

Appunti del corso di Subatomia

Laurea in Fisica - Università di Ferrara

Scritto e impaginato in L^AT_EX da **Dario Chinelli** e **Umberto Zarantonello** nel 2021

24 maggio 2021

Contents

1 Sezione d'urto	5
1.1 Esperimento di Rutherford	6
1.2 Sezione d'Urto Quantistica (Regola d'Oro di Fermi)	10
1.3 Derivazione con l'Elettrodinamica Quantistica	13
2 Il Nucleo	15
2.1 Le scoperta delle particelle nucleari	15
2.2 Studio dei nuclei: diffusione elastica elettrone nucleo	16
2.3 Sezione d'urto di Mott	17
2.4 Studio dell'interazione sonda bersaglio	19
2.5 Proprietà dei Nuclei: Spin Nucleare e Momento Magnetico	22
3 Modelli Nucleari	27
3.1 Formula semi-empirica di massa	27
3.2 Modello di Fermi	34
3.3 Modello a shell	38
4 Applicazioni	42
4.1 Risonanza Magnetica Nucleare	42
5 Potenziale nucleare	43
5.1 Collisione neutrone protone	46
5.2 ultima parte	48
6 Decadimenti nucleari	51
6.1 Legge del decadimento radioattivo	53
6.2 Catene di decadimento	55
6.3 Dose di radioattività	55
6.3.1 Radioattività naturale	55
6.3.2 Dose assorbita	56
6.3.3 Quantificare danni di eventi disastrosi	57
6.4 Decadimento α	57
6.4.1 Cos'è il decadimento α	60
6.4.2 Teoria di Gamov del decadimento α	61
6.4.3 Applicazione del decadimento α	63
7 Fissione e Fusione Nucleare	65
7.1 Fissione Nucleare	65
7.2 Fusione Nucleare	72
8 Acceleratori di Particelle	81
8.1 Fisica degli acceleratori di particelle	81
8.2 Tipi di Acceleratore	85
8.2.1 Van De Graaf	85
8.2.2 Acceleratore lineare: LINAC	86
8.2.3 Ciclotrone	87
8.2.4 Betatrone	88

8.2.5	Sincrotrone	89
9	Diffusione elettronica per studi subnucleari	94
9.1	Diffusione elastica elettrone protone	94
9.2	Diffusione profondamente inelastica	98
10	Esercizi	105
10.1	Settimana 1	105
10.1.1	Esercizio 1	105
10.1.2	Esercizio 2	106
10.1.3	Esercizio 3	107
10.1.4	Esercizio 4	108
10.1.5	Esercizio 6	109
11	Tavola periodica degli elementi	110

Nozioni Preliminari

Elemento X ha un numero di massa A che corrisponde alla somma di *neutroni* e *protioni* nel nucleo ed un numero atomico Z che è il numero di *protioni* nel nucleo, per cui si scrive:

$$_Z^AX$$

in un atomo neutro il numero atomico corrisponde anche al numero di *elettroni*.

Quantità utili

- il fermi $1fm = 10^{-15}m$
- megaelettronvolt $MeV = 1.6 \times 10^{-13}J$
- spesso si utilizza la normalizzazione di \hbar tagliato e della velocità della luce $\hbar = c = 1$ questo comporta il fatto che a volte la massa venga definita direttamente in MeV
- $\hbar c = 197.3 MeV \cdot fm = 1$
- massa protone $m_p c^2 = 938.27 MeV$
- massa neutrone $m_n c^2 = 939.56 MeV$
- massa elettrone $m_e c^2 = 0.511 MeV$
- unità di massa atomica $uc^2 = 931.5 MeV$
- costante di struttura fine $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137}$
- coincidenza tra energia e temperatura

$$E = K_B T \quad K_B = 1,38 \times 10^{-23} J/K$$

per ricordare semplicemente questa quantità si ha che

$$0.025 eV = 1/40 eV = 300 K$$

1 Sezione d'urto

La *sezione d'urto* è una quantità essenziale che restituisce la misura della probabilità che avvenga una reazione dall'interazione tra due particelle, può essere calcolata solo conoscendo la natura dello "scontro".

Supponiamo di avere un fascio di particelle che interagisce con un bersaglio di spessore d , l'area d'interazione è A . Qual è il numero di interazioni al secondo dN ?

$$\begin{aligned} dN &\propto I = \frac{N_i}{At} \\ &\propto \rho Ad \end{aligned} \tag{1}$$

dove I è l'intensità del fascio e corrisponde al numero di particelle incidenti N_i fratto l'area d'incidenza A per il tempo t ; questa grandezza avrà inoltre una proporzionalità con le caratteristiche del materiale incidente, ciò viene espresso nella seconda formula dove ρ è la densità del materiale incidente, A è sempre l'area d'incidenza e d è lo spessore del campione. Si ottiene quindi che

$$\begin{aligned} dN &= \frac{KN_i}{At} \cdot \rho Ad \cdot d\Omega \\ dN &= KN_t N_a d\Omega \end{aligned} \tag{2}$$

il coefficiente K è una grandezza di cui studieremo ora la dimensionalità e sarà proprio ciò che definiremo come *sezione d'urto*. Nella formula vi sono varie altre grandezze, si ha che:

- $dN[1/s]$ è il numero di particelle al secondo
- $N_t = N_i \cdot t[1/s]$ è il numero di particelle incidenti per unità di tempo
- $N_a = \rho \cdot d[1/m^2]$ è il numero di particelle bersaglio che il fascio colpisce nel cammino.

Dall'analisi dimensionale si può vedere che K deve necessariamente avere le dimensioni di un'area, ciò è apparentemente strano in quanto è stato già inizialmente esplicitata all'inizio la natura probabilistica di questa grandezza. La *sezione d'urto* si definisce quindi come la probabilità che un nucleo del bersaglio interagisca quando il fascio incidente corrisponde ad una particella per unità di area.

Supponiamo ora di considerare un bersaglio sottile soggetto ad un flusso di particelle F .

$$F = \left[\frac{\text{number}}{m^2 s} \right] \tag{3}$$

Solitamente si fa l'ipotesi di un bersaglio sottile per poter supporre che la particella non subisca più di una collisione e poter così applicare queste formule in modo diretto (nel caso di collisione multiple i calcoli sono più complessi). La probabilità d'interazione dP è espressa come la sezione d'urto σ per il numero di particelle del bersaglio per unità di volume per dz

$$dP = \sigma n_b dz \tag{4}$$

La variazione del flusso risulterà quindi essere l'inverso del numero totale di particelle incidenti per la probabilità d'interazione (il segno meno tiene conto del fatto che il flusso diminuisce nel tempo, ogni volta che una particella interagisce con il bersaglio viene esclusa dal fascio)

$$\begin{aligned} dF &= -FdP = -F\sigma n_b dz \\ \frac{dF}{dz} &= -F\sigma n = -\frac{F}{l} \end{aligned} \tag{5}$$

Nelle formule (5) abbiamo definito

$$l = 1/n\sigma \quad (6)$$

che viene chiamato *libero cammino medio*. Questa grandezza corrisponde alla lunghezza media che ogni particella percorre senza che subire interazioni. Alle volte può essere utile ridefinire le grandezze in funzione di l piuttosto che di σ perché è una grandezza più visualizzabile e utile sperimentalmente. Si ottiene quindi quella che è la formula del flusso in funzione di l

$$F(z) = F(0)e^{-z/l} \quad (7)$$

L'unità di misura delle sezioni d'urto è il barn (b). Questa unità nasce da delle considerazioni fatte nei primi esperimenti di radioattività. Dalle considerazioni sui raggi atomici

$$R = R_0 A^{\frac{1}{3}} \quad R_0 = 1,2 \text{ fm} \quad (8)$$

Ora, prendendo in considerazione l'uranio $^{239}_{92}U$, in particolare l'isotopo 235, si ottiene un raggio pari a

$$R[^{235}U] = 1,2 \cdot (235)^{1/3} = 7,4 \text{ fm} \quad (9)$$

Che restituisce un'area d'interazione circa

$$\pi R^2 (^{235}U) = 3 \times 54 \sim 150 \text{ fm}^2 \quad (10)$$

La misura del barn scelta fu quindi di

$$1 \text{ barn} = 100 \text{ fm}^2 = 100 \times 10^{-30} \text{ m}^2 = 10^{-28} \text{ m}^2 \quad (11)$$

Le sezioni d'urto variano da particella a particella e, mentre per le particelle subatomiche sono relativamente simili, esistono delle particelle particolarmente elusive con sezioni d'urto molto inferiori a quelle classiche. La sezione d'urto di collisione del neutrino per esempio è estremamente piccola e corrisponde a 10^{-19} mb (millibarn). A causa del valore così basso il neutrino è stata una particella praticamente invisibile per molto tempo e la sua teorizzazione si deve agli esperimenti sul decadimento β che davano dei risultati altrimenti anomali. Un altro esempio è rappresentato dalla materia oscura che è stata rivelata solamente tramite considerazioni gravitazionali ma al giorno d'oggi non vi è ancora nessuna evidenza sperimentale di interazione con la materia in laboratorio.

1.1 Esperimento di Rutherford

Agli inizi del novecento la fisica conosciuta era molto diversa da quella odierna, il fatto che certi materiali potessero emettere delle radiazioni era una conoscenza relativamente recente e questi nuovi effetti sconosciuti avevano evidenziato delle irregolarità nei modelli classici. Quando Rutherford fece il suo esperimento erano state già studiate le emissioni α, γ, β .

L'esperimento di Rutherford fu rivoluzionario per la comprensione della struttura atomica, in quanto rese evidente l'elevata densità di materia del nucleo. Al tempo infatti il modello atomico ritenuto valido era il *modello a panettone*, che teorizzava un atomo formato da una distribuzione uniforme di carica positiva al cui interno erano presenti degli elettroni che andavano a bilanciare la carica rendendo neutro l'intero sistema. Le densità di carica positiva e di massa in questo modello dovevano quindi essere basse relativamente a quelle conosciute oggi. Le grandi intuizioni di Rutherford furono quella di utilizzare il decadimento dei nuclei α come sonda e di adottare un approccio statistico per ovviare al problema di non conoscere la posizione esatta delle particelle.

