第七章 微分方程

7-1

1． B

7-2

1．解： $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{\mathrm{e}^{2x}dx}{5+\mathrm{e}^{2x}}$，

从而 $\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln\left(5+e^{2x}\right)+\ln|C|$

所以 $y(5+e^{2x})^{\frac{1}{2}} = C$

2. 解：微分方程即 $(1+\mathrm{e}^{-x})\tan y\frac{dy}{dx} = -1$

分离变量 $\frac{\sin ydy}{\cos y} = -\frac{dx}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

两边积分 $-\int\frac{d\cos y}{\cos y} = -\int\frac{dx}{1+\mathrm{e}^{-x}} = -\int\frac{e^x dx}{1+\mathrm{e}^x} = -\int\frac{d\left(1+e^x\right)}{1+\mathrm{e}^x}$

从而 $-\ln|\cos y| = -\ln\left(1+e^x\right)-\ln|C| \Rightarrow \cos y = C\left(1+e^x\right)$

由 $y|_{x=0} = \pi$， $\cos\pi = C\left(1+e^0\right) = 2C \Rightarrow C = -\frac{1}{2}, \cos y = -\frac{1}{2}\left(1+e^x\right)$

3. 解： $\int e^{-y}dy = \int x\mathrm{e}^{-2x}dx$，

所以 $-e^{-y} = -\frac{1}{2}\int xd(\mathrm{e}^{-2x}) = -\frac{1}{2}\left(x\mathrm{e}^{-2x}-\int\mathrm{e}^{-2x}dx\right) = -\frac{1}{2}\left(x\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+C_1\right)$

即 $e^{-y} = \frac{1}{2}xe^{-2x}+\frac{1}{4}e^{-2x}+C$

7-3

1．解： $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$

令 $u = \frac{y}{x}$， 则 $y = ux$， $\frac{dy}{dx} = u+x\frac{du}{dx}$， 原方程变形为 $u+x\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}(u+\frac{1}{u})$

$\int\frac{2u}{1-u^2}du = \int\frac{1}{x}dx$， 所以 $-\ln\left|u^2-1\right| = \ln|x|+\ln|C|$， 即 $x(u^2-1) = C$

从而原方程的解为 $y^2 = x^2 + Cx$

2．解： $\frac{dy}{dx} = \frac{y + xe^{\frac{y}{x}}}{x} = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$，

令 $u = \frac{y}{x}$，则 $y = ux$， $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$，原方程变形为 $u + x\frac{du}{dx} = u + e^u$

$\int e^{-u}du = \int \frac{1}{x}dx$， 所以 $-e^{-u} = \ln|x| + C$， 由 $y(1) = 0$ 得 $C = -1$，即 $e^{-u} = 1 - \ln|x|$

从而原方程的解为 $y = -x\ln(1 - \ln|x|)$

3． 解：令 $u = x + 2y$，则 $u' = 1 + 2y' = 1 + \frac{2}{u^2} = \frac{u^2 + 2}{u^2}$，分离变量 $\frac{u^2}{u^2 + 2}du = dx$，

两边积分 $\int \frac{u^2 + 2 - 2}{u^2 + 2}du = \int dx \Rightarrow u - \sqrt{2}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}} = x + c$

$x + 2y - \sqrt{2}\arctan\frac{x + 2y}{\sqrt{2}} = x + c, 2y - c = \sqrt{2}\arctan\frac{x + 2y}{\sqrt{2}}$

7-4

1．解：对照标准的一阶线性微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$,

$$\Rightarrow P(x)=\frac{1}{x},Q(x)=\frac{\sin x}{x},y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int\frac{\sin x}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]=e^{-\ln x}\left[\int\frac{\sin x}{x}e^{\ln x}dx+C\right]=e^{\ln\frac{1}{x}}\left[\int\frac{\sin x}{x}xdx+C\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[\int\sin xdx+C\right]=\frac{C-\cos x}{x}$$

2．解：对照标准的一阶线性微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$,

$$\Rightarrow P(x)=-\tan x,Q(x)=\sec x,y=e^{-\int-\tan xdx}\left[\int\sec x\cdot e^{\int-\tan xdx}dx+C\right]$$

