パブリックドメイン高木貞治 解析概論 増訂版

高木貞治　著

2016-06-25 版　　発行

目次

第 1 章

基本的ノ概念

1.1　数ノ概念及ビ四則算法

ハ既知ト彼定スル[*1]．始メノ中ハ實数ノミヲ取扱フカラ一々断ラナイ．次ノ用語ハ周知デアル.

[*1] 附録（一）ヲ参照.

第.1 數 基本概念及 四則算法

自然数． 1,2,3 等．　物ノ順位又ハ物ノ集合ノ個数ヲ示ス篤ニ用ヰラレル．

整数． 0，± 1，± 2 等．　自然数ハ正ノ整数デアル．

有理数． 0 及ビ $\pm\dfrac{a}{b}$ 子，但 α,b ハ自然数．b=1 ナルトキ，ソレハ整数デアル．

無理数． 有理数以外ノ責数．例ヘバ

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2} = 1.4142135\ldots,\\
&e = 2.718281828\cdots,\\
&pi = 3.1415926535\cdots
\end{aligned}$$

（但，ソレラガ有理数デナイコトハ護明ヲ要スル）十進法．賓数ヲ十進法デ表ハスコトモ周知デアル．有理数ヲ十進法デ表ハセバ，数字ハ有限カ，又ハ無限ナラバ循環小数ニナル．但，有限位数ノ十進数ヲ循環小数ノ形二表ハスコトモ出来ル．例ヘバ 0.6= 0.5999⋯．無理数ヲ十進法デ表ハスナラバ，無限ノ位数ヲ要シ，数字ハ

決シテ循環シナイ．吾々ガ十進法ニヨツテ数ヲ表ハズニ至ツタノハ，手指ノ数ニソノ原因ガアルノデアラウガ，理論上ハ 1 以外ノ任意ノ自然数ヲ基本トシテ，十進法ト同様ノ方法ニヨツテ，数ヲ表ハスコトガ出来ル．特ニ二進法デハ，数字ハ 0 ト 1 トダケデ足ル．有理数ヲ二進法デ表ハセバ，分母ガ 2 ノ巾[*2]ニナルモノノ外ハ，循環二進数ニナル．

$$[\text{例}]\ \frac{5}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}=(0.101)$$

$$\frac{5}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+=\frac{1}{2^5}+\ldots=(0.100111\ldots).$$

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+=\frac{1}{2^5}+\ldots=(0.101010\ldots).$$

数乙幾何撃的表現解析學デハ便宜上自由ニ幾

[*2] 巾ハ羃ノ假字（和算ノ用例ニヨル）．

何學ノ術語ヲ流用スル．例ヘバ座標法ニヨツテ實数ヲ直線上ノ點デ表現スル．ソノ方法ハ周知デアル．直線 XX' ノ上デ，0 ヲ表ハス點 0 ハ座標ノ原點デ，又 1 ガ半直線 OX 上ノ點 E デ表ハサレルトスレバ，OE ハ長サノ單位デアル．一般ニ x ヲ表ハス點 P ハ，x ガ正或ハ負デルニ従ツテ，半直線 OX 或ハ OX' ノ上ニアツテ，OP ノ長サガ即チ x ノ絶對値デアル． ソレヲ|x|ト記ルス．コノヤウニシテ實数 x,x' ガ點 P,P' デ表ハサレルナラバ，|x-x'|ハ PP' ノ長サデアル．絶封値ニ關スル次ノ開係ハ，シバシバ引用サレル．

$$|x| + |x'| \geq |x + x'| \geq |x| - |x'|.$$

コレモ周知デアル．二ツノ實数 x,y ヲ一組トシテ，ソレヲ (x,y) ト記ルスナラバ，個々ノ組 (x,y) ト平面上ノ個々ノ點 P トノ間二，座標法

ニヨツテ一對一ノ對應ガ成立スル．ソノトキ i(x,y) ヲ點 P ト略稱スル．通常ハ直交座標ヲ用ヰル．同ジヤウニ，三ツノ實数ノ組 (x,y,z) ハ空間ノ一點ニヨツテ表ハサレル．ナホ一般ニ, n 個ノ實数ノ一組 (x1,x2,⋯，xn) ヲ n 次元室間ノ一點トイヒ，ソレヲ一ツノ文字 P デ表ハス．今 P ＝ (x1, x2,⋯ , xn),P’= (x1’, x2’, ⋯, xn’) ナルトキ

