高等数学下独立作业（一）参考答案

一、CCBDBCB

二、1. $2x+2y-3z=0$； 2. $\dfrac{2dx-dy}{4}$； 3. 0 ； 4. $\dfrac{3}{2}$ ； 5. $\dfrac{5}{2}$.

三、解：方程两边取全微分，则$\begin{cases} dx = \mathrm{e}^u \cos v du - \mathrm{e}^u \sin v dv \\ dy = \mathrm{e}^u \sin v du + \mathrm{e}^u \cos v dv \end{cases}$

解出du, dv, $\begin{cases} du = e^{-u} \cos v dx + \mathrm{e}^{-u} \sin v dy = \dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2} \\ dv = -\mathrm{e}^{-u} \sin v dx + \mathrm{e}^{-u} \cos v dy = \dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2} \end{cases}$

从而$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

四、 解：$\overrightarrow{AB} = \{2,1,-2\}, \overrightarrow{AB}^{\circ} = \left\{\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}\right\}$

$gradu = \left\{\dfrac{3y}{3xy-2z^3}, \dfrac{3x}{3xy-2z^3}, \dfrac{-6z^2}{3xy-2z^3}\right\}$， $gradu\big|_A = \{3,3,-6\}$

从而$\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{AB}} = \left\{\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}\right\} \cdot \{3,3,-6\} = 2+1+4 = 7$

五、解：依据上下限知，即分区域为

$D = D_1 \cup D_2, D_1: 1 \le x \le 2, 1 \le y \le \sqrt{x}; D_2: 2 \le x \le 4, \dfrac{x}{2} \le y \le \sqrt{x}.$

作图可知，该区域也可以表示为$D: 1 \le y \le 2, y^2 \le x \le 2y$

从而$\int_1^2 \mathrm{d}x \int_1^{\sqrt{x}} \dfrac{1}{y} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \mathrm{d}y + \int_2^4 \mathrm{d}x \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} \dfrac{1}{y} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}y \int_{y^2}^{2y} \dfrac{1}{y} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \mathrm{d}x = \int_1^2 \left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^y\right) \mathrm{d}y$

$= \left(\mathrm{e}^2 y - \mathrm{e}^y\right)\Big|_1^2 = 2\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^2 - \left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^1\right) = e$

六、解：先二后一比较方便， $I = \int_0^1 z dz \iint_{D_z} dxdy = \int_0^1 z \cdot \pi \cdot 1^2 dz = \dfrac{\pi \cdot z^2}{2}\Big|_0^1 = \dfrac{\pi}{2}$

七．解：由对称性$\iint_{\Sigma} x^3 \mathrm{d}S = 0, \iint_{\Sigma} y^2 \mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} x^2 \mathrm{d}S$

从而$\iint_{\Sigma} (x^3+y^2+z) \mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} \left(\dfrac{x^2+y^2}{2}+z\right) \mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} (x^2+y^2) \mathrm{d}S$

$$=\iint_D (x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{dxdy}=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^2 r^3\sqrt{1+r^2}dr=2\pi\int_0^2 r^3\sqrt{1+r^2}dr$$

$$=\pi\int_0^4 (t+1-1)\sqrt{1+t}dt=\pi\left(\frac{20\sqrt{5}}{3}+\frac{4}{15}\right)$$

八、解：在上半平面$(y>0)$上$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{x^2}{y^2}\cos\dfrac{x^2}{y}\right)=-\dfrac{2x}{y^2}\cos\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{2x^3}{y^3}\sin\dfrac{x^2}{y}$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(4x+\dfrac{2x}{y}\cos\dfrac{x^2}{y})=0-\dfrac{2x}{y^2}\cos\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{2x^3}{y^3}\sin\dfrac{x^2}{y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 且连续，

从而在上半平面$(y>0)$上该曲线积分与路径无关，

取$L_1:y=\dfrac{2}{\pi}x^2$，即$\dfrac{x^2}{y}=\dfrac{\pi}{2}$，从而 $\cos(\dfrac{x^2}{y})=0$

$$\int_L=\int_{L_1} =\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(4x+0)\mathrm{d}x-0dy=\frac{3}{2}\pi^2$$

