高等数学下独立作业（一）

一、选择题

1．设有直线

$$L:\begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$$

及平面$\pi:4x-2y+z-2=0$，则直线L（　　　）

A．平行于平面π；　　　　B．在平面π上；

C．垂直于平面π；　　　　D．与平面π斜交.

2．二元函数$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0) \\ 0, \qquad (x,y)=(0,0) \end{cases}$在点$(0,0)$处（　　　）

A．连续、偏导数存在；　　　　B．连续、偏导数不存在；

C．不连续、偏导数存在；　　　D．不连续、偏导数不存在.

3．设$f(x,y)$具有一阶偏导数，且对任意的(x,y)，都有$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0,\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}>0$，则（　　　）

（A）$f(0,0)>f(1,1)$　（B）$f(0,0)<f(1,1)$　（C）$f(0,1)>f(1,0)$　（D）$f(0,1)<f(1,0)$

4．设$\sum$是平面$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+z=1$由$x\geq 0$，$y\geq 0$，$z\geq 0$所确定的三角形区域，则曲面积分

$\iint\limits_{\Sigma}(3x+2y+6z)\mathrm{d}S=$（　　　）

A．7；　　B．$\dfrac{21}{2}$；　　C．14；　　D．21.

5．微分方程$y''-y=\mathrm{e}^x+1$的一个特解应具有形式（　　　）

A．$a\mathrm{e}^x+b$；　B．$ax\mathrm{e}^x+b$；　C．$a\mathrm{e}^x+bx$；　D．$ax\mathrm{e}^x+bx$.

6. 设常数$\lambda>0$，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛，则级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$（　　　）

(A) 发散　　(B) 条件收敛　　(C) 绝对收敛　　(D) 收敛性与λ有关

7.设D是第一象限由曲线$2xy=1$，$4xy=1$与直线$y=x$，$y=\sqrt{3}x$围成的平面区域，函数$f\left(x,y\right)$

在D上连续，则$\iint\limits_D f\left(x,y\right)dxdy=$　　　　　　　　(　　　)

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)rdr$

(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) r dr$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) dr$

(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) dr$

二、填空题

1．设一平面经过原点及点$(6,-3,2)$，且与平面$4x-y+2z=8$垂直，则此平面方程为_____________；

2．设$z=\arctan\dfrac{x-y}{1+xy}$，则$\mathrm{d}z\,|_{(1,\sqrt{3})}=$___________；

3．设L为$x^2+y^2=1$正向一周，则$\oint_L \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y=$________________；

4．设圆柱面$x^2+y^2=3$，与曲面$z=xy$在(x_0,y_0,z_0)点相交，且它们的交角为$\dfrac{\pi}{6}$，则正数$Z_0=$_______；

5．若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n$在点$x=\dfrac{3}{2}$处条件收敛，则该级数的收敛半径是_______________.

三、设由方程组$\begin{cases} x=\mathrm{e}^u\cos v \\ y=\mathrm{e}^u\sin v \end{cases}$确定了$u$，$v$是$x$，$y$的函数，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$及$\dfrac{\partial v}{\partial x}$与$\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

四、已知点$A(1,1,1)$及点$B(3,2,-1)$，求函数$u=\ln\left(3xy-2z^3\right)$在点$A$处沿$\overrightarrow{AB}$方向的方向导数.

五、计算累次积分 $\int_1^2 \mathrm{d}\,x\int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{y}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}\,y+\int_2^4 \mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{y}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}\,y$ ）.

六、计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}\,x\mathrm{d}\,y\mathrm{d}\,z$，其中 Ω 是由柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0$, $z=1$ 围成的区域.

七．计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^3+y^2+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 是抛物面 $2z=x^2+y^2$ 被平面 $z=2$ 所截下的有限部分.

八、计算 $\int_L (4x+\frac{2x}{y}\cos\frac{x^2}{y})\mathrm{d}x-\frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x^2}{y}\,\mathrm{d}y$， L 是点 $A(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 到点 $B(\pi,2\pi)$ 在上半平面 $(y>0)$ 上的任意逐段光滑曲线.

