

Appunti del corso di Subatomia

Laurea in Fisica - Università di Ferrara

Scritto e impaginato in L^AT_EX da **Dario Chinelli** e **Umberto Zarantonello** nel 2021

aggiornato al 21 aprile 2021

Contents

1	Sezione d'urto	iii
1.1	Esperimento di Rutherford	iii
1.2	Sezione d'Urto Quantistica (Regola d'Oro di Fermi)	vi
1.3	Derivazione con l'Elettrodinamica Quantistica	viii
1.4	Concetto di Sezione D'urto	ix
2	Il Nucleo	xi
3	Esercizi	xii
3.1	Settimana 1	xii
4	Potenziale nucleare	xv
5	Convenzioni LaTeX	xix

1 Sezione d'urto

Elemento X ha un numero di massa A che corrisponde alla somma di *neutroni* e *protoni* nel nucleo ed un numero atomico Z che è il numero di *protoni* nel nucleo, per cui si scrive:

A_ZX

in un atomo neutro il numero atomico corrisponde anche al numero di *elettroni*.

1.1 Esperimento di Rutherford

Quando Rutherford iniziò i suoi studi l'idea di nucleo era quella di una sfera di carica positiva con all'interno degli elettroni negativi (modello a panettone). Si sapeva sapeva inoltre che i nuclei emettono particelle ed erano conosciute le emissioni α, γ, β . L'intuizione di Rutherford fu di utilizzare il decadimento dei nuclei α ed adottando un approccio statistico per ovviare al problema di non conoscere la posizione esatta delle particelle.

Nell'esperimento, Rutherford, utilizza un nucleo di **Radio** (Ra) con numero di massa $A = 226$ e numero atomico $Z = 88$, ovvero ${}^{226}_{88}\text{Ra}$. Il *decadimento* che avviene è il seguente



nella reazione si conserva il numero di massa totale $226 = 222 + 4$ e si conserva la carica totale $88 = 86 + 2$; Q è il calore emesso dalla reazione esotermica/spontanea, equivalente all'energia data dalla differenza di massa iniziale e finale. L'energia cinetica rilasciata nel decadimento che viene trasferita alla particella α è pari a $T = 4.76 \text{ MeV}$. Un fascio collimato di particelle α viene indirizzato contro un *target* (lastra sottile di oro). Il fascio uscente veniva rivelato da uno schermo di ZnS, mobile su tutto l'angolo solido. Il fatto sorprendente e inaspettato era che una piccolissima porzione di particelle veniva deflessa ad angoli impossibili per il modello a panettone (si rilevano particelle pure a 180° ovvero fenomeni di back scattering), in quanto l'energia di repulsione non sarebbe stata sufficiente. Essenziale fu l'intuizione di Rutherford che non prese tale dato come errore ma capì che si trattava di particelle reali. La sezione d'urto di Rutherford fu calcolata

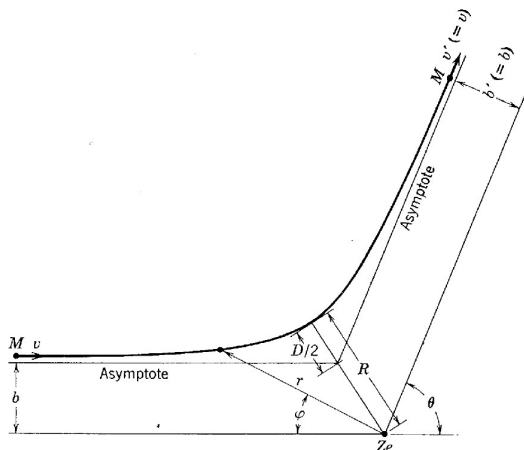


Figure 1: Traiettoria iperbolica della particella in interazione con un nucleo

inizialmente sfruttando semplicemente la meccanica classica. In figura viene mostrato lo scattering di una particella α di massa M e carica $+ze$, passante vicino ad un nucleo di carica $+Ze$. Il nucleo

è fissato al centro del sistema di coordinate. Prima e dopo la collisione la particella avrà una traiettoria rettilinea (prima con velocità v poi con velocità v') in quanto la forza coulombiana è trascurabile dopo una certa distanza. Per determinare la posizione della particella si sfruttano le coordinate polari $r(t), \varphi$. La distanza tra la traiettoria della particella e la linea parallela passante per il nucleo (asse orizzontale del sistema) è definita come il *parametro d'impatto* b . L'angolo di scattering θ è dato dall'intersezione dell'asse orizzontale con la parallela alla traiettoria finale passante per il nucleo.

Siccome il nucleo viene considerato fisso, l'energia cinetica finale della particella deve essere identica a quella iniziale. Velocità e parametro d'impatto sono costanti prima e dopo l'impatto a causa della conservazione dell'energia cinetica e del momento angolare.

$$Mvb = Mv'b' = L \quad \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mv'^2 \quad (2)$$

(si ha la conservazione del momento angolare perché in presenza di una forza centrale; $dL/dt = \bar{r} \times \bar{F}(r) = 0$; raggio e forza sono sempre paralleli).