$$\sqrt{(x\mathbf{1\text{-}x}1')^2 + (x\mathbf{2\text{-}x}2')^2 + \ldots (x\mathbf{n\text{-}x}n')^2}$$

ナル数ヲ P, P’ ノ距離ト略稱シテ, ソレヲ PP’ ト書ク．然ラバ「三角關係」PP’+P’P"と PP" ガ成立ツ．　若シモ P ヲ固定スレバ

$$PP'^2 = (x\mathbf{1\text{-}x}1')^2+(x\mathbf{2\text{-}x}2')^2+\ldots (x\mathbf{n\text{-}x}n')^2 < \delta^2$$

ナル點 P’ ハ，P ヲ中心トスル半徑 δ ナル「n

次元ノ球」ノ内部ニアルトイフ．若シ又

$$|x\mathbf{1\text{-}x}1'| < \delta, |x\mathbf{2\text{-}x}2'| < \delta, \ldots, |x\mathbf{n\text{-}x}n'| < \delta,$$

言ヒ換ヘレバ

$$Max(|x\mathbf{1\text{-}x}1'|, |x\mathbf{n\text{-}x}n'|) < \delta,$$

ナラバ[*3]，P’ハＰヲ中心トシテ稜ガ座標軸ニ平行デ，ソノ長サガ２δナル「n 次元ノ立方ノ内部ニアルトイフ．吾々ハ言語ノ短縮ヲ欲スルガ爲ニ，上記ノヤウナ幾何學的ノ表現法ヲ用ヰルノデアルカラ，文字ニ拘泥シテ，n 次元空間ニ關シテ奇怪ナル空想ヲホシイママニスル必要ハナイ．シカシ，コノヤウナ表現法ガ印象ヲ鮮明ナラシメルコトノ効果ハ，容易ニ承認セラレルデアラウ．

[*3] Max(a1,a2,.,an）ハ a1, a2,⋯, αｎノ最大ノ値ヲ表ハス記號． 同様ニ Min ハ最小ノ値ヲ示ス．

1.2　数ノ連績性．

実数ニ開シテ前節デ述ベタコトハ，誰モガ承認スルコトト候定シタノデアツタガ，数ノ連続性ハ解析學ノ基礎デアルカラ，ソレヲ説明セネバナラナイ．凡テノ数ヲ A,B ノ二組ニ分ケテ，A ニ屬スル各数ヲ B ニ屬スル各数ヨリモ小ナラシメルコトガ出来タトスルトキ，コノヤウナ組分ケ（A, B）ヲでできんどノ**切断**トイヒ，A ヲ下組，B ヲ上組トイフ．切断 (A,B) ニ於テ，如何ナル数モ洩レナク下組カ上組カ何レカ一方，シカモ一方ノミニ屬スルトイフ規約ハ厳重デアル．　今一ツノ数 S ヲ取ツテ，s ョりモ小ナル数ヲ凡テ下組ニ入レ，S ヨリモ大ナル数ヲ凡テ上組二入レルトスル．切断ヲ完成スル爲ニハ，S 自身モ下組或ハ上組二入ラネバナラナイガ，若シモ S ヲ下組＝入レルナラバ，S ハ下組ノ最

大数デ，ソノトキ上組ニ最小数ハナイ．又若シ S ヲ上組ニ入レルナラバ，S ハ上組ノ最小数デ，ソノトキ下組ニ最大数ハナイ． コノヤウニシテ任意ノ数 S ヲ境界トスル切斷ガ出来ルガ，重要ナノハソノ逆デアル． 卽チ次ノ定理ガ成立ツ．