Per l'emissione alfa furono utilizzati dei nuclei di Radio $^{226}_{88} Ra$. Il *decadimento* che avviene è il seguente



in questa reazione si conservano il numero di massa totale $226 = 222 + 4$ e la carica totale $88 = 86 + 2$; Q è il calore emesso dalla reazione esotermica/spontanea, equivalente all'energia data dalla differenza di massa iniziale e finale. L'energia cinetica rilasciata nel decadimento che viene trasferita alla particella α è pari a $T = 4.76$ MeV.

Lo schema dell'esperimento era piuttosto semplice, un fascio collimato di particelle α veniva indirizzato contro un *target* (lastra sottile di oro) che ampliava il fascio di un certo angolo solido andando a deviare il percorso di una certa porzione di particelle. Il fascio uscente veniva quindi rivelato da uno schermo di ZnS , mobile su tutto l'angolo solido. Il fatto sorprendente e inaspettato era che una piccolissima porzione di particelle veniva deflessa ad angoli impossibili per il modello a panettone, erano presenti infatti fenomeni di back scattering ovvero di deviazione di un angolo $\theta = 180^\circ$. Essenziale fu l'intuizione di Rutherford che non prese tale dato come errore sperimentale ma capì che si trattava di particelle reali.

La sezione d'urto di Rutherford fu calcolata sfruttando semplicemente la meccanica classica. Il calcolo si basa sulle leggi di conservazione della meccanica classica e sull'elettromagnetismo. Le assunzioni fatte da Rutherford furono:

- l'interazione deve considerarsi come puramente coulombiana ed elastica;
- ne il nucleo ne le sonde possiedono spin (anche perché al tempo di Rutherford non era ancora stato scoperto lo spin);
- il nucleo viene considerato fisso (approssimazione corretta per una differenza notevole di massa).

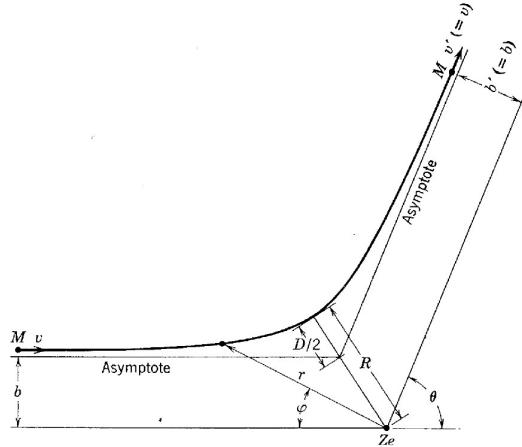


Figure 1: Traiettoria iperbolica della particella in interazione con un nucleo

In figura 1 viene mostrato il modello dello scattering di una particella α di massa M e carica $+ze$, passante vicino ad un nucleo di carica $+Ze$. Il nucleo è fissato al centro del sistema di coordinate. Prima e dopo la collisione la particella avrà una traiettoria rettilinea (prima con velocità v poi con velocità v') in quanto la forza coulombiana è trascurabile dopo una certa distanza. Per determinare la posizione della particella si sfruttano le coordinate polari $r(t), \varphi$. La distanza tra la traiettoria della particella e la linea parallela passante per il nucleo (asse orizzontale del sistema) è definita

come il *parametro d'impatto* b . L'angolo di scattering θ è dato dall'intersezione dell'asse orizzontale con la parallela alla traiettoria finale passante per il nucleo.

Siccome il nucleo viene considerato fisso, l'energia cinetica finale della particella deve essere identica a quella iniziale. Velocità e parametro d'impatto sono costanti prima e dopo l'impatto a causa della conservazione dell'energia cinetica e del momento angolare.

$$Mvb = Mv'b' = L \quad \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mv'^2 \quad (13)$$

si ha la conservazione del momento angolare perché in presenza di una forza centrale

$$dL/dt = \bar{r} \times \bar{F}(r) = 0$$

si ha quindi che raggio e forza sono sempre paralleli.

Sfruttando nuovamente il momento angolare si cerca ora di ottenere il differenziale del tempo

$$|L| = |\bar{r} \times m\bar{v}| = mvb = mv_{\perp}r = m\omega r^2 = m \frac{d\varphi}{dt} r^2 \quad (14)$$

dove la velocità tangenziale è $v_{\perp} = \omega r$ e $\omega = d\varphi/dt$ è la velocità angolare. Si ottiene quindi

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{vb}{r^2} \rightarrow dt = d\varphi \frac{r^2}{vb} \quad (15)$$

Si può poi introdurre l'interazione elettromagnetica. Viene in questo caso sfruttato il teorema dell'impulso

$$\Delta p = \int F_n dt \quad F_n = F \cos \varphi \quad (16)$$

dove F è la forza coulombiana tra due particelle

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{zZe^2}{r^2} \quad (17)$$

La differenza di potenziale risulta essere

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{zZe^2}{r^2} \cos \varphi dt \quad (18)$$

Possiamo quindi sostituire la formula per dt trovata sopra all'interno dell'integrale appena ricavato prestando ovviamente attenzione agli estremi d'integrazione

$$\begin{aligned} t &\rightarrow -\infty & \varphi &\rightarrow -\frac{1}{2}(\pi - \theta) \\ t &\rightarrow +\infty & \varphi &\rightarrow +\frac{1}{2}(\pi - \theta) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\Delta p = \int_{-\frac{1}{2}(\pi-\theta)}^{+\frac{1}{2}(\pi-\theta)} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{zZe^2}{vb} \cos \varphi d\varphi \quad (20)$$

Portando fuori dall'integrale tutte le costanti in una costante A si ottiene

$$\Delta p = A[\sin \varphi]_{-\frac{1}{2}(\pi-\theta)}^{+\frac{1}{2}(\pi-\theta)} = A \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} \right) \right] = 2A \cos \frac{\theta}{2} \quad (21)$$

A questo punto è necessario ricavare la variazione della quantità di moto proiettata sulla normale

$$p_f - p_i = 2mv \sin \frac{\theta}{2} \quad (22)$$

unendo le due formule per la variazione di quantità di moto si ottiene

$$\begin{aligned} 2mv \sin \frac{\theta}{2} &= 2A \cos \frac{\theta}{2} \rightarrow 2mv \sin \frac{\theta}{2} = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 vb} \cos \frac{\theta}{2} \\ \tan \frac{\theta}{2} &= \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 mv^2} \frac{1}{b} \rightarrow \tan \frac{\theta}{2} = K \frac{1}{b} \end{aligned} \quad (23)$$

K è semplicemente una costante che include tutte le costanti del moto. Da quest'ultima formula si può vedere che se $b \rightarrow 0$ ovvero nel caso di un urto frontale si otterrà come angolo $\theta = \pi$ e quindi la particella sarà rispedita alla sorgente.

Sezione d'urto differenziale Si procede ora a ricavare la sezione d'urto differenziale, ovvero il rapporto differenziale tra le particelle incidenti e quelle scatterate per un certo angolo solido e parametro d'impatto.

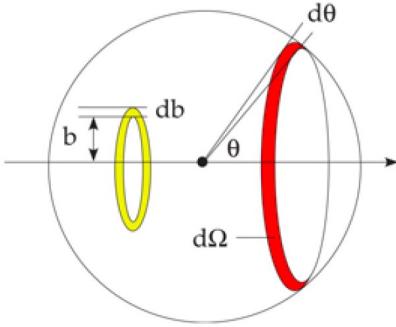


Figure 2: Schematizzazione della sezione d'urto differenziale in base al parametro d'impatto e all'angolo solido.

L'area delle particelle incidenti è data dalla formula

$$d\sigma = 2\pi b |db| \quad (24)$$

Le particelle definite in quest'area saranno diffuse all'angolo

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta \quad (25)$$

Facendo il rapporto tra le due aree si ottiene la sezione d'urto differenziale dal punto di vista cinematico

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\theta) db}{\sin \theta d\theta} \quad (26)$$

Si può a questo punto unire le formule ricavando b rispetto a θ

$$\frac{db}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left| \frac{k}{\tan \frac{\theta}{2}} \right| = \frac{K}{\tan^2 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{2} \frac{K^2}{\tan^3 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{K^2}{4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1}{16} \left(\frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 T} \right) \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}\end{aligned}\quad (28)$$

Introduciamo ora un po' di costanti che aiutano a semplificare questa formula e spesso usate in fisica subatomica

$$\alpha = \frac{b^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137} \quad \hbar c = 197 MeV \cdot fm \quad (29)$$

α è denominata *costante di struttura fine*.

La formula con queste costanti diventa

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{z^2 Z^2}{16} \alpha^2 \left(\frac{\hbar c}{T} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (30)$$

La cosa straordinaria di questa sezione d'urto sta nel fatto che, per delle coincidenze sotto un certo punto di vista fortuite, è uguale a quella calcolata con la meccanica quantistica. Questo succede perché nell'interazione di particelle alfa con il nucleo gli spin sono ininfluenti.

Commenti alla sezione d'urto:

- La sezione d'urto diminuisce all'aumentare dell'energia cinetica (inversamente proporzionale a T^2).
- Decresce rapidamente all'aumentare di θ .
- È proporzionale al quadrato delle cariche.

1.2 Sezione d'Urto Quantistica (Regola d'Oro di Fermi)

Il cambiamento essenziale che avviene in meccanica quantistica riguarda la probabilità d'interazione. Infatti se nella trattazione classica la probabilità derivava da una serie di considerazioni classiche, nella trattazione quantistica deriva dalla *regola d'oro di Fermi* definita come

$$P = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{f,i}|^2 \rho(E_f) \quad (31)$$

I contributi che compongono questa probabilità d'interazione sono:

- $H_{f,i}$ è l'elemento dell'Hamiltoniana della perturbazione, ovvero la probabilità che la sezione d'onda iniziale passi alla sezione d'onda finale.

$$H_{f,i} = \langle f | H | i \rangle = \int \psi *_f(r) H(r) \psi_i d^3 r \quad (32)$$

(La probabilità di passaggio di uno stato iniziale ad uno stato finale si valuta effettuando questo integrale tra lo stato iniziale e quello finale della Hamiltoniana di perturbazione).

Le funzioni d'onda sono quelle che descrivono le nostre particelle α

$$H(r) = V(r) = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (33)$$

Quali sono quindi gli stati (funzioni d'onda) che descrivono gli alfa?

