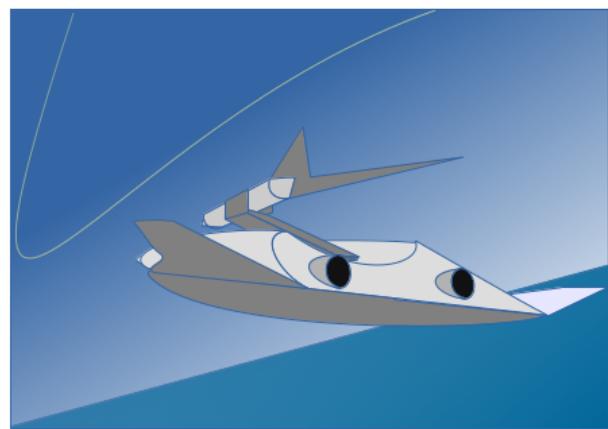
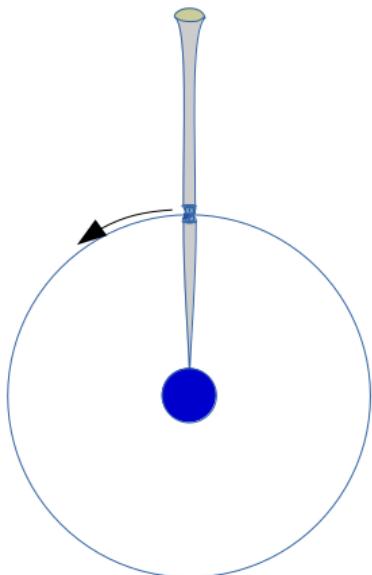
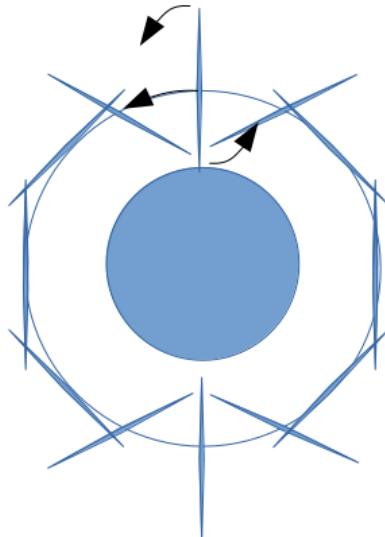
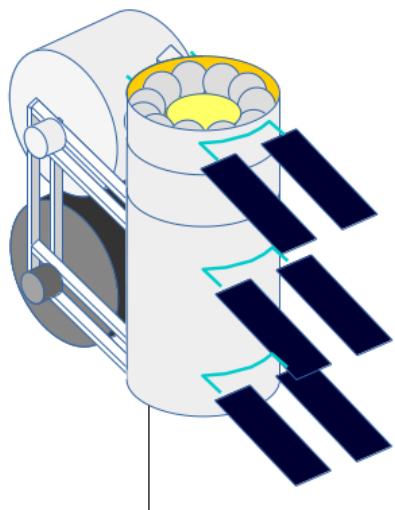


宇宙への架け橋

～数式で遙か彼方へ向かう演習書～

VER.20231231

演習編／提案編



秘密結社オープンフォース

本書の狙い

宇宙に行こう

幾多の人々が天界を既に駆けています。共通の言語、数学によって。時代、政治、思想が異なっても、同じ世界に行くことができます。いつの日か、異なる星に住む人たちと話をする時、同じように数学による意思疎通が図られるでしょう。

本書において

ブラックボックスになるべくなくします。

公式をできる限り導き出すようにします。自分の手でいちから計算していきます。

有効数字は3桁

計算の結果は有効数字内に四捨五入します。また、計算の途中で導き出した数字も同様に扱います。単位系はMKS単位系を使います。

演習編

今の宇宙開発を理解すための基礎的な計算、および提案編の準備としての軌道エレベータやその派生手法を数式を使って理解します。

解答

演習の解答は、全ての答えを載せていません。過程や必要なデータは巻末資料やWebで検索したりして調べてみてください。なお、今回から演習解答を公開します。「あとがき」を参照してください。

提案編

今の技術でロケットに代わる安価な宇宙往還システムを考えてみます。演習編のように数式を提示したかったのですが、解析的に解けないところも多く、今回は検討結果の紹介に留めました。

目次

- 本書の狙い
 - 宇宙に行こう
 - 本書において
 - ブラックボックスをなるべくなくします。
 - 有効数字は3桁
 - 演習編
 - 解答
 - 提案編
- 目次
- 演習編
 - 人類に必要な空間
 - 回答？
 - 増えすぎた人口
 - 回答？
 - 軌道発電衛星
 - 回答？
 - 宇宙へのコスト
 - 回答？
 - 宇宙に行く条件は？
 - 回答？
 - 第一宇宙速度をすべて位置エネルギーに変換すると？
 - 回答？
 - 國際宇宙ステーションはどれだけの速さ？
 - 回答？
 - 國際宇宙ステーションの位置エネルギーと運動エネルギーの割合は？
 - 回答？
 - 第二宇宙速度を求めよう！
 - 回答？
 - 第三宇宙速度を求めよう！
 - 回答？
 - 第二宇宙速度に加速するには？
 - 回答？

- 第三宇宙速度に加速するには?
 - 第一宇宙速度に加速するには?
 - 回答?
 - 重力損失を考える
 - 回答?
 - 宇宙へのコスト
 - 軌道エレベーターに必要なエネルギー
 - 軌道エレベーターの建設コスト
 - 軌道エレベータはどこが無理か?
 - 回答?
 - エレベーターの強度を求める
 - 材料の強度
 - エレベータ塔を作る
 - 回答?
 - 引張強さ
 - カーボンナノチューブ開発の現在
 - 回答?
 - 破断長 680km 材料で
 - 回答?
 - テザーの質量
 - ブートストラップ
 - 100兆円
 - 宇宙に行くための難関
 - 静止軌道を目指さない
 - 極超音速スカイフック
 - 高度10000km に 200000km 長のテザーを置いた場合
 - 回答?
 - 10000km 長のテザー
 - 回答?
 - 非同期軌道スカイフック
 - 超高空でドッキング
 - 非同期軌道スカイフックの実現可能性
 - 回答?
 - 更に問題点
 - ロータベータ
 - 回答?
 - Momentum exchange tether 手法のまとめ
- 提案編
 - 現在の技術で達成できるもの
 - Dynamic momentum exchange tether shape 手法
 - 軌道ウインチ

- 問題点1.垂らしたテザーは破断するんじゃないの?
- 問題点2.テザーを掴めるの?
- 問題点3 キャッチ後どうやって加速するの?
- 問題点4 屈曲点で生み出される推力が大きすぎない?
- 問題点5 屈曲点半径を増大するにはどのようにするの?
- 問題点6 加速中、破断しない?
- 問題点7 テザーが振動を起こすんじゃないの?
- 問題点8 最後はどうなるの?
- 問題点9 失われた軌道ステーションの運動量はどう補完するの?
- 問題点10 総質量が重いね! これだったら他の手法がいいんじゃない?
- WINTLETT 概要

- 発展

- 発展1
- 発展2
- 発展3
- 発展4
- 発展5
- 発展6

- 資料篇

- 基本的な数値
 - 重力加速度
 - 地球の赤道半径
 - 地球の軌道半径
 - 平均軌道速度
 - 1年
 - 光の速度
 - 万有引力定数
 - 地球の質量
 - 太陽の質量
 - 静止軌道高度
 - 音速
 - 太陽定数
- 基本的な数式
 - 速度・移動距離・加速度
 - 角速度・半径・加速度
 - ツォルコフスキーハーの公式
- 基本的な比較表

- コミックマーケット103版あとがき

演習編

人類に必要な空間

立って半畳、寝て一畳という言葉があります。一畳というのは $85 \times 170 \sim 100 \times 200\text{cm}$ ですが、計算しやすく $1m \times 2m$ とします。世界中の人口70億人として、一人あたり2平方メートルに入れるとすると、どのくらいの面積が必要でしょうか。

1. 佐渡ヶ島ぐらい
2. グリーンランドぐらい
3. オーストラリア大陸ぐらい

回答？

- 佐渡ヶ島 $18,780\text{km}^2$
- グリーンランド $2,170,000\text{km}^2$
- オーストラリア大陸 $7,690,000\text{km}^2$

さて、70億人分のスペースは $140\text{億}\text{m}^2$ ですが・・・？

増えすぎた人口

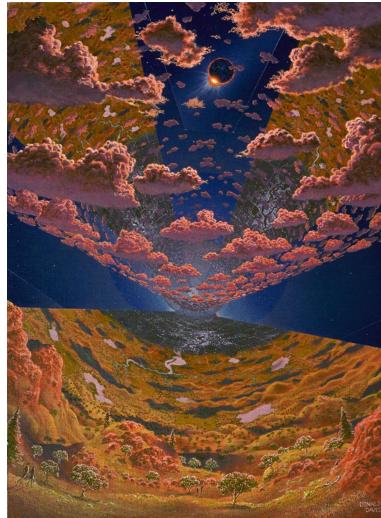
「機動戦士ガンダム」では、宇宙世紀という年号が使われています。UC0079というように、Universal Century を略して使われていて、宇宙移民が始まった年を宇宙世紀元年という設定になっています。

UC0000, 人口が90億人。 UC0050, 人口110億のうち、90億が宇宙へ。

"地球の周りには巨大なスペース・コロニーが数百基浮かび、人々はその円筒の内壁を人口の大地とした。その人類の第二の故郷で、人々は子を産み、育て、そして死んでいった。"

— 機動戦士ガンダム(劇場版) オープニング

さて、スペースコロニーは直径4マイル × 長さ20マイルで3枚の地上面を持ちます（オニール・島3号案）。kmに直すと直径6.4 km、長さ32 kmです。



スペースコロニーが数百機ということで、仮に500機としましょう。そのうち、90億人が500機に住むとすると、人口密度はどれほどになるでしょうか。計算してみましょう。

回答？

先の図のように、円筒の側面の半分は窓なので、陸の面積 S は

$$(3.14 \times 6.4 \times 32/2) = 322 [km^2]$$

で人口は一基あたり

$$9.0 \times 10^9 / 5.0 \times 10^2 = 1.8 \times 10^7 [\text{人}]$$

、すなわち 1800 万人です。とすると人口密度は

$$1.8 \times 10^7 / 3.2 \times 10^2 = (\quad) [\text{人}/km^2]$$

参考：東京都の人口密度は面積が $2194 km^2$ で2022年末頃の人口は 1400万($= 1.4 \times 10^7$)人 程度で 人口密度は・・・

$$1.4 \times 10^7 / 2.2 \times 10^3 = (\quad) [\text{人}/km^2]$$

ちなみに、50年間で70億人が宇宙に移民するとなると、1日あたり38万人が宇宙に行かないといけません。羽田空港の利用者が1日17~19万人。2015年度の渋谷駅1日平均利用者が372,234なので、宇宙港がひとつだけならそのくらいの賑わいになりますね！！

軌道発電衛星

先の計算は洒落にならなかったですね。人口爆発分をスペースコロニーで吸収するというのはちょっと非現実っぽいです。とはいっても、宇宙には月や火星もありますね。また人口を吸収しなくとも資源やエネルギーのために宇宙を目指す理由もあります。ここで、宇宙からエネルギーを貰うとして、 $10km \times 10km$ の軌道発電衛星を考えます。太陽定数を $2kw/m^2$ として、効率10%で地上に送電できるとして、1テラワットを貰うためには太陽発電衛星がどれだけ必要でしょう。

2019年の世界のエネルギー消費量は、169億toe (toe:原油換算トン) でした^[^1]。将来200億toe として、その10%を貰うとすれば、太陽発電衛星はどれだけ必要でしょうか。

太陽発電衛星の質量を、1平方メートルあたり、100g(グラム)だとします。10km × 10kmの太陽発電衛星の質量はどれだけになるでしょう。

[^1]: 令和2年度エネルギーに関する年次報告（エネルギー白書2021）

回答？

1toe = 42GJ となります。1GJ は 278kwh となるので、200億toe を1年で均すと26.6テラワットになります。

10km × 10km の太陽発電衛星の質量は、10000t。

宇宙へのコスト

H2Aだと、ブースター4基で4.6トンを打ち上げられ、コスト120億円。現在開発中のH3ロケットだと、打ち上げ能力6.5トンで打ち上げ費用は約50億円（最小構成時）。

軌道発電衛星を建設するために、1万トンを宇宙に打ち上げるにはいくらかかるでしょう？

日本の電力会社の最大発電量は、2019年度で16500万KW^[^2]。全部を太陽発電衛星にすると何トンを打ち上げないといけないでしょうか？？

[^2]: 電気事業のデータベース（INFOBASE 2020）電気事業連合会

回答？

日本のお金として、2021年度一般会計予算は約106.6兆円。2020年度の原油輸入額は42.39×10億ドル^[^3]。

割に合うでしょうか？

[^3]: 令和2年(2020)資源・エネルギー統計年報(石油) 経済産業省

宇宙に行く条件は？

まず、宇宙太陽発電衛星を建設するためには、太陽発電衛星を最低でも人工衛星として成り立たなければなりません。さもなければエネルギーを失って地上に墜落するか、地球重力を振り切って惑星間宇宙に脱出てしまいます。一度人工衛星になれば、エネルギーはほとんど失わずに地球上の軌道に位置することができます。人工衛星になる最低条件は、地球の大気圏外で第一宇宙速度で周回することです。

第一宇宙速度を求めましょう。

$$a = r\omega^2$$

の角速度と加速度の公式にrは地球半径、gは重力加速度、ωは角速度としてあてはめて以下のようにになります。

$$g = r\omega^2$$

角速度ωと速度vの変換は

$$r\omega = v$$

となります。さて、ロケットで大気圏外に行くのではなく、ジェット機で大気圏上層まで加速して、最後にちょっとだけ大気圏外で加速するようにしたらどうでしょう？

第一宇宙速度の

マッハに直すとどのくらいでしょうか。音速は340m/sとなります。

回答？

飛行機がジャンボジェットだとマッハ0.9ですね。軍用機だともっと出せます。F-15などの戦闘機だとマッハ2.5が最高速度ですが、この速度は1分程度しか出せません。持続的に出すとなると例えばXB-70などでマッハ3程度出せるようになります。