Sfruttando nuovamente il momento angolare si cerca ora di ottenere il differenziale del tempo

$$|L| = |\bar{r} \times m\bar{v}| = mvb = mv_{\perp}r = m\omega r^2 = m \frac{d\varphi}{dt} r^2 \quad (3)$$

dove $v_{\perp} = \omega r$ e $\omega = d\varphi/dt$. Si ottiene quindi

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{vb}{r^2} \rightarrow dt = d\varphi \frac{r^2}{vb} \quad (4)$$

Si passa ora ad introdurre l'interazione elettromagnetica. Verrà qui sfruttato il teorema dell'impulso

$$\Delta p = \int F_n dt \quad F_n = F \cos \varphi \quad (5)$$

dove F è la forza coulombiana

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{r^2} \quad (6)$$

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{r^2} \cos \varphi dt$$

Possiamo quindi sostituire la formula per dt trovata sopra all'interno dell'integrale appena ricavato prestando ovviamente attenzione agli estremi d'integrazione

$$\begin{aligned} t \rightarrow -\infty & \quad \varphi \rightarrow -\frac{1}{2}(\pi - \theta) \\ t \rightarrow +\infty & \quad \varphi \rightarrow +\frac{1}{2}(\pi - \theta) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Delta p = \int_{-\frac{1}{2}(\pi - \theta)}^{+\frac{1}{2}(\pi - \theta)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{vb} \cos \varphi d\varphi \quad (8)$$

Rinominando tutte le costanti dell'integrale come A si ottiene

$$\Delta p = A[\sin \varphi]_{-\frac{1}{2}(\pi - \theta)}^{+\frac{1}{2}(\pi - \theta)} = A \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} \right) \right] = 2A \cos \frac{\theta}{2} \quad (9)$$

A questo punto è necessario ricavare la variazione della quantità di moto proiettata sulla normale

$$p_f - p_i = 2mv \sin \frac{\theta}{2} \quad (10)$$

abbiamo ottenuto così che

$$\begin{aligned} 2mv \sin \frac{\theta}{2} &= 2A \cos \frac{\theta}{2} \rightarrow 2mv \sin \frac{\theta}{2} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 vb} \cos \frac{\theta}{2} \\ \tan \frac{\theta}{2} &= \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2} \frac{1}{b} \rightarrow \tan \frac{\theta}{2} = K \frac{1}{b} \end{aligned} \quad (11)$$

Da quest'ultima formula si può vedere che se $b \rightarrow 0$ ovvero nel caso di un urto frontale si otterrà come angolo $\theta = \pi$ e quindi la particella sarà rispedita alla sorgente.

Si procede ora a ricavare la sezione d'urto differenziale, ovvero la proporzione differenziale tra le particelle incidenti e quelle scatterate per un certo angolo solido e parametro d'impatto. L'area

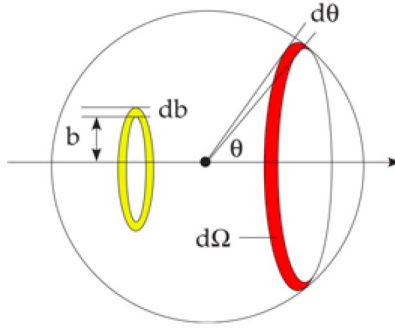


Figure 2: Schematizzazione della sezione d'urto differenziale in base al parametro d'impatto e all'angolo solido.

delle particelle incidenti è data dalla formula $d\sigma = 2\pi b|db|$. Le particelle definite in quest'area saranno diffuse all'angolo $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$. Facendo il rapporto tra le due aree si ottiene la sezione d'urto differenziale dal punto di vista cinematico

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\theta) db}{\sin \theta d\theta} \quad (12)$$

Si può a questo punto unire le formule ricavando b rispetto a θ

$$\frac{db}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left| \frac{k}{\tan \frac{\theta}{2}} \right| = \frac{K}{\tan^2 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{2} \frac{K^2}{\tan^3 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{K^2}{4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1}{16} \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 T} \right) \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \end{aligned} \quad (14)$$

Introduciamo quindi un po' di costanti che aiutano a semplificare questa formula e spesso usate in fisica subatomica

$$\alpha = \frac{b^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137} \quad \hbar c = 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm} \quad (15)$$

dove α si definisce come costante di struttura fine. La formula con queste costanti diventa

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{z^2 Z^2}{16} \alpha^2 \left(\frac{\hbar c}{T(MeV)} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (16)$$

La cosa straordinaria di questa sezione d'urto sta nel fatto che, per delle coincidenze sotto un certo punto di vista fortuite, è uguale a quella calcolata con la meccanica quantistica. Questo succede perché nell'interazione di particelle alfa con il nucleo gli spin sono ininfluenti.

Commenti alla sezione d'urto:

- La sezione d'urto diminuisce all'aumentare dell'energia cinetica (inversamente proporzionale a T^2).
- Decresce rapidamente all'aumentare di θ .
- È proporzionale al quadrato delle cariche.