$y=e^{-\ln\cos x}\left[\int\sec x\cdot e^{\ln\cos x}dx+C\right]=\frac{x+c}{\cos x}$，由$y|_{x=0}=0$，$y=\frac{x}{\cos x}$

3． 解：微分方程化为$\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-3\frac{x}{y}=x,-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y}\right)-3\frac{x}{y}=x,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y}\right)+3\frac{x}{y}=-x,$

令$u=\frac{1}{y},\Rightarrow\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+3xu=-x,$为一阶线性微分方程

$$P(x)=3x,Q(x)=-x,u=e^{-\int 3xdx}\left[\int(-x)\cdot e^{\int 3xdx}dx+C\right]=e^{-\frac{3}{2}x^2}\left[-\int xe^{\frac{3}{2}x^2}dx+C\right]$$

$$u=\frac{1}{y}=e^{-\frac{3}{2}x^2}\left[-\int\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x^2}d\left(\frac{3}{2}x^2\right)x+C\right]=e^{-\frac{3}{2}x^2}\left[-\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x^2}+C\right]=Ce^{-\frac{3}{2}x^2}-\frac{1}{3}$$

4. 解：求导，得$xf(x)-2x-f'(x)=0$，这是一个可分离方程，$\int\frac{dy}{y-2}=\int xdx$，

解得 $y=2+Ce^{\frac{1}{2}x^2}$，因为$f(0)=0$所以$C=-2$

所以 $f(x)=2-2e^{\frac{1}{2}x^2}$

其他题：

1.解：由题意得$\pi\int_1^t f^2(x)dx=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)]$，即$3\int_1^t f^2(x)dx=t^2f(t)-f(1)$

两端分别对t求导得 $3f^2(t)=2tf(t)+t^2f'(t)$，故所求微分方程为$x^2y'=3y^2-2xy$，这是一个齐次

微分方程，变形为 $y' = 3\frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y}{x}$，令 $u = \frac{y}{x}$，代入方程得 $x\frac{du}{dx} = 3u(u-1)$，这是一个可分离变量的微分方程，分离变量得 $\frac{1}{u(u-1)}du = \frac{3dx}{x}$，两端积分得 $\ln\frac{u-1}{u} = 3\ln x + \ln C$，化简得 $\frac{u-1}{u} = Cx^3$，故曲线方程为 $1-\frac{x}{y} = Cx^3$，由初始条件 $y|_{x=2} = \frac{2}{9}$ 得 $C=-1$，故曲线方程为 $1-\frac{x}{y} = -x^3$，或 $y = \frac{x}{1+x^3}$

2. 解：方程 $xdy + (x-2y)dx = 0$ 变形为 $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = -1$，这是一个一阶线性非齐次的微分方程，其中

$P(x) = -\frac{2}{x}$，$Q(x) = -1$，

故其通解为 $y = e^{\int\frac{2}{x}dx}[\int -e^{-\int\frac{2}{x}dx}dx + C] = x^2(\int -\frac{dx}{x^2} + C) = x^2(\frac{1}{x} + C) = x + Cx^2$

则 $V_x = \pi\int_1^2 (x+Cx^2)^2 dx$，据题意求使得 V_x 取得最小值的 C 值,

法 1：$(V_x)'_C = \pi\int_1^2 \left[(x+Cx^2)^2\right]' dx = \pi\int_1^2 2(x+Cx^2)x^2 dx$

$$= \pi\int_1^2 (2x^3 + 2Cx^4)dx = \pi\left[\frac{x^4}{2} + \frac{2}{5}Cx^5\right]_1^2 = \pi\left[\frac{15}{2} + \frac{62}{5}C\right],$$

令 $(V_x)'_C = 0$，得惟一驻点 $C = -\frac{75}{124}$，又 $(V_x)''_C = \frac{62}{5}\pi > 0$，故 $y = x - \frac{75}{124}x^2$ 为所要求的解.