第一宇宙速度をすべて位置エネルギーに変換すると？

位置エネルギーの公式は mgh となります。運動エネルギーは $\frac{1}{2}mv^2$ となります。

回答？

$\frac{1}{2}mv^2$ ということで、単純に $v = 7.9 \text{ km/s}$ をこの式にあてはめます。位置エネルギーに変換するには重力加速度gで割ります。そうすると、 $6.24 \times 10^7 \text{ m}$ 。地球の半径が $6.36 \times 10^6 \text{ m}$ なので、地球の直径の5倍程度の高さになります。

しかしながら、このくらいだと重力が異なってきます。これだけ離れると重力が弱くなるので、実際にはもっと高い位置に相当することになります。

国際宇宙ステーションはどれだけの速さ？

さきほど、第一宇宙速度を求めましたが実際の人工衛星もそのとおりでしょうか？国際宇宙ステーションは高度400km程度の軌道です。



回答？

さきほど、第一宇宙速度を求めたときにつかった半径の値は $r = 6.38 \times 10^6$ でしたが、400km 上空ということで r は $6.38 \times 10^6 + 4 \times 10^5$ となります。計算すると、第一宇宙速度より増えるでしょうか？減るでしょうか？

国際宇宙ステーションの位置エネルギーと運動エネルギーの割合は？

先ほど計算した速度エネルギーと、 400km の高さの位置エネルギーはどれだけ違うか計算してみましょう。位置エネルギーの計算は重力が高度によって変化しますが今回は地表から変化せずとして近似します。

回答？

運動エネルギーは上の演習で求めた 7.7km/s を使い、

$$\frac{1}{2}m(7.7 \times 10^3)^2$$

。これと位置エネルギーとして mgh , h は 400km として計算したものを比較します。

第二宇宙速度を求めよう！

地上から真上に初速 v で打ち上げた物体は、頂点で止まってその後落ちてきます。初速 v をどんどん大きくすると、頂点はどんどん高くなります。初速 v がある大きさ v_2 以上になると、もう落ちてこなくなってしまいます。その v_2 を求めましょう。なお、ここでは真上に打ち上げた場合としますが、真横に発射しても、 v_2 より大きな速度だと地球周回軌道から離れてしまいます。

回答？

頂点の位置エネルギー E を求めれば、初速が求まります。

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

しかし、頂点は無限遠ですね。なのでここでは点電荷の位置エネルギーの式

$$U = k(Qq/r)$$

を思い出して、それを応用します。点電荷の位置エネルギーは無限遠から距離 r まで近づいた時に蓄えられたエネルギーなので、以下の式で地球から無限遠から地球半径 R まで近づいたとしてエネルギーが求まります。

$$E = G(Mm/R)$$

それから、地球質量 M と万有引力定数 G をあてはめ、上の式にあてはめて初速が求まります。

第三宇宙速度を求めよう！

第二宇宙速度より大きな初速で打ち上げた物体は、宇宙の彼方に行ってしまうのではなく、太陽の回りを廻るようになります。更に初速を大きくしていき、ある速度 v_3 を超えると、太陽の引力を脱して今度こそ宇宙の彼方にいってしまいます。その v_3 を求めましょう。

回答？

先の式を使い、

$$E = G(M_s m / R_s)$$

ここで、 M_s は太陽質量、 R_s は地球の軌道半径です。これを使って速度を求めると、 42.1km/s となります。しかしながら地球の公転速度が 29.8km/s あるので、それをうまくつかうと地球の公転軌道からは 12.3km/s の速度があればいいことになります。ただし、地球の地上からは第二宇宙速度分のエネルギーが必要なので、それを足さなければいけません。それを足すと、 16.7km/s となります。あれ？ 何故、 $12.3 + 11.2 = 23.5\text{km/s}$ じゃないのでしょうか？？

第二宇宙速度に加速するには？

第一宇宙速度で地表スレスレを周回している状態から、第二宇宙速度に加速するには 7.9km/s から 11.2km/s に 3.3km/s 分を加速する必要があります。加速にはいろいろ方法がありますが、ここではオーソドックスにロケット噴射を行おうとします。ロケット噴射は質量のある物体を噴射してその反作用で推進します。高校物理の範疇での簡単なモデルを考えます。2kgの物体のうち、ペイロードが1kg、プロペラントが1kgとします。通常プロペラントは熱や電気力などを使い、気体やプラズマの状態で連続的に噴出します。しかしながら極端に簡略化して、プロペラントは剛体の固体で、それを一回で噴出して反動力で推進するとしましょう。例えば、プロペラント 1kg を 1m/s の加速を与えて後方に一気に噴出すると、ペイロードは前方に 1m/s 分の加速を得ます。一方、プロペラント 100g を 19m/s の力積を与えて後方に一気に噴出すると、ペイロード1kgとプロペラント0.9kgは 1m/s 分の加速を得ます。

使用プロペラント質量	使用プロペラント加速	ペイロード+残プロペラント質量	ペイロード+残プロペラント加速
1kg	-1m/s	1kg	1m/s
100g	-19m/s	1.9kg	1m/s
10g	-199m/s	1.99kg	1m/s
1g	-1999m/s	1.999kg	1m/s
100mg	-19999m/s	1.9999kg	1m/s
10mg	-199999m/s	1.99999kg	1m/s
1mg	-1999999m/s	1.999999kg	1m/s
0.1mg	-19999999m/s	1.9999999kg	1m/s

表1. プロペラント加速

これ以上だとプロペラントが光速度に近づいて相対論効果が発生してきますのでひとまずここまでにしておきます。

当然ながら、プロペラントの加速が大きければ大きいほど少量のプロペラントで済み、効率がいいですね。

さて、プロペラントをこのように加速するにはどのようにすればいいのでしょうか？

方法	上限	上限値の由来
圧縮空気	340m/s	標準状態の空気の音速
化学燃焼1	786m/s	炭素-酸素の燃焼温度のCO ₂ 分子速度
化学燃焼2	1230m/s	水素-酸素の燃焼温度のH ₂ O分子速度
化学燃焼3	3700m/s	水素-酸素の燃焼温度のH ₂ 分子速度
ばねなどの機械的加速	6000m/s	鋼鉄の縦波速度

表2. プロペラント加速方法その1

ここで、ロケットの性能指標によく使われる「比推力」という概念を導入します。「比推力」はプロペラント噴出速度を重力加速度 g で割った値です。

方法	上限	上限値の由来	比推力
圧縮空気	340m/s	標準状態の空気の音速	35
化学燃焼1	786m/s	炭素-酸素の燃焼温度のCO ₂ 分子速度	80
化学燃焼2	1230m/s	水素-酸素の燃焼温度のH ₂ O分子速度	126
化学燃焼3	3700m/s	水素-酸素の燃焼温度のH ₂ 分子速度	378
ばねなどの機械的加速	6000m/s	鋼鉄の縦波速度	612

表3. プロペラント加速方法その1+比推力

方法	上限	上限値の由来	比推力
アーク推進1	637m/s	水銀をアーク加熱で3000°Cにした分子速度	65
アーク推進2	3410m/s	リチウムをアーク加熱で3000°Cにした分子速度	347
レーザー熱推進1	2200m/s	アルミニウムをレーザー加熱で5000°Cにした分子速度	224
イオン推進1	149000m/s	10価キセノンプラズマを 1.5kV 加速	15200
イオン推進2	200000m/s	1価マグネシウムプラズマを 5kV 加速	20400
イオン推進3	1110000m/s	3価リチウムプラズマを 15kV 加速	113000

表4. プロペラント加速方法その2

方法	上限	上限値の由来	比推力
原子力推進1	600000m/s	重水素-ヘリウム3ペレットの核融合直後の重水素原子核速度	61200
原子力推進2	26800000m/s	ダイダロス計画第2段における核融合推進	2730000

表5. プロペラント加速方法その3

上記のプロペラント加速は単純計算で、実際にはノズルで增速したり、変換損失があったりしていろんな左右要素が在ります。そうであっても加速に使えるプロペラントは良さそうなものが多くありますよね。どれを使っても、第一宇宙速度から

第二宇宙速度に到達するのはそんなに難しくは無さそうです。

では例として、液体酸素-液体水素ロケットを使って第一宇宙速度に達している宇宙船を第二宇宙速度に増速することを考えてみましょう。

水素-酸素の質量比を3:1ぐらいにして完全燃焼から水素を過剰とし、燃焼排気速度を熱運動による速度をノズルで増速して約4,000 m/sとします。

先の簡単な想定では、プロペラントを固体の塊としていっぺんに排出する方法で考えていましたが、実際には気体などを連續的に噴出することになります。その場合、連続的に噴出して最終の速度と残り質量がいくらになるかというのを公式があります。

ツォルコフスキーの公式で、

$$\Delta V = w \ln \frac{m_0}{m_T}$$

で、増速分 ΔV 、排気速度 w 、初期質量 m_0 、噴射後の残り質量 m_T となります。

この式にあてはめてみましょう。

回答？

ツォルコフスキーの公式に増速分 $\Delta V = 3.3 km/s$ 、排気速度 $w = 4000 m/s$ をあてはめて変形、

$$\frac{m_0}{m_T} = \exp \frac{\Delta V}{w}$$

を求めてみましょう。これで求まるのは、1kgのペイロードを第2宇宙速度に増速するためのプロペラントを含んだ増速前の全体質量です。

1kgの何倍のプロペラントが必要でしょうか。

第三宇宙速度に加速するには？

惑星軌道から、太陽系脱出速度にするために $11.2 km/s$ から $16.7 km/s$ の差分 $5.5 km/s$ を加速するにも第二宇宙速度を得るためのしくみをつかうとそんなに難しくは無さそうです。実はそれだけではなく、惑星軌道からだと月や惑星の引力を使うスイングバイ、太陽風を使うソーラーセイルなどの方法も使うことができ、速度を得るために選択肢が広がります。

スイングバイやソーラーセイルは地球軌道でも使用できますが、利用シーンは惑星軌道上で使うほうが使いでが良くなります。

第一宇宙速度に加速するには？

今までの計算では第一宇宙速度から第二、第三宇宙速度に達するのは簡単ぽかったですね。第一宇宙速度に達するのも簡単でしょうか！？第一宇宙速度から第二宇宙速度に達するために、 $3.3 km/s$ の加速のために液体酸素-液体水素ロケットを使つ

てペイロードの1.28倍の燃料が必要でした。今回は7.9km/sの加速ですから1.28倍の2倍強のプロペラントがあればいいでしょうか？計算してみましょう！

$$\frac{m_0}{m_T} = \exp \frac{\Delta V}{w} = \exp \frac{7.9 \times 10^3}{4000} = 7.2$$

となります。つまり、1kgのペイロードに7.2kg-1kgで6.2kgのプロペラントが必要ということですね。

実際にはロケットを打ち上げる場所と打ち上げ方向により、地球の自転の速度を打ち上げ速度の一部として利用できます。自転による線速度は赤道で最大になりますが、それでも・・・(自転の効果は計算してみてください)。

以下は一応自転効果なしで計算を進めます。液体酸素-液体水素ロケットで第一宇宙速度を得るために結構プロペラントが必要で、なんだかつまらないですね。

では、比推力の大きいキセノンイオン推進エンジンを使ったらどうでしょう！

方法	上限	上限値の由来	比推力
イオン推進1	149000m/s	10価キセノンプラズマを1.5kV 加速	15200

表6. プロペラント加速方法その4

計算してみると、

$$\frac{m_0}{m_T} = \exp \frac{\Delta V}{w} = \exp \frac{7.9 \times 10^3}{149000} = 1.05$$

つまり、1kgの質量を軌道に上げるのに、50gのプロペラントしか使わないということです。イイですね！・・・いやいや、そうはいきません。実際にはイオン推進エンジンなどは、エンジン自体の質量がかなりあり、それに比べて推力はほんの少ししか出ません。無重力状態で少しずつ加速する、すなわち軌道上から第二宇宙速度や第三宇宙速度を獲得するのに適したエンジンです。地上の速度ゼロ状態から第一宇宙速度に達するまでは、垂直打ち上げの場合ロケットの推力で発生した加速度から地球の重力が差し引かれてしまうので、とにかく加速度をgの何倍も稼がなければなりません。そのためにはエンジン全体の重量、プロペラントの重量、ペイロードの重量に比べ数倍以上の加速度を得ることが必要となります。

方法	上限	上限値の由来	比推力
圧縮空気	340m/s	標準状態の空気の音速	35
化学燃焼1	786m/s	炭素-酸素の燃焼温度のCO ₂ 分子速度	80
化学燃焼2	1230m/s	水素-酸素の燃焼温度のH ₂ O分子速度	126
化学燃焼3	3700m/s	水素-酸素の燃焼温度のH ₂ 分子速度	378

表7. プロペラント加速方法その1(再掲)

実は、ここで比推力の小さい化学燃焼が必要になってきます。分子量の大きなプロペラントは、速度が小さくても運動量が大きくなります。実は先程液体酸素-液体水素で計算した以下の数字も、

$$\frac{m_0}{m_T} = \exp \frac{\Delta V}{w} = \exp \frac{7.9 \times 10^3}{4000} = 7.2$$

重力損失が無い状態の式で、実際には軌道速度に至るまでの時間がかかるほど、重力に対抗するプロペラントが余計に必要となります。

では、例えば同じ3000°Cに加熱された CO₂ と H₂ では 786 m/s と 3700 m/s の違いがありますが、これを運動量に直すとどれだけの違いが出るでしょうか？

回答？

CO₂ の分子量は 44 です。H₂ の分子量は 2 ですね。同じ 1kg のガスを 3000°C に熱しても、786 m/s と 3700 m/s の違いがあり 5 倍の違いがあります。しかしながら 分子量が 22 倍違うので、分子量をかけ合わせると、推進力は XX 倍 CO₂ の方が勝ることになります。