九、解：补$\Sigma_1:z=0$取下侧，则构成封闭曲面的外侧

$$\iint_\Sigma (x+y^2)\mathrm{dydz}+(y+z^2)\mathrm{dzd}x+(z+x^2)\mathrm{dxd}y=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$$

$$=\iiint_\Omega (1+1+1)dv-\iint_{\Sigma_1}x^2dxdy=\iiint_\Omega 3dv+\iint_D x^2dxdy=3\cdot\frac{2}{3}\pi\cdot 1^3+\iint_D\frac{x^2+y^2}{2}dxdy$$

$$=2\pi+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=2\pi+\pi\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^1=\frac{9\pi}{4}$$

** 十、解：$\dfrac{\partial y}{\partial t}=f'\cdot\dfrac{-s}{t^2},\dfrac{\partial y}{\partial s}=f'\cdot\dfrac{1}{t}$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{-s}{t^2}f'\right)=\frac{2s}{t^3}f'+f''\cdot\left(\frac{-s}{t^2}\right)^2,\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{t}f'\right)=\frac{1}{t^2}f''$$

由已知$\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}+4\dfrac{\partial^2 y}{\partial s^2}=0,\Rightarrow\dfrac{2s}{t^3}f'+f''\cdot\left(\dfrac{-s}{t^2}\right)^2+\dfrac{4}{t^2}f''=0,$

即$\left(x^2+4\right)f''(x)+2xf'(x)=0,\left[\left(x^2+4\right)f'(x)\right]'=0,\left(x^2+4\right)f'(x)=c_1$

$$f'(x)=\frac{c_1}{x^2+4},f(x)=\frac{c_1}{2}\arctan\frac{x}{2}+c_2$$

十一、 解: 对应齐次方程特征方程为$r^2+4=0,r_{1,2}=\pm 2i$

非齐次项 $f(x)=\cos 2x,$，与标准式 $f(x)=e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos\beta x+P_l(x)\sin\beta x\right]$

比较得 $n=\max\{m,l\}=0,\lambda=2i$，对比特征根，推得 $k=1$，从而特解形式可设为

$$y^*=x^k\left[{}_1Q_n(x)\cos\beta x+{}_2Q_n(x)\sin\beta x\right]e^{\alpha x}=ax\cos 2x+bx\sin 2x,$$

$y^{*\prime}=(a+2bx)\cos 2x+(b-2ax)\sin 2x, y^{*\prime\prime}=(-4a-4bx)\sin 2x+(4b-4ax)\cos 2x$ 代入方程得 $-4a\sin 2x+4b\cos 2x=\cos 2x,\Rightarrow a=0,b=\dfrac{1}{4}$

$$y=c_1\cos 2x++c_2\sin 2x+\frac{1}{4}x\sin 2x$$

十二、 解：设点 M 的坐标为 (x,y,z)，则问题即 $V=8xyz$ 在 $x^2+y^2+z^2-a^2=0$ 求最小值。

令 $L=8xyz-\lambda\left(x^2+y^2+z^2-a^2\right)$，则由

$$L_x=8yz-2x\lambda=0,L_y=8xz-2y\lambda=0,L_z=8xy-2z\lambda=0,x^2+y^2+z^2=a^2$$

推出 $x=y=z=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$， M 的坐标为 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$

十三． 解：由于 $|u_n|=\dfrac{1}{[\ln(1+n)]+n}\geq\dfrac{1}{2n},$，该级数不会绝对收敛，

显然该级数为交错级数且一般项的 $|u_n|$ 单调减少趋于零，从而该级数条件收敛

十四．解： $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n^2+1}{2^n\cdot n!}\cdot\dfrac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^2+1}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2\cdot(n+1)}{\left(1+n^{-1}\right)^2+n^{-2}}\right|=+\infty$

从而收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$， $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n\cdot n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1+1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1\right)e^{\frac{x}{2}}$$

十五．解：已知该函数为奇函数，周期延拓后可展开为正弦级数。$a_n=0$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{a}H\pi\sin nxdx=\frac{-2H}{n}\cos nx\Big|_0^a=\frac{2H(1-\cos na)}{n}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2H\left(1-\cos na\right)}{n}\sin nx, x\neq 0,\pm a$$