Ad una certa distanza iniziale saranno onde piane

$$\psi_i \sim e^{ikr} \quad \bar{p} = \hbar\bar{k} \quad \bar{k} = \frac{\bar{p}}{\hbar} \quad (34)$$

Dopo l'interazione, ovvero quando le particelle non subiranno più il potenziale coulombiano, si avrà che la funzione sarà nuovamente un'onda piana ma con vettore d'onda variato (legato ovviamente alla quantità di moto)

$$\psi_i \sim e^{ik'r} \quad \bar{p}' = \hbar\bar{k}' \quad \bar{k}' = \frac{\bar{p}'}{\hbar} \quad (35)$$

Tornando alla regola d'oro di fermi, ciò mi dice che la probabilità d'interazione dipende dalla probabilità che il mio potenziale faccia passare le mie particelle da una certa quantità di moto ad un'altra.

- L'altro contributo si ha dalla densità degli stati finali $\rho(E_f)$, ovvero il numero di stati finali accessibili al sistema, maggiore è il tipo di capienza nello spazio delle fasi maggiore è la probabilità. Per ora trascureremo questo contributo per trattarlo più avanti.

Studiamo quindi la variabilità della probabilità in base alle funzioni d'onda. Si ha

$$H_{f,i} \simeq \int e^{-ik'r} V(r) e^{+ikr} = \int V(r) e^{-i(k'-k)r} \quad (36)$$

La variazione dell'impulso in questa trattazione diventa

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \hbar\bar{k} \\ \bar{p}' &= \hbar\bar{k}' \\ \Delta p &= \bar{p}' - \bar{p} = \bar{q} = \hbar(k' - k) \end{aligned} \quad (37)$$

Sostituendo nella formula dell'Hamiltoniana si trova

$$\begin{aligned} H_{f,i} &= \int V(r) e^{-i\frac{\bar{q}}{\hbar}r} d^3r \\ &= \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{1}{r} e^{-i\frac{\bar{q}}{\hbar}r} \end{aligned} \quad (38)$$

Come si può vedere questa formula corrisponde ad una trasformata di Fourier, e quindi risulta facile risalire alla funzione d'origine. Ciò che si ottiene alla fine è

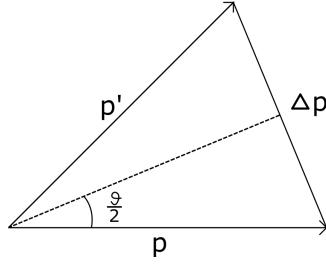
$$H_{f,i} = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4\pi\hbar^2}{q^2} \quad (39)$$

l'ultima frazione è la parte che si utilizza per calcolare la sezione d'urto differenziale

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto P \simeq |H_{f,i}|^2 \sim \frac{1}{q^4} \quad (40)$$

Si può vedere che questa funzione, ricavata quantisticamente, esprime una dipendenza dipendenza proporzionale a $1/q^4$, che corrisponde al momento trasferito (δp) alla quarta.

Sorge spontaneo chiedersi se questo sia consistente con la formula derivata classicamente. La risposta è affermativa e si può dimostrare. Prendiamo infatti la variazione classica della quantità di moto.



$$\begin{aligned}\Delta p &= \bar{p}' - \bar{p} = q = 2p \sin \frac{\theta}{2} \\ q^2 &= 4m^2v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\end{aligned}\tag{41}$$

Ricordando la formula classica dell'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}mv^2\tag{42}$$

Si ottiene che

$$q^2 = 8mT \sin^2 \frac{\theta}{2}\tag{43}$$

È resa evidente quindi la stessa dipendenza che si aveva nel caso classico, questo è dovuto a vari fattori, ma quello principale è che ci troviamo ad energie non relativistiche. Altre supposizioni fatte nella trattazione classica erano che le particelle non avessero interazioni di spin, abbiamo trascurato inoltre che i nuclei avessero rinculo. Queste sono tutte assunzioni buone ma che per risultati più precisi rilasceremo in trattazioni più avanzate.

Raggio nucleare Quello che ci si domanda ora è il motivo per cui considerando solamente l'interazione coulombiana si riescano ad ottenere risultati così buoni.

Si consideri il raggio nucleare stimato de Rutherford per la sua trattazione tramite scattering α . Si cerchi la distanza di massimo avvicinamento della particella a nucleo, che si otterrà per un'energia pari a

$$V = K_\alpha \quad \rightarrow \quad K_\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{zZe^2}{R_0}\tag{44}$$

Invertendo la formula si ricava il raggio di Rutherford

$$\begin{aligned}R_0 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{zZe^2}{K_\alpha} \frac{\hbar c}{\hbar c} \\ &\simeq \frac{1}{137} \frac{2 \cdot 79}{4 \cdot 9 MeV} \hbar c \\ &= 46 fm\end{aligned}\tag{45}$$

Questa è una sovrastima del raggio nucleare in quanto si sa attualmente che il raggio corrisponde ad 8 fermi. Questo errore è dovuto al fatto che non vi è interazione nucleare nello scattering di Rutherford ma semplicemente elettrostatica, il che spiega anche la perfetta corrispondenza dei suoi dati con la trattazione teorica.

Supponiamo quindi di riuscire ad aumentare l'energia delle particelle α (quello che accade negli acceleratori). Si supponga poi di utilizzare come target del piombo e di porre un rivelatore a 60° . Si

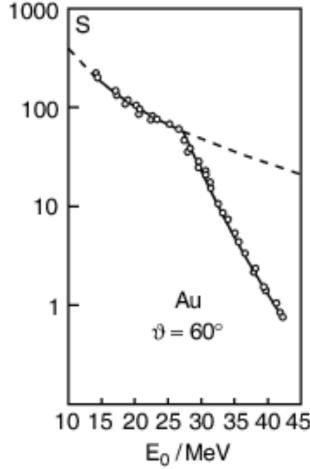


Figure 3: Esperimento di Rutherford su target di piombo in confronto al risultato callassico

può osservare che l'andamento del numero di particelle scatterate per energie inferiori a 27,5 MeV rispecchia esattamente l'andamento di Rutherford ma poi ha un cambio drastico. Questo accade perché oltre un certo raggio subentra l'interazione per forza forte

$$R = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 KE} = 8.59 \text{ fm} \quad (46)$$

La sovrastima di Rutherford era dovuta al fatto che le particelle da lui usate avevano effettivamente interazione puramente coulombiana.

1.3 Derivazione con l'Elettrodinamica Quantistica

Questa trattazione è possibile in modo semplice grazie ai diagrammi di Feynman che semplificano il tecnicismo della fisica teorica rendendola accessibile ai fisici sperimentalisti. Secondo i diagrammi

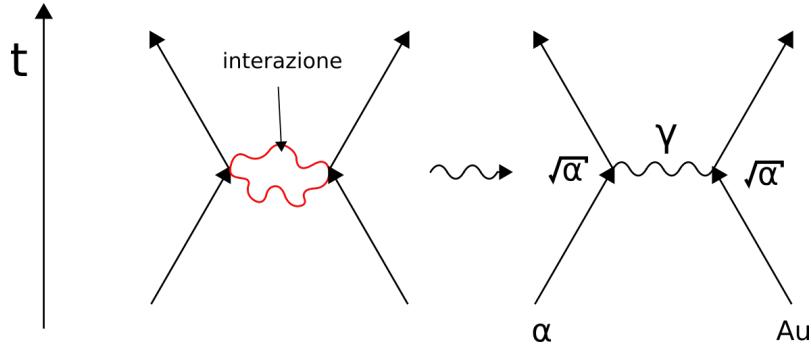


Figure 4: Diagrammi di Feynman

di Feynman ogni particella reale è descritta da una linea continua. Una cosa da tenere sempre presente è la direzione in cui si svolge l'azione temporale, in questo caso si svolge verso l'alto ma è solamente una rappresentazione grafica di un'interazione. Nelle teorie quantistiche di campo l'interazione viene descritta tramite lo scambio di una particella. La grande novità che è stata introdotta da queste teorie è che l'interazione non sia descritta tramite un campo ma attraverso lo scambio di particelle virtuali.

Come si ricava quindi la sezione d'urto?

La particella alfa emette un fotone virtuale e questo viene descritto tramite una costante di accoppiamento posta ai vertici (ovvero nel punto d'impatto) denominata $\sqrt{\alpha}$. L'interazione viene rappresentata da quello che si chiama propagatore ovvero la linea interna che congiunge i due vertici.

$$\propto \frac{1}{Q^2 + M^2 C^2} \quad (47)$$

dove Q^2 è il momento trasferito, M è la massa della particella mediatrice (bosone vettore), γ è il fotone. Come si calcola l'ampiezza della transizione?

$$\begin{aligned} |M_{f,i}| &= \sqrt{\alpha} \frac{1}{Q^2} \sqrt{\alpha} = \frac{\alpha}{Q^2} \\ P &\propto |M_{f,i}|^2 = \frac{\alpha^2}{Q^4} \end{aligned} \quad (48)$$

Dove P è la probabilità di transizione della particella, corrispondente alla sezione d'urto. Si può notare anche qui che la proporzionalità trovata per le altre trattazioni è mantenuta.

2 Il Nucleo

2.1 Le scoperta delle particelle nucleari

La seconda particella ad essere rivelata dopo l'elettrone fu il protone. La prima evidenza sperimentale è dovuta sempre a Rutherford che nel 1917, sfruttando sempre le particelle alfa in collisione con l'aria, riuscì ad ottenere delle emissioni protoniche. La reazione che si verificava era la seguente (l'aria viene approssimata con l'azoto N)



Al tempo uno modelli nucleari più in voga teorizzava un nucleo composto da un certo numero A di protoni ed un numero $A - Z$ di elettroni, dove Z è il numero di elettroni della nuvola elettronica. Questo modello generava un atomo neutro e stabile ed era dovuto principalmente al fatto di non aver ancora scoperto il neutrone che è necessario alla stabilità del nucleo (non ci si spiegava come si potesse bilanciare l'elevata forza repulsiva dei protoni all'interno del nucleo).

Analizziamo dunque la possibilità di avere un nucleo di questo tipo. Che potenziale elettromagnetico dovrebbero gestire i protoni?