定理 1. 實数ノ切斷ハ，下組ト上組トノ境界トシテ，一ツノ数ヲ確定スル．（でできんどノ定理）

卽チ切斷（A, B）ガ興ヘラレタルトキ，一ツノ数 S ガ存在シテ，S ハ A ノ最大数又ハ B ノ最小数デアリ，始メノ場合ニハ B ニ最小数ハナク，後ノ場合ニハ A ニ最大数ガナイノデアル．前ノヤウニ，始メニ s ヲ取ツテ，ソレヲ境界トシテ切斷（A, B) ヲ作ルノデハナク，反對ニ切斷（A, B) ガアルトキ，ソレニヨツテ s ガ決定サレルノデアル．

コレガ實数ノ連續性デアル．今吾々ハコノ定

理ハ承認サレタモノトシテ，ソレヲ基礎トシテ，理論ヲ組ミ立テルコトニスル．

大小ノ順序ノアル所ニハ切斷ガ出来ルガ，理論上切斷ノ三ツノ型ガ可能デアル．卽チ

(1°) 下組ニ最大数ガアリ同時ニ上組ニ最小数ガアル．約言スレバ，下組ト上組トノ間ニ飛ビ (leap) ガアル．

(2°) 下組ニ最大数ガナク, 且ツ上組ニ最小数ガナイ．卽チ下組ト上組トノ間ニ途切レ (gap) ガアル．

(3°) 下組叉は上組ニ端 (最大叉は最小) ガアツテ，他ノ一方ニハ端がナイ．卽チ下組ト上組トハ連續シテイル．

でできんどノ定理ハ實数ノ切斷ハ (3°) ノ型ニ限ルコトヲ言フノデアル．整数ノ範圍内デハ，切斷ハ (1°) ノ型ニ限ル．有理数ノ範圍内デハ，ニツノ有理数ノ中間ニ必ズ他ノ有理数ガ

アル（有理数ノ稠密性）カラ，(1°) ノ型ノ切斷ハ不可能デアルガ，一方 (2°) ノ型ノ切斷ガ可能デアル．例ヘバ $b > \sqrt{2}$ ナル有理数 b ヲ上組 B トシ，ソノ他ノ有理数 α ヲ下組 A トスレバ，$s = \sqrt{2}$ ナル有理数 S ハナイカラ，(A,B) ハ有理敷ノ切断デアルガ，ソレハ (2°) ノ型デアル．コノヤウニ有理数ダケナラ，一ツノ有理数ニモ觸レナイデ，ソレヲ A,B ノ二組ニ切リ離ハナシテシマフコトガ出来ル．コヨヤウナ状態ヲででぎんどハ切斷 (Schnitt) ナル語デ示唆シタノデアラウ．

シカシ無理数ヲモ入レテシマヘバ，コノヤウナ切リ離シハ出来ナイ．實数ノ範囲内デハ，切断ノ切レ目（下組ト上組トノ境界）ニ必ズ實数ガアル．ソレガ實数ノ連續性デアル．

1.3　数ノ集合・上限・下限.

或ル一定ノ條件ニ適合スル数ノ全部ヲ集合トイフ．其ノ條件ニ適スル個々ノ数ハコノ集合ニ屬シ，又其ノ條件ニ適シナイ個々ノ数ハコノ集合ニ屬シナイ．如何ナル数モ，前者カ後者カ，何レカ一ツデアラネバナラナイ．

[例 1] 凡テノ有理数ノ集合．條件ハ有理敷ナルコトデアル．

[例 2] a,b ハ定数デ，α＜b トスルトキ α≦ x ≦ b ナル凡テノ x ノ集合．コノ集合ヲ**閉區間** [a,b」トイフ．

[例 3] a,b ハ例 2 ト同様トシテ，α<x <b ナル凡テノ x ノ集合．コノ集合ヲ**開區間** (a,b) トイフ．

[例 4] $x^2 < 2$ ナル有理数 x ノ集合.（ 吻論カヤウナ x ノ全部ノ集合ノ意味デアル）

[例 5] $x^2 > 2$ ナル正ノ有理数 x ノ集合.

