Ch7　微分方程

§1　微分方程的基本概念

例 1　一曲线通过一点（1，2）且该曲线上任一点$\boldsymbol{M(x,y)}$处的切线斜率为$\boldsymbol{2x}$，求曲线方程。

例2　列车以 20 米/秒速度在平直线路上行驶，当制动时列车获加速度$\boldsymbol{a=-0.4}$米/秒^2，问开始制动后多少时间列车停止，且行了多少

路程。

几个定义

Def1：微分方程：含有未知函数的导数的方程。

Def2：

常微分方程：方程中的未知函数为一元函数。

偏微分方程：方程中的未知函数为多元函数。

Def3：微分方程的阶：微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数。

Def4：微分方程的解：代入方程后使方程变为恒等式的函数。

通解：含有任意常数，并且任意常数的个数与微分方程的阶数相同的解。

特解：不含任意常数，按特定条件从通解中确定出任意常数的特定值而得出的解。

Def5：初始条件：用来确定特解的条件。

Def6：初值问题：求微分方程满足初始条件的特解的这样一个问题。

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y|x = x_0 = y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \\ y'\big|_{x=x_0} = y_0' \end{cases}$$

Def7：

积分曲线：微分方程的特解的几何图形。是一条平面曲线。

积分曲线族：微分方程的通解的几何图形。是一

族曲线。

例1　　验证$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt$，$(k \neq 0)$是方程$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = 0$的通解，并求满足初始条件$x|_{t=0} = A, x'|_{t=0} = 0$的特解。

例 2　求具有以下通解的微分方程（c_1、c_2、c为任意常数）

①$y=\frac{1}{cx^2+1}$

②$y=c_1e^x+c_2e^{-x}+x-5$

③$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=1$

例 3 对称轴与y同平行的抛物线族，它同时与$y=0$和$y=x$两直线相切，求抛物线族所满足的一阶微分方程。

§2　可分离变量的微分方程

例 1　求解方程$\frac{dy}{dx}=2xy^2$

例 2　求解方程$\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{xy+x^3y}$

例 3　暖水瓶降温问题：瓶内水温为 T，室内温

度为$\boldsymbol{T_0}(\boldsymbol{T} > \boldsymbol{T_0}), \boldsymbol{t}$为时间，据试验，热水温度的减低率与$\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T_0}$成正比，求$\boldsymbol{T}$与$\boldsymbol{t}$的函数关系。

例4　降落伞下落后，空气阻力与速度成正比，设开跳时的时间为 0，求下落速度与时间的关系。

§3　齐次方程

例 1　求解方程$y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$

例2　　求 解 方 程 $y\cos\frac{x}{y}+(y-x\cos\frac{x}{y})\cdot y'=0$

例3　　求解方程

$$(2x+y-4)dx+(x+y-1)dy=0$$

例 4

①$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y}$

②$y' = sin(x-y)$

②$xy' = 2y + xy \ln \frac{x^2}{y}$

§4　一阶线性微分方程

例 1　求 D. E. $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$的通解。

例 2　求 D. E. $xdy-ydx=y^2e^ydy$的通解。

例 3　求 D. E. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+y^2}$、$y|_{x=0}=1$的特解。

例 4　设可导函数$f(x)=1+\frac{1}{x}\int_1^x tf(t)dt$，求$f(x)$。

例 5　已知$\int_0^1 f(\alpha x)d\alpha = \frac{1}{2}f(x) + 1$，求$f(x)$。

例 6　设$f(x)$连续，积分$\int_0^1 [f(x) + xf(xt)]\,dt$与$x$无关，求$f(x)$。

例 1　求 D. E. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=a\cdot ln\,x\cdot y^2$的通解。

例 2　求满足方程

$f(x)=e^x\left[1+\int_0^x f^2(t)dt\right]$的连续函数$f(x)$。

例 3　求解 D. E. $y'\ \mathrm{tg}y\cdot sec\,y+sec\,y\cdot\frac{1}{x}=e^x$。

例 4　求解 D. E. $sin\,y\cdot\frac{dy}{dx}-cos\,y+x\cdot cos^2\,y=$

$\mathbf{0}$

例 5　求解 D. E. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$

例 6　求解 D. E. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 1$

例7　求解 D. E.

$y' = y^2 + 2(\sin x - 1)y + \sin^2 x - 2\sin x - \cos x + 1$。

例8　　求解 D. E.

$$y(xy+1)dx + x(1+xy+x^2y^2)dy = 0$$。

例9　　求解 D. E.