1.2 Sezione d'Urto Quantistica (Regola d'Oro di Fermi)

In meccanica quantistica quello che si introduce è che la probabilità d'interazione viene espressa dalla regola d'oro di Fermi

$$P = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{f,i}|^2 \rho(E_f) \quad (17)$$

I contributi che compongono questa probabilità d'interazione sono:

- $H_{f,i}$ è l'elemento dell'Hamiltoniana della perturbazione, ovvero la probabilità che la sezione d'onda iniziale passi alla sezione d'onda finale.

$$H_{f,i} = \langle f | H | i \rangle = \int \psi_f^*(r) H(\bar{r}) \psi_i d^3r \quad (18)$$

(La probabilità di passaggio di uno stato iniziale ad uno stato finale si valuta effettuando questo integrale tra lo stato iniziale e quello finale della Hamiltoniana di perturbazione). Le funzioni d'onda sono quelle che descrivono le nostre particelle α

$$H(r) = V(r) = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (19)$$

Quali sono quindi gli stati (funzioni d'onda) che descrivono gli alfa? Ad una certa distanza iniziale saranno onde piane

$$\psi_i \sim e^{ikr} \quad \bar{p} = \hbar \bar{k} \quad \bar{k} = \frac{\bar{p}}{\hbar} \quad (20)$$

Dopo l'interazione, ovvero quando le particelle non subiranno più il potenziale coulombiano, si avrà che la funzione sarà nuovamente un'onda piana ma con vettore d'onda variato (legato ovviamente alla quantità di moto)

$$\psi_i \sim e^{ik'r} \quad \bar{p}' = \hbar \bar{k}' \quad \bar{k}' = \frac{\bar{p}'}{\hbar} \quad (21)$$

Tornando alla regola d'oro di fermi, ciò mi dice che la probabilità d'interazione dipende dalla probabilità che il mio potenziale faccia passare le mie particelle da una certa quantità di moto ad un'altra.

- L'altro contributo si ha dalla densità degli stati finali $\rho(E_f)$, ovvero il numero di stati finali accessibili al sistema, maggiore è il tipo di capienza nello spazio delle fasi maggiore è la probabilità. Per ora trascureremo questo contributo per trattarlo più avanti.

Studiamo quindi la variabilità della probabilità in base alle funzioni d'onda. Si ha

$$H_{f,i} \simeq \int e^{-ik'r} V(r) e^{+ikr} = \int V(r) e^{-i(k'-k)r} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \hbar \bar{k} \\ \bar{p} &= \hbar k' \\ \Delta p &= \bar{p}' - \bar{p} = \hbar(k' - k) \\ H_{f,i} &= \int V(r) e^{-i\frac{\bar{q}}{\hbar}r} d^3r \\ &= \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r} e^{-i\frac{\bar{q}}{\hbar}r} \end{aligned} \quad (23)$$

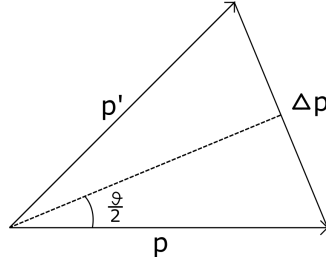
Come si può vedere questa formula corrisponde ad una trasformata di Fourier, ciò che si ottiene alla fine è

$$H_{f,i} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi\hbar^2}{q^2} \quad (24)$$

l'ultima frazione è la parte che si utilizza per calcolare la sezione d'urto differenziale

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto P \simeq |H_{f,i}|^2 \sim \frac{1}{q^4} \quad (25)$$

Si può vedere poi che questa funzione, ricavata quantisticamente esprime la stessa dipendenza ricavata tramite metodo classico.



$$\begin{aligned} \Delta p &= \bar{p}' - \bar{p} = q = 2p \sin \frac{\theta}{2} \\ T &= \frac{1}{2}mv^2 \\ q^2 &= 4m^2v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 8mT \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (26)$$

Nella trattazione classica abbiamo supposto che le particelle non avessero interazioni di spin, abbiamo trascurato inoltre che i nuclei avessero rinculo. Queste sono due assunzioni buone ma che per risultati più precisi vanno considerate. Si consideri ora il raggio nucleare stimato de Rutherford

per la sua trattazione tramite scattering α . Si cerchi la distanza di massimo avvicinamento della particella a nucleo, questa si avrà per un'energia pari a

$$V = K_\alpha \quad \rightarrow \quad K_\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{R_0} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{K_\alpha} \frac{\hbar c}{\hbar c} \\ &\simeq \frac{1}{137} \frac{2 \cdot 79}{4 \cdot 9 \text{ MeV}} \hbar c \\ &= 46 \text{ fm} \end{aligned} \quad (28)$$

Questa è una sovrastima del raggio nucleare in quanto si sa attualmente che il raggio corrisponde ad 8 fermi. Questo errore è dovuto al fatto che non vi è interazione nucleare nello scattering di Rutherford ma semplicemente elettrostatica, il che spiega anche la perfetta corrispondenza dei suoi dati con la trattazione teorica. Supponiamo quindi di riuscire ad aumentare l'energia delle particelle α (quello che accade negli acceleratori). Si supponga poi di utilizzare come target del piombo e di porre un rivelatore a 60° . Si può osservare che l'andamento del numero di particelle scatterate per energie inferiori a 27,5 MeV rispecchia esattamente l'andamento di Rutherford ma poi ha un cambio drastico. Questo accade perché oltre un certo raggio subentra l'interazione per forza forte

$$R = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 K E} = 8.59 \text{ fm} \quad (29)$$

La sovrastima di Rutherford era dovuta al fatto che le particelle da lui usate avevano effettivamente interazione puramente coulombiana.