Il campo elettrico che si genera è

$$E = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

dove $R = R_0 A^{1/3} = 1.2 \text{ fm} \cdot A^{1/3}$ (formula empirica per il calcolo del raggio nucleare). Calcolando si ottiene quindi

$$E = -1.20 \frac{Z}{A^{1/3} \text{ MeV}}$$

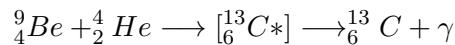
Ponendo ora per esempio $A=140$ e $Z=58$ l'energia cinetica che si ottiene è $E = -13.4 \text{ MeV}$ (elettrone con energia relativistica quindi $E = pc$). Un elettrone con tale energia cinetica è possibile che resti confinato all'interno del nucleo?

Prendiamo quella che è la lunghezza d'onda dell'elettrone

$$\lambda = \frac{h}{p} = 2\pi \frac{\hbar c}{pc} = \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{13.4 \text{ MeV}} \simeq 90 \text{ fm}$$

Se si considera che il raggio calcolato da Rutherford era di 46 fm è evidente che l'elettrone non può essere confinato nel nucleo perché la sua lunghezza d'onda è il doppio.

La scoperta del neutrone fu fatta da Chadwick che fu il primo ad intuire, da un'esperienza che in realtà era già stata fatta da più fisici, la presenza di un'altra particella. La situazione che si verificava era che tramite l'emissione di particelle alfa generate dal polonio, fatte collidere su un target di Berilio, si otteneva una radiazione che riusciva ad attraversare uno schermo spesso di piombo, il che suggeriva il fatto che fosse una radiazione neutra (impossibile per della radiazione carica attraversare uno schermo troppo spesso). Al tempo l'unica radiazione neutra conosciuta era la radiazione elettromagnetica il che fece pensare ad una reazione del tipo



Con uno stato intermedio dato da uno stato eccitato del carbonio 13.

Un ulteriore passaggio fu quello di aggiungere dopo lo schermo di Piombo Pb una lastra di paraffina da cui, dopo l'interazione con la radiazione, emergevano protoni con energia pari a $E = 7.5 \text{ MeV}$. La radiazione gamma doveva quindi possedere un'energia in grado di produrre dei protoni

di energia $7,5 MeV$ tramite scattering Compton il che riconduce ad un'energia minima di $55 MeV$. Quando il Berilio assorbiva le particelle alfa queste si trovavano ad un'energia di $5 MeV$, essendo poi una reazione esotermica si aveva che il Q della reazione corrispondeva a $Q = 10 MeV$, il che riconduceva ad un'energia massima disponibile di $14 MeV$. L'unica spiegazione possibile era che si trattava quindi di una particella nuova, neutra e con la stessa massa del protone. Era stato scoperto il neutrone.

2.2 Studio dei nuclei: diffusione elastica elettrone nucleo

Per superare i limiti dati dallo studio con le particelle Alfa, attorno agli anni '50 si cominciarono a sfruttare gli elettroni come sonda. L'utilizzo di questo tipo di particelle avvenne così tardi non perché non se ne conoscessero i vantaggi ma vi è la necessità di acceleratori per portare gli elettroni ad un'energia abbastanza elevata. Questi sono stati la sonda "principe" per lo studio del nucleo ma anche dei nucleoni (protoni e neutroni), perché:

- possono essere considerati puntiformi, infatti per quanto ne sappiamo non possiedono struttura, e quindi le loro dimensioni non impattano nello studio del nucleone.
- interagiscono solo per interazione elettromagnetica, a differenza per dire delle particelle alfa che interagiscono anche tramite la forza forte rendendo difficoltosa la distinzione tra i due tipi di interazione.

L'innovazione in questo campo è stata data dall'energia a cui si riesce ad accelerare gli elettroni portando a nuove scoperte.

Perché è così importante ottenere energie sempre più elevate per avere maggiore risoluzione sulla struttura? Il motivo si basa sulla relazione di de Broglie, infatti quando si vuole studiare la struttura, la lunghezza d'onda della sonda deve essere più piccola della struttura che andiamo a studiare.

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\hbar}{p} \leq 2R \\ \frac{2\pi\hbar}{p} &= 2R \\ pc &= \frac{2\pi\hbar}{2R} \end{aligned} \tag{50}$$

Siccome gli elettroni necessitano di una bassa energia per diventare relativistici (ovvero per avere una velocità prossima a quella della luce e quindi energia indipendente dalla massa), gli elettroni usati come sonda sono quasi sempre relativistici. Per questo la formula sopra può essere riscritta sfruttando l'equazione di Einstein per l'energia.

$$\begin{aligned} E^2 &= p^2c^2 + m^2c^4 \\ p^2c^2 \gg m^2c^4 &\rightarrow E = pc \end{aligned} \tag{51}$$

Si ottiene quindi che l'energia degli elettroni deve essere pari a

$$E = 2\pi \frac{197 MeV \cdot fm}{2R} \tag{52}$$

Per completare la trattazione si sa già dalle formule sperimentali che il raggio del nucleo si ottiene tramite la formula

$$r_{nucleo} = r_0 A^{1/3} \tag{53}$$

che, come già visto nel caso dell'oro è $r_{Au} = 1.2\sqrt[3]{197} = 6,98\text{ fm}$. Il che corrisponde ad un'energia di

$$pc = \frac{2\pi \cdot 197\text{ MeV} \cdot \text{fm}}{2 \cdot 6,98} = 89\text{ MeV} \quad (54)$$

Se quindi voglio usare gli elettroni per studiare questo tipo di nucleo dovrò accelerare gli elettroni ad un minimo di 89 MeV .

Aumentando ulteriormente l'energia si può ottenere una diminuzione della lunghezza d'onda che aumenta la risoluzione del sistema rendendo visibili i nucleoni. Ciò che cambia nello studio dei nucleoni rispetto al nucleo è che non si può più considerare elastica la collisione il che porta nella maggior parte dei casi ad una distruzione del protone dopo la collisione e di conseguenza cambierà anche la sezione d'urto. L'energia necessaria per lo studio del protone ($r_{prot.} \sim 1\text{ fm}$) è $E = pc = 0,5\text{ GeV}$. Aumentando ancora l'energia si possono studiare pure i quark, questo richiede energie pari a $6,1\text{ TeV}$.

2.3 Sezione d'urto di Mott

Le assunzioni fatte per il calcolo della sezione d'urto di Rutherford sono state:

1. Interazione puramente coulombiana
2. Ne proiettile ne bersaglio possiedono spin

Le assunzioni su cui si baserà la sezione d'urto di Mott, necessaria alla descrizione dell'interazione nucleo elettrone, sono:

1. Bersaglio privo di spin
2. Proiettile con spin

Questi cambi, necessari per esperimenti con gli elettroni portano alla formula seguente

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}^* = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth} \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \quad (55)$$

con $\beta = v/c$. L'asterisco sta ad indicare che trascuriamo gli effetti di rinculo.

Si continua a supporre quindi che il nucleo abbia massa infinita e di conseguenza che l'elettrone abbia energia cinetica iniziale uguale a quella finale. Questa assunzione è possibile fino al GeV perché al di sopra le quantità di moto di elettrone e nucleo iniziano a diventare confrontabili. Il termine moltiplicativo della sezione d'urto di Rutherford sopra è ciò che ci indica la presenza dello spin dell'elettrone, studiamo ora il suo significato.

$$\begin{aligned} \beta &\rightarrow 1 \\ v &\rightarrow c \\ 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} &\rightarrow \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (56)$$

Questo comporta una grande modifica alla sezione d'urto di Rutherford, in quanto viene inibito il back scattering caratteristico dell'esperimento con il bersaglio d'oro, e ciò è dovuto proprio allo spin dell'elettrone. Questo ci fa capire quanto sia stata fortuita scelta di Rutherford delle particelle α che non provocano appunto interazione di spin.

Questo effetto si spiega grazie ad una quantità caratteristica di ogni particella definita elicità

$$h = \frac{\bar{s} \cdot \bar{p}}{|s||p|} \quad (57)$$

Questa grandezza, come si può intuire dalla formula è la proiezione dello spin nella direzione della quantità di moto. Lo spin è una proprietà caratteristica delle particelle che classicamente viene rappresentata come una rotazione della particella attorno a se stessa. Questa è un'immagine molto utile a comprendere il concetto ma scorretta da un punto di vista reale (l'elettrone puntiforme e quindi non ha alcun senso parlare di rotazione attorno ad un asse).

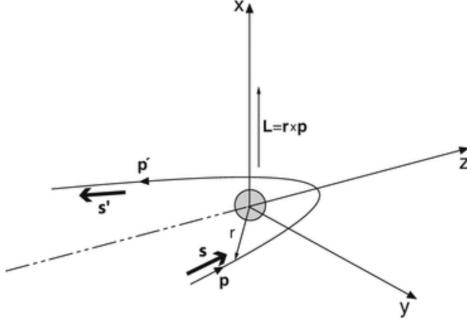


Figure 5: Backscattering di elettrone

In figura è mostrata l'interazione tra il nucleo e l'elettrone in cui si ha la conservazione del momento angolare e dell'elicità. Questo proibisce il back scattering infatti per la conservazione della quantità di moto un evento di back scattering richiederebbe un'inversione dell'elicità, ma siccome anche l'elicità dell'elettrone si deve conservare l'effetto risulta inibito.

La conservazione dell'elicità dipende da regole naturali e riguarda le particelle con velocità prossime a quella della luce. Una spiegazione che può aiutare alla comprensione è quella di considerare una particella con velocità non relativistica; questa particella può essere osservata sia stando dietro la particella che superandola e guardandola dal fronte, questo genera un cambio di elicità. La questione è abbastanza intuitiva, basta ragionare con l'esempio di una sfera che ruota attorno a sé stessa in un sistema fisso, questa girerà in senso orario o antiorario in base al punto in cui la si osservi. Nel caso invece in cui la particella ha velocità tendente a quella della luce l'elicità è definita in quanto la particella non potrà essere vista idealmente da nessun'altra posizione (la particella non potrà mai essere superata). L'elicità in questo caso viene denominata chiralità.