[例 6] f(x) ハ興ヘラレタル函數（例ヘバ多項式），又 a,b 興ヘラレタル数ナルトキ $\alpha <$f(x) $<$b ナル如キ x ノ集合.

集合 S ニ属スル数ガ凡テーツノ数 M ヨリモ大〔或ハ小〕デナイトキニハ，S ハ上方〔或ハ下方〕ニ**有界**デアルトイヒ，M ヲソノーツノ**上界**〔或ハ**下界**〕トイフ．上方ニモ下方ニモ有界ナラバ，單ニ有界トイフ.

集合 S ニ關シテ, 上界又ハ下界ハ確定デナイ. 卽チーツノ上界ヨりモ大ナル数ハヤハリ上界デアリ，又ーツノ下界ヨリモ小ナル数ハ下界デアル．故二集合ノ限界トシテハ，成ルベク小ナル上界及ビ成ルベク大ナル下界ニ興味ガアル．集合 S ニ最大数ガアルナラバ，ソレハ勿論上界ノ中デ最小ナルモノデアリ，又 S ニ最小数ガアレバ，ソレハ下界ノ中デ最大ナルモノデアル．サ

テ次ニ證明スルヤウニ, S ガ有界ナラバ, 最大又ハ最小ノ数ガナイトキニモ，最小ノ上界又ハ最大ノ下界ガ存在スル． ソレラヲ S ク上限又ハ下限トイフ．故ニ上限，下限ハ必ズシモ S ニ屬スル数デハナイ．郎チ S ニ最大数ガナイトキニハ，上限ハ S ニ屬シナイ． 下限モ同様デアル.

再言スレバ，集合 S ノ上限 α トハ次ノ條件 (1 °),(2 °) ニ適合スル数デアル.

(1 °) S ニ屬スル**凡テノ**数 x ニ關シテ $x \leqq a$.

(2 °) $a' < a$ トスレバ，$a' < x$ ナル**或ル**数 x ガ S ニ属スル.

上記 (1 °) ハ a ガ S ノ上界デアルコト，(2 °) ハ a ヨリモ小ナル上界ノナイコトヲ意味スル. 故ニ上限郎チ最小上界デアル.

下限ニ關シテハ不等記號ノ向キヲ反對ニスレバヨイ.

例 1 ノ集合ハ上下共ニ有界デナイ.

例 2,3 ノ集合ハ有界デ，α ガ下限，b ガ上限デアル． 例 2 デハ，上限モ下限モ集合ニ属スルガ，例 3 デハ，上限モ下限モ集合ニ属シナイ．

例 4 ノ集合ハ有界デアルガ，最大数モ最小数モナク， $\sqrt{2}$ ガ上限， $-\sqrt{2}$ ガ下限デアル．

例 5 ノ集合ハ上方ニハ有界デナイガ，下方ニハ有界デ， $\sqrt{2}$ ガ下限デアル．

以上，上限下限ノ意味ヲ述ベタガ，次ニソノ存在ノ證明ヲスル．

定理 2. 数ノ集合 S ガ上方 [又ハ下方] ニ有界ナラバ S ノ上限 [又ハ下限] ガ存在スル．（わいやすとらすノ定理）

[證] 先ヅ S ハ下方ニ有界デアルト假定シテ，下限ノ存在ヲ證明シヨウ．S ノ一ツノ下界ヲ α トスレバ，a ヨリモ小ナル数ハヤハリ S ノ下界デアル．ヨツテ S ノ下界デアリ得ル数ノ全部ヲ A 組トシ．ソノ他ノ数ノ全部ヲ B 組トスレ

バ．一ツノ切斷ガ生ズル．實際，B 組ニ屬スル数ハ S ノ下界デアリ得ナイ数ダカラ，ソレハ如何ナル下界ヨリモ大デアラネバナラナイ，従ツテ A 組ニ屬スル数ヨリモ大デアル．