① $(x^4+y^3)dx = xy^2dy$

② $y' = \tan^2(x+y)$

例 10 求解 D. E.

① $\boldsymbol{y'} = (\mathbf{4}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \mathbf{1})^{\mathbf{2}}$

② $\boldsymbol{cos\,y\,dx + (x - 2\,cos\,y)\,sin\,y\,dy = 0}$

③ $\boldsymbol{y'} = \dfrac{\boldsymbol{y^2 + x^3}}{\boldsymbol{2xy}}$

§5　全微分方程

例1　求解 D.E.

$$(5x^4 + 3xy^2 - y^3)dx + (3x^2y - 3xy^2 + y^2)dy = 0$$

例 2　求解 D.E. $(x^2 - y)dx - (x - y)dy = 0$

一些简单函数的全微分

①$\boldsymbol{xdy + ydx = d(xy)}$

②$\boldsymbol{xdx + ydy = d\left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right)}$

③$\boldsymbol{\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)}$

④ $\frac{ydx-xdy}{x^2}=d\left(-\frac{y}{x}\right)$

⑤ $\frac{ydx-xdy}{xy}=d\left(ln\frac{x}{y}\right)$

⑥ $\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=d\left(arctg\frac{x}{y}\right)$

例 3　$(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$

例 4　$\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$

例 1　求解 D. E. $ydx-xdy=0$

例 2　$(\mathbf{1}+\boldsymbol{xy})\boldsymbol{ydx}+(\mathbf{1}-\boldsymbol{xy})\boldsymbol{xdy}=\mathbf{0}$

1.学习要求：

三步 .预习

.上课（做笔记）

.复习（整理笔记，做习题）

三多 .多记（知识）

.多练（方法）

.多悟（思想）

四环节 . 简单模仿（学习经典）

. 变式练习（开阔思路）

. 自觉分析（消化吃透）

. 自发领悟（掌握精髓）

2.习题要求：

（1）课本习题，每次课后布置，每周二交。

（2）课本每章总习题。弹性作业。

(3)　每阶段测试题。

3.阶段考试

共三次考试

第一次考试 R1 第 6 周周六上午（4 月 13 号）

第二次考试 R2 第 12 周周六上午（5 月 25 号）

第三次考试 R3 第 18 周全校期末考试（7 月 1

号）

总评成绩

R=R0*10%+max{R1*20%+R2*30%,R2*50%}+R3*40%

其中 R0 为平时成绩

推荐参考书：

（1） 高等数学学习与辅导 同济大学数学系 高等教育出版社

（2） 高等数学习题详解

作业：每周二交作业。A4 纸。每次作业登记成绩。

答疑：每周二晚上 7：3 0—9：30 科技楼四楼 428

室

§6　可降阶的高阶微分方程

例 1　求$y''' = e^{2x} - \cos x$的通解

例 1　求方程$(1 + x^2)y'' = 2xy'$的积分曲线，使

其在点（0，1）与直线$y=3x+1$相切。

例 2　　求解 D.E. $xy''+2y'=1$，使得$y(1)=2y'(1)$，且当$x\to 0$时，y有界。

例 3　$xy^{(5)}-y^{(4)}=0$

例 1　求 D.E. $yy''-y'^{2}=0$的通解

例4　　求 D.E. $y''=\frac{2y-1}{y^2+1}\cdot(y')^2$的通解

求一阶微分方程满足某种性质的特解，这里所求的特解不是求初值问题的解，而是求满足某种性质如有界性、连续性、周期性等的特解。

例 1　设$f(x)$是以w为周期的连续函数，证明：线性方程$y' + ky = f(x)$存在以w为周期的特解，并求此特解，其中k为常数。

例 2　（1999 年考研）设有微分方程$y' - 2y = \phi(x)$，其中$\phi(x) = \begin{cases} 2, x < 1 \\ 0, x > 1 \end{cases}$，试求在

$(-\infty, +\infty)$内的连续函数$\boldsymbol{y = y(x)}$，使之在$(-\infty, \mathbf{1})$和$(\mathbf{1}, +\infty)$内都满足微分方程，且满足条件$\boldsymbol{y(0) = 0}$。

