[n]{3}-1\right)^n$收敛。

（9）解：用根值判别法$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{b}{a_n}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b}{a_n}=\dfrac{b}{a}$

当$b>a$时$\rho>1$发散，当$b<a$时$\rho<1$该正项级数收敛

当$b=a$时$\rho=1$不能判定敛散性。

3.（1）解：先考虑加绝对值后的级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}$，因为$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n-\ln n}}{\frac{1}{n}}=1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，从而该正项级数发散。

再考虑级数自身的敛散性。 令$f\left(x\right)=\frac{1}{x-\ln x}$，则$f'\left(x\right)=-\frac{1-\frac{1}{x}}{\left(x-\ln x\right)^2}<0,x>1$时

从而$u_n=\frac{1}{n-\ln n}$单调减少，又$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=0$

从而由莱布尼茨判别法$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$收敛

因此是条件收敛

（2）解：$u_n=\sin\left[\left(\pi\sqrt{R^2+n^2}-n\pi\right)+n\pi\right]=\left(-1\right)^n\sin\pi\left(\sqrt{R^2+n^2}-n\right)=\left(-1\right)^n\sin\frac{\pi R^2}{\sqrt{R^2+n^2}+n}$

从而该级数是交错级数，由于$\left|u_n\right|=\sin\frac{\pi R^2}{n+\sqrt{R^2+n^2}}$单调减少且$\lim_{n\to\infty}\left|u_n\right|=0$

从而由莱布尼茨判别法$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\pi\sqrt{R^2+n^2}$收敛

但是$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi R^2}{n+\sqrt{R^2+n^2}}}{\frac{\pi R^2}{2n}}=1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi R^2}{2n}$发散，从而$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi R^2}{n+\sqrt{R^2+n^2}}$发散

因此是条件收敛

（3）解：因为$\left|u_n\right|=\frac{1}{\pi^n}\sin\frac{\pi}{n}\le\frac{1}{\pi^n}$，从而该级数绝对收敛

（4）解：去掉前面有限项即当n足够大时为交错级数，

由于$\left|u_n\right|=\left|\sin\frac{x}{n}\right|\sim\frac{|x|}{n},n\to\infty$，对足够大的$n,\left|u_n\right|$单调减少且$\lim_{n\to\infty}\left|u_n\right|=0$

从而由莱布尼茨判别法$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n},\left(x\neq 0\right)$收敛

但是$\left|u_n\right|=\left|\sin\frac{x}{n}\right|\sim\frac{|x|}{n},n\to\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right|$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n}$的敛散性相同，因此$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right|$发散

因此$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n},\left(x\neq 0\right)$是条件收敛

4. （1）解：考查正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$，由根值判别法$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{e}{3}<1$，

因此$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$收敛，从而它的部分和$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$有界，

设 M 是它的一个上界，即$0\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}\le M$，所以$0\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}\le\frac{M}{n}$

因此由夹逼准则$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}=0$

（2）解：令$y_n=2^{\frac{1}{3}}\cdot4^{\frac{1}{9}}\cdot8^{\frac{1}{27}}\cdots\cdots\left(2^n\right)^{\frac{1}{3^n}}=2^{\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}}$，由于$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{3^k}=\sum_{k=1}^{\infty}kx^k\Big|_{x=\frac{1}{3}}$

看$\sum_{k=1}^{\infty}kx^k=x\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=x\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^k\right)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2},x\in(-1,1)$

从而$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{3^k}=\frac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}$，因此$\lim_{n\to\infty}\left[2^{\frac{1}{3}}\cdot4^{\frac{1}{9}}\cdot8^{\frac{1}{27}}\cdots\cdots\left(2^n\right)^{\frac{1}{3^n}}\right]=2^{\frac{3}{4}}$

（或者错位相减法也可算出$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{3^k}=\frac{3}{4}$）

5. （1）解：看$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+(-2)^n}{n}t^n$，

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3n+(-2)^n}{n}\frac{n+1}{3n+3+(-2)^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(3n\cdot2^{-n}+(-1)^n\right)\left(1+n^{-1}\right)}{3(n+1)\cdot2^{-n}-2(-1)^n}\right|=\frac{1}{2}$$

$t=\frac{1}{2}$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+(-2)^n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{(-1)^n}{n}\right]$，$\sum_{n=1}^{\infty}3\left(\frac{1}{2}\right)^n,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$均收敛，从而$t=\frac{1}{2}$时级数收敛；

$t=-\frac{1}{2}$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+(-2)^n}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{n}\right]$，$\sum_{n=1}^{\infty}3\left(-\frac{1}{2}\right)^n,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$一收一发，从而$t=-\frac{1}{2}$时级数发散；

从而该幂级数的收敛域也为$-\frac{1}{2}<t\le\frac{1}{2}$，原级数收敛域为$-\frac{1}{2}<x+1\le\frac{1}{2},-\frac{3}{2}<x\le-\frac{1}{2}$

（2）解：$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n^p}\cdot(n+1)^p\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\left(1+n^{-1}\right)^p\right|=1$为收敛半径

考虑端点，当$p>1$时收敛域为$[-1,1]$；当$0<p\le1$时收敛域为$[-1,1)$；

当 $p=0$ 时收敛域为 $(-1,1)$；

6．（1）解：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|n(n+1)\cdot\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right|=1$ 为收敛半径