重力損失を考える

人間が耐えられる G は 5G 程度までと言われています。スペースシャトルは 3G 程度の加速で打ち上げられます。仮に 3G で打ち上げるとなると、ロケットの推進エンジンは 4G 加速分の推力が必要となります。

さて、3G 加速で垂直に上昇したとしたら、81 秒で高度 100km まで到達します。秒速 2.4km にしか達していませんが、ここでエンジン推力がゼロだとしても、弾道飛行で 500 秒ほど大気圏外に位置できます。この 500 秒の間に横向きに 7.9km/s の加速ができるようになればいいです。そのためには 1~1.5G 加速程度で十分事足ります。

では、このように打ち上げをする場合、どれだけのプロペラントが必要になるでしょう？

回答？

500 秒の間に横向きに 7.9km/s の加速、その前に

81 秒で重力に反対向きに 3G 加速ということは、エンジンにとっては 4G 加速のための推力を 81 秒出しているということになります。無重力でもし 4G 加速を 81 秒行ったとすると 3.2km/s の加速を得ます。その後、横向きに 7.9km/s の加速が必要になるので 合計 11.1km/s の加速が必要となります。ツォルコフスキーの公式で、先程の液体酸素・液体水素エンジンを使うと考えると、

$$\frac{m_0}{m_T} = \exp \frac{\Delta V}{w} = \exp \frac{11.1 \times 10^3}{4000} = \dots$$

これはつまらないですね！もう、第一宇宙速度を得るためにもうほとんどプロペラントになってしまいますね！

宇宙へのコスト

先の計算で、化学燃焼式ロケットだと第一宇宙速度を得るためにいっぱいいっぱいということがわかりました。100 トンのロケットで、プロペラントが 90% 以上を占めていて、エンジン、フェアリングなどを除く純粋なペイロードは 5% 未満です。更に静止軌道にに乗ったり第 2、第 3 宇宙速度に乗るとペイロードは 1% 未満となるでしょう。もっと比推力の大きいエンジンは、ほとんどが大気圏外でなければ使えません。唯一重水素-ヘリウム 3 ペレットの核融合ケットが大気圏外で使えそうですが、実用化には程遠そうです。これだと宇宙へ行くコストは全く安くなりそうにありません。もっと、抜本的なコストダウンの方法はないでしょうか。

軌道エレベーターに必要なエネルギー

ここで、軌道エレベータを考えてみます。静止軌道から地上にエレベーターを通します。静止軌道は24時間で地球を回る軌道なので、地上に通じたエレベーターは地球上の赤道のある地点に固定できます。静止軌道に昇るエレベーターは、軌道エレベーターの例えればリニアモーターで引き上げます。それに使うエネルギーは、エレベーターの下りで発電できます。損失を考慮に入れなければ、昇る質量と下る質量が同じならエネルギーゼロで運用ができます。実際には損失がありますが、軌道上にありあまる太陽エネルギーを容易に利用できるでしょう。

これだと、建設してしまえば宇宙に行くコストはかなり安くなるのではないかでしょうか。

軌道エレベーターの建設コスト

一説には10兆円ということが言われています。しかしながらそれは技術の裏付けがあるものではなく、素材自体まだ人類には手にしていないものです。10兆円という金額を出したとしても、建設に乗り出すことができない以上絵に書いた餅と言わざるを得ません。

軌道エレベータはどこが無理か？

静止軌道と地上を結ぶ構築物に耐える強度の材料が存在しないことです。

まず、静止軌道の高さがどれだけか計算してみましょう。

回答？

角速度と加速度の公式

$$a = r\omega^2$$

で角速度 ω が $2\pi/day$, r が軌道半径、 a は重力加速度としてあてはめます。重力加速度は地球から離れているので r が増えると減少し以下のようになります。

$$a = g\left(\frac{r_e}{r}\right)^2$$

ここで、 r_e が地球半径です。

式を当てはめて、

$$r\omega^2 = g\left(\frac{r_e}{r}\right)^2$$

ここから変形して

$$r = \sqrt[3]{g\left(\frac{r_e}{\omega}\right)^2} = \sqrt[3]{9.8\left(\frac{6.38 \times 10^3}{7.2 \times 10^{-4}}\right)^2} = \dots$$

となり、求まった値から6430kmを引くと静止軌道高度になります。

これはかなりの長さになりますね！

エレベーターの強度を求める

高さが求まりましたので、それを元にこの図のようにエレベータは設置できるかどうか考えてみましょう。

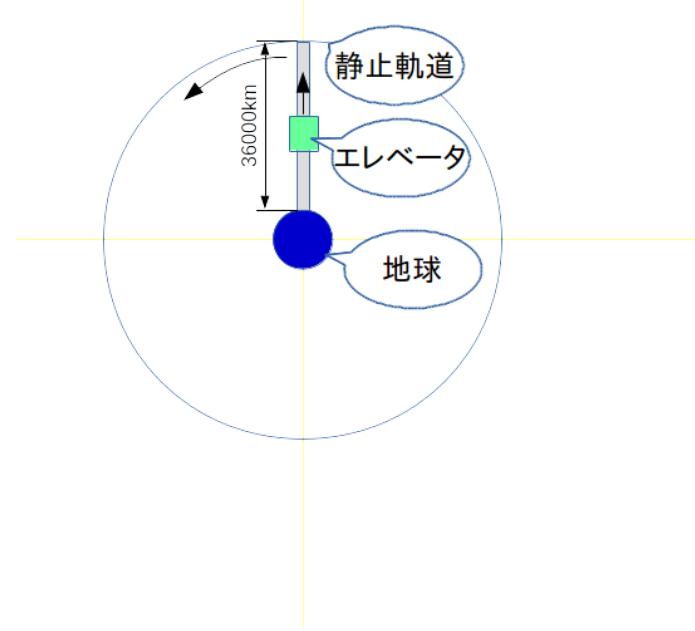


図1. 軌道エレベータ

地球から、36000km の高さの大きなビルディングを建設するのですね。

この場合、エレベーターの下部分の材料が、上の階を支えられる圧縮強度があることが必要になります。

材料の強度

地上建造物の材料でよく使われているものの強度を調べてみました。

密度(g/cm ³)	圧縮強度(MPa)	引張強度(MPa)	出典
490級鋼材	(7.9)	490-625	625- JIS G 3112
木材	0.53	41	[^4]
コンクリート	2.3	30	[^5]
鉄筋コンクリート	2.245	220	span class=pin>[^6]
超高強度繊維補強コンクリート	2.45	150	span class=pin>[^7]

表8. 建築材料の強度

[^4]: 強度データは直交異方性材料としての木材の弾性および強度 沢田稔 材料12巻(1963) 121号よりアカマツデータから計算

[^5]: 度データは国土交通省北海道開発局 https://www.hkd.mlit.go.jp/ky/kn/dou_ken/ud49g70000001ly2-att/splaat0000003vaf.pdf

[^6]: 強度データは第2章 コンクリートと鉄筋の性質 畠中重光 https://mie-u.repo.nii.ac.jp/index.php?action=repository_action_common_download&item_id=10134&item_no=1&attribute_id=17&file_no=1&page_id=13&block_id=21 より SD300 鉄筋使用のデータ

[^7]: 株式会社エスイーESCON 超高強度繊維補強コンクリート

エレベータ塔を作る



これから、どれだけの高さの塔が作れるか考えてみます。単純に、どれだけの高さまで自重に耐えられるかどうかを $\$ h = (\text{圧縮強度}) / (\text{密度} \times \text{重力加速度} \times 1000) \$$ で計算し、これを長さの次元を持つ「材料高」という単位とします。この1000は、密度をMKS単位系に直すためのものです。

材料	材料高(m)
490級鋼材	6330-8070
木材	0.53
コンクリート	1330
鉄筋コンクリート	10000
超高強度繊維補強コンクリート	6250

表9. 圧縮強度から求めた材料高

最も成績の良いものでも 10km 程度になってしまいますね。

この数値は、単純に棒のような形にして立てたときに 10km まで支えることができるということです。では、形状を変えて根元を太くして強度を上げるとどうでしょうか。単純に直線錐形状とするだけでも、3倍の高さを稼ぐことができます。より最適化した形状としては、頂上から対数的に断面積が大きくなる形状となります。この形状は均一な重力場を想定するものですが、厳密には高さが高くなるに従って重力が弱くなり、遠心力が働くので対数形状よりもっと高く伸ばしたようになります。しかしながらここで計算する対象はまだ数十km程度なので、均一な重力場で近似して差し支えありません。さて、実は圧縮強度が小さくても対数的に末広がりの形とすると高さの制限は無くなり、理論的にはいくらでも高く積み上げることができます。とはいっても実現できるかどうかは別問題です。仮に1kmごとに2倍の断面積を持つ形状で考えてみましょう。頂上で1平方メートルの断面積を持つものは48km下ると根元が地球半径を超ってしまいます。なので現実的な広がりに収めるためには、それなりの強度を持つ材料が必要となります。では、鉄筋コンクリートで作成した場合は、根元の大きさはどうなるでしょうか?

頂上で1平方メートルに圧縮限界の荷重がかかる鉄筋コンクリートの場合、 h/ρ の高さごとに e 倍の断面積となります。

$h = 10000, \rho$ が 2.245 なので $4.45km$ ごとに 2.72 倍となる・・・

回答?

仮に、頂上が 0.01 平方メートルで 48400 トンの荷重限界として、890km の高さで断面積が [] 平方メートルとなります。円柱とすると、根元は直径 2.4km の円柱となります。ここらへんが限界でしょうか。

一般的には高度 100km 以上を宇宙としていますから、宇宙には十分到達できていることになります。しかしながら静止軌道である地表からの高度 36000km に比べると 0.3% 程度しか無く、全然ダメですね。

464MPa の強さを持つコンクリートもありますが^[^8]、このくらいでは焼け石に水で、抜本的なところから考え直しが必要です。

[^8]: 「世界最高強度を達成するPFC（無孔性コンクリート）の開発」 <https://www.taiheiyo-cement.co.jp/rd/pfc/outline/index.html>

引張強さ

今まで積み上げで塔を作る計算をしました。しかしながら材料の強度としては、実は引張強度が大きな材料を探すのが賢明です。

物質	引っ張り強度(MPa)	密度(g/cm ³)	比強度(kN·m/kg)	破断長(km)
コンクリート	10	2.30	4.35	0.44
ステンレス鋼304	505	8.00	63.1	6.4
オーク材	60	0.69	86.95	8.86
アルミニウム合金	600	2.70	222	22.65
Scifer steel wire	5500	7.87	698	71.2
ガラス繊維	3400	2.60	1307	133
ケブラー	3620	1.44	2514	256
炭素繊維東レ T1100G	7000	1.79	3911	399
カーボンナノチューブ（不確実）	62000	0.037–1.34	46268–N/A	4716–N/A

表10. 引張強度表^[^9]

[^9]: Wikipedia 日本語版「比強度」ページ中の「比強度・破断長の値」 2023年8月1日 <https://ja.wikipedia.org/wiki/比強度>

引張強度は圧縮強度と比べて数十倍以上の値の物質を使うことができます。引張材料を使う場合、宇宙軌道からワイヤーをぶら下げる形になります。

このワイヤーについて、以下「テザー」と呼んでいくことにします。

静止軌道のステーションからテザーを地球に降ろしますが、その重みに対抗するために、反対側にカウンターウェイトを置き、遠心力で釣り合いを取ります。図では小惑星をカウンターウェイトとしています。

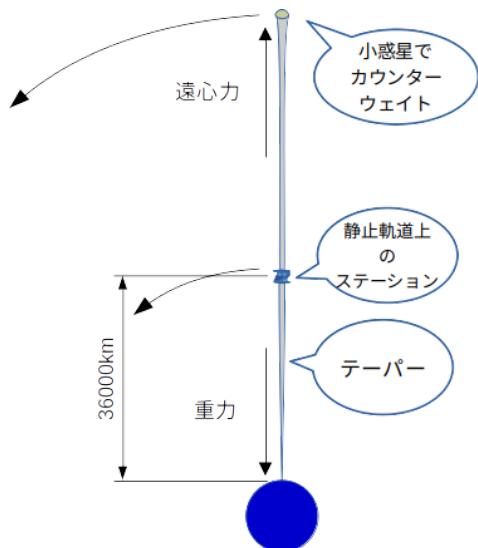


図2. 引張材料で作る軌道エレベータ

先程は、どれだけの高さに圧縮材料が耐えられるかを $\$ \$ h = (\text{圧縮強度}) / (\text{比重重力加速度} \times 1000) \$ \$$ で計算しましたが、同様に引張材料の強度はどれだけの長さの自重に耐えられるかを

$$\$ \$ h = (\text{引張強度}) / (\text{比重重力加速度} \times 1000) \$ \$$$

で計算します。

これを「材料高」に対して「破断長」とし、同じ h の記号で表すことにします。

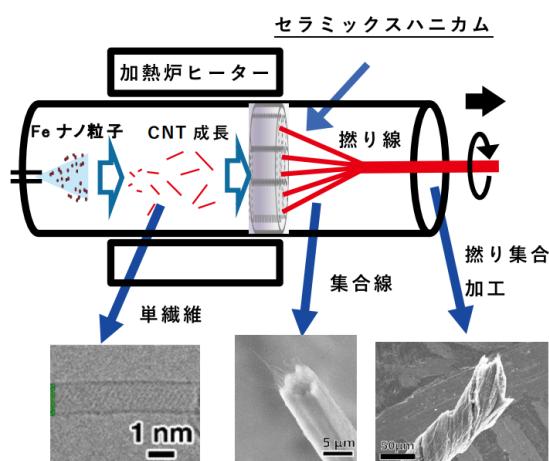
均一な重力場では、破断長が36000km あれば静止軌道まで届くことになります。しかしながら先に説明したように、高さが高くなるに従って重力が弱くなり、遠心力が働くので実際には破断長は4960kmあれば静止軌道まで届くことになります。

カーボンナノチューブ開発の現在

しかしながら、表の破断長はカーボンナノチューブぐらいしかないですね。カーボンナノチューブの実現可能性はどのくらいでしょうか???

回答?

