目次

第 1 章
基本的ノ概念

1.1　数ノ概念及ビ四則算法

ハ既知ト彼定スル[*1]．始メノ中ハ實数ノミヲ取扱フカラ一々断ラナイ．次ノ用語ハ周知デアル.

自然数.　1,2,3 等.　物ノ順位又ハ物ノ集合ノ個数ヲ示ス篤ニ用ヰラレル.

整数.　0, ±1, ±2 等.　自然数ハ正ノ整数デアル.

有理数. 0 及ビ $\pm\frac{a}{b}$ 子，但 α,b ハ自然数.　b=1 ナルトキ，ソレハ整数デアル.

無理数. 有理数以外ノ責数．例ヘバ

$$\sqrt{2} = 1.4142135\ldots,$$
$$e = 2.718281828\cdots,$$
$$pi = 3.1415926535\cdots$$

[*1] 附録（一）ヲ参照.

（但，ソレラガ有理数デナイコトハ證明ヲ要スル）十進法．實数ヲ十進法デ表ハスコトモ周知デアル．有理数ヲ十進法デ表ハセバ，数字ハ有限カ，又ハ無限ナラバ循環小数ニナル．但，有限位数ノ十進数ヲ循環小数ノ形二表ハスコトモ出来ル．例ヘバ 0.6= 0.5999⋯．無理数ヲ十進法デ表ハスナラバ，無限ノ位数ヲ要シ，数字ハ決シテ循環シナイ．吾々ガ十進法ニヨツテ数ヲ表ハズニ至ツタノハ，手指ノ数ニソノ原因ガアルノデアラウガ，理論上ハ 1 以外ノ任意ノ自然数ヲ基本トシテ，十進法ト同様ノ方法ニヨツテ，数ヲ表ハスコトガ出来ル．特ニ二進法デハ，数字ハ 0 ト 1 トダケデ足ル．有理数ヲ二進法デ表ハセバ，分母ガ 2 ノ巾[*2]ニナルモノノ外ハ，循環二進数ニナル．

$$[\text{例}]\ \frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} = (0.101)$$

*2 巾ハ羃ノ假字（和算ノ用例ニヨル）．

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + = \frac{1}{2^5} + \ldots = (0.100111\ldots).$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + = \frac{1}{2^5} + \ldots = (0.101010\ldots).$$

数乙幾何撃的表現解析學デハ便宜上自由ニ幾何學ノ術語ヲ流用スル．例ヘバ座標法ニヨツテ實数ヲ直線上ノ點デ表現スル．ソノ方法ハ周知デアル．直線 XX' ノ上デ，0 ヲ表ハス點 0 ハ座標ノ原點デ，又 1 ガ半直線 OX 上ノ點 E デ表ハサレルトスレバ，OE ハ長サノ單位デアル．一般ニ x ヲ表ハス點 P ハ，x ガ正或ハ負デルニ従ツテ，半直線 OX 或ハ OX' ノ上ニアツテ，OP ノ長サガ即チ x ノ絶對値デアル． ソレヲ|x| ト記ルス．コノヤウニシテ實数 x,x' ガ點 P,P' デ表ハサレルナラバ，|x-x'|ハ PP' ノ長サデアル．絶封値ニ關スル次ノ開係ハ，シバシバ引用サレル．

$$|x| + |x'| \geq |x + x'| \geq |x| - |x'|.$$

コレモ周知デアル．二ツノ實数 x,y ヲ一組トシテ，ソレヲ (x,y) ト記ルスナラバ，個々ノ組 (x,y) ト平面

上ノ個々ノ點 P トノ間二，座標法ニヨツテー對ーノ對應ガ成立スル．ソノトキ i(x,y) ヲ點 P ト略稱スル．通常ハ直交座標ヲ用ヰル．同ジヤウニ，三ツノ實数ノ組 (x,y,z) ハ空間ノー點ニヨツテ表ハサレル．ナホー般ニ，n 個ノ實数ノー組 (x1,x2,⋯，xn) ヲ n 次元室間ノー點トイヒ，ソレヲ一ツノ文字 P デ表ハス．今 P = (x1, x2,⋯ , xn),P’= (x1’, x2’，⋯，xn’）ナルトキ

$$\sqrt{(x\mathbf{1\text{-}x}1')^2+(x\mathbf{2\text{-}x}2')^2+\ldots(x\mathbf{n\text{-}x}n')^2}$$