§7　高阶线性微分方程（解的结构）

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

…………①

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

…………②

Th1：若$y_1(x)$、$y_2(x)$是齐次方程②的两个解，则$y = c_1y_1 + c_2y_2$也是方程②的解（c_1、c_2为任意常数）。

Th2：若$y_1(x)$、$y_2(x)$是齐次方程②的线性无关两

特解，则$y=c_1y_1+c_2y_2$为方程②的通解。

Th3：若$y_1^*(x)$、$y_2^*(x)$是非齐次方程①的两解，则

$y=y_1^*-y_2^*$是齐次方程②的解。

Th4：若$y^*(x)$是非齐次方程①的一特解，$\bar{y}$是齐次方程②的通解，则$y=y^*+\bar{y}$是非齐次①的通解。

Th5： $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$

…………①

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$

…………②

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$

…………③

若y_1^*、y_2^*分别是①、②的特解，则$y^* = y_1^* + y_2^*$是方程③的特解。

例1 已知方程$(1-x)y'' + xy' - y = (x-1)^2$的三个解为$y_1 = x^2 + x + 1$，$y_2 = x^2 +$

$2x+1$，$y_3=x^2+x+1+e^x$，求方程的通解。

例 2　设函数$y_1(x)$、$y_2(x)$、$y_3(x)$都是方程$y''+$

$P_1(x)y' + P_2(x)y = Q(x)$……①的特解，（其中$P_1(x)$、$P_2(x)$、$Q(x)$为已知函数）且$\frac{y_1-y_2}{y_2-y_3}\neq$常数，

证明：

$y = (1 + c_1)y_1 + (c_2 - c_1)y_2 - c_2 y_3$（其中$c_1$、$c_2$为常数）为方程①的通解。

例 3 已知 $y_1^* = -\frac{x}{4}(x+2)$， $y_2^* = \Big(\frac{x}{10} -$

$\frac{13}{200}\Big)\cos 2x+\left(\frac{x}{20}-\frac{2}{25}\right)\sin 2x$分别为方程$y''-y'=\frac{1}{2}x\cdots$①，$y''-y'=-\frac{1}{2}x\cos 2x\cdots$②的特解，求微分方程$y''-y'=x\cdot \sin^2 x\cdots$③的通解

例 4 （1989 年考研）设线性无关函数y_1、y_2、y_3都是二阶非齐次线性微分方程$y''+P(x)y'+$

$Q(x)y = f(x)$的解c_1、c_2为任意常数，则该非齐次方程的通解是（　）

A. $c_1y_1 + c_2y_2 + y_3$ B. $c_1y_1 + c_2y_2 - (c_1 + c_2)y_3$

C. $c_1y_1 + c_2y_2 - (1 - c_1 - c_2)y_3$ D $c_1y_1 + c_2y_2 + (1 - c_1 - c_2)y_3$

二阶线性方程求解

例 1　求方程$y'' + x^{-1}y' - x^{-2}y = 0$的通解

例 2　已知$y_1(x) = e^x$是方程$(2x-1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 0$ 的一个解，求此方程的通解。

例 3 已知齐次线性方程$y'' + y = 0$的通解为

$y_{(x)} = c_1 \cos x + c_2 \sin x$，求非齐次方程$y'' + y = \sec x$的通解。

§8　常系数齐次线性微分方程

方程$y'' + py' + qy = 0$…………①

求解步骤：

1° 写出方程①的特征方程：$r^2 + pr + q = 0$

2° 求出①的特征根r_1、r_2

3° 写出方程①的通解

(i)　$r_1 \neq r_2$（实根），$y_{通} = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