考虑端点 $x=\pm1$，一般项 $\lim\limits_{n\to\infty}n(n+1)(\pm1)^n\neq0$，因此端点 $x=\pm1$ 处均发散，则知收敛域为 $(-1,1)$。

在收敛域内 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}=x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right)''=x\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)''=\dfrac{2x}{(1-x)^3}$

（2）解：$R=\sqrt[4]{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|}=\sqrt[4]{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{4n+1}\cdot(4n+5)\right|}=1$ 为收敛半径

当 $x=1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n+1}$ 发散，当 $x=-1$ 时，级数为 $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n+1}$ 发散，则知收敛域为 $(-1,1)$。

在收敛域内设 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$，则 $s'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{4n}=\dfrac{x^4}{1-x^4},s(0)=0$

$$s(x)=\int_0^x s'(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)+\frac{1}{1+x^2}\right)dx-x=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-x$$

7．（1）解：由于 $\left[\ln(1+x)\right]'=\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ln(1+x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1},$

$$(1-x)\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}x^{n+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^{n+1}$$

$$=\left(x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^{n+1}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right](-1)^n x^{n+1}=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}x^{n+1},$$

$x\in(-1,1)$，

当 $x=-1$ 时，级数为 $-1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$，由比较判别法（与调和级数比），此数项级数发散，

当 $x=1$ 时，级数为 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$，由莱布尼茨判别法，此数项级数收敛，且函数 $(1-x)\ln(1+x)$ 在该点连续，因此成立区间为 $x\in(-1,1]$

（2）解：由于 $\left[\arcsin x\right]'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\left[1+(-x^2)\right]^{-\frac{1}{2}}=1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)(-x^2)$

$$+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-x^2\right)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\left(-x^2\right)^n+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2!\cdot 2^2}x^4+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{n!\cdot 2^n}x^{2n}+\cdots$$，$\arcsin 0=0$

从而 $\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1\cdot 3}{2!\cdot 2^2\cdot 5}x^5+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{n!\cdot 2^n\cdot(2n+1)}x^{2n+1}+\cdots,x\in(-1,1)$

当 $x=\pm 1$ 时，可证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!\cdot 2^n\cdot(2n+1)}$ 收敛（超纲），且函数 $\arcsin x$ 在该点连续，所以成立区间是

$$\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1\cdot 3}{2!\cdot 2^2\cdot 5}x^5+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{n!\cdot 2^n\cdot(2n+1)}x^{2n+1}+\cdots,x\in[-1,1]$$

（3）解：由于 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=x\left[1+x^2\right]^{-\frac{1}{2}},\left[1+x^2\right]^{-\frac{1}{2}}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)x^2$

$$+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(x^2\right)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\left(x^2\right)^n+\cdots$$

$$=1+\frac{-1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2!\cdot 2^2}(-1)^2x^4+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{n!\cdot 2^n}(-1)^n x^{2n}+\cdots,$$

从而 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=x-\frac{1}{2}x^3+\frac{1\cdot 3}{2!\cdot 2^2}x^5+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{n!\cdot 2^n}(-1)^n x^{2n+1}+\cdots,x\in[-1,1]$

8.（1）解：$\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(x+1-1)^2}=\left(\frac{1}{1-(x+1)}\right)'=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x+1)^n\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x+1)^{n-1}$，$-1<x+1<1,-2<x<0$

（2）解：$\lg x=\frac{\ln x}{\ln 10}=\frac{1}{\ln 10}\ln\left[1+(x-1)\right]$，而 $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$

从而 $\lg x=\frac{1}{\ln 10}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1},-1<x-1\le 1,0<x\le 2$

9. 解：该函数为奇函数，延拓为周期 2π 的周期函数展开，$a_n=0$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin nxdx\right]$$

$$=\frac{-2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}xd\cos nx+\frac{-1}{n}\cos nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{-2}{n\pi}\left[x\cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nxdx\right]+\frac{\cos\frac{n\pi}{2}-(-1)^n}{n}$$

$$=\frac{-2}{n\pi}\left[\frac{\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]+\frac{\cos\frac{n\pi}{2}-(-1)^n}{n}=\frac{2\sin\frac{n\pi}{2}-n\pi(-1)^n}{n^2\pi}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin\frac{n\pi}{2}-n\pi(-1)^n}{n^2\pi}\sin nx,\qquad x\in(-\pi,\pi)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin\frac{n\pi}{2}-n\pi(-1)^n}{n^2\pi}\sin nx=0,\qquad x=-\pi,$$

10． 解：（1）将该函数延拓为奇函数，再延拓为周期$T=4,(l=2)$的周期函数展开得正弦级数，

$a_n=0$；

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{-1}{n\pi}\int_0^2 xd\cos\frac{n\pi x}{2}$$

$$=\frac{-1}{n\pi}\left[x\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2-\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right]=\frac{-1}{n\pi}\left[2(-1)^n-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2\right]=\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{nx\pi}{2},x\in[0,2)$，当 x=2 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{nx\pi}{2}=0$

（2）将该函数延拓为偶函数，再延拓为周期$T=4,(l=2)$的周期函数展开得余弦级数，

$b_n=0$；

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\int_0^2\frac{x}{2}dx=1$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{n\pi}\int_0^2 xd\sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left[x\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2-\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right]=\frac{1}{n\pi}\left[0+\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2\right]=\frac{2(-1)^n-2}{n^2\pi^2}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n-2}{n^2\pi^2}\cos\frac{nx\pi}{2},x\in[0,2]$$