ナル数ヲ P, P’ ノ距離ト略稱シテ，ソレヲ PP’ ト書ク．然ラバ「三角關係」PP’+P’P"と PP" ガ成立ツ．若シモ P ヲ固定スレバ

$$PP'^2=(x\mathbf{1\text{-}x}1')^2+(x\mathbf{2\text{-}x}2')^2+\ldots(x\mathbf{n\text{-}x}n')^2<\delta^2$$

ナル點 P’ ハ，P ヲ中心トスル半徑δナル「n 次元ノ球」ノ内部ニアルトイフ．若シ又

$$|x\mathbf{1\text{-}x}1'|<\delta,|x\mathbf{2\text{-}x}2'|<\delta,\ldots,|x\mathbf{n\text{-}x}n'|<\delta,$$

言ヒ換ヘレバ

$$Max(|x\mathbf{1\text{-}x}1'|,|x\mathbf{n\text{-}x}n'|)<\delta,$$

ナラバ[*3]，P’ ハ P ヲ中心トシテ稜ガ座標軸ニ平行デ，ソノ長サガ 2 δ ナル「n 次元ノ立方ノ内部ニアルトイフ．吾々ハ言語ノ短縮ヲ欲スルガ爲ニ，上記ノヤウナ幾何學的ノ表現法ヲ用ヰルノデアルカラ，文字ニ拘泥シテ，n 次元空間ニ關シテ奇怪ナル空想ヲホシイママニスル必要ハナイ．シカシ，コノヤウナ表現法ガ印象ヲ鮮明ナラシメルコトノ効果ハ，容易ニ承認セラレルデアラウ.

1.2　数ノ連續性.

實数ニ開シテ前節デ述ベタコトハ，誰モガ承認スルコトト候定シタノデアツタガ，数ノ連続性ハ解析學ノ基礎デアルカラ，ソレヲ説明セネバナラナイ．凡テノ数ヲ A,B ノ二組ニ分ケテ, A ニ屬スル各数ヲ B ニ屬ス

*3 Max(a1,a2,.,an）ハ a1, a2,⋯, α n ノ最大ノ値ヲ表ハス記號．同様ニ Min ハ最小ノ値ヲ示ス.

ル各数ヨリモ小ナラシメルコトガ出来タトスルトキ，コノヤウナ組分ケ（A, B）ヲでできんどノ**切断**トイヒ，A ヲ下組，B ヲ上組トイフ．切断 (A,B) ニ於テ，如何ナル数モ洩レナク下組カ上組カ何レカ一方，シカモ一方ノミニ屬スルトイフ規約ハ嚴重デアル． 今一ツノ数 S ヲ取ツテ，s ョりモ小ナル数ヲ凡テ下組ニ入レ，S ヨリモ大ナル数ヲ凡テ上組二入レルトスル．切断ヲ完成スル爲ニハ，S 自身モ下組或ハ上組二入ラネバナラナイガ，若シモ S ヲ下組＝入レルナラバ，S ハ下組ノ最大数デ，ソノトキ上組ニ最小数ハナイ．又若シ S ヲ上組ニ入レルナラバ，S ハ上組ノ最小数デ，ソノトキ下組ニ最大数ハナイ． コノヤウニシテ任意ノ数 S ヲ境界トスル切斷ガ出来ルガ，重要ナノハソノ逆デアル．卽チ次ノ定理ガ成立ツ．

定理 1. 實数ノ切断ハ，下組ト上組トノ境界トシテ，一ツノ数ヲ確定スル．（でできんどノ定理）

卽チ切断（A, B）ガ興ヘラレタルトキ，一ツノ数 S ガ存在シテ，S ハ A ノ最大数又ハ B ノ最小数デアリ，始メノ場合ニハ B ニ最小数ハナク，後ノ場合ニハ A ニ最大数ガナイノデアル． 前ノヤウニ，始メニ s ヲ取ツ

テ，ソレヲ境界トシテ切断（A, B) ヲ作ルノデハナク，反對ニ切断（A, B) ガアルトキ，ソレニョツテ s ガ決定サレルノデアル.

