

第十二章《无穷级数》测试题

1. 选择题:

(1) 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, “ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ” 是它收敛的_____条件.

- A. 充分; B. 必要; C. 充要; D. 非充分且非必要.

(2) “部分和数列 $\{S_n\}$ 有界” 是正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的_____条件.

- A. 充分; B. 必要; C. 充要; D. 非充分且非必要.

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必定_____.

- A. 收敛; B. 发散; C. 绝对收敛; D. 条件收敛.

(4) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 必定_____.

- A. 收敛; B. 发散; C. 绝对收敛; D. 条件收敛.

2. 用适当的方法判定下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+1}}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \ln \frac{n+2}{n}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+1}{n!}$;

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)} ;$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na+b}, (a, b > 0);$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n};$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt[n]{3}-1)^n ;$$

$$(9) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n} \right)^n, \text{ 其中 } a_n, a, b \text{ 均为正数, 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a ;$$

3. 判别下列级数的敛散性；若收敛，说明是条件收敛还是绝对收敛：

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n} ;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi \sqrt{R^2 + n^2} ;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^n} \sin \frac{\pi}{n} ;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{x}{n}, (x \neq 0).$$

4. 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2} ;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{9}} \cdot 8^{\frac{1}{27}} \cdots (2^n)^{\frac{1}{3^n}} \right].$$

5. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n + (-2)^n}{n} (x+1)^n;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p} \quad (p \geq 0).$$

6. 求下列幂级数的收敛域及其和函数:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$.

7. 将下列函数展开成麦克劳林级数 (要指出其成立的区间):

(1) $(1-x)\ln(1+x)$;

(2) $\arcsin x$;

(3) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

8. 将下列函数展开成 $(x-x_0)$ 的幂级数（要指出其成立区间）:

(1) $\frac{1}{x^2}$, $x_0 = -1$;

9. 将下列函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$$

10. 将函数 $f(x) = \frac{x}{2}$ 在区间 $[0, 2]$ 上分别展开成正弦级数和余弦级数.