1.3 Derivazione con l'Elettrodinamica Quantistica

Questa trattazione è possibile in modo semplice grazie ai diagrammi di Feynman che semplificano il tecnicismo della fisica teorica rendendola accessibile ai fisici sperimentali. Secondo i diagrammi di

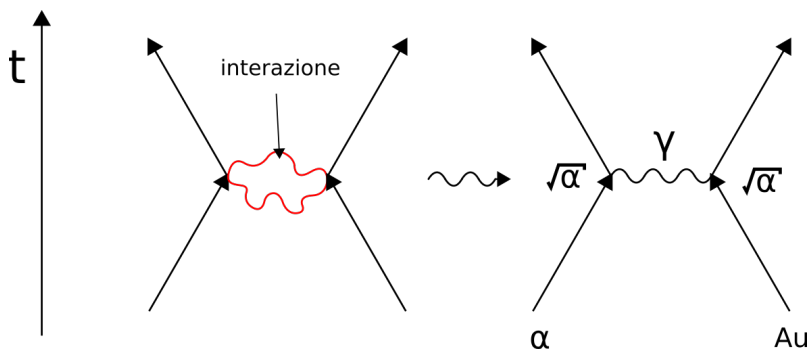


Figure 3: Diagrammi di Feynman

Feynman ogni particella reale è descritta da una linea continua. Una cosa da tenere sempre presente è la direzione in cui si svolge l'azione temporale, in questo caso si svolge verso l'alto ma è solamente una rappresentazione grafica di un'interazione. Nelle teorie quantistiche di capo l'interazione viene descritta tramite lo scambio di una particella. La grande novità che è stata introdotta da queste teorie è che l'interazione non sia descritta tramite un campo ma attraverso lo scambio di particelle virtuali.

Come si ricava quindi la sezione d'urto?

La particella alfa emette un fotone virtuale e questo viene descritto tramite una costante di accoppiamento posta ai vertici (ovvero nel punto d'impatto) denominata $\sqrt{\alpha}$. L'interazione viene rappresentata da quello che si chiama propagatore ovvero la linea interna che congiunge i due vertici.

$$\propto \frac{1}{Q^2 + M^2 C^2} \quad (30)$$

dove Q^2 è il momento trasferito, M è la massa della particella mediatrice (bosone vettore), γ è il fotone. Come si calcola l'ampiezza della transizione?

$$\begin{aligned} |M_{f,i}| &= \sqrt{\alpha} \frac{1}{Q^2} \sqrt{\alpha} = \frac{\alpha}{Q^2} \\ P &\propto |M_{f,i}|^2 = \frac{\alpha^2}{Q^4} \end{aligned} \quad (31)$$

Dove P è la probabilità di transizione della particella, corrispondente alla sezione d'urto.

1.4 Concetto di Sezione D'urto

Supponiamo di avere un fascetto di particelle che interagisce con un bersaglio di spessore d , l'area d'interazione è A . Qual è il numero di interazioni al secondo?

$$\begin{aligned} dN &\propto I = \frac{N_i}{A} t \\ &\propto \rho A d \end{aligned} \quad (32)$$

Si ottiene che

$$\begin{aligned} dN &= \frac{K N_i}{A} t \cdot \rho A d \cdot d\Omega \\ dN &= K N_t N_a d\Omega \end{aligned} \quad (33)$$

$dN[1/s]$ è il numero di particelle al secondo, $N_t = N_i \cdot t[1/s]$ è il numero di particelle incidenti per unità di tempo, $N_a = \rho \cdot d[n^o/m^2]$ è il numero di particelle bersaglio che il fascio colpisce nel cammino. Da un'analisi dimensionale si può vedere che K deve necessariamente avere le dimensioni di un'area, questa costante è ciò che chiamiamo sezione d'urto. La *sezione d'urto* si definisce quindi come la probabilità che un nucleo del bersaglio interagisca quando il fascio incidente è di una particella per unità di area.

Solitamente si fa l'ipotesi di bersaglio sottile, questo perchè vuol dire che la particella non subisce più di una collisione, in modo da poter applicare queste formule in modo diretto. Supponiamo di considerare un bersaglio sottile soggetto ad un flusso di particelle F .

$$F = \left[\frac{\text{number}}{m^2 s} \right] \quad (34)$$

$$\begin{aligned} dP &= \delta n_b dz \\ dF &= -F dP = -F \delta n_b dz \\ \frac{dF}{dz} &= -F \delta n = -\frac{F}{l} \end{aligned} \quad (35)$$

Dove $l = 1/n\delta$ è il libero cammino medio ossia il percorso medio di ogni particella senza che vi siano interazioni. Il flusso invece viene descritto come

$$F(z) = F(0)e^{-z/l} \quad (36)$$

L'unità di misura delle sezioni d'urto è il barn. Questa unità nasce da delle considerazioni fatte nei primi esperimenti di radioattività. Dalle considerazioni sui raggi atomici

$$R = R_0 A^{\frac{1}{3}} \quad R_0 = 1,2 fm \quad (37)$$

Ora, prendendo in considerazione l'uranio ${}^{239}_{92}U$, in particolare l'isotopo 235, si ottiene un raggio pari a