最近の話題で、以下のような方法で長く撚った糸状のものが得られたそうです^[^10]。



[^10]: 出典：住友電工テクニカルレビュー 第199号 「新規成長法による超高強度カーボンナノチューブ線材」（2021年7月） https://sumitomo-electric.com/jp/sites/japan/files/2021-07/download_documents/J199-11.pdf

撓りを行うことで、1m程度のものが得られ、また集合線状態において引張強度が10GPaを超えたそうです。

論文にしたがって樹脂を含浸した集合線を考え、仮に引張強度10GPa、密度を1.5とすると、

物質	引っ張り強度(MPa)	密度(g/cm ³)	比強度(kN·m/kg)	破断長(km)
樹脂含浸CNT集合線	10000	1.5	6670	680

表11. 実現したカーボンナノチューブ材料の強度

破断長は4960kmに全く届きませんが「炭素繊維東レT1100G」に比べ7割アップしています。破断長4960kmを超える材料の開発は全く未知数ぽいですが、この程度なら期待しても良さそうです。

破断長 680km 材料で

1975年に発表された、軌道エレベーターの古典的な論文を見つけました。「The orbital tower: a spacecraft launcher using the Earth's rotational energy」

Acta Astronautica, Vol. 2, pp. 785-799, Pergamon Press 1975. Printed in the U.S.A.

The orbital tower: a spacecraft launcher using the Earth's rotational energy

JEROME PEARSON

U.S. Air Force Flight Dynamics Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, OH 45433, U.S.A.

(Received 17 September 1974; revised 27 January 1975)

Abstract—The theoretical possibility is examined of constructing a tower to connect a geostationary satellite to the ground. The "orbital tower" could be built only by overcoming the three problems of buckling, strength, and dynamic stability. The buckling problem could be solved by building the tower outward from the geostationary point so that it remains balanced in tension and stabilized by the gravity gradient until the lower end touches the Earth and the upper end reaches 144,000 km altitude. The strength problem could be solved by tapering the cross-sectional area of the tower as an exponential function of the gravitational and inertial forces, from a maximum at the geostationary point to a minimum at the ends. The strength requirements are extremely demanding, but the required strength-to-weight ratio is theoretically available in perfect-crystal whiskers of graphite. The dynamic stability is investigated and the tower is found to be stable under the vertical forces of lunar tidal excitations and under the lateral forces due to payloads moving along the tower. By recovering the excess energy of returning spacecraft, the tower would be able to launch other spacecraft into geostationary orbit with no power required other than frictional and conversion losses. By extracting energy from the Earth's rotation, the orbital tower would be able to launch spacecraft without rockets from the geostationary orbit to reach all the planets or to escape the solar system.

Introduction

A SATELLITE in equatorial orbit with a period of 24 hr appears fixed above a point on the equator, and is thus called a geostationary satellite. Since the altitude of this orbit is 35,800 km, a geostationary satellite can provide continuous

著者ジェローム・ピアソンは現在も宇宙企業スター・テック社を経営していて、そのWebサイトで公開されています。（<http://star-tech-inc.com/papers/tower/tower.pdf>）

この論文中で、パラメータ h (破断長=特性高) とテーパー比 A_s/A_0 の関係は以下のように示され、

$$A_s/A_0 = e^{(r_0/h)(1+r_0^3/2r_s^3 - 3r_0/2rs)} = e^{0.776r_0/h}. \quad (10)$$

図3. 破断長からテーパー比を求める式

この式を使って破断長680kmの樹脂含浸CNT集合線で軌道エレベータを作成した場合、テーパー比は1450となります。

ちなみに、表11に示した破断長399の「炭素繊維東レT1100G」だとテーパー比はどうなるでしょうか?

回答?

(すごい値になりますね。桁が2桁異なってしまいます。)

テザーの質量

地表で $10 \times 10^{-3} m^2$ すなわち断面積 1平方cm のテザー1本だけの構造で考えてみます。これでも、102トンを持ち上げることができます。このテザーが高度が高くなるほど断面積が大きくなり、静止軌道上では0.145平方メートルということになります。このときのテザーの全体重量は20万トン～30万トンぐらいになります。うーん、宇宙に30万トンを輸送!?

また、先にアンカーとして小惑星を挙げました。しかもしも小惑星が使えない場合はテザーを長く延ばしてその遠心力をアンカーの代わりに使うことになります。先の論文の図を引用すると、

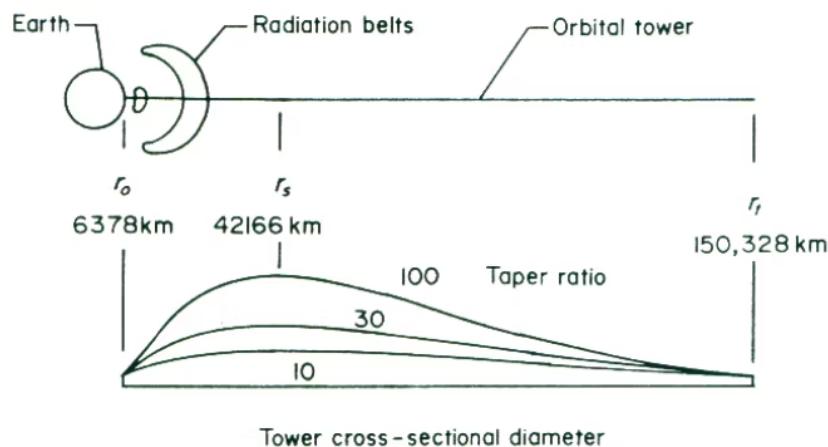


Fig. 4. The orbital tower and its cross-sectional diameter.

図4. 地球中心から150328kmまで延びるテザー

このような長い構造を、テーパー比1で考えたとしたら質量は、

$$(150328\text{ km} - 6378\text{ km}) \times 10^3 \times 1 \times 10^{-4} \times 1.5 \times 10^3 = 21600\text{トン}$$

テーパー無しでもかなりの質量です。テーパー比率1450だと、全体では1000万トンぐらいになりそうです。

ブートストラップ

先の試算では、必要なテザーを全部ロケットで運ぶというのはかなり無理ぽく、うまいやりかたを考える必要があります。

吊橋の建設でエアスピニングという工法があります。吊橋のワイヤを一度にかけるのではなく、まず細いワイヤを1本だけ通し、それを伝って2本目、3本目のワイヤをかけて補強していく方法です。



図5. ゴールデンゲートブリッジのエアスピニング

同様に軌道エレベータも最低限のテザーを地表に降ろし、それを伝って地表から登っていきながら補強するという方法をとることができます。

仮に、最初のテザーが地表で1平方ミリメートルの断面積を持ち、1020kgを持ち上げができるものとすると・・・静止軌道上の断面積は静止軌道上の断面積は14.5平方cmとなります。初期テザーの全体重量は200トン～300トン。

100兆円

これを安い口ケットで打ち上げるとして Falcon Heavy で10回分。打ち上げ費用は15億ドル。打ち上げ費用だけなので、材料費や地表から登っていくクライマーの費用、地表や軌道上の基地を作成する費用、などをこれにプラスしていくことになります。

さて、全体はいくらになるか・・・軌道エレベータの構想に取り組んでいる大林組の試算では、駅やケーブルの建設費を10兆円とみつくろっています。^[^12]。

[^12]: 株式会社大林組プレゼンテーション資料 https://www.soumu.go.jp/main_content/000585155.pdf

この金額は 150GPの強度を持ったものです。安全計数をちゃんと2にしたりしてます。初期テザー20tにしているので安くなりそうですね。本書では初期テザーの必要質量のがその10倍ぐらいになっています。コストも10倍ぐらいにはなりそうです。

宇宙に行くための難関

CNT を使わずに現在、または近い技術で軌道エレベータを作るのはだと、ちょっと厳しそうですね。100兆円の費用はエレベータ建設をせずとも Falcon Heavy を400回以上打ち上げることができ、宇宙に2万5千トンを打ち上げができるてしまします。軌道エレベータが完成したら運用費用は安くなるとしても、初期投資が大きすぎるかな!

静止軌道を目指さない

軌道エレベーターは36万kmもの高度の建造物を作らないといけないのですが、宇宙に行くためにはそれほど高い高度は必要ありません。先に述べたように、第一宇宙速度さえ得てしまえば、そこからトルクの小さくても比推力の大きなエンジンを使ったり、スイングバイを行ったりして工夫の余地はたくさんあります。第一宇宙速度を得るためにには高度100km程度で空気抵抗がある程度無視できる状態にまで昇ることができればいいのであって、高度36万kmを目指さなくても良い方法があるはずです。

静止軌道はGEOと呼ばれます。対して、GEOより一段低い軌道を中軌道(MEO)と呼ばれています、2,000 kmから36,000 kmまでの軌道を指します。更に低軌道を地球低軌道 (low Earth orbit、LEO) と呼び、地球表面からの高度2,000km以下の軌道を指します。

GEOでなければ、簡単な方法があるでしょうか?

軌道エレベータはテザーを使いますが、同様にテザーを使ったシステムのうち、よく議論されているものとして、以下のようないわゆるがあります。

- 極超音速スカイフック
- 非同期軌道スカイフック
- ロータベータ

これらは軌道エレベータも含めて、Momentum exchange tether というカテゴリのものとなります。言葉は様々な意味で使われているので、同じ名前が別の意味で使われていたりしますが、本書ではこのリストの言葉で統一します。

極超音速スカイフック

静止軌道に重心を持つものだと、地表から36000km の高さまで伸ばさないといけません。しかしながら静止軌道にこだわらずに軌道エレベータと同じようなものを作るとすると、もっと条件は緩和されます。

高度10000km に 200000km 長のテザーを置いた場合

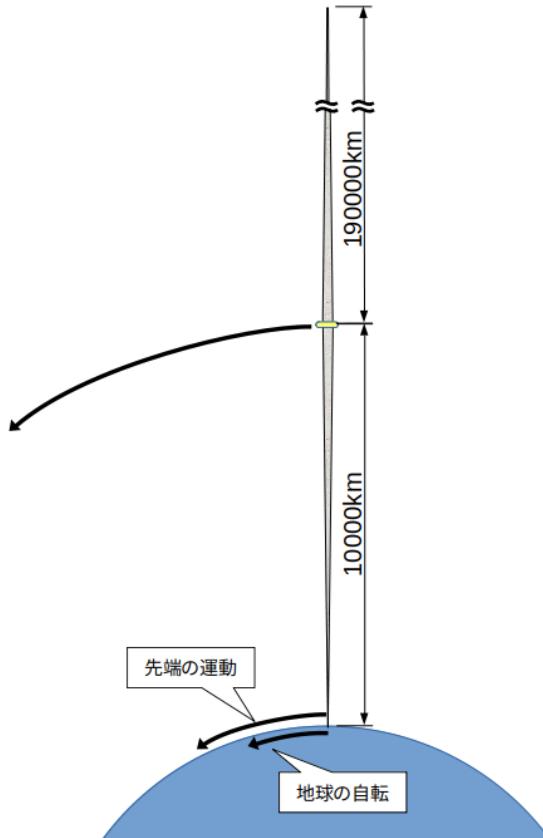


図6. 36分の1の高度

例えば地表から10000kmのところに重心を持つものだと、重心での重力加速度は

$$a = g \left(\frac{r_e}{r} \right)^2 = 9.81 \left(\frac{6.38 \times 10^6}{6.38 \times 10^6 + 1.00 \times 10^7} \right)^2 = 1.49$$

角速度と加速度の公式に当てはめて

$$a = r\omega^2 \quad 1.49 = (6.38 \times 10^6 + 1.00 \times 10^7)\omega^2 \quad \omega = \sqrt{\frac{3.82}{(6.38 \times 10^6 + 1.00 \times 10^7)}} = \sqrt{2.33 \times 10^{-8}} = 1.52 \times 10^{-4}$$

本来は、重力の変化や遠心力による補正がありますが、今回は簡単にこの計算で済ませてしまします。

地表付近の速度はどれだけになるでしょう？

回答?

$$v = r_0\omega = []$$

地球時点の線速度が 4.63×10^2 なので差し引き 5.06×10^2 マッハ1.5程度となります。極超音速ではないですが、自転しないスカイフックをまとめて「極超音速スカイフック」と呼んでしまうことにします。

これを実現するためには、先程の樹脂含浸CNT集合線を使ってテーパー比500ぐらい。テザー地球側末端が1平方mmの断面積を持つとして、重心位置での太さ500平方mm、テザー全質量は5000トン前後となります。

10000km長のテザー

先のはちょっと重たすぎかな! もうちょっと短いものとして、地表から5000kmのところに重心を持つもので計算し直してみましょう。

回答?

重心での重力加速度は

$$a = g\left(\frac{r_e}{r}\right)^2 = 9.81 \left(\frac{6.38 \times 10^6}{6.38 \times 10^6 + 5.00 \times 10^6}\right)^2 = []$$

角速度と加速度の公式に当てはめて

$$a = r\omega^2 3.08 = (6.38 \times 10^6 + 5.00 \times 10^6)\omega^2 \omega = \sqrt{\frac{3.08}{(6.38 \times 10^6 + 5.00 \times 10^6)}} = \sqrt{27.0 \times 10^{-8}} = []$$

地表付近の速度は

$$v = r_0\omega = []$$

地球の自転を引いて 2.85×10^3 マッハ8.4!