高等数学下独立作业（二）参考答案

一、D　B　D　A

二．1．$x+z+a=0$；．　2．$y^*=x\left(ax+b\right)e^{-x}$；　3．$4\pi$．

三．解：$\iint\limits_D x(x+y)dxdy=\iint\limits_D x^2dxdy=2\int_0^1dx\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}}x^2dy=2\int_0^1x^2(\sqrt{2-x^2}-x^2)dx$

$$=2\int_0^1x^2\sqrt{2-x^2}dx-\frac{2}{5}\overset{x=\sqrt{2}\sin t}{=}2\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\sin^2t2\cos^2tdt-\frac{2}{5}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^22tdt-\frac{2}{5}\overset{u=2t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2udu-\frac{2}{5}=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}.$$

四、解：$gradu=\{2x,2y,2z-3\},gradu\big|_{M_0}=\{2,-2,1\}$

沿梯度方向上函数的方向导数 $\left|gradu\big|_{M_0}\right|=\sqrt{4+4+1}=3$

五.计算 $\iint\limits_{\Sigma}xyzdxdy$，其中，$\Sigma$ 为球面：$x^2+y^2+z^2=1\ \ (x\geq0,y\geq0)$ 的外侧.

解：此题是书上 P164——例 2

六、 解：观察得知该用极坐标，$x^2+y^2\leq4$，$x\geq0$，$y\geq0$

$$\Rightarrow r^2\leq4,r\cos\theta\geq0,r\sin\theta\geq0,0\leq r\leq2,0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$$

$$\iint\limits_D\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^2\sin r^2\cdot rdr=\frac{\pi}{2}\int_0^2\frac{\sin r^2}{2}dr^2=-\frac{\pi}{4}\cos r^2\Big|_0^2=\frac{\pi}{4}(1-\cos4)$$

七、解：观察得知该用先二后一的方法

$$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{dv}=\int_1^2zdz\iint\limits_{D_z}dxdy=\int_1^2z\cdot\pi z^2dz=\frac{\pi z^4}{4}\Big|_1^2=\frac{15\pi}{4}$$

八、 解：由对称性 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S$，$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，

$$z_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\ ,\ z_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

原式 $=\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\iint\limits_D Rdxdy=R\cdot\pi R^2=\pi R^3$

九、解：沿着直线 $x=ky^2$，$(x,y)\to(0,0)$，$\lim\limits_{\substack{y\to0\\x=ky^2\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{y\to0\\x=ky^2\to0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\frac{k}{k^2+1}$

依赖k而变化，从而极限不存在，函数在点$(0,0)$处不连续。

而 $f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,\ f_y'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta y,0)-f(0,0)}{\Delta y}=0$，

函数在点$(0,0)$处存在一阶偏导数。

** 十、解：设Σ为Γ所围平面， 取上侧

$P=y-z$，$Q=z-x$，$R=x-y$，由斯托克斯公式

$$\oint_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$

$$=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} =-2\iint_\Sigma dydz+dzdx+dxdy$$

由于Σ在yoz面投影（消x）为椭圆$\dfrac{(z-b)^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}\le 1$，面积为$\pi ab$;

在xoz面投影（消y）为线段$\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{b}=1(a,b>0)$，面积为0;

在xoy面投影（消z）为圆$x^2+y^2\le a^2$，面积为πa^2;

所以原式$=-2\iint\limits_{Dyz} dydz+\iint\limits_{Dxy} dxdy=-2(\pi ab+\pi a^2)=-2\pi a(a+b)$

或者用向量点积法 $\Sigma: z=b(1-\dfrac{x}{a})$，朝上法向量$\left(\dfrac{b}{a},0,1\right)$

原式$=-2\iint\limits_{Dxy}(1,1,1)\cdot(\dfrac{b}{a},0,1)dxdy=-2\left(\dfrac{b}{a}+1\right)\iint\limits_{Dxy} dxdy=-2\left(\dfrac{b}{a}+1\right)\pi a^2$

$=-2\pi a(a+b)$

十一. 解：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}\cdot(n+2)\cdot 3^{n+2}\right|=3$

由于在$x=3$时发散，在$x=-3$时条件收敛，故收敛域为$[-3,3)$

看 $s(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}t^{n-1},t\in[-1,1),s(0)=1$，

则 $\left[ts(t)\right]'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^{n-1}=\dfrac{1}{1-t},\Rightarrow ts(t)=\int_0^t\dfrac{1}{1-t}dt=-\ln(1-t)$,

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 3^n}=\frac{1}{3}s\left(\frac{x}{3}\right)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{3}\right), x\in[-3,0)\bigcup(0,3)\\ \frac{1}{3}, x=0\end{cases}$