法 2：先积分求 V_x，$V_x = \pi\int_1^2 (x+Cx^2)^2 dx = 2\pi\left[\frac{31}{5}C^2 + \frac{15}{2}C + \frac{7}{3}\right]$，则

$(V_x)'_C = \pi\left[\frac{15}{2} + \frac{62}{5}C\right]$，其余同法 1.

3．解：设所求曲线为 $y = f(x)$，依题意，此曲线满足的积分方程为 $\begin{cases}\int_1^x f(t)dt = 2xf(x) - 4 \\ f(1) = 2\end{cases}$，对方程两边求导并整理，得：$2xf'(x) + f(x) = 0$，这是一个可分离变量的方程，求得 $f(x) = \frac{C}{\sqrt{x}}$，代入初始条件，得 $C = 2$，所以 $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$

第七章 微分方程下（高阶部分）

1．填空题

（1）$r^2+pr+q=0$

（2）$y''-2y'+y=0$

（3）$y=3+c_1x^2+c_2\mathrm{e}^x$

（4）$y^*=(ax^2+bx)e^{-x}$

（5）$y^*=ae^{2x}+xe^{2x}(b\cos x+c\sin x)$

2．求下列各方程的通解

（1）解：令 $y'=p$，则 $y''=p'$ 原方程化为 $(1+x^2)p'+2xp=0$，

分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p}+\dfrac{2xdx}{1+x^2}=0$，

两边积分得 $\int\dfrac{\mathrm{d}p}{p}+\int\dfrac{2xdx}{1+x^2}=\ln p+\ln\left(1+x^2\right)=\ln c$

从而 $p=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{c}{1+x^2},y=c\arctan x+c_1$

（2）解：令 $y'=p$，则 $y''=p'$ 原方程化为 $p'-\dfrac{1}{x}p=x\mathrm{e}^x$，

从而 $p=e^{-\int\frac{-1}{x}dx}\left(\int xe^xe^{\int\frac{-1}{x}dx}dx+c\right)=e^{\ln x}\left(\int e^xdx+2c_1\right)=xe^x+2c_1x=\dfrac{dy}{dx}$

$y=\int xe^xdx+c_1x=(x-1)e^x+c_1x^2+c_2$

（3）解：对应齐次方程特征方程为 $r^2+9=0,r_{1,2}=\pm3i$

非齐次项 $f\left(x\right)=x\sin3x,$，与标准式 $f\left(x\right)=e^{\alpha x}\left[P_m\left(x\right)\cos\beta x+P_l\left(x\right)\sin\beta x\right]$

比较得 $n=\max\left\{m,l\right\}=1,\lambda=3i$，对比特征根，推得 $k=1$，从而特解形式可设为

$y^*=x^k\left[{}_1Q_n\left(x\right)\cos\beta x+{}_2Q_n\left(x\right)\sin\beta x\right]e^{\alpha x}=(ax^2+bx)\cos3x+\left(cx^2+dx\right)\sin3x,$

$y^{*\prime}=(3cx^2+3dx+2ax+b)\cos3x+\left(2cx+d-3ax^2-3bx\right)\sin3x$

$y^{*\prime\prime}=(2c-6b-12ax-9dx-9cx^2)\sin3x+\left(6d+2a+12cx-9bx-9ax^2\right)\cos3x$

代入方程得 $(2c-6b-12ax)\sin3x+\left(6d+2a+12cx\right)\cos3x=x\sin3x$

$2c-6b-12ax=x, 6d+2a+12cx=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{12}, c=b=0, d=\frac{1}{36}$

$y=c_1\cos 3x++c_2\sin 3x-\frac{1}{12}x^2\cos 3x+\frac{1}{36}x\sin 3x$

（4）解 1：令 $y'=p$ ，原方程变形为 $xp'-p=x^2$，这是一个一阶线性微分方程，以下解答略

$y=\frac{1}{3}x^3+c_1x^2+c_2$

解 2：方程可化为 $\frac{xy''-y'}{x^2}=\left(\frac{y}{x}\right)'=1$，从而 $\frac{y'}{x}=x+2c_1, y'=x^2+2c_1x$