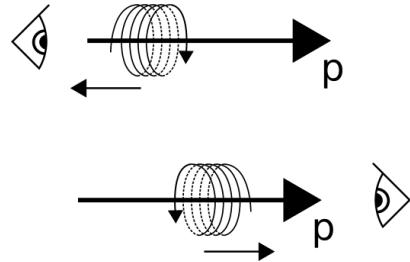


Figure 6: Rappresentazione grafica del cambio di elicità

Ciò vuol dire che gli elettroni possiedono più componenti di elicità ma quando si avvicinano a velocità relativistiche ne rimane solamente una. Questa è una legge che deriva dall'esperienza, non ha quindi un motivo se non l'osservazione. È inoltre un'evidenza dell'equazione di Dirac e da

osservazioni della forza debole. Questo indica che la natura non è simmetrica e ci deve andare bene (la materia preferisce chiralità sinistra, l'antimateria la destra).

In realtà un modo per far cambiare spin e quindi elicità alle particelle ci sarebbe ma richiede la presenza di una campo magnetico, il campo elettrico non è sufficiente. Questo aggiunge un'altra negazione alla possibilità di back scattering.

2.4 Studio dell'interazione sonda bersaglio

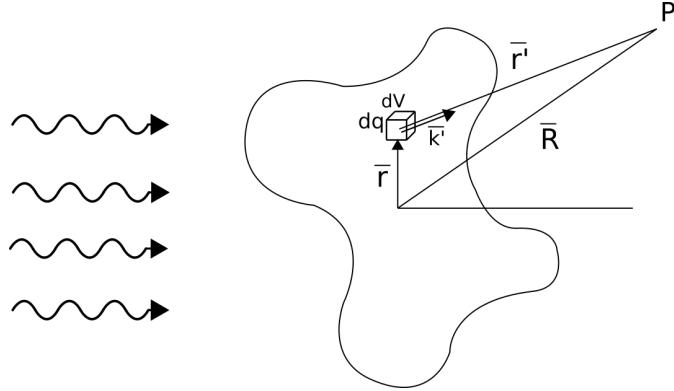


Figure 7: Rappresentazione dell'interazione di un fascio con una distribuzione di carica

Supponiamo di avere un fascio di elettroni incidenti su un bersaglio esteso. Il fascio di elettroni può essere rappresentato come un'onda piana e^{ikr} , si consideri che il bersaglio abbia una distribuzione di carica qualsiasi e si prenda un sistema di coordinate centrato al centro della carica.

L'interazione che si ottiene può essere vista come la somma di tutte le interazioni derivate dai punti infinitesimi della carica. Per visualizzare questo si consideri un cubetto di carica dq e volume dV , con coordinata \bar{r} rispetto al centro di coordinate. Analogamente a come si fa in ottica, supponiamo che dopo l'interazione si generi da quel punto un'onda sferica.

A questo punto è possibile analizzare l'onda ottenuta nel punto P (virtualmente considerato all'infinito) di coordinata \bar{R} rispetto al centro del nucleo e con distanza \bar{r}' rispetto al volumetto infinitesimo di carica. Si può quindi sommare il contributo di ogni carica infinitesima per ottenere il contributo totale nel punto P dato da tutto il nucleo. Prendendo come onda piana incidente un'onda di energia:

$$E = E_0 \cdot e^{ikr} \quad (58)$$

il contributo infinitesimo dell'onda generata è rappresentato da

$$A = E_0 e^{ikr} \frac{a}{r'} e^{ik'r'} = \frac{a E_0}{r'} e^{i(kr+k'r')} \quad (59)$$

dove a è l'ampiezza di diffusione, ovvero la sezione d'urto elementare di Mott.

$$\begin{aligned} \bar{r} + \bar{r}' &= \bar{R} \\ \bar{k}\bar{r} &= \bar{k}'\bar{R} - \bar{k}'\bar{r}' \end{aligned} \quad (60)$$

Applichiamo quindi delle approssimazioni per semplificare il sistema

$$\begin{aligned} R &\rightarrow \infty & r' &\approx R & k' &\parallel R \\ M_{nucleo} &\rightarrow \infty & |k'| &= |k| & k & \end{aligned} \quad (61)$$

Sostituendo nella formula di A si trova

$$A = \frac{aE_0}{R} e^{ikR} \cdot e^{i(k-k')r} \quad (62)$$

Integrando poi su tutto il volume

$$\int A = \frac{aE_0}{RQ} \int \rho_e(r) e^{-i\Delta kr} \quad (63)$$

Dove Q è la carica totale e ρ è la densità di carica. È già noto che la quantità di moto trasferita si può riscrivere come

$$\bar{q} = \hbar \Delta K \quad (64)$$

$$\int A = \frac{aE_0}{RZe} \int \rho_e(r) e^{-i\frac{q}{\hbar}r} \quad (65)$$

Essendo a la sezione d'urto di Mott ve ne si può evidenziare la dipendenza cinematica dovuta alla sua dipendenza dalla sezione d'urto di Rutherford ($\propto 1/q^4$). Non sarà dimostrato ma bisogna sapere che $d\sigma/d\Omega$ dipende da $|A|^2$. Si può finalmente trovare la sezione d'urto

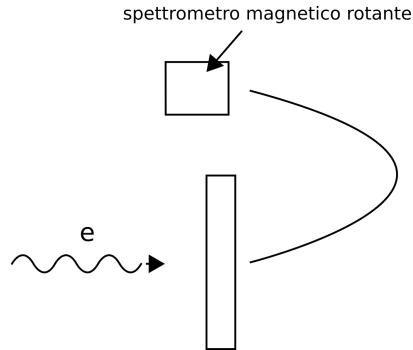
$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\theta &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \left| \int \rho_e(r) \cdot e^{-i\frac{q}{\hbar}r} dr \right|^2 \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} |F(\rho, q)|^2 \end{aligned} \quad (66)$$

$|F(\rho, q)|$ è definito fattore di forma nucleare e coincide con la trasformata di Fourier della distribuzione di carica nel nucleo.

$$F(\rho, q) = \int \rho_e(r) e^{-i\frac{q}{\hbar}r} dr \quad (67)$$

In pratica quando un fascio di elettroni interagisce con una densità di carica di ottiene lo stesso effetto che si ha con un'onda piana che fa diffrazione da una fenditura.

Esempi In figura è mostrato un esperimento di scattering dove c'è un fascio interagente con un bersaglio rivelato da uno spettrometro magnetico rotante che poteva misurare l'energia delle particelle a più angoli di diffusione. Il grafico ottenuto da un'esperienza di questo tipo è mostrato in figura 8.



Come si può notare dal grafico la distribuzione di carica era in un certo modo inaspettata ma rispecchia i ragionamenti fatti riguardo la variabilità della sezione di Mott in base alla distribuzione. La distribuzione di Mott infatti viene modulata come la trasformata di Fourier della distribuzione

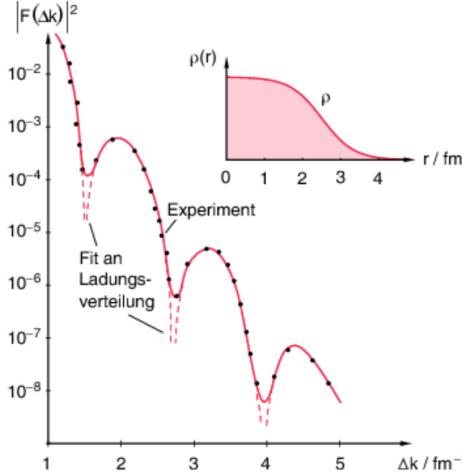


Figure 8: Risultati sperimentali sfruttando come sonda gli elettroni e che evidenziano l'analogia con l'ottica

di carica e se, per esempio, la distribuzione di carica fosse puntiforme sarebbe uguale alla delta di Dirac, non avendo nessuna deviazione dalla sezione di Mott prevista, in quanto la trasformata di una delta è una distribuzione uniforme.

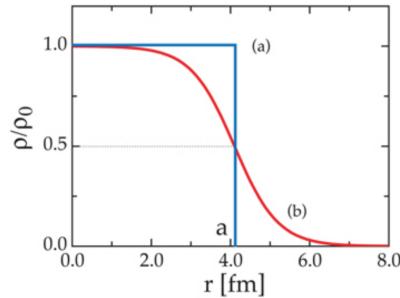
Dai dati sperimentali si ottenne però il grafico 8, dovuto al fatto di non poter considerare il nucleo come puntiforme. Come si può notare, i dati sperimentali evidenziano un importante parallelismo con l'effetto di diffrazione della luce su una fenditura.

Questo rende possibile la determinazione del raggio del nucleo sfruttando le stesse formule usate per trovare la dimensione di una fenditura. Si prenda per esempio un nucleo di Stagno ^{124}Sn e vi si faccia collimare un fascio di elettroni con energia $E = 330 MeV$; il raggio del nucleo sarà

$$r = 0,61 \frac{\lambda}{\sin \theta} \quad (68)$$

La lambda corrisponde a $\lambda = hc/E = 3,7 fm$ e il primo minimo si trova a $\theta = 45^\circ$, si ottiene quindi un raggio pari a $r = 3,19 fm$.

Questi esperimenti ci hanno permesso di determinare la distribuzione di carica del nucleo, che corrisponde all'incirca alla distribuzione di massa. Ciò che si è notato è che il nucleo non è propriamente una sfera rigida ma ha un andamento come quello mostrato in figura sotto. Questa



corrisponde alla distribuzione di Saxon-Woods data dalla formula

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r-a}{b}\right)} \quad (69)$$

dove $a = 118A^{1/3} = 0,48\text{fm}$ e $b = 0,55 \pm 0,07\text{fm}$. Questo mostra la presenza di una zona dove la densità del nucleo diminuisce gradualmente.

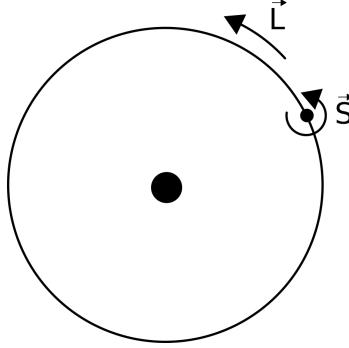
Qual è la densità di materia nel nucleo?

$$\begin{aligned} R &= R_0 A^{1/3} \\ \rho_M &= \frac{M}{V} = \frac{A \cdot u}{\frac{4}{3}\pi R^3} \\ &= \frac{A \cdot u}{\frac{4}{3}\pi R_0^3 A} \approx 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \end{aligned} \quad (70)$$

dove A corrisponde al numero di massa del nucleo e u è l'unità di massa atomica. Dalla divisione di A per A si nota come la densità non dipende dal tipo di nucleo ma è uguale per tutti i nuclei.