九、计算$\iint_{\Sigma}(x+y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为半球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$上侧.

*十、设二阶连续可导函数$y=f(x)$，$x=\dfrac{s}{t}$适合$\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}+4\dfrac{\partial^2 y}{\partial s^2}=0$，求$y=f(x)$.

十一、求方程的$y''+4y=\cos 2x$通解.

十二、在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的第一卦限上求一点 M ，使以 M 为一个顶点、各面平行于坐标面的球内接长方体的体积最小.

十三．判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{[\ln(1+n)]+n}$ 是否收敛？如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛？

十四．求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n\cdot n!}x^n$ 的收敛区间及和函数.

十五．将 $f(x)=\begin{cases}0, & 0<a\le |x|<\pi \\ H\pi, & 0<x<a \\ -H\pi, & -a<x<0\end{cases}$ 展成以 2π 为周期的傅立叶级数.

高等数学下独立作业（二）

一、选择题

1．设 $z=x\cdot y\cdot f(\frac{y}{x})$，且 $f(u)$ 可导，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ 为（　　　）

A． $2xy$；；　　　B． $2(x+y)z$；

C． $2(x+y)$；　　　D． $2z$.

2．从点 $P(2,-1,-1)$ 到一个平面引垂线，垂足为点 $M(0,2,5)$，则这个平面的方程是（　　　）

A． $2x+3y-6z+36=0$；　　　B． $2x-3y-6z+36=0$；

C． $2x-3y-6z-36=0$；　　　D． $2x-3y+6z+36=0$.

3．微分方程 $(1-x)y''=1$ 的通解是（　　　）

A． $y=(1-x^2)\ln|1-x|+C_1$；　　　B． $y=\ln|1-x|+C_1x+C_2$；

C． $y=x^2\ln|1-x|+C_1x+C_2$；　　　D． $y=(1-x)\ln|1-x|+C_1x+C_2$.

4．设平面曲线 L 为下半圆周 $y=-\sqrt{1-x^2}$，则曲线积分 $\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s$ 等于（　　　）

A． π；　　　B． 2π；

C． 3π；　　　D． 4π .

二．填空题

1．曲面 $3xyz-z^3=a^3$ 在点 $(0,a,-a)$ 处的切平面方程是_______________；.

2．微分方程 $y''-2y'-3y=2xe^{-x}$ 的待定特解形式是______________；

3．设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧，则曲面积分

$$\iint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

三．计算二重积分 $\iint_D x(x+y)dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 2,y\ge x^2\right\}$

四、求函数 $u=x^2+y^2+z^2-3z$ 在点 $M_0(1,-1,2)$ 处的梯度及沿梯度方向上函数的方向导数.

五.计算 $\iint\limits_{\Sigma} xyzdxdy$，其中，$\Sigma$ 为球面：$x^2+y^2+z^2=1\ \ (x\geq 0, y\geq 0)$ 的外侧.

六、设积分域 D 为 $x^2+y^2\leq 4$，$x\geq 0$，$y\geq 0$ 所围成，试计算二重积分 $\iint\limits_{D}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$.

七、计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v$，式中 Ω 为由 $\begin{cases} z\geq\sqrt{x^2+y^2} \\ 1\leq z\leq 2 \end{cases}$ 所确定的圆台体.

八、计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$ ，其中，Σ 为上半球面：$x^2+y^2+z^2=R^2 \quad (z\ge 0)$.

九、试证 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处不连续，但存在有一阶偏导数.

*十、计算 $\oint_{\Gamma}(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)dy+(x-y)dz$，其中 Γ 为椭圆 $x^2+y^2=a^2$，$\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{b}=1(a,b>0)$,方向从 x 轴正向看过去，这椭圆取逆时针方向。

十一．求无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域及在收敛域上的和函数.

十二．将函数 $f(x)=\begin{cases}0,-2\le x<0\\1,\quad 0\le x\le 2\end{cases}$ 展开成傅立叶级数，并指明展开式成立的范围.

高等数学下独立作业（三）

一、填空题

1．若函数 $f(x,y)=2x^2+ax+xy^2+2y$ 在点 $(1,-1)$ 处取得极值，则常数 $a=$________.