樹脂含浸CNT集合線を使ってテーパー比300ぐらいで、テザー地球側末端が1平方mmの断面積を持ち 重心位置の断面積が300平方mm テザー全質量は1500トン前後です。

高度10000kmだとテザーが重くなりすぎ、高度5000kmだと末端速度が大きすぎました。

非同期軌道スカイフック

先の極超音速スカイフックでは、テザーの地球側末端が大気中だと空力加熱を受けるので、100kmよりも上におかないといけません。

高度をもっと低くするためには、末端速度をもっと下げる必要があります。テザーを自転させて地表との相対速度を小さくしてみます。

仮に、200kmの全長のテザーを高度230kmにおき、100秒で1回転するとどうなるでしょう。

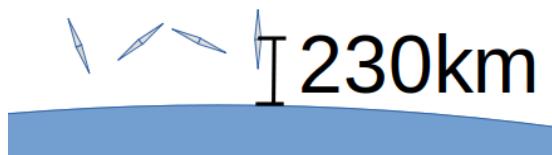


図7. 自転で地表との速度を打ち消す

この程度だと重力は変わらないとして近似してみます。テザー末端の線速度6.28km/sとなり、テザー重心の移動速度7.9km/sとの差1.5km/s、赤道の自転速度0.46を引いて1.0km/s マッハ3ぐらいとなります。末端のGは40.2Gとなります。

なのでテザー末端面積を40平方mmとし、テーパー比200ぐらいで、重心で8000平方mm、テザー全体は2000トンぐらいです。

全長が極超音速スカイフックよりずっと短いにもかかわらず、テザー総質量が小さくなっているわけはないことは、遠心力に耐えるためにテザーを太くしないといけないからです。

テザーをもっと大きくして、自転速度を遅くしてみます。

800kmの全長のテザーを高度410kmにおき、400秒で1回転してみます。

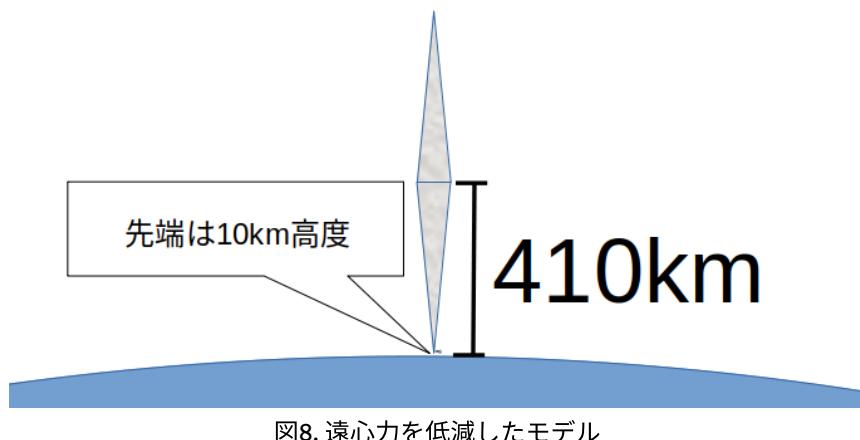


図8. 遠心力を低減したモデル

末端のGは10Gです。

テザー末端面積が10平方mm とし、樹脂含浸CNT集合線を使った場合テーパー比率80ぐらいで、重心で800平方mm, テザー全体は800トンぐらいです。

高度10km, マッハ3で移動する先端に、航空機で近づきドッキングし、宇宙に引っ張ってもらいます。



図9. ドッキングプローブ&プラグを用いたアプローチ

超高空でドッキング

ロケットを使わずに、航空機で発進すればいいのでこのやりかたは安くなるはずではないでしょうか!

超音速・超航空で航空機からカーゴを切り離すシステムには過去に似た実績があります。M-21から発射されるD-21ドローンです。



SR-71のドローン母機バージョンであるM-21から、無人ドローンD-21を約マッハ3で切り離します。しかしながらこのシステムは成功すること無く、事故でM-21の墜落事故も起こして、その後D-21はB-52からの発進に切り替えられました。M-21の元となったSR-71も、運用が高額すぎるということで衛星のみの運用となりました。

このシステムは1960年代のシステムですが、同様のシステムが生まれていないことを考えると超音速での受け渡しはかなり無理がありそうです。

非同期軌道スカイフックの実現可能性

超音速での受け渡しは無理があるということで、亜音速で考えてみます。亜音速でのドッキングの事例として、空中給油があります。



図10. プローブアンドドローグ式の空中給油[^11]

[^11]:

File:Basket Case MOD 45147014.jpg This file is licensed under the Open Government Licence version 1.0 (OGL v1.0).
Attribution:Photo: Cpl Heidi Cox RAF/MOD



図11. 空中でのドッキング

空中給油システムは時速500km程度が多いそうです。最大能力的にどのくらいかというの明確には分かりませんが、マッハ0.9前後でもなんとか可能であるという推測で論を進めます。

このくらいの速度をターゲットとして、テザーをもっと大きくしてみます。地球の半径の半分の、3190kmの全長のテザーを高度1600kmぐらいにおき、1560秒で1回転してみます。自転速度を遅くしてみます。パラメータを計算してみましょう。

回答?

- この高度での軌道速度は[]
- テザー末端の線速度が[]
- 赤道の自転速度[]
- 差し引き[]
- 末端のGは[]

これだと地球の重力とあわせても人間が耐えうる範囲ですね。速度も時速に直すと684kmで、空中給油している速度と近いですね!

樹脂含浸CNT集合線を使った場合、テーパー比率200ぐらいで、テザーの末端面積を仮に5平方mm とすると重心で1000平方mm, テザー全体は4800トンぐらいです。

かなりの質量ですね!

更に問題点

この末端のGが2.6Gということは、鉛直方向の加速度が2.6Gあるということで、2.6Gで上下するテザーをキャッチしないといけないということです。空中でキャッチするのが難しそうなことを考えると、もう少し難易度を下げないと難しそうですね。



図12. フルトン回収システム

これは気球で垂直にあげたケーブルをキャプチャし、地上の人間を回収するシステムの写真です。どれだけうまくいったのかはわかりませんが、似たものとして偵察衛星フィルム回収システムもあり、こちらは結構回収に失敗していることから、このようなものは難しそうです。

また、テザーをキャッチしたあとはテザーを伝って登っていくようになりますが、モード変更が必要なシステムも、難易度が高くなりそうです。

登らずに、つかまっているだけでも適当な場所で放り出せば第一宇宙速度の2倍を得ることができますので、それを利用するという考えもありますが、これで得られる速度は第3宇宙速度を超てしまうので、用途は限られそうです。

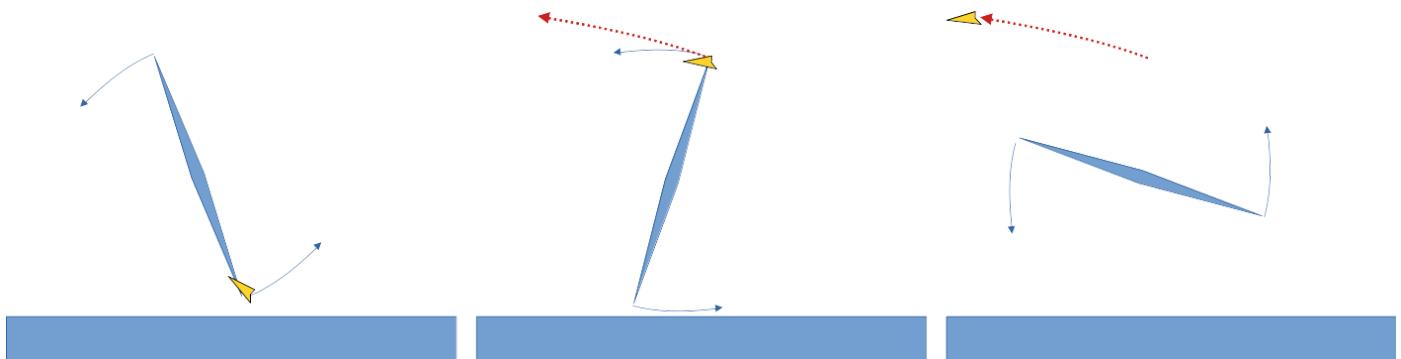


図13. 頂点でリリースする機動

ロータベータ

先の非同期軌道スカイフックでは、相対速度を下げるためにテザーを自転させました。しかしながら空中でのドッキングは色々問題がありそうです。いっそ相対速度をゼロにしたら地上でペイロードの受け渡しができるでしょうか。うまくいけば観覧車に乗るみたいに搭乗できるかも知れませんね!

資料によっては、相対速度をゼロにするものを、非同期軌道スカイフックとして紹介しているものもありますが、本書では自転するものを非同期軌道スカイフック、そのなかで相対速度をゼロにするのをロータベータ(Rotovator)として区別しま

す。

先の非同期軌道スカイフックでは、テザー末端で10Gとか40Gとかになりましたが、今回は観覧車に乗るように人間が乗れるようにするために、もっと少ない遠心力で考えてみます。

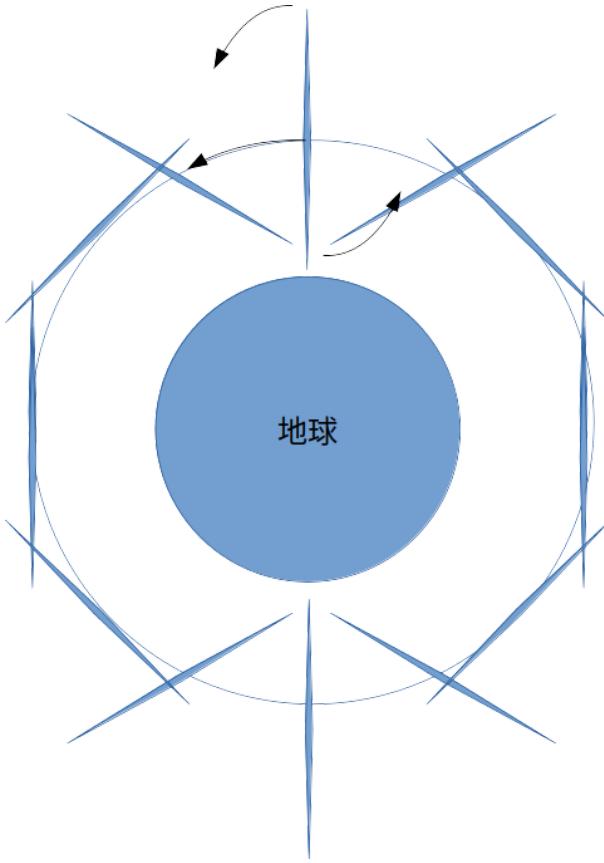


図14. 6380km長のロータベータ

このような、地球の直径と同じだけの長さを持つものを、計算してみましょう。

回答?

重心位置は地上から[]。重力加速度は $g_0/4$ で[]。公転速度は

$$a = r\omega^2 \quad 2.45 = (6.38 \times 10^6 + 6.38 \times 10^6)\omega^2 \quad \omega = []$$

地表付近の速度は

$$v = r_0\omega = 2.79 \times 10^3$$

地球の自転分を差し引いて 2.33×10^3 。そしてこの自転でこの速度を線速度として自転するとすると、末端[]の遠心力が働きます。

テザー末端面積を1平方mmとし、樹脂含浸CNT集合線を使ってテーパー比400ぐらいで、重心で400平方mm、テザー全体で2500トンぐらい。先の魅力ない非同期軌道スカイフックより重たいのですが、それでも飛行機で高速度高空でドッキングするよりも簡単、受けるGも小さいのでその点はかなり魅力的です。

しかしながら軌道エレベータの初期テザーの全体重量は200トン～300トンと比べると重いので、これなら軌道エレベータを作ったほうが良くないかなということになります。

Momentum exchange tether 手法のまとめ

今までの試算は、仮のパラメータですが、それから出してきた結果を比較してみました。

提案手法	軌道高度	自転速度	地表との相対速度	末端高度	エアスピニング工法	破断長680kmでの初期テザー質量(t)	初期テザーマンション(t)
軌道エレベータ	GEO	なし	0	0	OK	1000万	200~300
極超音速スカイファック	MEO	なし	音速~	100km~	?	5000,1500	?
非同期軌道スカイファック	LEO	あり	超音速~	20km~	?	2000,800,4800	?
ロータベータ	MEO	あり	0	0	?	2500	?

表12. 4つの手法の比較

エアスピニング工法を使えば、初期テザーの質量を小さくすることができますが、軌道エレベータ以外は様々な擾乱をどう評価すれば良いか見通せないため「?」としました。

この表では今回試算した値で比較してみましたが、パラメータのとり方によってはうまいやり方ができるかも知れません。計算を試してみてください。

提案編

現在の技術で達成できるもの

軌道エレベーターは現在、あるいは射程内に捉えている技術を使って実現はできそうですが、コストがかかりすぎることがわかりました。

更に軌道エレベーター以外の Momentum exchange tether 手法として、以下を検討しました。

- ロータベーラ
- 極超音速スカイフック
- 非同期軌道スカイフック

しかし条件がかなり緩和されるものの技術的困難さでの使いでの悪さや、コスト的にまだ検討が必要ということがわかりました。

上記はカーボンナノチューブなどを使わなくとも実現の可能性が高い技術を元にして検討しましたが、改めて、使える技術を挙げてみます

- 化学ロケット
- 炭素繊維
- セラミック耐熱タイル
- 空中ドッキング(亜音速)

こういったものをうまく組みあせて、解決できないでしょうか?

Dynamic momentum exchange tether shape 手法

今までの手法はテザーの変形が行われない、あるいは変形するとしても自転ぐらいでした。テンションでまっすぐである前提でした。

しかしながらテザーは屈曲したり振動したり、伸縮したりするできますね。このような要素を入れると、別のアプローチができます。



図15. 鞭の音を鳴らす

これは深センの公園での鞭のパフォーマンスです。元々は動画で撮影したもので、振り回すたびに破裂音が聞こえます。この破裂音は空中で発生していて、これは鞭先端のベーンが音速を超えたときに出る衝撃波です。手元の手首の速度は100km/sを出すのも難しいのに、なぜ先端は音速を超えることができるのでしょうか。

力学的には、鞭は無限の関節を持つ振り子として考えることができます。複数の関節を持つ振り子で最も簡単なものは二重振り子です。単純な二重振り子でも、挙動は予測が困難で先端はカオス的な動きをし、速度がゼロに近づくときもあれば著しく速度が高まるときもあります。



図16. 二重振り子のカオス軌道

このような力学は手元の少しの動きを先端で増幅することができます。例えば、軌道ステーションからテザーを鞭のように使って先端を軌道速度まで達することは可能でしょうか?