2.5 Proprietà dei Nuclei: Spin Nucleare e Momento Magnetico

Molte proprietà dei nuclei si caratterizzano in modo fenomenologico, ovvero per analogia con effetti già conosciuti. Lo spin viene descritto in analogia a ciò che viene studiato in struttura della materia e meccanica quantistica. Ricordiamo ora com'è caratterizzato il moto dell'elettrone attorno al nucleo, questo si descrive come un moto di rivoluzione e di rotazione.



Vi sono inoltre più numeri quantici che caratterizzano l'elettrone:

$$\begin{array}{ll} n & 1, 2, 3 \\ l & 0 \rightarrow N-1 \\ m & -l \rightarrow 0 \rightarrow +l \\ s & +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \end{array} \quad (71)$$

Per quanto riguarda i nucleoni, il fatto di avere un momento angolare non è banale, non vi è infatti un potenziale centrale che ne giustifichi la presenza. La questione è valida in quanto dimostrata da fatti sperimentali. Per ogni nucleone, all'interno del nucleo, possiamo definire un momento angolare totale che è dato da

$$\bar{s} = \bar{l} + \bar{s} \quad (72)$$

e con lo stesso tipo di analogia potremo trovare quello che si chiama spin del nucleo, ottenuto come la somma di tutti gli spin dei nucleoni.

$$I = \sum \bar{s} \quad (73)$$

La spiegazione deriva dal fatto che siccome i protoni sono particelle cariche, e una particella carica in moto genera un momento magnetico, si otterrà anche per i nucleoni un momento magnetico.

un paio di commenti

- L'analogia dello spin di una particella con una trottola è una assunzione ben posta? Si parte dal raggio classico dell'elettrone, ovvero il raggio che una carica avrebbe se tutta la sua massa fosse costituita da energia elettrostatica.

$$\begin{aligned}
 m_e c^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_e} &\rightarrow r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e c^2} = \\
 &= \frac{e^2 \hbar c}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \frac{1}{m_e c^2} = \\
 &= 1,44 MeV \cdot fm \frac{1}{0,5 MeV} \sim 3 fm
 \end{aligned} \tag{74}$$

In realtà noi consideriamo l'elettrone come una particella priva di struttura il che ci fa capire quanto sbagliata sia la nostra concezione di questi fenomeni. Il raggio reale è approssimabile a 0. Supponiamo che il momento angolare dell'elettrone sia (*consideriamo qui l'elettrone come una sferetta con tutta la massa concentrata al bordo della sfera*):

$$\hbar = r_e m_e v_e \tag{75}$$

Qual è la velocità di questa sfera (elettrone)?

$$\begin{aligned}
 v_e &= \frac{\hbar}{r_e m_e} \rightarrow \frac{v_e}{c} \\
 &= \frac{\hbar c}{r_e m_e^2} \sim 10^2
 \end{aligned} \tag{76}$$

Il risultato ottenuto è assurdo, perché viola le regole base della relatività. L'analogia con la trottola è quindi un espediente utile alla comprensione ma errato e lo spin è da considerarsi un effetto puramente relativistico.

- Qual è il cammino libero medio del nucleone nel nucleo? Si ha

$$l = \frac{1}{n\delta} \tag{77}$$

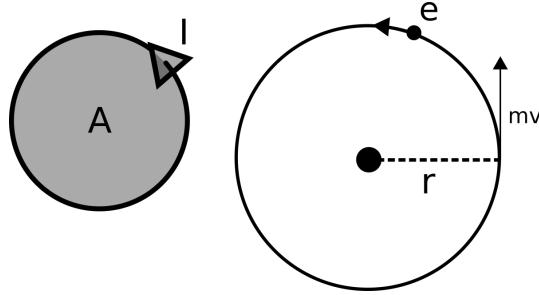
dove $\delta_{n-n} \sim 22 MeV = 300 mb$ è la sezione d'urto d'interazione e n è alla densità numerica dei nucleoni nel nucleo.

$$n = \frac{A}{V} = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R_0^3 A} = \frac{3}{4(3,14)(1,15 fm)^3} = 0,16 \frac{\text{nucleoni}}{fm^3} \tag{78}$$

Il libero cammino medio sarà quindi

$$l = \frac{1}{0,16 fm^3} \frac{1}{300 \times 10^{-3} \cdot 10^{-28} m^2 \cdot 10^{30} fm^2/m^2} = 0,21 fm \tag{79}$$

Il libero cammino medio corrisponde quindi a meno della dimensione del nucleone stesso, il che non fa ben sperare alla possibilità di spostamento dei nucleoni e alla conseguente esistenza di un momento magnetico. In realtà c'è possibilità di movimento grazie al principio di esclusione di Pauli.



Dal punto di vista sperimentale quello che noi vediamo è che i nuclei hanno un certo momento magnetico (rather than l'effetto del momento angolare). Il momento magnetico associato ad una carica in moto classicamente corrisponde alla corrente che attraversa una spira per l'area della spira stessa.

$$\mu = IA \quad (80)$$

Prendendo ora il caso dell'elettrone (che poi sarà ampliato per analogia al caso dei nucleoni) si ha

$$L = mvr, \quad I = \frac{e}{v} \quad (81)$$

$$v = \frac{2\pi r}{t} \rightarrow t = \frac{2\pi r}{v} \quad (82)$$

Si ottiene così la corrente generata da un elettrone

$$I = \frac{e}{2\pi r} v \quad (83)$$

il che può essere sostituito nel momento magnetico per ottenere

$$\mu = IA = \frac{e}{2\pi r} v \pi r^2 = \frac{evr}{2} \frac{mvr}{mvr} = \frac{e}{2m} L \quad (84)$$

Il *momento magnetico* di una particella carica è quindi

$$\mu = \frac{e}{2m} L \quad (85)$$

Dove la quantità $e/2m$ viene definita come *rappporto giromagnetico*. Il momento (85) fa riferimento alla meccanica classica ma può essere validato per la meccanica quantistica effettuando la sostituzione del momento angolare con \hbar . Si ottiene così il *magnetone di Bohr*

$$\mu_B = \frac{e}{2m_e} \hbar \quad (86)$$

Questa è l'unità fondamentale per quanto riguarda il momento magnetico. Possiamo poi ampliare questa definizione trovando il momento di dipolo magnetico dell'elettrone

$$\mu_e = \mu_B \frac{L}{\hbar} \quad (87)$$

Si può ora introdurre il fattore giromagnetico g che ci permette di generalizzare la formula (87)

$$\mu_B = g \mu_B \frac{L}{\hbar} \quad (88)$$

A questi livelli di grandezza non si ha la certezza che carica e massa coincidano, anzi potrebbero essere totalmente indipendenti; questo fattore assume che ci sia una relazione ben definita tra momento angolare e momento magnetico, in particolare se distribuzione di massa e di carica coincidono $g = 1$. La trattazione ha comunque dei limiti, infatti quando verrà studiato lo *spin* del nucleo si potrà notare come massa e carica non coincidano, ma per ora va bene che ci siano dei limiti nel calcolo. Nel caso dell'elettrone che gira attorno al nucleo è vero che $g = 1$.

Nel caso dei nucleoni all'interno del nucleo si ha per il protone:

$$\mu_p = \mu_N \frac{L}{\hbar} \quad \mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} \quad (89)$$

dove $g = 1$ e μ_N è detto magnetone nucleare. Mentre per il neutrone:

$$\mu_n = 0 \quad (90)$$

Per quanto riguarda lo *spin* si ha che la relazione diventa

$$\mu_e = g\mu_B \frac{S}{\hbar} \quad (91)$$

In questo il momento giromagnetico non sarà più 1 ma si avrà $g_e = 2$. Questo valore si ottiene dall'equazione di Dirac per particelle prive di struttura interna. Dall'elettrodinamica quantistica si ottiene poi che in realtà non è propriamente 2 ma $g = 2,0023$ che coincide con una piccola variazione ma che deriva da cambiamenti importanti (tanto da essere scritta sull'epitaffio dello scopritore). Nel caso dei nucleoni si ha

$$\mu_{p,n} = g_{p,n}\mu_N \frac{S}{\hbar} \quad (92)$$

dove i fattori g corrispondono a $g_p = 5,585691$; $g_n = -3,826084$. Il fatto che questi fattori siano diversi da 2 ci fa capire come i nucleoni abbiano entrambi una struttura interna; si ha inoltre che il $g \neq 0$ per il neutrone implica che pure quest'ultimo possieda un momento magnetico pur essendo privo di carica.

Il momento di dipolo magnetico totale del nucleo è

$$\mu_N = \sum_p \left(\mu_N \frac{\bar{L}}{\hbar} + g_p \mu_N \frac{\bar{S}}{\hbar} \right) + \sum_n \left[g_n \mu_N \frac{\bar{S}}{\hbar} \right] \quad (93)$$

Una cosa interessante riguardo i neutroni e i protoni è che queste particelle sono fermioni ovvero

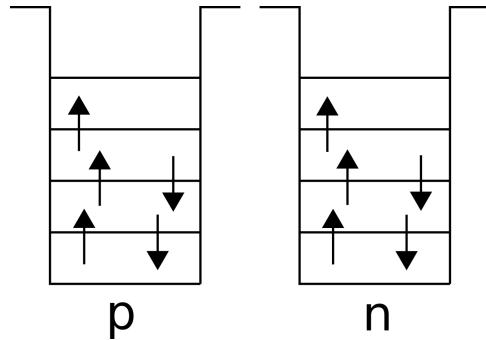


Figure 9: Rappresentazione delle buche di potenziale dei protoni e dei neutroni

particelle che soddisfano alla statistica di Fermi-Dirac (non posso avere più di una particella nello

stesso stato, posso avere al massimo due particelle alla stessa energia con spin antiparallelo). Es-
sendo poi particelle all'interno di una buca di potenziale si può già intuire quale sarà lo spin del
nucleo. Per esempio:

- se il numero di massa A è pari e il numero atomico Z è dispari, avremo un numero dispari di
neutroni e di protoni, in questo caso il nucleone spaiato (sia dalla parte dei neutroni che dei
protoni) mi fa dire che avremo un nucleo con spin intero.
- Se invece il numero totale di nucleoni è pari e il numero di protoni e neutroni è pari si avrà
spin del nucleo nullo.
- Se il numero di massa sarà dispari sappiamo che lo spin del nucleo è semi-intero.