2．设 $f(x)=\int_x^1 \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y$，则 $\int_0^1 f(x)dx=$__________.

3．设 S 是立方体 $0\le x,y,z\le 1$ 的边界外侧，则曲面积分

$$\oiint_s x^5\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^6\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^7\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\_\_\_\_\_\_.$$

4．设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 3，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为_________.

5．微分方程 $y''+3y'-4y=x^2\mathrm{e}^{-4x}$ 用待定系数法确定的特解（系数值不求）的形式为__________.

6. 第一型曲线积分 $\oint_{x^2+y^2=1} x^2ds=$ ____________.

7．已知 $(axy^3-y^2\cos x)dx+(1+by\sin x+3x^2y^2)dy$ 为某个二元函数 $f(x,y)$ 的全微分. 则常数 a,b 分别是________和________

8．设 $L:x^2+y^2=R^2$,其方向为正,则 $\oint_L -yx^2dx+xy^2dy=$______________.

二、选择题

1．函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0,\\ 2, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处（　　　）.

（A）无定义；　　（B）无极限；

（C）有极限但不连续；　　（D）连续.

2．设 $z=\sec(xy-1)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$（　　　）.

（A） $\sec(xy-1)\tan(xy-1)$；　　（B） $y\sec(xy-1)\tan(xy-1)$；

（C） $y\tan^2(xy-1)$；　　（D） $-y\tan^2(xy-1)$.

3．两个圆柱体 $x^2+y^2\le R^2$， $x^2+z^2\le R^2$ 公共部分的体积 V 为（　　　）.

（A） $2\int_0^R \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}y$；　　（B） $8\int_0^R \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}y$；

（C） $\int_{-R}^R \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}y$；　　（D） $4\int_{-R}^R \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}y$.

4．若 $a_n \ge 0$，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，则数列 $\{S_n\}$ 有界是级数收敛的（　　　）.

（A）充分必要条件；　　　　　　　　　（B）充分条件，但非必要条件；

（C）必要条件，但非充分条件；　　　　（D）既非充分条件，又非必要条件.

三、求曲面 $\mathrm{e}^{\frac{x}{z}} + \mathrm{e}^{\frac{y}{z}} = 4$ 上点 $M_0(\ln 2, \ln 2, 1)$ 处的切平面和法线方程.

四、求通过直线 $L: \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$ 的两个互相垂直的平面，其中一个平面平行于直线 $L_1: x = y = z$.

五、求微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 0$ 的解，使得该解所表示的曲线在点 $(0,2)$ 处与直线 $2x - 2y + 4 = 0$ 相切.

*六、设函数 $f(u)$ 有二阶连续导数，而函数 $z = f(e^x \sin y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z e^{2x}$$

试求出函数 $f(u)$.

七、计算曲面积分

$$\oiint_{\Sigma} (xy^2 \cos\alpha + yx^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma) \mathrm{dS} ,$$

其中 Σ 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \le 2z$ 与锥体 $z \ge \sqrt{x^2 + y^2}$ 的公共部分 Ω 的表面，$\cos\alpha$ ，$\cos\beta$ ，$\cos\gamma$ 是其外法线方向的方向余弦.

八、试将函数 $f(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 展成 x 的幂级数（要求写出该幂级数的一般项并指出其收敛区间）.

九、判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^n}{n^{\alpha}}(\alpha>0,\beta>0)$ 的敛散性.

十、计算曲线积分 $\int_L (1+x\mathrm{e}^{2y})\,\mathrm{d}x+(x^2\mathrm{e}^{2y}-1)\mathrm{d}y$，其中 L 为 $(x-2)^2+y^2=4$ 在第一象限内逆时针方向的半圆弧.

十一. 设球体 $x^2+y^2+z^2\le 2z$ 上各点的密度等于该点到坐标原点的距离，求该球体的质量.

*十二、设$a_1 = a_2 = 1$，$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} (n = 2, 3, ...)$，试证当$|x| < \dfrac{1}{2}$时，幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$绝对收敛，并求此幂级数的和函数。