コノ切斷ニヨツテ確定サレル数ヲ s トスル．然ラバ s ハ A ニ屬シテ A ノ最大数デアルカ，或ハ s ハ B ニ屬シテ B ノ最小数デアルカ，イズレカ一ツデアル．（定理 1）サテ，s ハ B ニ屬スルデアラウカ．

假ニ s ガ B ニ屬スルトスルナラバ，s ハ S ノ下界デアリ得ナイノダカラ，s ヨリモ小デ，而モ S ニ屬スル数ガアル． ソノ一ツヲ x トスル，卽チ $x<s$.

x ト s トノ中間ニアル一ツノ数ヲ b トスル．卽チ $x<b<s$.

然ラバ b ハ S ニ屬スル数 x ヨリモ大デアルカラ，S ノ下界デハナイ，卽チ B ニ屬スル．而

モソノ b ガ S ヨリモ小デアルカラ，コレ矛盾デアル.

故ニ s ハ B ノ最小徴デハアリ得ナイ.

故ニ s ハ A ノ最大数，卽チ S ノ最大下界，卽チ S ノ下限デアル.

S ガ上方ニ有限ナルトキ，上限ノ存在スルコトモ，同ジヤウニ證明サレル.

1.4　数列ノ極限

$a_1, a_2; \cdots, a_n, \cdots$ ノヤウニ，無数ノ数ヲ一定ノ順序ニ並タモノヲ数列トイフ． ソノ項 a_n ハ自然数ノ範園内ニ於テ變動スル變数 n ノ「関数」デアル．コノ函数ガ確定シタトキハ，数列ヲ$\{a_n\}$ト記ルス．サテ n ガ限リナク増大スルトキ，a_n ガ一定ノ数 α ニ限リナク近ヅクナラバ，数列$\{a_n\}$ハ α ニ**収斂**スルトイヒ，又 α ヲ a_n ノ**極限**トイフ．記號デハ又ハ見易クト書ク．詳シ

ク言ヘバ，任意ノ正数 ε ガ與ヘラレタルトキ，ソレニ對應シテ一ツノ番號 n0 ガ

$$\lim_{n \leftarrow \infty} a_n = \alpha,$$

n>n0 ナルトキ |α-an| < ε

ナルヤウニ定メラレルノデアル.

数列{an}ガ収斂スルトキ，ソノ極限 α ハ一意的ニ確定スル．ソレハ定義ニヨツテ明白デアラウ.

若シモ，如何ホド大キイ正数 R ヲ取ツテモ，ソレニ對應シテ

$$n > n_n \text{ナルトキ} \alpha_n > R$$

ナル如キ n0 ガアルナラバ，記號∞ヲ用ヰテ，標語的ニ

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty \text{ 叉ハ } a_n \to \infty$$

ト書ク.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \text{ 又ハ } a_n \to -\infty$$

モ同様デアル[*4].

上記ノ定義ニヨレバ，収斂スル数列ノ若干項ヲ取去ツテモ，ソノ跡ニ無数ノ項ガ残留スバ，同一ノ極限値ニ収斂スル． 簡單ニ言ヘバ

定理 3. 収斂数列ノ部分数列ハ原ノ極限直ニ収斂スル.

極限ガ∞又ハ−∞デ表ハサレル場合モ同様デアル.

コレトハ反對ニ，収斂シナイ数列ノ部分数列ガ収斂スルコトハ可能デアル．例ヘバ $a_n = (-1)^n$ ノトキ，ソノ部分数列 a2,a4,⋯ハ 1 ニ収

[*4] コノヤウナ記法ハ標語的ニノミ使用スル． 即チ「極限値ガアル」トイフトキ，ソノ極限値ハ+∞ 又ハ -∞デハナイトスル．ソレラヲモ入レテ言フトキニハ，特別ニ断ワル.

斂シ，a1,a3,⋯ハ-1 ニ収斂スル.