(ii) $r_1 = r_2$（重根），$y = e^{rx}(c_1 + c_2 x)$

(iii) $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$（复根），$y =$

$e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$

例 1　求$y'' - 2y' - 3y = 0$的通解

例 2　求$\frac{d^2s}{dt^2}+2\frac{ds}{dt}+S=0$的通解

例 3　求$y''+4y'+29y=0$的通解

例 4　求$f''(x)+\frac{1}{k}f(x)=0$的通解，（k为非零实数）

例 5　已知一个二阶常系数线性齐次 D. E. 的特征方程有两个不等实根 a 与 b，试写出此

D. E. 及其通解。

例 6　已知一个二阶常系数线性齐次 D. E. 的特征方程有一个根为$\boldsymbol{r_1 = 3 + 2i}$，试写出此 D. E. 及其通解。

D. E. $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots +$

$a_{n-1} y' + a_n y = 0$

特征方程：$r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \cdots +$

$a_{n-1} r + a_n = 0$

（i）　单实根r：通解中有：ce^{rx}

（ii）　一对单复根$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$：通解中有

$$e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$$

（iii）k重实根r：通解中有$e^{rx}(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1})$

（iv）　一对k重复根$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$；通解中有

$$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$$

例 1　求下列 D.E. 的通解

① $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 0$

② $\frac{d^4w}{dx^4} + \beta^4 w = 0 \qquad (\beta > 0)$

③ $y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0$

例 1 （2002 年考研）求具有特解$y_1 = e^{-x}$，$y_2 = 2xe^{-x}$，$y_3 = 3e^{x}$的三阶常系数齐次线性

D. E.

例 2 (1997 年考研)已知$\boldsymbol{y_1 = xe^x + e^{2x}}$，$\boldsymbol{y_2 = xe^x + e^{-x}}$, $\boldsymbol{y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}}$, 是某二阶常系数非齐次线性 D. E. 的三个解，求该 D. E. 及通解。

例 3　（1993 年考研）设二阶常系数线性 D.E. $y'' + \alpha y' + \beta y = \gamma e^{x}$ 的一个特解为 $y^{*} = e^{2x} + (1 + x)e^{x}$，试确定常数 α、β、γ，并求该方程的通解。

例 4　设 $y_1^{*} = x$，$y_2^{*} = x + e^{2x}$，$y_3^{*} = x(1 + e^{2x})$ 是二阶常系数非齐次线性 D.E. 的特解，求该微分

方程的通解及该方程。

§9　常系数非齐次线性 D.E.

小结：

D. E. $y'' + py' + qy = P_m(x)e^{\lambda x}$有特解：

$y^* = x^k Q_m(x) \cdot e^{\lambda x}$，其中

①当λ不为特征根时，$k = 0$

②当λ为特征单实根时，$k = 1$

③当$\boldsymbol{\lambda}$为二重特征实根时，$\boldsymbol{k=2}$

求 D.E. $\boldsymbol{y'' + py' + qy = P_m(x)e^{\lambda x}}$特解的步骤：

1）写出特解$\boldsymbol{y^* = x^k Q_m(x) \cdot e^{\lambda x}}$的形式

2）将$\boldsymbol{y^* = x^k Q_m(x) \cdot e^{\lambda x}}$代入原方程，用待定系数法求出$\boldsymbol{y^*}$的各项系数

例 1　求$y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$的一个特解

例 2　求$y'' + 2y' + 5y = x^2 e^{-x}$的一个特解

例 3　求$y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$的通解

D.E. $y'' + py' + qy = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos wx + P_n(x)\sin wx]$

有 特 解 $y^* = x^k e^{\lambda x}[Q_m(x)\cos wx + R_m(x)\sin wx]$

其中：$m = \max\{l, n\}$

①$\lambda + iw$不为特征根时，$k = 0$

②$\lambda + iw$为特征单根时，$k = 1$

求 D.E. $y'' + py' + qy = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos wx + P_n(x)\sin wx]$特解的步骤：

1）写出特解 $y^* = x^k e^{\lambda x}[Q_m(x)\cos wx +$

$R_m(x)\sin wx]$的形式

2）将特解y^*代入原方程，用待定系数法求出y^*的各项系数

例 1　求 D.E. $y'' + y = x\cos 2x$的一个特解

例 2　写出 D.E. $y'' + 4y = \sin(2x + \phi)$的特

解形式

例 3　求$y''' + y'' = x^2 + 1$的通解

例 4　求$y'' + y = x + 2\cos x$的通解

例5 （2001 年考研）设函数$f(x)$、$g(x)$满足

$f'(x)=g(x), g'(x)=2e^x-f(x)$且$f(0)=0$，$g(0)=2$，求$\int_0^\pi\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx$

例6 （2002 年考研）设$y=y(x)$是二阶常系数微分方程$y''+py'+qy=e^{3x}$满足初始条件

$y(0)=y'(0)=0$的特解，求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x^2)}{y(x)}$

例7 （2000 年考研）$xy''+3y'=0$的通解

例8 (1998 年考研）利用代换 $y=\frac{u}{\cos x}$将方程

$y''\cos x-2y'\sin x+3y\cos x=e^x$化简，

并求出原方程的通解。

例9 （2003 年考研）设函数$y=y(x)$在（-∞，+∞）内具有二阶导数，且$y'(x)\neq 0$，$x=x(y)$是$y=y(x)$的反函数，

①试将$x=x(y)$所满足的微分方程$\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)(\frac{dx}{dy})^3=0$变换为$y=y(x)$满足的微分