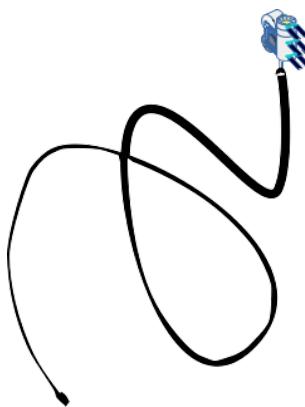


図17. 軌道鞭

上記の例はあくまで一例ですが、今までの検討と考え方の異なるものとして思考を進めてみましょう。このようなやりかたはテザー自体の形状を変化させながら運動量をやりとりする方法なので、新たに *Dynamic momentum exchange tether shape* と名付けることとします。

軌道ワインチ

まず、最初のモデルとしてLEO軌道からワインチのようにテザーを垂らして地表高度から曳くことを考えてみます。

LEOは100kmから2000km程度ですが、100km～200km程度の超低高度の衛星軌道からなら地表にテザーを下ろせば破断長を超えずに地表に届くでしょうか？

では仮に鋼鉄ワイヤで検討してみましょう。鋼鉄の破断長は60kmなので60kmより下ろせば切れてしまうかな！しかしながら鋼鉄ワイヤも衛星軌道と同様に軌道速度を得ているので、静止軌道からまっすぐ下ろすのとは違って重力は働くかず、100km～200kmの長さを展開することができます。

しかしながらこれだと極超音速スカイフックと変わらないですね。軌道が低い分、ランデブー相対速度が大きくなってしまいます。それを解消するために非同期軌道スカイフックではテザーを自転させていましたね。しかしながら軌道ウインチではテザーを自転させずに考えてみます。

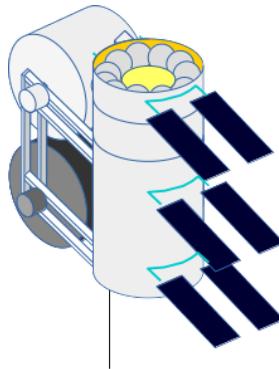


図18. 軌道上のステーション

このような施設を軌道上に考えてみます。

白いドラムが直径50mで、1000kmのテザーが巻き付けられているとします。

この軌道上のステーションから、テザーを図のように地表に垂らしてみます。テザー先端は大気に吹き流されます。

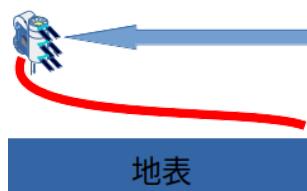


図19. 垂らしたテザー

テザーは大気により減速し、図に示した時点ではテザー先端は地表に対して亜音速の0.3km/sにまでなっているとします。

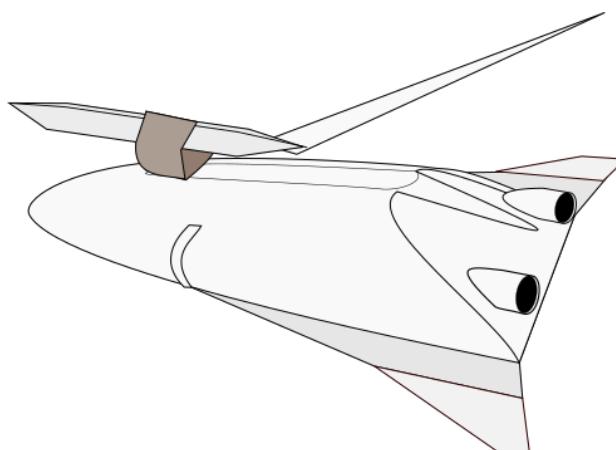


図20. 往還シャトル

このようなテザーを掴めるキャプチャーを装着した航空機型のシャトルを考えます。

航空機のドッキングは、先に論じたように超音速だと技術的に困難が発生しそうですので亜音速で考えましょう。シャトルのドッキング時の速度は 0.3km/s (1080km/h) でマッハ 0.9 ぐらい。地球自転の速度も併せて、 0.76km/s となります。

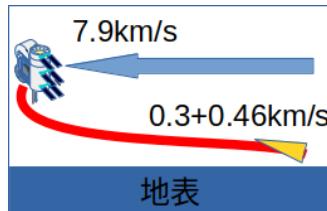


図21. ドッキング

さて、ドッキングした後はそのまま引っ張り上げれば・・・

この案をまとめると、以下のようになります。

- ・ 高度 400km 程度の軌道上の母艦
- ・ テザーを地上に向けて降ろす
- ・ テザー先端の軌道が地上に接する
- ・ 宇宙往還機がドッキング
- ・ テザーで引っ張り上げる

しかし、そんなにうまくはいかないですね。いろいろ問題があります。しかしながら、丹念に検討してみると問題が解決できそうです。計算していきましょう。

問題点1. 垂らしたテザーは破断するんじゃないの?

軌道が 400km ですから、そこから直線に垂らすだけで 400km を超えててしまいます。しかしそのままだと全体が軌道速度で動いていれば張力はかかりません。

しかしながら先端の速度を落としてしまうのでした。ほとんど対地速度ゼロに近いところまで落としてしまいます。そうすると重力がかかってしまいます。

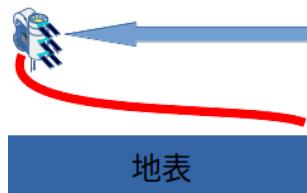


図22. 先端は置いていく

この形状だと、だらーんと吹き流されている感じで、この形が静的な形であればテザーが破断するか地上に落ちるかしてしまいます。これについて、形が変化する動的なもので考え直してみましょう。

いくつかの段階に分けて考えてみます。

1. キャッチするまで。
2. キャッチして、テザーの運動量を用いてシャトルに運動量を与える区間

3. テザーを巻き上げてシャトルに運動量を与える区間

ここでは、1.キャッチするまでに宇宙空間に約1000kmのテザーを展開し、破断しないかを考えます。

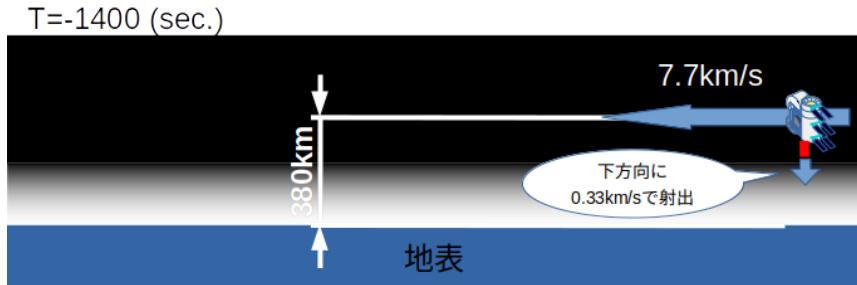


図23. カウントダウン1400秒前

まず、テザーを地球に 0.33 km/s で射出します。正確に鉛直下方向ではなく、ちょっと後方にシフトさせて射出するとその後の制御がうまくいく値となります。



図24. 800秒前

テザーは下方向に射出すると位置エネルギーが軌道速度に変換され、母船よりも先行するようになります。



図25. 200秒前

射出から1200秒後、テザー先端は母船よりも 0.4 km/s 程度早い速度で先行します。

このような動きであれば、軌道速度で地球重力による荷重を受けることなく展開できます。軌道計算をしてみると、1400秒で 660 km 程度先行し、その分は支える必要はありません。

問題点2. テザーを掴めるの?

さきほどの状態では、テザー先端が 8.1 km/s にもなるのでしたね。地上から発進したシャトルは亜音速を想定します。速度を合わせるにはどうしたらいいでしょうか?

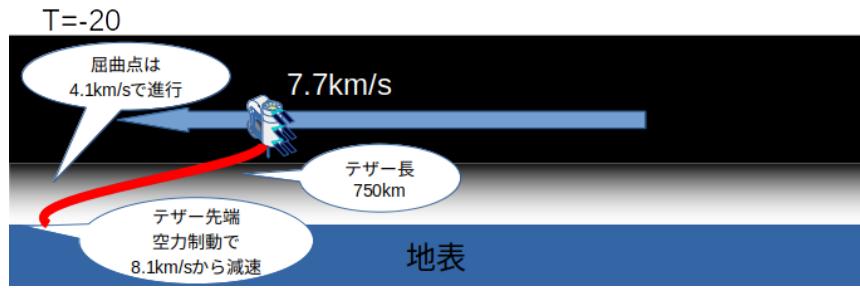


図26. 20秒前

ドッキング20秒前、テザー先端は大気上層に到達し、空力制動で減速し、屈曲点ができます。



図27.

減速したテザー先端をキャップチャで掴みます。

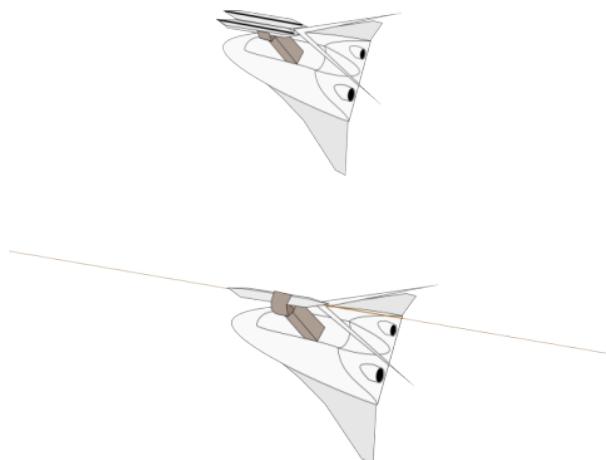


図28. ドッキング

想定図では、実績のあるフルトン回収システムのようなガイドを使っています。相対速度をほとんど0として、掴んだあとクライムやブレーキなどは行ないのでシンプルにでき、実現可能性は高まります。

問題点3 キャッチ後どうやって加速するの?

シャトルはテザーを掴んでいるだけです。ここから、どうやって軌道速度まで加速するのでしょうか?

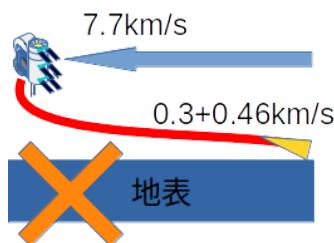


図29. こうなる前に

先ほどの、テザーが先行した状態から2~300秒経過するとこんな感じで軌道ステーションに追い越されます。ここから引っ張っていけば・・・しかしそのやりかたを実現するテザーをテンションを保ちながらどんどん展開していかないといけません。想定はテザーは1000kmであるので、すぐに長さのリミットに至ってしまいます。もっと長いテザーを用意すればうまくいくかも知れませんが今回は別の方法で考えます。

先程はこのような状態でドッキングしました。

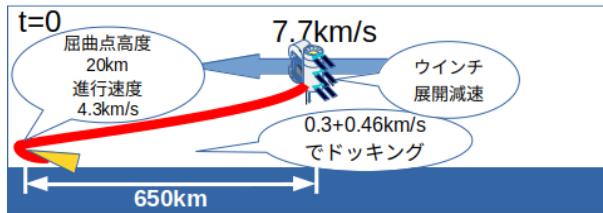


図30. 0秒後

テザーの最も先行している場所は、減速されたテザーの折り返し点です。その屈曲カーブで推進力が発生します。正確ではないのですが、この先端部、あるいは屈曲カーブを屈曲点と呼ぶことにします。テザー屈曲点の進行速度が 4.3km/s でテザー単位長さあたりの質量が、 180g/m であるとき 2000kN 以上の推進力が屈曲点から得られます。この推進力に引っ張られてシャトルは加速していきます。

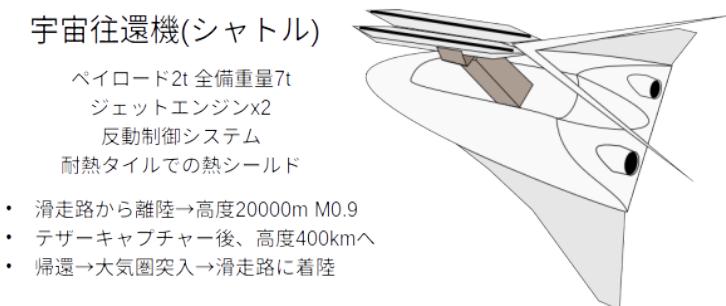


図31. シャトル概要

シャトルの質量は 7t で想定しました。これを $3G$ 加速するには 206kN が必要です。シャトルを 7.14km/s まで加速させ、更に 180km 分の位置エネルギー一分を加味すると 7.96km/s 分加速しないといけないので、これを $3G$ 加速で貯うには 270秒 程度が必要なことになります。

問題点4 屈曲点で生み出される推力が大きすぎない?

さて、 $3G$ 加速しか必要が無いのに 2000kN は過大すぎます。シャトルに必要なばかりか、テザーも破断してしまいます。

過大な推進力をオミットするために屈曲点の半径を時間と共に増大させることで、余分な推進力をオミットできます。

必要な推力だけ取り出すには、屈曲点の半径を時間とともに増大させることで、推力を小さくすることができます。

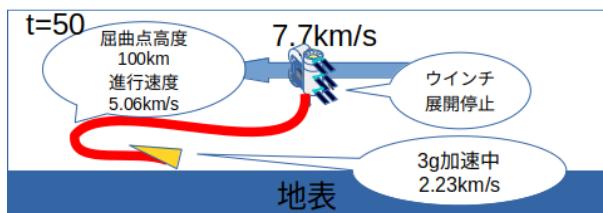


図32. 50秒後

問題点5 屈曲点半径を増大するにはどのようにするの?

最初は小さな屈曲カーブでも、遠心力のために半径が増大する作用が働きます。なのでこの働きを使えば初期の半径増大は補えそうです。

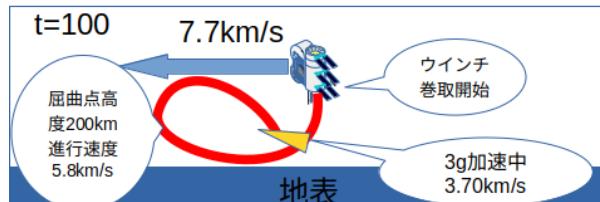


図33. A100秒後

問題点6 加速中、破断しない?