数列ノ各項 an ガ絶封値ニ於テ一定ノ数ヲ超エナイトキ，ソノ数列ハ有界デアルトイフ. 有界ナル数列ハ必ズシモ収斂シナイ． （例. $a_n = (-1)^n$ ）シカシ収斂数列ハ有界デ，ソノ極限値モ同ジ限界ヲ出デナイ． 即チ：

定理 4. $a_n \to \alpha$ ナラバ， $|a_n| < M$ ナル定数 M ガアル．サウシテ|α|≦ M.

[證] 一ツノ正数 ε ヲ取ル．然ラバ假定ニヨツテ

$n > p$ ナルトキ $|\alpha - a_n| < \varepsilon$, 即チ $\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$

ナル如キ自然数 p ガアル．ソコデ

$$|a_1|, |a_1|, \ldots, |a_p|, |\alpha - \varepsilon|, |\alpha + \varepsilon|$$

ナル p+2 個ノ数ノドレヨリモ大ナル一ツ

ノ数ヲ M トスレバ，n ≦ p デモ，n>p デモ $a_n < M$ ．ソレガ定理ノ始メノ部分デアル．

次ニ $a_n \to \alpha$, $|a_n| < M$ トスル．若シモ假ニ |α|>M トスルナラバ，|α|>M'>M ナル数 M' ガアル．然ラバ $|\alpha - a_n| > M' - M > 0$ ．コレハ $a_n \to \alpha$ ニ矛盾スル．故ニ|α|≦ M．(證終)

$|a_n| < M$ カラ $\alpha| < M$ ハ得ラレナィ．例ヘパ $a_n = 1 - \dfrac{1}{n} < 1, \alpha = 1$ ．

定理 5. $\{a_n\}, \{b_n\}$ガ収斂スルトキ,

$$(1^\circ)\ \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

$$(2^\circ)\ \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

$$(3^\circ)\ \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n).$$

$$(4^\circ)\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}b_n}.$$

但，(4°) ニ於テハ $b_n \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ トスル.

[證] $a_n \to \alpha, b_n \to \beta$ トスル．(1°)(2°) ハ明白デアラウ．サテ

$$\alpha\beta - a_nb_n = (\alpha - a_n)\beta + a_n(\beta - b_n).$$

ソコデ $|\beta| < M, |a_n| < M$ (定理 3) トスレバ,

$$|\alpha\beta - a_nb_n| < M(|\alpha - a_n| + |\beta - b_n|).$$

n ヲ十分大キクスレバ，右邊ハ如何程ニモ小サクナル．故ニ $a_nb_n \to \alpha\beta$ 即チ (3°) デアル.

(4°) ヲ證明スルニハ，手数ヲ省ク爲ニ先ヅ

$$(4') \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{\beta}$$

ヲ證明スルガヨイ．サウスレバ (3°) ニヨツテ

$$\lim a_n\cdot\frac{1}{b_n}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}$$

ヲ得ル．　ソレガ (4°) デアル．

サテ

$$\frac{1}{\beta}-\frac{1}{b_n}=\frac{b_n-\beta}{\beta b_n}.$$

假定ニヨツテ $|\beta|>0$．又 $b_n\to\beta$ ダカラ，或ル番號以上ハ $|b_n|>\dfrac{1}{2}|\beta|$，從ツテ

$$|\frac{1}{\beta}-\frac{1}{b_n}|<\frac{2|b_n-\beta|}{|\beta|^2}.$$

n ヲ十分大キクスレバ，右邊從ツテ左邊モ如

何程デモ小サクナル．即チ (4') ガ證明サレタノデアル.

定理 3,4,5 デハ数列ガ収斂スルコトヲ假定シタノデアルガ，逆ニ一ツノ数列ガ與ヘラレタトキニ，ソレガ収斂スルヤ否ヤヲ鑑定スル方法ハ，後ニ述ベルデアラウ． ココデハ最モ基本的ナル**單調数列**ダケヲ片付ケテ置ク.