コレガ實数ノ連續性デアル．今吾々ハコノ定理ハ承認サレタモノトシテ，ソレヲ基礎

トシテ，理論ヲ組ミ立テルコトニスル.

大小ノ順序ノアル所ニハ切斷ガ出来ルガ，理論上切斷ノ三ツノ型ガ可能デアル．卽チ

(1°) 下組ニ最大数ガアリ同時ニ上組ニ最小数ガアル．約言スレバ，下組ト上組トノ間ニ飛ビ (leap) ガアル.

(2°) 下組ニ最大数ガナク，且ツ上組ニ最小数ガナイ．卽チ下組ト上組トノ間ニ途切レ (gap) ガアル.

(3°) 下組叉は上組ニ端 (最大叉は最小) ガアツテ，他ノ一方ニハ端がナイ．卽チ下組ト上組トハ連續シテイル.

ででき んどノ定理ハ賓数ノ切斷ハ (3°) ノ型ニ限ルコトヲ言フノデアル．整数ノ範圍内デハ，切斷ハ (1°) ノ型ニ限ル．有理数ノ範圍内デハ，ニツノ有理数ノ中間ニ必ズ他ノ有理数ガアル（有理数ノ稠密性）カ

ラ，(1°) ノ型ノ切斷ハ不可能デアルガ，一方 (2°) ノ型ノ切斷ガ可能デアル．例ヘバ $b > \sqrt{2}$ ナル有理数 b ヲ上組 B トシ，ソノ他ノ有理数 α ヲ下組 A トスレバ，$s = \sqrt{2}$ ナル有理数 S ハナイカラ，(A,B）ハ有理敷ノ切断デアルガ，ソレハ (2°) ノ型デアル．コノヤウニ有理数ダケナラ，一ツノ有理数ニモ觸レナイデ，ソレヲ A,B ノ二組ニ切リ離ハナシテシマフコトガ出来ル．コヨヤウナ狀態ヲでできんどハ切斷 (Schnitt) ナル語デ示唆シタノデアラウ．

シカシ無理数ヲモ入レテシマヘバ，コノヤウナ切リ離シハ出来ナイ．實数ノ範囲内デハ, 切断ノ切レ目（下組ト上組トノ境界）ニ必ズ實数ガアル．ソレガ實数ノ連續性デアル．

1.3　数ノ集合・上限・下限.

或ル一定ノ條件ニ適合スル数ノ全部ヲ集合トイフ．其ノ條件ニ適スル個々ノ数ハコノ集合ニ屬シ，又其ノ條件ニ適シナイ個々ノ数ハコノ集合ニ屬シナイ．如何ナル数モ，前者カ後者カ，何レカ一ツデアラネバナラ

ナイ.

[例 1] 凡テノ有理数ノ集合．條件ハ有理敷ナルコトデアル.

[例 2] a,b ハ定数デ，α く b トスルトキ α ≦ x ≦ b ナル凡テノ x ノ集合．　コノ集合ヲ**閉區間** [a,b」トイフ.

[例 3] a,b ハ例 2 ト同様トシテ，α <x <b ナル凡テノ x ノ集合．　コノ集合ヲ**開區間** (a,b) トイフ.

[例 4] $x^2 < 2$ ナル有理数 x ノ集合.（ 吻論カヤウナ x ノ全部ノ集合ノ意味デアル）

[例 5] $x^2 > 2$ ナル正ノ有理数 x ノ集合.

[例 6] f(x) ハ輿ヘラレタル函數（例ヘバ多項式），又 a,b 輿ヘラレタル数ナルトキ α <f(x) <b ナル如キ x ノ集合.

集合 S ニ属スル数ガ凡テ一ツノ数 M ヨリモ大〔或ハ小〕デナイトキニハ，S ハ上方〔或ハ下方〕ニ**有界**デアルトイヒ，M ヲソノ一ツノ**上界**〔或ハ**下界**〕トイフ．上方ニモ下方ニモ有界ナラバ，單ニ有界トイフ.