十二． 解：作周期延拓，$T=4, l=2, a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}1dx=1$

$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{n\pi}\sin n\pi=0$

$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{-1}{n\pi}(\cos n\pi-1)=\frac{1-(-1)^n}{n\pi}$

从而 $f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}, x\in(-2,0)\cup(0,2)$

高等数学下独立作业（三）参考答案

一、1． -5　　2． $\dfrac{e-1}{2}$　　3． 3　　4． $(-2,4)$

5． $y=x\left(ax^2+bx+c\right)\mathrm{e}^{-4x}$　　6. π　　7． 2 和 -2　　8． $\dfrac{\pi}{2}R^4$

二、D　B　B　A

三、解：$\vec{n}=\left\{\mathrm{e}^{\frac{x}{z}}\dfrac{1}{z},\mathrm{e}^{\frac{y}{z}}\dfrac{1}{z},-\dfrac{x}{z^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{z}}-\dfrac{y}{z^2}\mathrm{e}^{\frac{y}{z}}\right\}\Bigg|_{\mathrm{M}_0}=\{2,2,-4\ln 2\}//\{1,1,-2\ln 2\}$

切平面为 $x-\ln 2+y-\ln 2-2\ln 2(z-1)=x+y-2z\ln 2=0$

法线为 $x-\ln 2=y-\ln 2=\dfrac{z-1}{-2\ln 2}$

四、解：设过直线 L 的平面束为 $x-y+z-2+\lambda(x+y)=0,$

即 $(1+\lambda)x-(1-\lambda)y+z-2=0,\vec{n}=\{1+\lambda,\lambda-1,1\}$

第一个平面平行于直线 $L_1:x=y=z$，

即有 $\vec{n}\cdot\vec{s}_1=\{1+\lambda,\lambda-1,1\}\cdot\{1,1,1\}=2\lambda+1=0,\lambda=-\dfrac{1}{2}$

从而第一个平面为 $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)x-\left(1+\dfrac{1}{2}\right)y+z-2=0,x-3y+2z=4,\vec{n}_1=\{1,-3,2\}$

第二个平面要与第一个平面垂直，

也即 $\vec{n}_1\cdot\vec{n}=\{1,-3,2\}\cdot\{1+\lambda,\lambda-1,1\}=1+\lambda-3\lambda+3+2=-2\lambda+6=0,\lambda=3$

从而第二个平面为 $4x+2y+z-2=0$

五、解：直线 $2x-2y+4=0$ 为 $y=x+2,k=1$，从而有定解条件 $y'(0)=1,y(0)=2$，

特征方程为 $r^2-4r+3=0,(r-3)(r-1)=0,r_1=3,r_2=1$

方程通解为 $y=c_1e^{3x}+c_2e^x$，由定解的初值条件 $c_1+c_2=2$

$y'=3c_1e^{3x}+c_2e^x$，由定解的初值条件 $3c_1+c_2=1$

从而 $c_1=-\dfrac{1}{2},c_2=\dfrac{5}{2}$，特解为 $y=-\dfrac{1}{2}e^{3x}+\dfrac{5}{2}e^x$

** 六、解：因为$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)e^x\sin y,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)\left(e^x\sin y\right)^2+f'(u)e^x\sin y$

$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)e^x\cos y,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)\left(e^x\cos y\right)^2+f'(u)e^x(-\sin y)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}=f(u)\mathrm{e}^{2x},\Rightarrow f''(u)-f(u)=0$

特征方程为$r^2-1=0,r_1=1,r_2=-1,f(u)=c_1e^u+c_2e^{-u}$

七、解：两表面的交线为$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2z\\ z=\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}\Rightarrow 2z^2=2z,z_1=0,z_2=1,\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=1\end{cases}$

原式$=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+2z\right)dv$，投影域为$D:x^2+y^2\le 1$，

用柱坐标$\Omega:0\le\theta\le 2\pi,0\le r\le 1,r\le z\le 1+\sqrt{1-r^2}$

原式$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_r^{1+\sqrt{1-r^2}}\left(r^2+2z\right)dz=2\pi\int_0^1 r\left(r^2z+z^2\right)\Big|_r^{1+\sqrt{1-r^2}}dr$

$=2\pi\int_0^1 r\left[r^2\left(1+\sqrt{1-r^2}-r\right)+\left(1+\sqrt{1-r^2}\right)^2-r^2\right]dr$