$$R[{}^{235}U] = 1,2 \cdot (235)^{1/3} = 7,4 fm \quad (38)$$

Che resitituisce un'area d'interazione circa

$$\pi R^2({}^{235}U) = 3 \times 54 \sim 150 fm^2 \quad (39)$$

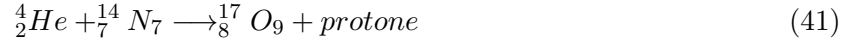
La misura del barn scelta fu quindi di

$$1barn = 100 fm^2 = 100 \times 10^{-30} m^2 = 10^{-28} m^2 \quad (40)$$

Le sezioni d'urto variano ovviamente da particella a particella e, mentre per le particelle subatomiche sono relativamente simili, ne esistono di altri tipi con variazioni molto incidenti. Le sezioni d'urto di collisione del neutrino sono estremamente basse e corrispondono a $10^{-19} mb$ (millibarn). Questo corrisponde a particelle molto elusive che non interagiscono praticamente mai (la loro teorizzazione è legata al decadimento β). Un'altro esempio è rappresentato dalla materia oscura che è stata rivelata solamente tramite considerazioni gravitazionali ma al giorno d'oggi non vi è ancora nessuna evidenza sperimentale di interazione con la materia in laboratorio.

2 Il Nucleo

La seconda particella ad essere rivelata dopo l'elettrone fu il protone. La prima evidenza sperimentale è dovuta a Rutherford nel 1917 sfruttando sempre le particelle alfa, questa volta in collisione con l'aria dove è presente l'azoto N



Al tempo uno dei modelli nucleari era che il nucleo fosse composto da un certo numero A di protoni ed un numero $A - Z$ di elettroni (con Z il numero di elettroni della nuvola elettronica) in modo da bilanciare la carica dei protoni rendendo l'atomo stabile. Analizziamo dunque la possibilità di avere un nucleo di questo tipo. Che potenziale elettroagnetico dovrebbero gestire i protoni?

$$E = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

dove $R = R_0 A^{1/3} = 1.2 \text{ fm} \cdot A^{1/3}$ (formula empirica per il calcolo del raggio nucleare). Calcolando si ottiene quindi

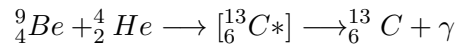
$$E = -1.20 \frac{Z}{A^{1/3} \text{ MeV}}$$

Per esempio, ponendo $A=140$ e $Z=58$ l'energia cinetica che si ottiene è $E = -13.4 \text{ MeV}$ (elettrone con energia relativistica quindi $E = pc$). Un elettrone con tale energia cinetica è possibile che resti confinato all'interno del nucleo?

$$\lambda = \frac{h}{p} = 2\pi \frac{\hbar c}{pc} = \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{13.4 \text{ MeV}} \simeq 90 \text{ fm}$$

L'elettrone non può essere quindi confinato nel nucleo perchè la sua lunghezza d'onda è molto maggiore.

La scoperta del Neutrone fu fatta da Chadwick che fu il primo ad intuire, da un'esperienza che in realtà era già stata fatta da più fisici, la presenza di un'altra particella. La situazione che si verificava era che tramite l'emissione di particelle alfa generate dal polonio, fatte collidere su un target di Berilio, si otteneva una radiazione che riusciva ad attraversare uno schermo spesso di piombo, il che suggeriva il fatto che fosse una radiazione neutra (impossibile per della radiazione carica attraversare uno schermo troppo spesso). Al tempo l'unica radiazione neutra conosciuta era la radiazione elettromagnetica il che fece pensare ad una reazione del tipo



Con uno stato intermedio dato da uno stato eccitato del carbonio 13. Un ulteriore passaggio fu quello di aggiungere dopo lo schermo di Piombo Pb una lastra di paraffina da cui, dopo l'interazione con la radiazione, emergevano protoni con energia pari a $E = 7,5 \text{ MeV}$. La radiazione gamma doveva quindi possedere un'energia in grado di produrre dei protoni di energia $7,5 \text{ MeV}$ tramite scattering Compton il che riconduce ad un'energia minima di 55 MeV . Quando il Berilio assorbiva le particelle alfa quest'ultime si trovavano ad un'energia di 5 MeV , essendo poi una reazione esotermica si aveva che il Q della reazione corrispondeva a $Q = 10 \text{ MeV}$, il che riconduceva ad un'energia massima disponibile di 14 MeV . L'unica spiegazione possibile era che si trattava quindi di una particella nuova, neutra e con la stessa massa del protone.

3 Esercizi

3.1 Settimana 1

Es. 1: Si calcoli la velocità media di:

- Molecole d'aria a temperatura ambiente
- Elettroni atomo idrogeno
- Terra attorno al sole
- Elettroni che escono da un vecchio tubo catodico

Ris.:

- **Molecole d'aria** supponiamo di essere a $20^\circ C$ corrispondenti a $293K$ si sfrutti la teoria cinetica dei gas

$$\frac{3}{2}K_B T = \frac{1}{2}m \langle v^2 \rangle \quad (42)$$

Si approssimi l'aria come azoto N_2 la cui massa molecolare è $M_{N_2} = 28$ si ottiene

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3K_B T}{m_{N_2}}} = \sqrt{\frac{3 \times 1,38 \times 10^{-23} 293}{28 \cdot 1,66 \times 10^{-27} kg}} = 510 \frac{m}{s} \quad (43)$$

- **Elettroni dell'idrogeno** Ricordando la costante di Ridberg ovvero il potenziale di dissociazione dell'idrogeno, questa può essere considerata pari alla sua energia cinetica.

$$E = 13.5 eV = K_e K = 135 \times 10 \cdot 1,6 \times 10^{-19} J = 2,1 \times 10^{-18} J = \frac{1}{2} m_e v^2 \quad (44)$$

conoscendo la massa dell'elettrone corrispondente a $m_e = 9,1 \times 10^{-31} kg$ si ottiene che la velocità dell'elettrone sarà

$$v_e = \sqrt{\frac{2K_e}{m_e}} = 2,1 \times 10^6 \frac{m}{s} \quad (45)$$

Si può notare che questa è una conferma che l'elettrone sia una particella non relativistica.