集合 S ニ關シテ，上界又ハ下界ハ確定デナイ．卽チ一ツノ上界ヨりモ大ナル数ハヤハリ上界デアリ，又一ツノ下界ヨリモ小ナル数ハ下界デアル．故二集合

ノ限界トシテハ，成ルベク小ナル上界及ビ成ルベク大ナル下界ニ興味ガアル．集合 S ニ最大数ガアルナラバ，ソレハ勿論上界ノ中デ最小ナルモノデアリ，又 S ニ最小数ガアレバ，ソレハ下界ノ中デ最大ナルモノデアル．サテ次ニ證明スルヤウニ, S ガ有界ナラバ, 最大又ハ最小ノ数ガナイトキニモ，最小ノ上界又ハ最大ノ下界ガ存在スル． ソレラヲ S ク上限又ハ下限トイフ．故ニ上限，下限ハ必ズシモ S ニ屬スル数デハナイ．郎チ S ニ最大数ガナイトキニハ，上限ハ S ニ屬シナイ．下限モ同様デアル.

再言スレバ，集合 S ノ上限 α トハ次ノ條件 (1°),(2°) ニ適合スル数デアル.

(1°) S ニ屬スル**凡テノ**数 x ニ關シテ $x \leqq a$.

(2°) $a' < a$ トスレバ，$a' < x$ ナル**或ル**数 x ガ S ニ属スル.

上記 (1°) ハ a ガ S ノ上界デアルコト，(2°) ハ a ヨリモ小ナル上界ノナイコトヲ意味スル． 故ニ上限卽チ最小上界デアル.

下限ニ關シテハ不等記號ノ向キヲ反對ニスレバヨイ．

例 1 ノ集合ハ上下共ニ有界デナイ.

例 2,3 ノ集合ハ有界デ，a ガ下限，b ガ上限デアル．例 2 デハ，上限モ下限モ集合ニ属スルガ，例 3 デハ，上限モ下限モ集合ニ属シナイ．

例 4 ノ集合ハ有界デアルガ，最大数モ最小数モナク，$\sqrt{2}$ ガ上限，$-\sqrt{2}$ ガ下限デアル．

例 5 ノ集合ハ上方ニハ有界デナイガ，下方ニハ有界デ，$\sqrt{2}$ ガ下限デアル．

以上，上限下限ノ意味ヲ述ベタガ，次＝ソノ存在ノ證明ヲスル．

定理 2． 数ノ集合 S ガ上方 [又ハ下方] ニ有界ナラバ S ノ上限 [又ハ下限] ガ存在スル．（わいやすとらすノ定理）

[證] 先ヅ S ハ下方ニ有界デアルト假定シテ，下限ノ存在ヲ讃明シヨウ．S ノ一ツノ下界ヲ a トスレバ, a ヨリモ小ナル数ハヤハリ S ノ下界デアル．ヨツテ S ノ下界デアリ得ル数ノ全部ヲ A 組トシ．ソノ他ノ数ノ全部ヲ B 細トスレバ．一ツノ切斷ガ生ズル．實際，B 組ニ屬スル数ハ S ノ下界デアリ得ナイ数ダカラ，ソレハ如何ナル下界ヨリモ大デアラネバナラナイ，従ツテ A 組ニ屬スル数ヨリモ大デアル．

コノ切斷ニヨツテ確定サレル數ヲ s トスル．然ラバ s ハ A ニ屬シテ A ノ最大数デアルカ，或ハ s ハ B ニ屬シテ B ノ最小数デアルカ，イズレカ一ツデアル．（定理 1）サテ，s ハ B ニ屬スルデアラウカ．

假ニ s ガ B ニ屬スルトスルナラバ，s ハ S ノ下界デアリ得ナイノダカラ，s ヨリモ小デ，而モ S ニ屬スル数ガアル． ソノ一ツヲ x トスル，卽チ $x<s$.

x ト s トノ中間ニアル一ツノ数ヲ b トスル．卽チ $x<b<s$.