$=\pi\int_0^1\left[-\left(1-t\right)^{\frac{3}{2}}+3\left(1-t\right)^{\frac{1}{2}}\right]dt+2\pi\int_0^1\left(2r-r^3-r^4\right)dr$

$=\pi\left[\frac{2}{5}\left(1-t\right)^{\frac{5}{2}}-3\cdot\frac{2}{3}\left(1-t\right)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^1+2\pi\left(r^2-\frac{1}{4}r^4-\frac{1}{5}r^5\right)\Bigg|_0^1$

$=0-\pi\left[\frac{2}{5}-2\right]+2\pi\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=\frac{8}{5}\pi+\frac{11}{10}\pi=\frac{27}{10}\pi$

另解：用球坐标$\Omega:0\le\theta\le 2\pi,0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},0\le\rho\le 2\cos\varphi$

原式$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\left(\rho^2\sin^2\varphi+2\rho\cos\varphi\right)\rho^2\sin\varphi d\rho$

$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\left(\rho^4\sin^3\varphi+2\rho^3\cos\varphi\sin\varphi\right)d\rho$

$=-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{2^5}{5}\left(\cos^5\varphi-\cos^7\varphi\right)+2^3\cos^5\varphi\right)d\cos\varphi$

$$=2^4\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\left(\frac{9}{5}t^5-\frac{4}{5}t^7\right)dt=16\pi\left(\frac{9}{5}\cdot\frac{t^6}{6}-\frac{4}{5}\cdot\frac{t^8}{8}\right)\Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}=16\pi\left(\frac{3}{10}t^6-\frac{1}{10}t^8\right)\Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}=\frac{27\pi}{10}$$

八、解： $f(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\mathrm{n}!}t^{2n}\right)\mathrm{d}t$

$=\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1},x\in(-\infty,+\infty)$

九、解： $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\beta^{n+1}}{(n+1)^\alpha}\cdot\frac{n^\alpha}{\beta^n}=\beta$

当 $0<\beta<1,\rho<1$，级数收敛；当 $\beta>1,\rho>1$，级数发散；

当 $\beta=1,\alpha>1$ 时级数收敛；当 $\beta=1,0<\alpha\le 1$ 时级数发散

十、解：由于 $\frac{\partial P}{\partial y}=2xe^{2y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, 所以积分与路径无关。取新路 $L_1:y=0,x:0\to 4$， 则

原式 $=\int_{L_1}(1+x\mathrm{e}^{2y})\mathrm{d}x+(x^2\mathrm{e}^{2y}-1)\mathrm{d}y=\int_4^0\left(1+xe^0\right)dx+0=\left(x+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_4^0=-12$

十一．解：密度函数 $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，

质量 $m=\iiint_\Omega\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r\cdot r^2\sin\varphi dr=\frac{8\pi}{5}$

** 十二、解：因为 $a_n>0(n\in N)$，当 $n\ge 4$ 时，有 $a_{n-2}+a_{n-3}=a_{n-1}$，故 $a_{n-2}<a_{n-1}$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}<2a_{n-1}$，

$\frac{a_n}{a_{n-1}}<2$ 得 $\frac{a_4}{a_3}<2$，$\frac{a_5}{a_4}<2$，…，$\frac{a_n}{a_{n-1}}<2$。上面各式两边连乘得 $\frac{a_n}{a_3}<2^{n-3}$，即 $a_n<2^{n-3}a_3=2^{n-2}$，

当 $|x|<\frac{1}{2}$ 时，有 $\left|a_nx^{n-1}\right|=a_n|x|^{n-1}<2^{n-2}|x|^{n-1}=\frac{1}{2}|2x|^{n-1}$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}|2x|^{n-1}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_nx^{n-1}\right|$ 收敛，得证当 $|x|<\frac{1}{2}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$ 绝对收敛。

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$，则 $S(x)=a_1+a_2x+\sum_{n=3}^{\infty}a_nx^{n-1}=1+x+\sum_{n=3}^{\infty}\left(a_{n-1}+a_{n-2}\right)x^{n-1}$

$=1+x+x\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-1}x^{n-2}+x^2\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-2}x^{n-3}=1+x+x\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}-a_1\right)+x^2\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$

即 $S(x)=1+x+x[S(x)-1]+x^2S(x)$，解得和函数 $S(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$