シャトルに運動量を与えて加速するときに、テザーには最大の張力がかかります。鋼鉄ワイヤだと破断長が足りず、テザー素材を破断長 399km の「炭素繊維東レ T1100G」で考えます。

しかしながらテザー先端部はシャトルといっしょに3G加速するので、その部分の破断長は133kmとなってしまいます。シャトルの 7t の質量がかかる考えに加え計算すると、3G 加速を行うテザー領域は94kmまでである必要があります。

しかしながら屈曲点よりも先端はどんどん長さが増大していきます。それも含めて3G 加速を行わないといけません。更に屈曲点から引き出す推力も、長さが増大するに従い増やさないといけません。

これに対処するにはテザーをある程度からテーパーをつけることで、屈曲点の半径や強度を補うようにします。

「炭素繊維東レ T1100G」製のテザーで末端を断面積1平方cm とします。テーパーなしの場合、1000km の長さでテザー質量は179トンになりますが、テーパーをつけるためテザーの全体質量は 1000 トン程度まで増やす必要があります。



図34. 150秒後

問題点7 テザーが振動を起こすんじゃないの?

簡単に振動が発生します。特に、根元が太く先端が細いテーパー構造だと、根元の波は先端に行くに従い増大します。



図35. 200秒後

これを防ぐために、振動が伝搬する前に高速で巻取りを行って振動の増大を抑制する必要があります。

問題点8 最後はどうなるの?

必要な加速の90%以上をテザー形状推進を行い、それ終わったら、ワインチの直接制動でゆるやかな加速を行います。時間をかけてランデブー、ドッキングまで進みます。相対速度のブレーキはシャトルの反動制御システムで行う必要があります。

また、ドッキングが必要ない場合は必要な運動量が得られたらテザーを切り離し、独自の軌道に進みます。



図36. 250秒後

問題点9 失われた軌道ステーションの運動量はどう補完するの?

シャトルのペイロードの一部を推進剤の補給に使います。

表5. プロペラント加速方法その3であるように、化学ロケットを使わずに比推力の大きなものが使えます。3価リチウムプラズマを15kV 加速するのがおすすめで、比推力113000、効率20%としても250kg程度のリチウムを補充することで対応できます。

先に記した「第一宇宙速度に加速するには?」の計算を元に、液体酸素-液体水素ロケットでペイロードの通常10倍以上の燃料を使いますので良い条件だとしても70トンの燃料が必要なことを考えると格段に効率がいいですね!

問題点10 総質量が重いね! これだったら他の手法がいいんじゃない?

「演習編」で計算したものは樹脂含浸CNT集合線を使い、破断長680で計算しました。軌道ワインチの試算では破断長399の炭素繊維で計算しています。条件をあわせたら他の手法と比べてかなり有利であり、恐らくこの程度の破断長が使える手法はかなり限られると考えます。

WINTLETT 概要

上記のようにしてまとめたものを紹介します。

軌道ワインチWINTLETT

既存の技術で
実現できる
軌道エレベータ代替の宇宙開発

図37. WINTLETT:WINch To LEO by Twenty century Technologies

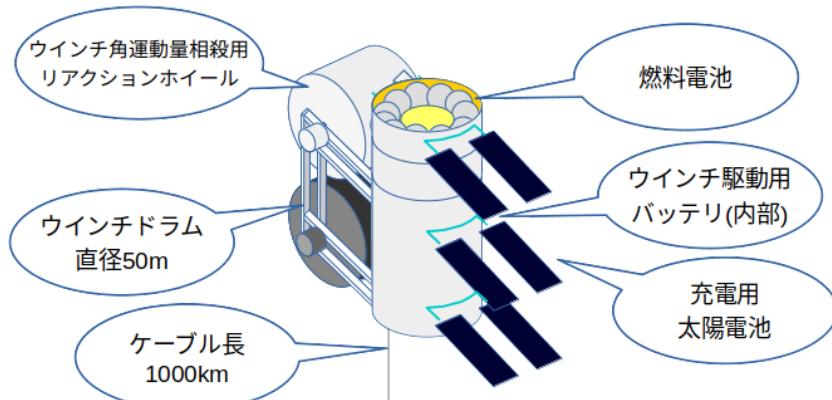


図38. 軌道ワインチステーション

- ・質量 2000トン
- ・全長 130m x 130m x 100m (太陽電池パネル除)
- ・テザー(ケーブル) 炭素繊維ケーブル 末端断面積 $1cm^2$ テザー質量1000トン
- ・軌道補償エンジン リチウムイオンエンジン



図39. 大きさ比較



図40. 高度380km軌道

軌道上のステーションからテザーを撃ち下ろします。

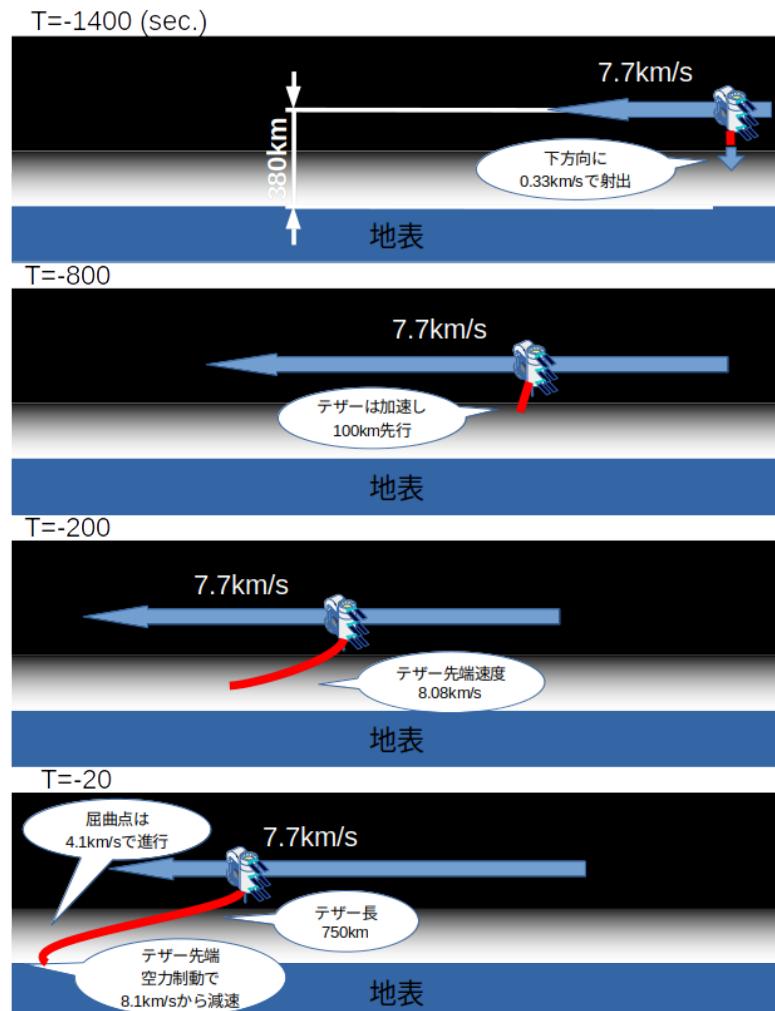


図41. ドッキング前テザーモード

テザーは地上に近づくにつれて先行します。

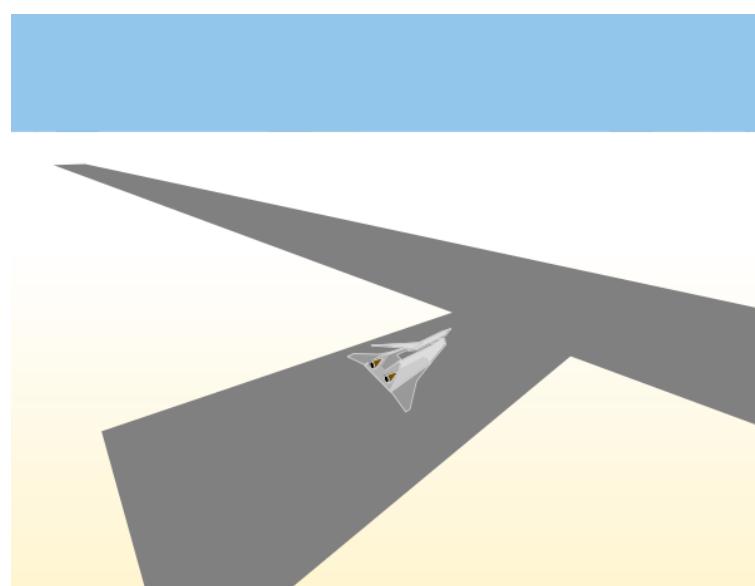


図42. 滑走路から離陸

地上の飛行場からシャトルが離陸します。

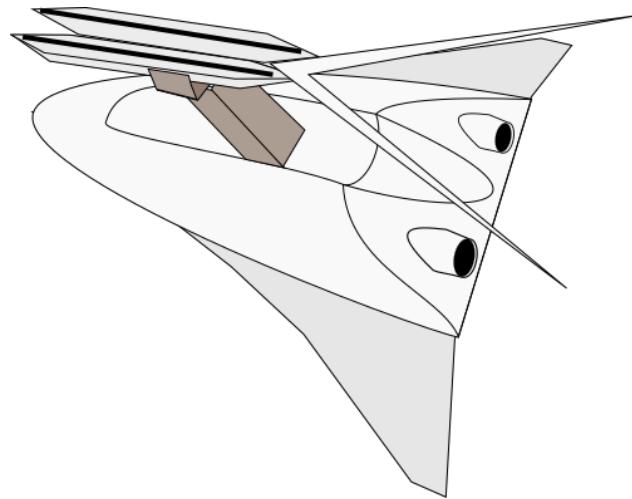


図43. 軌道ウインチシャトル

- ・全備重量 7トン(ドッキング時)
- ・離陸重量 8トン
- ・最大積載量 2トン
- ・ターボジェットエンジンx2
- ・反動制御システム
- ・耐熱タイルでの熱シールド