然ラバ b ハ S ニ屬スル数 x ヨリモ大デアルカラ，S ノ下界デハナイ，卽チ B ニ屬スル．而モソノ b ガ S ョリモ小デアルカラ，コレ矛盾デアル．

故ニ s ハ B ノ最小徴デハアリ得ナイ．

故ニ s ハ A ノ最大数，卽チ S ノ最大下界，卽チ S ノ下限デアル．

S ガ上方ニ有限ナルトキ，上限ノ存在スルコトモ，同ジヤウニ證明サレル．

1.4 数列ノ極限

a1, a2；… , an,…ノヤウニ，無数ノ数ヲ一定ノ順序ニ並タモノヲ数列トイフ．ソノ項 an ハ自然数ノ範園内ニ於テ變動スル變数 n ノ「関数」デアル．コノ函数ガ確定シタトキハ，数列ヲ{an}ト記ルス．サテ n ガ限リナク増大スルトキ，an ガ一定ノ数αニ限リナク近ヅクナラバ，数列{an}ハαニ**収斂**スルトイヒ，又αヲ an ノ**極限**トイフ．記號デハ又ハ見易クト書ク．詳シク言ヘバ，任意ノ正数εガ輿ヘラレタルトキ，ソレニ對應シテ一ツノ番號 n0 ガ

$$\lim_{n \leftarrow \infty} a_n = \alpha,$$

n>n0 ナルトキ |α-an| < ε

ナルヤウニ定メラレルノデアル．

数列{an}ガ収斂スルトキ，ソノ極限αハ一意的ニ確定スル．ソレハ定義ニヨツテ明白デアラウ．

若シモ，如何ホド大キイ正数 R ヲ取ツテモ，ソレニ對應シテ

$$n > n_n \text{ナルトキ} \alpha_n > R$$

ナル如キ n0 ガアルナラバ，記號∞ヲ用ヰテ，標語的ニ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ 又ハ } a_n \to \infty$$

ト書ク．

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \text{ 又ハ } a_n \to -\infty$$

モ同様デアル[*4]．

上記ノ定義ニヨレバ，収斂スル数列ノ若干項ヲ取去ツテモ，ソノ跡ニ無数ノ項ガ残留スバ，同一ノ極限値ニ収斂スル． 簡單ニ言ヘバ

定理 3. 収斂数列ノ部分数列ハ原ノ極限直ニ収斂スル．

極限ガ∞又ハ−∞デ表ハサレル場合モ同様デアル．

[*4] コノヤウナ記法ハ標語的ニノミ使用スル． 即チ「極限値ガアル」トイフトキ，ソノ極限値ハ+∞ 又ハ -∞デハナイトスル．ソレラヲモ入レテ言フトキニハ，特別ニ断ワル．

コレトハ反對ニ，收斂シナイ数列ノ部分数列ガ收斂スルコトハ可能デアル．例ヘバ $a_n = (-1)^n$ ノトキ，ソノ部分数列 a2,a4,…ハ 1 ニ收斂シ，a1,a3,…ハ-1 ニ收斂スル.

数列ノ各項 an ガ絶封値ニ於テ一定ノ数ヲ超エナイトキ，ソノ数列ハ有界デアルトイフ．有界ナル数列ハ必ズシモ收斂シナイ．（例． $a_n = (-1)^n$ ）シカシ收斂数列ハ有界デ，ソノ極限値モ同ジ限界ヲ出デナイ．即チ：

定理 4. $a_n \to \alpha$ ナラバ， $|a_n| < M$ ナル定数 M ガアル．サウシテ| α |≦ M.

[證] 一ツノ正数 ε ヲ取ル．然ラバ假定ニヨツテ

$$n > p \text{ ナルトキ } |\alpha - a_n| < \varepsilon, \text{即チ} \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$$

ナル如キ自然数 p ガアル．ソコデ

$$|a_1|, |a_1|, \ldots, |a_p|, |\alpha - \varepsilon|, |\alpha + \varepsilon|$$

ナル p+2 個ノ数ノドレヨリモ大ナル一ツノ数ヲ M トスレバ，n ≦ p デモ，n>p デモ $a_n < M$ ．ソレガ

定理ノ始メノ部分デアル.

次ニ $a_n \to \alpha$, $|a_n| < M$ トスル. 若シモ假ニ|α|>M トスルナラバ, |α|>M'>M ナル数 M' ガアル. 然ラバ $|\alpha - a_n| > M' - M > 0$. コレハ $a_n \to \alpha$ ニ矛盾スル. 故ニ|α|≦ M. (證終)

$|a_n| < M$ カラ $\alpha| < M$ ハ得ラレナィ. 例へパ $a_n = 1 - \dfrac{1}{n} < 1, \alpha = 1$.