Si lasciano al lettore gli altri due punti.

Es. 2: Si calcoli il numero di molecole nell'atmosfera.

Ris.: Si parte considerando la massa dell'atmosfera, che si può calcolare partendo dalla pressione atmosferica, corrispondente al dell'aria sopra un metro quadro.

$$p = 10^5 \frac{N}{m^2} \longrightarrow M = 10^4 \frac{kg}{m^2} \quad (46)$$

Si consideri, ora la superficie della terra

$$A_{terra} = 4\pi R^2 = 12(6 \times 10^6 m)^2 = 4 \times 10^{14} m^2 \quad (47)$$

Si può quindi trovare la massa dell'aria

$$M_{aria} = 10^4 \frac{kg}{m^2} 4 \times 10^{14} m^2 = 4 \times 10^{18} kg \quad (48)$$

Per calcolare il numero di molecole di aria, si consideri il peso molecolare di azoto e ossigeno

$$N_2 = 28 \quad O_2 = 32 \quad (49)$$

Il che in media corrisponde ad un peso molecolare di 30. Una mole peserà dunque 30g

$$M_{aria} = \frac{4 \times 10^{18} g}{30 g/mol} = 1,3 \times 10^{20} mol \quad (50)$$

Il numero di molecole d'aria corrisponderà quindi alla massa in moli dell'aria moltiplicata per il numero di Avogadro $N_A = 6 \times 10^{23}$

$$N_{aria} = M_{aria} \times N_A \simeq 10^{41} molecole \quad (51)$$

Se si volesse poi sapere quante molecole di aria dell'ultimo respiro di Carlo Magno sono contenute nei nostri polmoni, si dovrebbe fare il rapporto fra la quantità di aria contenuta nei nostri polmoni e quella contenuta nell'atmosfera.

$$1 mole(STP) = 20L \quad (52)$$

Una mole in condizioni standard corrisponde a 20 litri, la densità dell'aria corrisponderà quindi a

$$30 \frac{g}{mol} : 20 \frac{L}{mol} = 1,5 \frac{g}{L} 1L \sim 1g \sim 3 \times 10^{22} molecole \quad (53)$$

Qual è la frazione di molecole che noi respiriamo ad ogni respiro? La massa dell'aria totale è pari a $4 \times 10^{22} g$ e ogni respiro corrisponde ad un peso di circa 1g, il che restituisce un rapporto di

$$0,25 \times 10^{-21} \quad (54)$$

Es. 3: si calcoli l'energia contenuta in un kg di benzina, pprossimando la benzina come CH_2 .

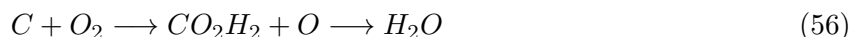
Ris.: Si può stimare che per ogni legame chimico l'energia sia pari a $E = 1,5eV$ (É una stima molto approssimata). Si considerino le masse atomiche:

Il carbonio ha massa atomica $C = 12$, mentre l'idrogeno $H = 1$, il che riconduce ad una massa totale pari a $CH_2 = 14$.

In un Kg di benzina si ha

$$N_{moli} = \frac{1Kg}{1,4 \times 10^{-2}Kg/mol} = 70mol \quad (55)$$

Per ogni molecola di CH_2 avrò due reazioni



Corrispondente ad un'energia totale rilasciata di $3eV$.

Qual'è la densità energetica della benzina?

$$D = 70 \frac{mol}{Kg} \cdot 6 \times 10^{23} \frac{reazioni}{mol} \frac{3eV}{mol} \cdot \frac{1}{1,6 \times 10^{-19}eV/J} = 2 \times 10^7 \frac{J}{Kg} \quad (57)$$

Questo valore è approssimativo ma si discosta solamente di un fattore 2 dal valore reale, il che ci fa intuire che comunque si tratta di un buon calcolo (che il bravo fisico deve essere in grado di effettuare).

Qual è poi la potenza trasferita in un pieno?

Supponiamo che un serbatoio di un'auto di $80L$. La densità della benzina è più bassa di quella dell'acqua. La densità di energia per litro corrisponde a $3 \times 10^7 J/L$

$$80L \cdot 3 \times 10^7 \frac{J}{L} = 2 \times 10^9 J \quad (58)$$

In 3 minuti (tempo di un pieno) l'energia trasferita corrisponde a

$$P = \frac{E}{\Delta t} = \frac{2 \times 10^9 J}{180s} = 10MW \quad (59)$$

Impressionante!

4 Potenziale nucleare

Studiamo il potenziale nucleare considerando il nucleo del *deuterio*, chiamato *deutone*, composto da un protone ed un neutrone.