因此 $y=\int\left(x^2+2c_1x\right)dx=\frac{1}{3}x^3+c_1x^2+c_2$

（5）解：对应齐次方程特征方程为 $r^2+4r+4=\left(r+2\right)^2=0, r_1=r_2=-2$

非齐次项 $f\left(x\right)=3e^{-2x}$ ，与标准式 $f\left(x\right)=P_n\left(x\right)e^{\lambda x}$ 比较得 $n=0, \lambda=-2$

对比特征根，推得 $k=2$ ，从而

$y^*=x^kQ_n\left(x\right)e^{\lambda x}=ax^2e^{-2x}, y^{*\prime}=\left(2ax-2ax^2\right)e^{-2x}, y^{*\prime\prime}=\left(2a-8ax+4ax^2\right)e^{-2x}$

代入方程得 $\left(2a-8ax+4ax^2\right)+4\left(2ax-2ax^2\right)+4ax^2=3, 2a=3, a=\frac{3}{2}$

从而通解为 $y=(c_1+c_2x+\frac{3}{2}x^2)e^{-2x}$

（6）解：特征方程为 $r^5+2r^3+1=r\left(r^2+1\right)^2=0, r_{1,2}=i, r_{3,4}=-i, r_5=0$

从而通解为 $y=\left(c_1+c_2x\right)\cos x+\left(c_3+c_4x\right)\sin x+c_5$

（7）解：令 $y'=p$ ，则 $y''=p\frac{dp}{dy}$，原方程变为 $p\frac{dp}{dy}=y^2p$ 。

分离变量并两端积分 $\int dp=\int y^2dy$，解得 $y'=p=\frac{1}{3}y^3+C_1$，

把 $y'(0)=\frac{1}{3}$，$y(0)=1$ 代入得 $C_1=0$，所以 $y'=\frac{1}{3}y^3$，

分离变量并两端积分 $\int\frac{dy}{y^3}=\int\frac{1}{3}dx$，解得 $\frac{1}{y^2}=-\frac{2}{3}x+C_2$，代入 $y(0)=1$，得 $C_2=1$

所以 $\frac{1}{y^2}=-\frac{2}{3}x+1$

3．解：由已知 $\varphi(0)=e$ ，$\varphi(x)=\mathrm{e}-x\int_0^x\varphi(u)\mathrm{d}u+\int_0^x u\varphi(u)\mathrm{d}u$

$\Rightarrow \varphi'(x)=-\int_0^x\varphi(u)\mathrm{d}u, \varphi'(0)=0$ ，$\Rightarrow \varphi''(x)=-\varphi(x), \varphi''(x)+\varphi(x)=0$

特征方程为 $r^2+1=0, r_{1,2}=\pm i$

从而通解为$\varphi\left(x\right)=c_1\cos x+c_2\sin x,$，由$\varphi(0)=e$得$e=c_1+c_2\cdot 0\Rightarrow c_1=e$

由$\varphi'\left(0\right)=0$，$\varphi'\left(x\right)=-c_1\sin x+c_2\cos x,$得$0=0+c_2,c_2=0$

因此$\varphi\left(x\right)=e\cos x$

4．　解：由已知$\varphi(x+0)=\varphi(x)\varphi(0),\Rightarrow$ $\varphi(x)=0$或者$\varphi\left(0\right)=1$，$\varphi(x)=0$显然成立，

若$\varphi\left(0\right)=1$，则由导数定义

$$\varphi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x)\varphi(\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}=\varphi(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(\Delta x)-\varphi(0)}{\Delta x}$$

从而$\varphi'(x)=\varphi(x)\varphi'(0)$，$\int\frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)}=\int\varphi'(0)dx=\varphi'(0)x+\ln c$

因此$\varphi(x)=ce^{\varphi'(0)x}$，由于$\varphi\left(0\right)=1$，故$c=1,\varphi(x)=e^{\varphi'(0)x}$

综上，$\varphi(x)=0$或者$\varphi(x)=e^{\varphi'(0)x}$