3 Modelli Nucleari

I modelli nucleari sono un tipo di supporto teorico che ci permette di interpretare le proprietà legate prima ai processi di decadimento e poi a quelli di fissione e fusione nucleare. Come vedremo i modelli nucleari sono molto eterogenei e partono da presupposti che possono arrivare a contraddirsi. Il modello a goccia per dire è opposto al modello di Fermi. Questo esprime la difficoltà che si ha ad associare le proprietà dei nuclei a principi primi. Quelli che introduciamo sono modelli fenomenologici o semi empirici, ciò indica che faremo delle supposizioni a partire da dati empirici per spiegare ciò che si vede. Questo approccio è dovuto proprio alla mancanza di una teoria che con principi elementari esprima le proprietà dei nuclei.

3.1 Formula semi-empirica di massa

Quello che verrà trattato in questa sezione riguarda quello che tiene legato il nucleo. Grazie all'esperimento di Rutherford sappiamo che il nucleo è formato da una carica positiva molto densa concentrata al centro, circondata poi da elettroni. La cosa sorprendente di questa scoperta fu principalmente legata alla dimensionalità infatti, prima di Rutherford era logico pensare che la materia fosse densa, ma quello che ci rivelano i dati è appunto che tra il raggio nucleare e il raggio atomico c'è un fattore 10000 che rende la materia di fatto "spazio vuoto".

È stato visto poi, con gli esperimenti di Rutherford e Chadwick, che il nucleo è composto da protoni e neutroni, in particolare con il nucleo può essere esplicitato con la formula

$$_Z^AX_N \quad (94)$$

dove X indica l'elemento, A è il numero di massa, ovvero la somma di neutroni e protoni, Z è il numero atomico, ovvero il numero di protoni e infine N è il numero di neutroni ($A = Z + N$). Si sa inoltre che la carica dell'atomo è assolutamente neutra e quindi che il numero di protoni è esattamente uguale al numero di elettroni.

Be 9,01218 $\sigma_{\text{abs}} = 0.0092$	chemisches Symbol Masse in u gemittelt über alle radioaktiven Isotope Einfangquerschnitt σ für Neutronen in barn = 10^{-28} m^2	\uparrow Z	O 15,9994 $\sigma_{\text{abs}} = 0.000270$		O 13 8,9 ms β^{+}, ν (p 1.44 n 44, 0.93)	O 14 70,59 s β^{+}, ν (p 4.1 n 213)	O 15 2,03 m β^{+}, τ	O 16 99,756 $\sigma_{\text{abs}} = 0.000178$
H 2 0,015 $\sigma_{\text{abs}} = 0.00053$	rot: stabile Isotope Massenzahl A Isotopenhäufigkeit in % Einfangquerschnitt σ_n in barn	7	N 14,0067 $\sigma_{\text{abs}} = 1.85$		N 12 11,0 ms β^{+}, ν (p 16,4-449 n 1.6 - 1.7)	N 13 9,96 ms β^{+}, ν (p 1.2 n 0.7)	N 14 99,64 $\sigma_{\text{abs}} = 0.075$ $\sigma_{\text{em}} = 1.81$	N 15 0,36 $\sigma_{\text{abs}} = 0.000024$
H 3 12,346 a $\beta = 0.02$	weiß: instabile Isotope Massenzahl A mittlere Lebensdauer Energie der emittierten β , γ in MeV, n = Neutronenemitter p = Protonenemitter	6	C 12,011 $\sigma_{\text{abs}} = 0.0094$	C 9 126,5 ms β^{+}, ν (p 8,24 n 10,92)	C 10 19,3 s β^{+}, ν (p 7,18, 1022)	C 11 20,3 m β^{+}, ν (p 1.0)	C 12 98,89 $\sigma_{\text{abs}} = 0.0034$	C 13 1,11 $\sigma_{\text{abs}} = 0.0009$
		5	B 10,81 $\sigma_{\text{abs}} = 759$	B 8 762 ms β^{+}, ν (p 14.1 (2n-1.6, n.3))	B 9 20 $\sigma_{\text{abs}} = 0.6$ $\sigma_{\text{em}} = 3696$	B 10 80 $\sigma_{\text{abs}} = 0.0005$	B 11 20,3 ms β^{+}, ν (p 13.4-449 (n 0.2, -))	B 12 20,3 ms β^{+}, ν (p 13.4-449 (n 0.2, -))
	Be 9,01218 $\sigma_{\text{abs}} = 0.0092$	4			Be 7 53,4 d $\tau_{\text{abs}} = 48000$	Be 8 100 $\sigma_{\text{abs}} = 2e$ 0.05	Be 9 1,6-10 ⁶ a β^{+}, ν (p 0.6 n 0.7)	Be 10 13,8 s β^{+}, ν (p 11.5-2125 n 791) (n)
	Li 6,941 $\sigma_{\text{abs}} = 70,7$	3		Li 5 p	Li 6 7,5 $\sigma_{\text{abs}} = 0.028$ $\sigma_{\text{em}} = 940$	Li 7 92,5 $\sigma_{\text{abs}} = 0.037$	Li 8 844 ms β^{+}, ν (p 12.5 (2n + 1.6))	Li 9 176 ms β^{+}, ν (p 11.0-13.5 (n 0.7...))
	He 4,00260 $\sigma_{\text{abs}} < 0.05$	2	He 3 0,00013 $\sigma_{\text{abs}} = 0.00006$ $\sigma_{\text{em}} = 5327$	He 4 99,99987 $\sigma_{\text{abs}} = 0$	He 5 n	He 6 802 ms β^{+}, ν (p 3.5)	He 7 122 ms β^{+}, ν (p 10- n 981 (n))	He 8 11,4 ms β^{+}, ν (p 11.5-2125 n 791) (n)
	H 1,0079 $\sigma_{\text{abs}} = 0.002$	1	H 1 99,985 $\sigma_{\text{abs}} = 0.00053$	H 2 0,015 $\sigma_{\text{abs}} = 0.00053$	H 3 12,346 a $\sigma_{\text{abs}} = 0.002$			Li 11 9,7 ms β^{+}, ν (p 18 (n))

Figure 10: Tavola dei Nuclidi

La tavola dei nuclidi è uno strumento utile in fisica subatomica. Sulla diagonale è rappresentata la linea degli elementi che possiedono un numero equivalente di neutroni e protoni. Per numero di

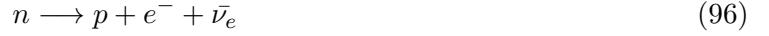
protoni bassi, i nuclidi che si trovano in natura, ovvero i nuclidi stabili, si trovano proprio lungo questa diagonale. Aumentando però il numero atomico i nuclidi stabili diventano quelli con un numero sempre maggiore di neutroni rispetto ai protoni. Intorno a questa zona di nuclidi stabili vi è poi una zona di nuclidi instabili. Oltre questa zona non vi sono poi più nuclidi, né stabili né instabili.

Cosa vuol dire atomo instabile?

Per nuclidi con protoni in eccesso, rispetto ai nuclidi stabili, ciò che accade è che l'atomo tende a decadere, ovvero uno o più protoni in eccesso subirà la reazione di decadimento β^+



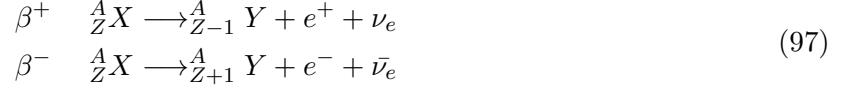
Nei nuclidi che hanno esuberanza di neutroni, la reazione che avverrà riguarda i neutroni e si definisce decadimento β^-



(nelle formule sopra p indica il protone, n il neutrone, e^-, e^+ rispettivamente l'elettrone e il positrone, $\nu_e, \bar{\nu}_e$ il neutrino e l'antineutrino elettronici).

In questo tipo di trasformazioni si ha che la carica e il numero leptonico si conservano sempre. La carica è abbastanza evidente, per quanto riguarda il numero leptonico per ora ci basta sapere che viene conservato.

Com'è intuitibile nel decadimento β il nucleo si trasmuta variando il tipo di nucleo, solo che nel primo caso si ottiene un nuclide con un protone in meno dell'originale mentre nel secondo caso il nuclide avrà il numero dei protoni aumentato.



Nella tavola dei nuclidi si avrà quindi che le reazioni provocheranno uno spostamento dell'elemento all'interno della tavola in diagonale (perpendicolarmente alla bisettrice del grafico).

Introduciamo ora il concetto di *energia di legame*. Se supponiamo che all'interno di un nucleo ci siano Z protoni e N neutroni, prendendo la massa delle particelle libere che compongono il nucleo e confrontandola con la massa delle stesse particelle legate nel nucleo, si ottiene che quest'ultima è sempre minore della somma delle masse delle particelle libere. Si ha quindi che parte della massa si trasforma in energia di legame, secondo la formula

$$\Delta mc^2 \rightarrow BE \quad (98)$$

La massa che va a formare il legame, chiamata massa mancante, è proprio la responsabile della diminuzione di massa nelle particelle legate rispetto alle particelle libere.

Calcoliamo ora per esempio l'energia che si ottiene trasformando un protone

$$p = 10^{-27} kg \quad m_p c^2 = 10^{-27} \cdot 9 \times 10^{16} \cdot 1,6 \times 10^{-19} \simeq 10^9 eV \quad (99)$$

Qual è la differenza quindi tra massa legata e massa libera? Per un atomo la massa costituente degli elementi degli atomi è

$$(Zm_p + Nm_n + Zm_e)c^2 = m_{At}({}_Z^A X)c^2 + BE_{nuc} + BE_{at} \quad (100)$$

dove $BE_{nuc} + BE_{at}$ corrispondono all'energia di legame nucleare e all'energia di legame atomica. Si possono fare dei calcoli sulla formula sopra

$$Z(m_p + m_e)c^2 + Nm_n c^2 + Nm_n c^2 = m_{At}({}_Z^A X)c^2 + BE_{nuc} + BE_{at} \quad (101)$$

Siccome stiamo ragionando "sperimentalmente" per trovare un modo di calcolare la massa dei nuclei, noi conosciamo già l'energia di legame dell'atomo di idrogeno, per cui

$$m_{At}({}_1^1H)c^2 + B_{at}^H = m_p + m_e \quad (102)$$

che sostituito porta a

$$Z(m_{At1}^1Hc^4) + ZBE_{At}^H + Nm_nc^2 = m_{At}({}_Z^AX)c^2 + BE_{nuc} + BE_{at} \quad (103)$$

A questo punto posso notare che l'energia di legame dell'atomo di idrogeno e l'energia di legame dell'atomo si possono semplificare, ottenendo così l'energia di legame

$$BE_{nuc} = Z(m_{At1}^1Hc^4) + Nm_nc^2 - m_{At}({}_Z^AX)c^2 \quad (104)$$

Penso quindi misurare semplicemente l'energia di legame, infatti la massa dell'idrogeno è nota così come la massa del neutrone; basterà semplicemente misurare la massa dell'atomo legato.