La Cromodinamica Quantistica (QCD) è una teoria quantistica di campo e relativistica, è una teoria fondamentale che spiega l'interazione tra particelle elementari. I nucleoni, i componenti del nucleo, protone e neutrone, sono a loro volta composti da *quark*, i quali sono particelle elementari prive di dimensione e con carica frazionaria

- quark up u ha carica $+\frac{2}{3}$
- quark down d ha carica $-\frac{1}{3}$

i nucleoni sono composti da 3 quark ciascuno e seguono la regola per cui

- il **protone** è composto da due quark *up* ed un quark *down*, ha quindi carica totale unitaria:

$$u + u + d = +\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1$$

- il **neutrone** è composto da due quark *down* ed un quark *up*, ha quindi carica totale nulla:

$$d + d + u = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

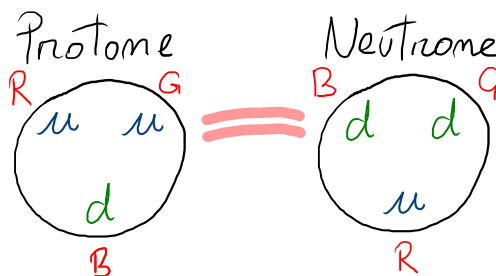


Figure 4: CAPTION

Carica di colore I quark hanno anche un secondo tipo di carica: la *carica di colore* che regola l'*interazione forte* tra i quark. La carica di colore può essere di tre tipi: Red (R), Green (G), Blue (B). La somma delle tre cariche di colore dei rispettivi quark di un nucleone è nulla

$$R + G + B = 0 \quad (60)$$

un quark rosso (R) attira un quark verde (G) che attira un quark blu (B), mentre i quark dello stesso colore si respingono. La teoria fondamentale della QCD esprime come l'interazione nucleare si possa interpretare come la carica di colore residua.

Il potenziale tra nucleoni è un potenziale di interazione del tipo Nella prima parte del potenziale si ha che per piccole distanze è *positivo*, ovvero repulsivo, poiché altrimenti i nuclei privi di dimensione (?) collapserebbero, ciò è legato al Principio di Esclusione di Pauli, nella seconda parte il potenziale è *attrattivo* ed è ciò che "intrappola" i nucleoni all'interno del nucleo, inoltre oltre alla distanza data da $R = R_0 A^{\frac{1}{3}}$ la forza nucleare è nulla.

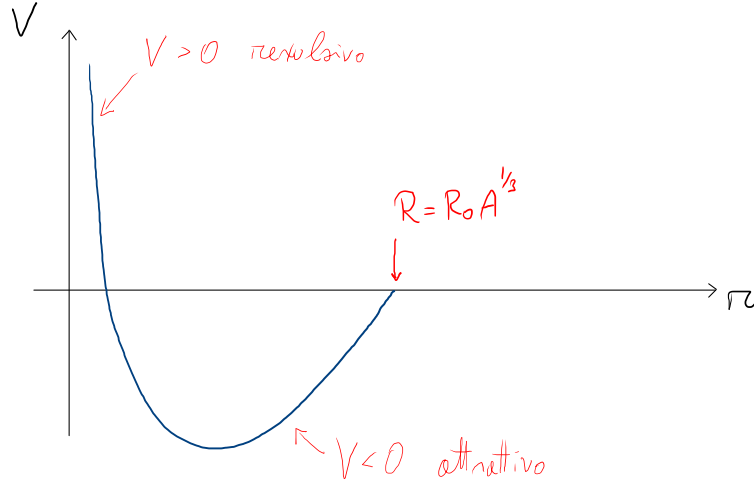


Figure 5: CAPTION

Il Deutone è il nucleo del deuterio, è composto da un protone e un neutrone ed è il più semplice nucleo su cui studiare la forza nucleare. Del deutone conosciamo l'energia di legame $E_B = -2.225 \text{ MeV}$ e la distanza tra i nucleoni $R = 2.1 \text{ fm}$ ottenuti sperimentalmente. Conosciamo inoltre che lo stato legato del deuterio è quello in cui gli spin sono paralleli, dato ottenuto dalla misurazione del momento magnetico, per cui lo spin del deutone è $S = 1$. Uno stato con spin anti-

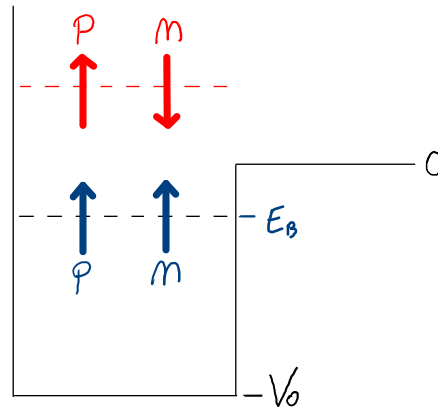


Figure 6: CAPTION

parallelo corrisponde ad uno stato non legato, quindi fuori dalla buca di potenziale. L'interazione nucleare dipende fortemente dallo spin.