定理 5. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ガ収斂スルトキ,

$$(1^\circ)\ \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

$$(2^\circ)\ \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

$$(3^\circ)\ \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n).$$

$$(4^\circ)\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

但, (4°) ニ於テハ $b_n \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ トスル.

[證] $a_n \to \alpha, b_n \to \beta$ トスル．(1°)(2°) ハ明白デアラウ．サテ

$$\alpha\beta - a_n b_n = (\alpha - a_n)\beta + a_n(\beta - b_n).$$

ソコデ $|\beta| < M, |a_n| < M$ (定理 3) トスレバ,

$$|\alpha\beta - a_n b_n| < M(|\alpha - a_n| + |\beta - b_n|).$$

n ヲ十分大キクスレバ，右邊ハ如何程ニモ小サクナル．故ニ $a_n b_n \to \alpha\beta$ 卽チ (3°) デアル.

(4°) ヲ證明スルニハ，手数ヲ省ク爲ニ先ヅ

$$(4') \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\beta}$$

ヲ證明スルガヨイ．サウスレバ (3°) ニヨツテ

$$\lim a_n \cdot \frac{1}{b_n} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$$

ヲ得ル． ソレガ (4°) デアル.

サテ

$$\frac{1}{\beta} - \frac{1}{b_n} = \frac{b_n - \beta}{\beta b_n}.$$

假定ニヨツテ $|\beta| > 0$．又 $b_n \to \beta$ ダカラ，或ル番號以上ハ $|b_n| > \frac{1}{2}|\beta|$，從ツテ

$$|\frac{1}{\beta} - \frac{1}{b_n}| < \frac{2|b_n - \beta|}{|\beta|^2}.$$

n ヲ十分大キクスレバ，右邊從ツテ左邊モ如何程デモ小サクナル．卽チ (4') ガ證明サレタノデアル．

定理 3,4,5 デハ数列ガ收斂スルコトヲ假定シタノデアルガ，逆ニ一ツノ数列ガ興ヘラレタトキニ，ソレガ收斂スルヤ否ヤヲ鑑定スル方法ハ，後ニ述ベルデアラウ． ココデハ最モ基本的ナル**單調数列**ダケヲ片付ケテ置ク．

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots$$

ノヤウニ，各項ガソノ番號ト共ニ增大スル数列$\{a_n\}$ヲ單調ニ增大スルトイフ．若シモコノ数列ガ有界ナラバ，スベテノ n ニ關シテ $a_n < M$ ナル如キ定数 M ガアル．卽チ a_n ノ集合ハ有界デアル．今ソノ上限ヲ

αトスル (定理 2) ナラバ，αハ数列{an}ノ極限デアル．ナゼナラ，今α’<αトスレバ，上限ノ定義ニヨッテ $\alpha' < a_p \leq \alpha$ ナル如キ a_p ガアルガ，数列ハ單調ニ増大スルノダカラ，n>p ノトキ $\alpha' < a_n$ ． 然ルニ凡テノ n ニ關シテ $a_n \leq \alpha$ デアルカラ，n>p ナルトキ $\alpha' < a_n \leq \alpha$ ，従ッテ $|\alpha' - a_n| < \alpha - \alpha'$ ．α’ハαヨリモ小ナル任意ノ数デアッタカラ $a_n \to \alpha$ ．勿論α≦M デアル.

單調増大ノ意味ヲ擴張シテ（不減少） $a_p = a_{p+1} = \ldots < a_n = \ldots$, トシテモ，同様デアル.

サウスレバ，或ル番號以上≦ガ全部=デ, $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots$ ノヤウニナル揚合モ生ズル． ソノ場合ニハ，コレラノ相等シイ値ガ極限αデアル．サウシテモ極限ノ定義ノ文字ニハ抵觸シナイ.

軍調減少ニ關シテモ同様デアル．總括シテ：

定理 6．有界ナル單調数列ハ収斂スル.

單調数列ガ有界デナイナラバ, 増大ノ場合ニハ $a_n \to \infty$ ，減少ノ場合ニハ $a_n \to -\infty$ ．コレハ明白デアル.

次ニ一二ノ例ヲ掲ゲル.

