
第七章 微分方程

一阶微分方程部分

7-1

1. 微分方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 的通解中所含有的相互独立的任意常数个数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 0 D. 不确定

7-2

1. 求微分方程 $ye^{2x}dx + (5 + e^{2x})dy = 0$ 的通解.

2. 求解初值问题: $(1 + e^{-x})y' \tan y + 1 = 0$, $y|_{x=0} = \pi$.

3. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = xe^{y-2x}$ 的通解.

7-3

1. 求微分方程 $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$ 的通解.

2. 求解初值问题 $(y + xe^{\frac{y}{x}})dx = xdy$, $y(1) = 0$.

3. 作适当的变量代换, 求下列方程的通解: $(x+2y)^2 y' = 1$.

7-4

1. 解微分方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$.

2. 求解初值问题 $\frac{dy}{dx} - y \tan x = \sec x$, $y|_{x=0} = 0$.

3. 解微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3xy = xy^2$.

4. 设连续函数 $f(x)$ 满足方程 $\int_0^x tf(t)dt - x^2 - f(x) = 0$, 求 $f(x)$ 。

其他题:

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty]$ 上连续, 若由曲线 $y = f(x)$ 、直线 $x = 1$ 、 $x = t$ ($t > 1$) 与 x 轴所围成的平面图形绕 x

轴旋转一周所成的旋转体体积为 $V(t) = \frac{\pi}{3}[t^2 f(t) - f(1)]$, 试求 $y = f(x)$ 所满足的微分方程, 并求该微分方程满

足条件 $y|_{x=2} = \frac{2}{9}$ 的解.

2. 求微分方程 $xdy + (x - 2y)dx = 0$ 的一个解 $y = y(x)$, 使得由曲线 $y = y(x)$ 与直线 $x = 1$ 、 $x = 2$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积最小.

3. 求通过点 $(1, 2)$ 的曲线方程, 使此曲线在 $[1, x]$ 上所形成的曲边梯形面积的值等于此曲线段终点的横坐标 x 与纵坐标 y 的乘积 2 倍减 4

高阶微分方程部分

1. 填空题

(1) 函数 $y = e^{rx}$ 是常系数线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的解的充分必要条件是_____;

(2) 已知二阶线性齐次方程的两个解 $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, 则该方程为_____;

(3) 设 $y_1 = 3$, $y_2 = 3 + x^2$, $y_3 = 3 + x^2 + e^x$ 都是方程 $(x^2 - 2x)y'' - (x^2 - 2)y' + (2x - 2)y = 6x - 6$ 的解, 则方程的通解为_____.

(4) 微分方程 $y'' + 3y' + 2y = 3xe^{-x}$ 的特解形式是 $y^* =$ _____;

(5) 微分方程 $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}(1 - \cos x)$ 的特解形式是 $y^* =$ _____.

2. 求下列各方程的通解

(1) $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 0$;

(2) $y'' = \frac{1}{x}y' + xe^x$;

(3) $y'' + 9y = x \sin 3x$;

(4) $xy'' - y' = x^2$;

(5) $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}$;

(6) 求微分方程 $y^{(5)} + 2y''' + y' = 0$ 的通解.

(7) 求微分方程 $y'' = y^2 y'$ 的满足条件 $y'(0) = \frac{1}{3}$, $y(0) = 1$ 的特解.

3. 设可微函数 $\varphi(x)$ 满足方程 $\varphi(x) = e - \int_0^x (x-u)\varphi(u)du$, 求 $\varphi(x)$.

4. 设函数 $\varphi(x)$ 在实轴上连续, $\varphi'(0)$ 存在, 且具有性质 $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$, 试求出 $\varphi(x)$.