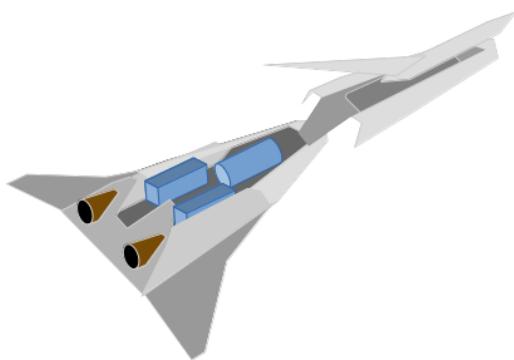


図44. ペイロード搭載方法

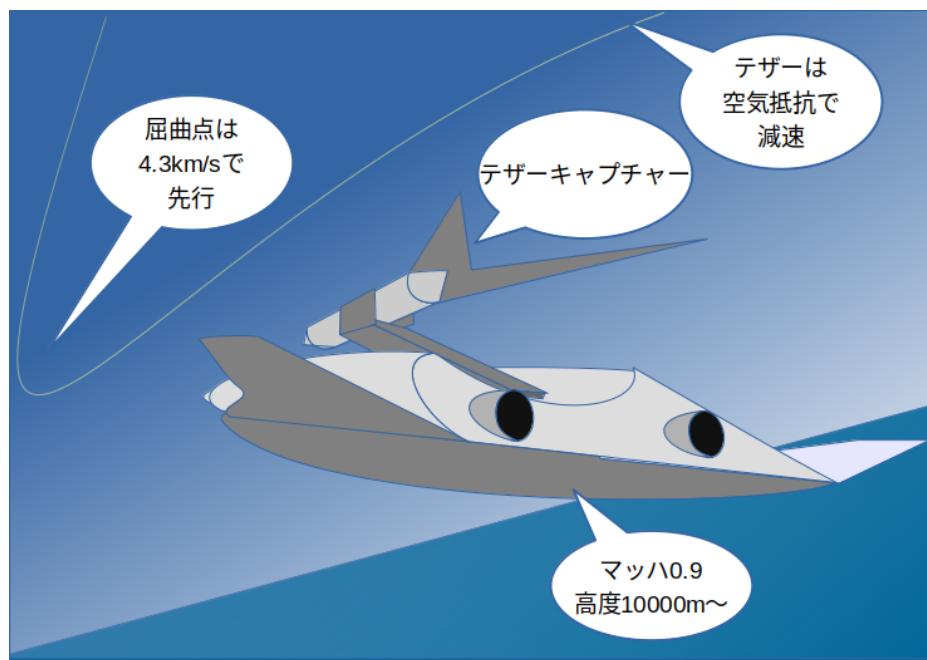


図45. テザーへの大気圏でのアプローチ

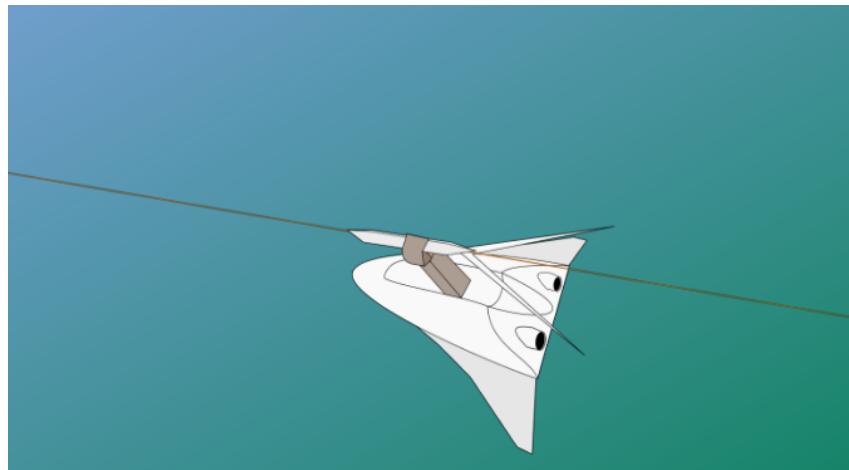


図46. テザーをキャプチャ

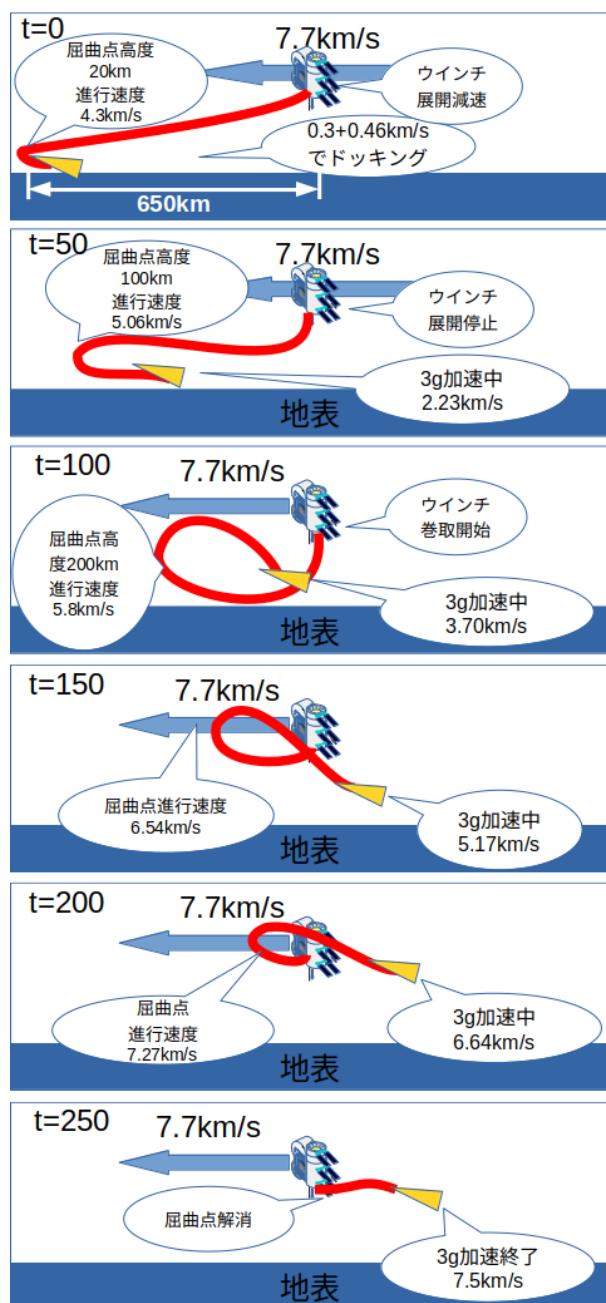


図47. テザーによる機動

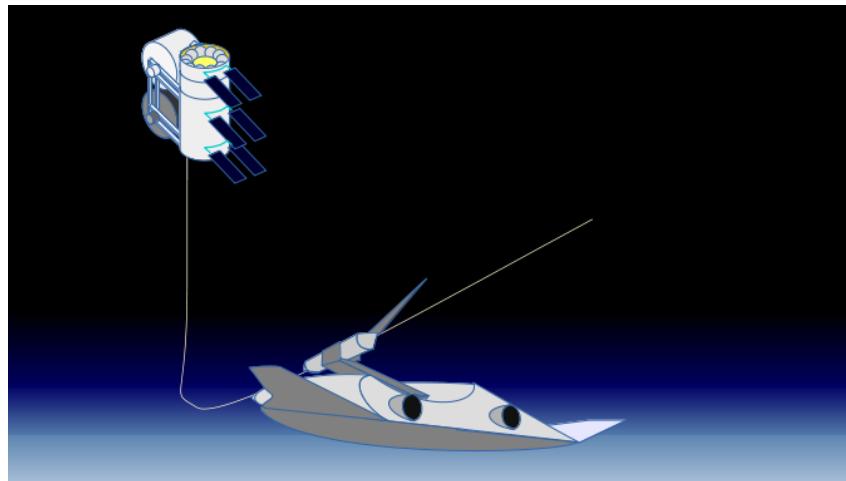


図48. 宇宙へ到達

発展

発展1

キャプチャーはテザーを固定しますが、固定せずに制動力で運動量を取り戻す方法だともっと自由度が高まります。数km/sの相対速度でのブレーキは、接触せずに電磁力でブレーキをかける方法があります。

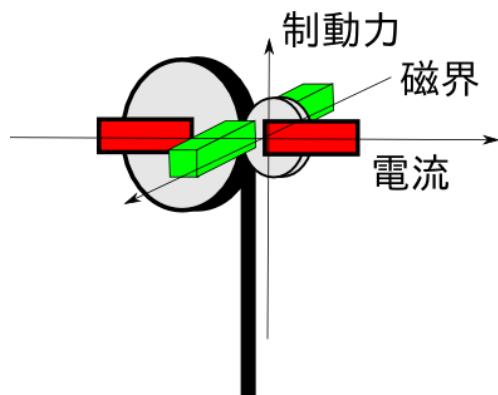


図49. ローレンツ力

しかしながらこのやりかたはテザーが導電性でなければなりません。膨大な電力を要し、効率は著しく悪いです。残念ながら今の所実用にはなりそうになさそうです。

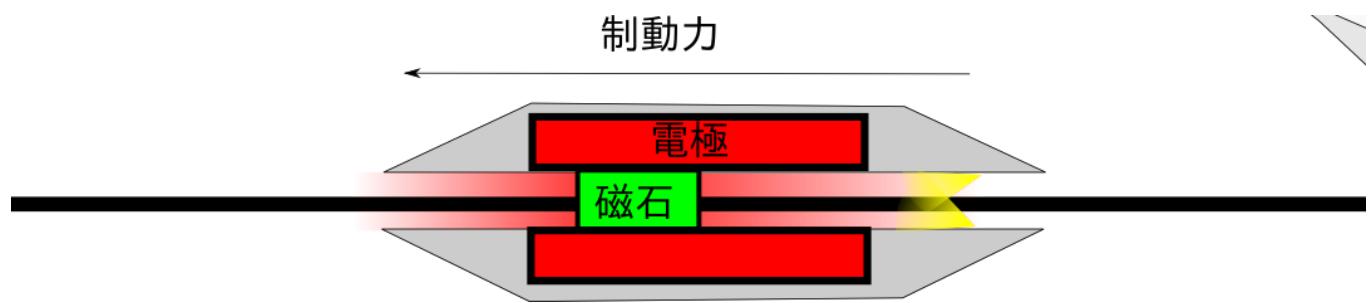


図50. プラズマ雰囲気で非接触ブレーキ

発展2

ブレーキではなく、クライマーを使って数m/s～数百m/s程度の制御ができるようになれば、自由度は高まります。とはいっても、衛星速度までの加速に使用するのではなく振動などに対する微調整ということになります。

発展3

シャトルのペイロードが2tで小さいですね。この対応は、カーゴを切り離し式にして、宇宙シャトルではなく成層圏シャトルとすることで、ペイロードが増大できます。

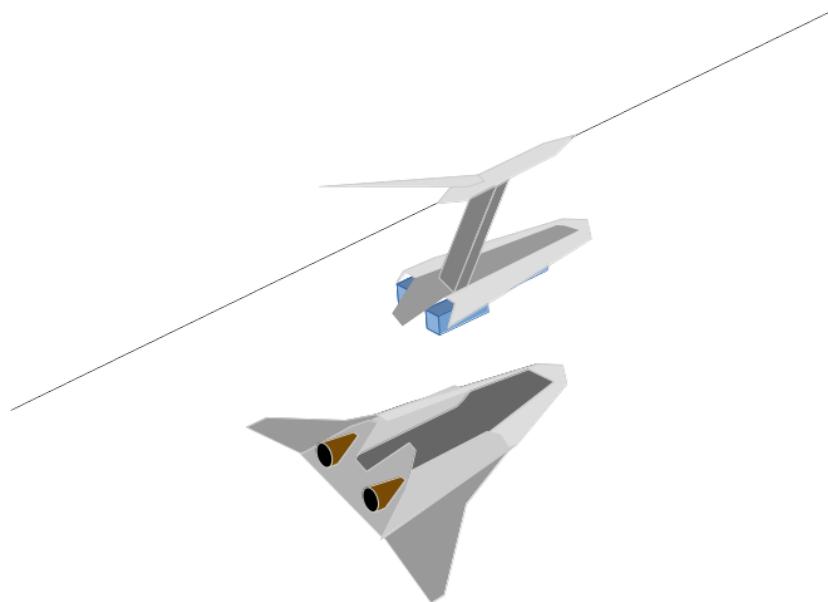


図51. 分離型シャトル

また、シャトルの最適化によるペイロード比率の拡大や、テザーダイナミックスの見直しでのシャトルの大型化の余地も多々あります。

発展4

ステーションにドッキングするのではなく、なげあげることもできます。



図52. より高い軌道へ

発展5

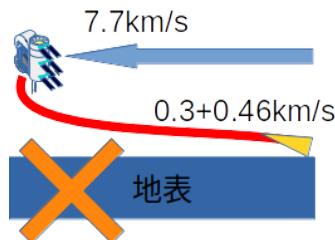


図53. 問題点3を再掲

先ほどの、テザーが先行した状態から2~300秒経過するとこんな感じで軌道ステーションに追い越されると説明しました。ここから引っ張るやりかたは、今回は除外して考えました。しかしながらこのやりかたが可能であれば、かなりシンプルな運動になります。可能性は次回以降探ってみます。

発展6

Dynamic momentum exchange tether shape 手法を最初に論じたときに、鞭の機動について以下のように言及しました。

軌道ステーションからテザーを鞭のように使って先端を軌道速度まで達することは可能でしょうか?

これについては、テーパーを持つテザーに置いて顕著にこの作用を起こすことができます。



図54. ソリトンをコントロール

テザー先端を軌道速度を相殺する速度にし、地上のものをピックアップおよび加速することができるようになるかも知れません。

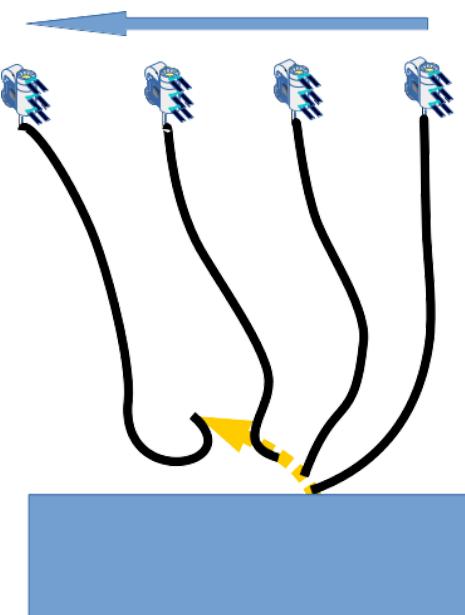


図55. 地上からピックアップ

資料篇

基本的な数値

重力加速度

$$9.81 \text{m/s}^2$$

地球の赤道半径



図56. "The Blue Marble"

$$6380 \text{km} = 6.38 \times 10^6 \text{m}$$

地球の軌道半径

$$1.50 \times 10^{11} \text{m}$$

平均軌道速度

$$29.8 \text{km/s}$$

1年

8760時間

光の速度

$$3.00 \times 10^8 \text{m/s}$$

万有引力定数

$$6.67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$$

地球の質量

$$5.97 \times 10^{24} kg$$

太陽の質量

$$1.99 \times 10^{30} kg$$

静止軌道高度

(地球の中心から)

$$4.22 \times 10^7 km$$

音速

$$340.5 m/s (15^\circ C)$$

太陽定数

$$1.37 \times 10^3 W/m^2$$

基本的な数式

速度・移動距離・加速度

$$v = 2as$$

角速度・半径・加速度

$$a = r\omega^2$$

ツォルコフスキイの公式

$$\Delta V = w \ln \frac{m_0}{m_T}$$

基本的な比較表

方法	上限	上限値の由来	比推力
圧縮空気	340m/s	標準状態の空気の音速	35
化学燃焼1	786m/s	炭素-酸素の燃焼温度のCO ₂ 分子速度	80
化学燃焼2	1230m/s	水素-酸素の燃焼温度のH ₂ O分子速度	126
化学燃焼3	3700m/s	水素-酸素の燃焼温度のH ₂ 分子速度	378
ばねなどの機械的加速	6000m/s	鋼鉄の縦波速度	612

表13. プロペラント加速方法その1+比推力

物質	引っ張り強度(MPa)	密度(g/cm ³)	比強度(kN·m/kg)	破断長(km)
コンクリート	10	2.30	4.35	0.44
ステンレス鋼304	505	8.00	63.1	6.4
オーク材	60	0.69	86.95	8.86
アルミニウム合金	600	2.70	222	22.65
Scifer steel wire	5500	7.87	698	71.2
ガラス繊維	3400	2.60	1307	133
ケブラー	3620	1.44	2514	256
炭素繊維東レ T1100G	7000	1.79	3911	399
カーボンナノチューブ（不確実）	62000	0.037–1.34	46268–N/A	4716–N/A
樹脂含浸CNT集合線	10000	1.5	6670	680

表14. 引張強度表

コミックマーケット103版あとがき

あとがき

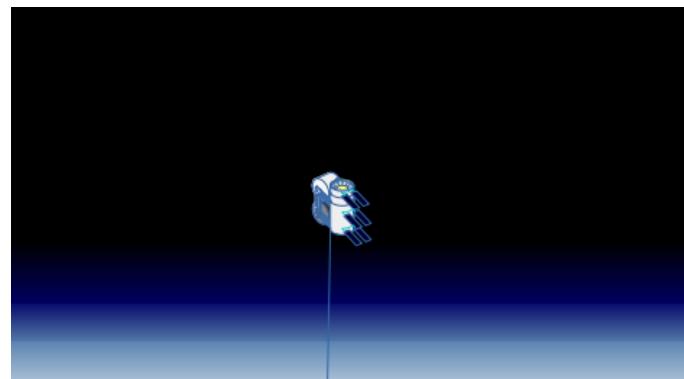
今回、8月に作成した原稿からわかりにくいところを加筆訂正を行いました。また、演習編の解答を作成しました。解答は以下 Wiki に掲載しています。

<https://github.com/nanbuwks/orbitcalc-book/wiki>

この小冊子の印刷版は販売していますが、markdown 原稿や pdf などは上記と同じ github のレポジトリで公開しています。質問やご意見なども github をぜひご活用ください！

俺たちのたたかいはこれからだ！

2023.12.31 04:00 Best my love を聞きながら



宇宙への架け橋	Ver.20231231
2023年12月31日 初版	
著者 秘密結社オープンフォース	