[例 1] a>0 ナラバ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

「證」 (1°) a>1 トスル．然ラバ $\sqrt[n]{a} > 1$ ．又 $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n+1]{a}$ ．故ニ{ $\sqrt[n]{a}$ }ハ單調減少デ，1 ガーツノ下界デアル，從ツテソレハ α ≧ 1 ナル極限値ヲ有スル．今假ニ α >1 トスルナラバ， α-1>h>0 トスルトキ α >1+h デ， $\sqrt[n]{a} > 1 + h$ ，從ツテ $a > (1 + h)^n > nh$ ．右邊ハ n ト共ニ限ナク增大スルカラ，コレハ不合理デアル．故ニ α = 1.

(2°) a<1 ナラバ $a' = \dfrac{1}{a} > 1$ ，故ニ $\sqrt[n]{a'} \to 1$ ，從ツテ $\sqrt[n]{a} \to 1$ ．(定理 5, (4°)).

(3°) a=1 ノトキハ明白.

[例 2] a>1, k>0 ナラバ， $n \to \infty$ ノトキ $\dfrac{a^n}{n^k} \to \infty$.

「證」(1°)k=1 トスル． a=1+h ト置ケバ, h>0.「例 5」(e ノ定義) $a_n = (1 + \dfrac{1}{n})^n$ トスレバ，二項式定理ニヨツテ

$$a_n = 1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}$$

$$= 1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{3!}+\ldots+\frac{(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n}}{n!}$$

n ノ代リニ n+1 ヲ取レバ，右邊ニ於テ各項ガ増大シテ，且ツ項数ガ増スカラ，数列 a_n ハ單調ニ増大スル．シカモ上記ノ等式カラ見エルヤウニ

$$a_n < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$$

$$< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n} < 3.$$

卽チ{ a_n }ハ單調ニ増大シテ，且ツ有界デアルカラ，収斂スル．古典数學デハ，ソレノ極限値ヲ以テ e ナル数ノ定義トシタ．

付録 A
原著目次 (Draft)

数ノ積分ノ理論/ 二次式ノ千方根ニ開スル不定積分/ ガンマ函数/ すちる（んぐノ公式/ 練習問題（五）

第六章 ふうりえ式展開

ふうりえ級数/ 直交函数系/ 任意函数系ノ直交化/ 直交函数列＝ョルふうりえ式展開/ ふうりえ級数ノ相加干均総和法/ 滑カナル週期函数ノふうりえ展開/ 不連績函数ノ場合/ ふうりえ級数ノ例/ わいやすとらすノ定理/ 積分法ノ第二平均値定理/ 、うりえ級数＝開スルぢりくれーじよるだんノ僚件/ ふうりえノ積分公式/ 練習問題（六）

第七章 微分法ノ績キ（陰伏函数ン

陰状函数/ 逆函数/ 篤像/ 解析函数ヘノ慮用/ 曲線ノ方程式/ 曲面ノ方程式/ 包絡線
/ 陰伏函数ノ極値/ 練習問題（七）

第八章積分法（多愛数）

二次元以上ノ定積分/ 面積燈積ノ定義/ 一般風域上ノ積分/ 一次元ヘノ軍純化/ 積分ノ意味ノ援張（魔義積分）/ 多愛数ノ定積分ニョツテ表ハサレル函数/ 愛数ノ愛換/ 曲面積/ 曲線座標（健積，曲面積，弧長ノ憂形）/ 直交座標/ 面積分/ ベクトル法ノ記貌（挿記）/

パブリックドメイン版刊行にあたって

技術書典の機会に宇宙開発本を作成しようと思い、数式の沢山ある本の練習として解析概論の一部を入力してみました。

楽しい豆本にしてみましたが、用紙／文字サイズ比率変えるのにトラブルが山ほど！！ 結局宇宙開発本を作成する時間がなくなってしまいました（泣。またRe:VIEW を通すと複数の数式が整列しなかったり苦心惨憺でした。こんな仕上がりになってしまい大変失礼な出来に。高木先生ごめんなさい！

今後ソーシャルで入力作業できる Web サービスを構築しようと思います。お楽しみに！

2016/6/25 秘密結社オープンフォース　河野悦昌

解析概論 1943

2016 年 6 月 25 日　初版第 1 刷　発行

著　者　　高木貞治

発行所　　秘密結社オープンフォース