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots$$

ノヤウニ，各項ガソノ番號ト共ニ増大スル数列{ a_n }ヲ單調ニ増大スルトイフ．若シモコノ数列ガ有界ナラバ，スベテノ n ニ關シテ $a_n < M$ ナル如キ定数 M ガアル．即チ a_n ノ集合ハ有界デアル．今ソノ上限ヲαトスル (定理 2) ナラバ，αハ数列{an}ノ極限デアル．ナゼナラ，今α'<αトスレバ，上限ノ定義ニヨツテ $\alpha' < a_p \leq \alpha$ ナル如キ a_p ガアルガ，数列ハ

單調ニ增大スルノダカラ，n>p ノトキ $\alpha' < a_n$ ． 然ルニ凡テノ n ニ關シテ $a_n \leq \alpha$ デアルカラ，n>p ナルトキ $\alpha' < a_n \leq \alpha$ ，従ツテ $|\alpha' - a_n| < \alpha - \alpha'$ ．α’ハαヨリモ小ナル任意ノ数デアツタカラ $a_n \to \alpha$ ．勿論α≦M デアル.

單調增大ノ意味ヲ擴張シテ（不減少） $a_p = a_{p+1} = \ldots < a_n = \ldots$, トシテモ, 同様デアル.

サウスレバ, 或ル番號以上≦ガ全部=デ, $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots$ ノヤウニナル揚合モ生ズル． ソノ場合ニハ，コレラノ相等シイ値ガ極限αデアル．サウシテモ極限ノ定義ノ文字ニハ抵觸シナイ.

單調減少ニ關シテモ同様デアル．總括シテ：

定理 6．有界ナル單調数列ハ収斂スル.

單調数列ガ有界デナイナラバ，增大ノ場合ニハ $a_n \to \infty$ ，減少ノ場合ニハ $a_n \to -\infty$ ．コ

レハ明白デアル.

次ニ一二ノ例ヲ掲ゲル.

[例 1] a>0 ナラバ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

「證」 (1°) a>1 トスル．然ラバ $\sqrt[n]{a}>1$. 又 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n+1]{a}$. 故ニ{ $\sqrt[n]{a}$ }ハ單調減少デ，1 ガ一ツノ下界デアル，従ツテソレハ α ≧ 1 ナル極限値ヲ有スル．今假ニ α >1 トスルナラバ，α -1>h>0 トスルトキ α >1+h デ， $\sqrt[n]{a}>1+h$ ，従ツテ $a>(1+h)^n>nh$. 右邊ハ n ト共ニ限ナク増大スルカラ，コレハ不合理デアル．故ニ α = 1.

(2°) a<1 ナラバ $a'=\dfrac{1}{a}>1$, 故ニ $\sqrt[n]{a'}\to 1$, 従ツテ $\sqrt[n]{a}\to 1$. (定理 5, (4°)).

(3°) a=1 ノトキハ明白.

[例 2] a>1, k>0 ナラバ， $n\to\infty$ ノトキ $\dfrac{a^n}{n^k}\to\infty$.

「證」(1°)k=1 トスル．a=1+h ト置ケバ,

h>0.「例 5」(e ノ定義) $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ トスレバ，二項式定理ニヨツテ

$$a_n = 1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}$$

$$= 1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{3!}+\ldots+\frac{(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{n}{}}{n!}$$

n ノ代リニ n+1 ヲ取レバ，右邊ニ於テ各項ガ増大シテ，且ツ項数ガ増スカラ，数列 a_n ハ単調ニ増大スル．シカモ上記ノ等式カラ見エルヤウニ

$$a_n < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$$

$$< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n} < 3.$$

即チ{ a_n }ハ單調ニ增大シテ，且ツ有界デアルカラ，收斂スル．古典数學デハ，ソレノ極限値ヲ以テ e ナル数ノ定義トシタ．

パブリックドメイン高木貞治 解析概論 増訂版

2016 年 6 月 25 日　初版第 1 刷　発行
著　者　高木貞治
発行所　秘密結社オープンフォース