方程

② 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=\frac{3}{2}$的特解

例 10 作变换$t=\tan x$，把 D. E. $\cos^4 x\frac{d^2y}{dx^2}+2\cos^2 x(1-\sin x\cos x)\frac{dy}{dx}+y=\tan x$

变换为y关于t的 D. E. , 并求原方程的解

练习：写出下列方程的特解的形式

1. $y'' + a^2 y = e^x \qquad (a > 0)$

2. $y'' + 3y' + 2y = 3xe^{-x}$

3. $y'' - 6y' + 9y = (x+1)e^{3x}$

4. $y'' + 4y = x\cos x$

5. $y'' - y = \sin^2 x$

Ch12 复习补充题

1、 设$\frac{df(\cos x)}{d\cos x} = 1 + \sin^2 x$，求$f(x)$

2、 求方程$f'(x) + xf'(-x) = x$的解

3、 若可微函数$f(x)$对任意的两个实数x_1、x_2都

有$f(x_1+x_2)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{1-f(x_1)f(x_2)}$，且$f'(0)=2$，求$f(x)$

4、 已知$\int_0^1 f(ax)da=\frac{1}{2}f(x)+1$，求$f(x)$

5、 设$f(x)$连续，积分$\int_0^1[f(x)+xf(xt)]dt$与x无关，求$f(x)$

6、（1996 年考研）设$f(x)$为连续函数，

（1）　求$y' + ay = f(x)$满足$y|x = 0 = 0$的解

$y(x)$，

其中a是正常数

（2）　若$|f(x)| \le k$,（k为常数）, 证明当$x \ge 0$

时，有　$|y(x)| \le \frac{k}{a}(1 - e^{-ax})$

7、作变换$t = \tan x$，把 D.E.　$\cos^4 x \frac{d^2y}{dx^2} +$

$$2\cos^2 x\,(1-\sin x\cos x)\frac{dy}{dx}+y=\tan x$$

变换为y关于t的 D. E. , 并求原方程的解

答案

1、$f(x)=2x-\frac{1}{3}x^3+c$

2、$f(x)=x-\arctan x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$

3、$\boldsymbol{f(x) = \tan 2x}$

4、$\boldsymbol{f(x) = 2 + cx}$

5、$\boldsymbol{f(x) = ce^{-x}}$

7、 $\boldsymbol{y = e^{-\tan x}(c_1 + c_2 \tan x) + \tan x - 2}$

Ch12 自测题

一、 求解方程

1、 求 方 程 $\frac{x}{1+y}dx-\frac{y}{1+x}dy=0$ 满 足 条 件

$y(0)=1$的特解

2、　求方程$xy' - y = 2\sqrt{xy}$的通解

3、　求方程$y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln x$的通解

4、　求方程$yy'' - (y')^2 = 0$的通解

5、　求方程 $y'' + 4y = \sin x$的通解

二、 证明题

1、 若可微函数$y=f(x)$满足关系式$f(x)=\int_0^x f(t)dt$,

则$f(x)\equiv 0$

2、 试证方程$yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$, 经过变量代换$v=xy$,可化为可分离变量的微分

方程

答案 一、求解方程

1、$3y^2+2y^3=3x^2+2x^3+5$

2、$y = x(\ln c x)^2$

3、$xy(c - \frac{1}{2}\ln^2 x) = 1$

4、$y = c_2 e^{c_1 x}$

5、$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{3}\sin x$

二、证明题

2、$\frac{dv}{v[1-\frac{f(v)}{g(v)}]}=\frac{1}{x}dx$ ------分离变量方程

课本总习题十二

3. 求下列微分方程的通解

（1）$xy'+y=2\sqrt{xy}$

（2）$xy'\ln x+y=ax(\ln x+1)$

（3）$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2(\ln y-x)}$

（4）$\frac{dy}{dx}+xy-x^3y^3=0$

（6）$yy''-(y')^2-1=0$

（7）$y''+2y'+5y=\sin 2x$

（8）$y'''+y''-2y'=x(e^x+4)$

（9）$(y^4-3x^2)dy+xydx=0$

（10）$y' + x = \sqrt{x^2 + y}$