Cerco ora il valore della buca di potenziale V_0 , sommo l'energia cinetica KE con l'energia potenziale PE

$$\begin{aligned} E &= KE + PE \\ E_B &= KE + V_0 \end{aligned} \quad (61)$$

scrivendo la funzione d'onda trovo il legame con il potenziale V

$$\begin{aligned} H\psi &= E\psi \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} \psi + V\psi &= E\psi \end{aligned} \quad (62)$$

Il potenziale di questa buca è

$$V = \begin{cases} V_0 & \text{zona I: dentro la buca} \\ 0 & \text{zona II: altrove} \end{cases} \quad (63)$$

Scrivo l'equazione di Schrodinger nella zona I, in cui ho $V = V_0$

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dr^2} + V_0\psi &= E\psi \\ \frac{d^2\psi}{dr^2} &= -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\psi \\ \frac{d^2\psi}{dr^2} &= -K^2\psi \quad \text{con } K^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0) \end{aligned} \quad (64)$$

la soluzione ha un andamento oscillatorio ed in generale è

$$\psi(r) = A \sin Kr + B \cos Kr \quad (65)$$

calcolo A e B imponendo le condizioni al contorno:

$$\psi(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi(0) = A \sin 0 + B \cos 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0 \quad (66)$$

per cui diventa

$$\psi = A \sin Kr \quad (67)$$

Scrivo l'equazione di Schrodinger nella zona II, in cui ho $V = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dr^2} &= -\frac{2m}{\hbar^2} E\psi \\ \frac{d^2\psi}{dr^2} &= L^2\psi \quad \text{con } L^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} E \end{aligned} \quad (68)$$

la soluzione ha un andamento esponenziale ed in generale è

$$\psi(r) = Ce^{Lr} + De^{-Lr} \quad (69)$$

di cui so che deve appartenere allo spazio di Hilbert, per cui la parte e^{Lr} non è soluzione in quanto non verifica la condizione $|\psi|^2 < \infty$, per cui diventa

$$\psi(r) = De^{-Lr} \quad (70)$$

Eguagliando le funzioni d'onda 67 e 70 e le loro derivate in corrispondenza della frontiera $r = R$ trovo

$$\begin{cases} \psi_I(R) = \psi_{II}(R) \\ \psi'_I(R) = \psi'_{II}(R) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A \sin KR = De^{-LR} \\ KA \sin KR = -LD e^{-LR} \end{cases} \quad (71)$$

dividendo una con l'altra le equazioni del sistema trovo la relazione seguente in funzione dei parametri K ed L

$$\begin{aligned} K &= \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)} \in \mathbb{R} \\ L &= \sqrt{-\frac{2m}{\hbar^2}E} \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (72)$$

che quindi diventa

$$K \cot KR = -L$$

$$\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)} \cot \left[R \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)} \right] = -\sqrt{-\frac{2m}{\hbar^2}E} \quad (73)$$

da cui, inserendo i dati sperimentali,

$$E = -2.225 \text{ MeV}$$

$$R = 2.1 \text{ fm} \quad (74)$$

e la massa corrisponde alla massa ridotta tra il protone ed il neutrone

$$m = \frac{m_n m_p}{m_n + m_p} \simeq \frac{m_p^2}{2m_p} = \frac{m_p}{2} \quad (75)$$

trovo il valore della buca di potenziale

$$V_0 = -36 \text{ MeV} \quad (76)$$

(non è ben noto come sia davvero possibile risolvere l'equazione del tipo $x \cot ax = b$ ma ok, prendiamo atto del risultato precedente e andiamo avanti).

Risulta quindi che la buca di potenziale del Deutone è profonda -36 MeV di cui solo -2.225 MeV sono di energia potenziale, *di legame*, mentre circa -34 MeV sono di energia cinetica.

Per il ferro ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ ad esempio si ha un'energia di legame media di circa 8 MeV/nucleone , mentre per il deutone ${}^2_1\text{He}$ si ha circa 1.1 MeV/nucleone .

5 Convenzioni LaTeX

Iniziare a scrivere subito sotto al comando `section` per dare un senso estetico al codice. Andare a capo ad ogni "punto", ogni frase inizia una nuova riga di codice. Lasciando uno spazio bianco (due volte "invio") si ottiene un nuovo inizio paragrafo.

Tipo questo, che non sempre è bello da vedere mentre altre volte è molto utile. Il concetto è: scrivere il codice il più attaccato possibile ma con maggior leggibilità possibile.

Le equazioni si possono scrivere in vari modi, ma i migliori, per compatibilità tra versioni sono:

1. equazione nel testo tipo $\cos \alpha = \frac{\pi}{2\pi}$

2. equazione a capo a centro pagina e su una riga, senza numero di equazione

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\theta)}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta}$$

3. equazione a capo a centro pagina e su una riga, con numero di equazione

$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \tag{77}$$

4. equazione a capo a centro pagina su più righe, con numero di equazione

<u>Maxwell-Boltzmann</u>	$\frac{n_s}{g_s} = \frac{1}{e^{\alpha + \beta E_s}}$	(78)
<u>Bose-Einstein</u>	$\frac{n_s}{g_s} = \frac{1}{e^{\alpha + \beta E_s} - 1}$	
<u>Fermi-Dirac</u>	$\frac{n_s}{g_s} = \frac{1}{e^{\alpha + \beta E_s} + 1}$	

5. scrivere le unità di misura nel Sistema Internazionale, per scrivere una misura tipo questa

$$\hbar = 6.602 \times 10^{-34} \text{ j s} \tag{79}$$

usiamo il comando "SI", quindi l'equazione precedente risulta scritta come

`\hbar = \SI{6.602e-34}{j.s}`

$$\begin{aligned} a &= b \\ c &= \textit{adahebfkjdnsv} \end{aligned} \tag{80}$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{3\pi}{\alpha} \\ &\quad ds \\ &= \frac{}{sdf} \end{aligned} \tag{81}$$