Qual è la natura delle forze che tengono insieme un nucleo? È chiaro che all'interno del nucleo ci debba essere una forza molto grande perché questo possa esistere, si deve infatti controbilanciare la forza eletrostatica di repulsione tra cariche uguali. Essendo che in natura esistono nuclei con numero atomico fino a 100 questa forza deve essere almeno un fattore 100 rispetto alla forza eletrostatica. Il modello che cerca di spiegare questa forza è appunto il *modello a goccia*.

Ipotizziamo di avere una forza che agisce tra tutte le coppie di nucleoni, questo vuol dire che questa forza non distinguerà tra protoni e neutroni. Siccome tra ogni coppi ci dovrà essere una forza procediamo a costruire il modello. Tra tre particelle il numero di coppie possibili è 3, tra quattro particelle si formeranno 6 coppie. Si può quindi evidenziare una legge che stabilisce il numero di coppie in un nucleo con numero di massa A

$$\frac{A(A-1)}{2} = \frac{A^2 - A}{2} \quad (105)$$

Questo vuol dire che l'energia di legame totale del nucleo sarà proporzionale a A^2 e l'energia di ogni legame singolo sarà proporzionale a A .

$$BE \propto A^2 \rightarrow \frac{BE}{A} \propto A \quad (106)$$

Abbiamo quindi creato un'ipotesi che ora va verificata. Se quest'ipotesi fosse vera si avrebbe che BE/A e A devono risultare proporzionali e aumentare linearmente l'uno rispetto all'altro. I dati sperimentali ci dicono in realtà che l'energia di legame aumenta quasi linearmente fino ad un massimo (coincidente con il ferro ${}^{56}Fe$) e che dopo si stabilizza ad un valore $\sim 8MeV$ rimanendo circa costante all'aumentare di A .

Questo errore deriva dal fatto che abbiamo supposto che i nucleoni interagiscano infinitamente anche con i nucleoni più distanti, questo è stato dimostrato non essere vero e anzi che si raggiunge una saturazione.

Si ha quindi che due nucleoni lontani non si parlano. La forza nucleare è dunque una forza a corto range.

Abbiamo imparato che l'energia di legame (*Bending energy*) corrisponde a

$$BE = a_v A \quad (107)$$

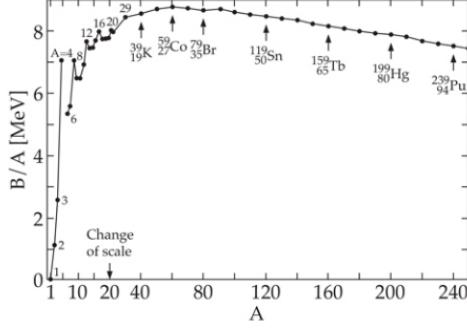


Figure 11: Grafico sperimentale dell’energia di legame in funzione con l’aumento del numero di massa

dove a_v è un termine di volume.

Questa formula avrà intuitivamente una serie di termini correttivi. Una prima correzione è dovuta al fatto che sicuramente i nucleoni centrali avranno più legami rispetto ai nucleoni sulla superficie della sfera (da qui deriva il nome di modello a goccia, infatti si basa sulla stessa struttura delle gocce di acqua). Continuando ad approssimare devo tener conto di un termine di superficie che diminuisce l’energia di legame.

$$BE = a_v A - a_s A^{2/3} \quad (108)$$

$A^{2/3}$ esprime la dipendenza dalla superficie perché il raggio nucleare ha formula

$$R = R_0 A^{1/3}$$

e la superficie della sfera è

$$S = 4\pi R^2$$

il che restituisce una proporzionalità di superficie di $A^{2/3}$.

Il terzo termine deriva dal fatto che all’interno del nucleo sono presenti i protoni che possiedono una forza di repulsione elettrostatica tra loro

$$F_Q = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

In realtà ciò che interessa a noi è l’energia potenziale.

$$PE \propto \frac{1}{R} = \frac{K}{A^{1/3}}$$

Il termine coulombiano della forza di legame è quindi

$$= a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \quad (109)$$

Aggiungendo questo termine si trova che l’energia di legame è

$$BE = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \quad (110)$$

Perché la formula dell’energia di legame sia completa mancano altri due termini. Mentre tutti i termini trovati fino ad ora si possono considerare come termini classici gli ultimi sono termini puramente quantistici.

Il primo è legato al fatto che i protoni e i neutroni possono essere descritti come intrappolati in una buca di potenziale. All'interno di una buca di potenziale i livelli sono quantizzati e soprattutto equispaziati. Supponiamo che esistano due buche di potenziale, una dei protoni e una dei neutroni, all'interno di questa buca i nucleoni si dispongono con spin antiparallelo. Continuando ad aggiungere neutroni nella buca e superando il numero di protoni io avrò che mi ci vuole meno energia per estrarre un neutrone, in quanto avranno occupato dei livelli energetici più alti dei protoni (sono meno fortemente legati). Questo eccesso di energia corrisponde a

$$E = 2S + 2(2S) + 2(3S) + \dots + 2\left(\frac{X}{2}S\right) \quad (111)$$

dove S è la differenza energetica tra i livelli che viene moltiplicato per il numero di livelli in eccesso, X è infatti l'eccesso di neutroni ovvero $X = N - Z$. Quella sopra è evidentemente una serie geometrica che da come somma

$$E = 2S\left[\frac{X}{2}\left(\frac{X}{2} + 1\right)\right]/2 = S\left(\frac{X^2}{4} + \frac{X}{2}\right) \quad (112)$$

Se X è grande portò ignorare il termine $X/2$. Se A aumenta ciò che succede è che non aumento il livello massimo occupato all'interno della buca ma diminuisce la spaziatura tra i livelli stessi

$$A \uparrow \rightarrow S \downarrow \rightarrow S \propto \frac{1}{A} \quad (113)$$

Quindi

$$S\frac{X^2}{4} \propto \frac{1}{A}(N - Z)^2 \quad (114)$$

Il termine che si andrà ad aggiungere alla formula di legame nucleare definito anche termine di simmetria sarà

$$a_{sym}\frac{(N - Z)^2}{A} \quad (115)$$

La formula aggiornata sarà ora

$$BE = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z - 1)}{A^{1/3}} - a_{sym} \frac{(N - Z)^2}{A} \quad (116)$$

L'ultimo termine che manca è legato al fatto che i nucleoni tendono ad accoppiarsi con spin antiparallelo e quindi risulta che i nuclei con numero di nucleoni pari saranno più legati rispetto a quelli con numero negativo. Nella tabella sono raffigurati i valori che può assumere l'ultimo termine di correzione in base al numero di nucleoni che sono presenti nel materiale.

La formula finale ottenuta è quindi

$$BE = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z - 1)}{A^{1/3}} - a_{sym} \frac{(N - Z)^2}{A} + \delta \quad (117)$$

Ora possiamo finalmente calcolare la massa del nucleo

$$\begin{aligned} m_{nucl}^A - ZXc^2 &= Zm_p c^2 + Nm_n c^2 - BE_{nucl} \\ &= Zm_p c^2 + Nm_n c^2 - \left[a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z - 1)}{A^{1/3}} - a_{sym} \frac{(N - Z)^2}{A} + \delta \right] \end{aligned} \quad (118)$$

Questa formula è quella che viene chiamata *formula semi-empirica di massa*. È una formula empirica in quanto deriva da valori sperimentali ma non lo è totalmente in quanto sono stati inseriti

p	n	
↑↓	↑↓	$+δ$
↑	↑↓	0
↑↓	↑	
↑	↑	$-δ$

pure vari termini determinati con la teoria. Ciò che non abbiamo ancora specificato sono i valori dei termini moltiplicativi. Questi possono variare in base ai testi o ai fit da cui sono derivati, ogni set di valori possiede numeri consistenti tra loro.

$$\begin{aligned}
 a_v &= 15,8 \text{ MeV} \\
 a_s &= 18,3 \text{ MeV} \\
 a_c &= 0,714 \text{ MeV} \\
 a_{sym} &= 23,2 \text{ MeV} \\
 \delta &= 33,5 \text{ MeV}
 \end{aligned} \tag{119}$$

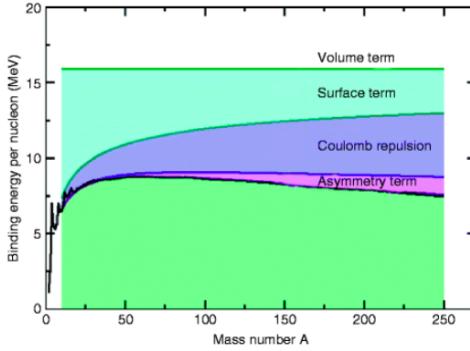


Figure 12: Modifiche all’energia di legame date da ogni termine

Limiti alla creazione dei nuclei La domanda a cui risponderemo in questo paragrafo è "perché non posso creare le combinazioni che voglio di portoni e neutroni ma solo alcune sono ammesse?". La risposta molto semplicemente è che la natura richiede che si minimizzi l’energia di massa.

Prendendo quindi la formula semi-empirica di massa e derivandola rispetto a Z ottengo

$$\frac{dM}{dZ} = m_p c^2 - m_n c^2 - 0 - 0 + a_c \frac{2Z - 1}{A^{1/3}} + a_{sym} \frac{[-4A + 8Z]}{A} \tag{120}$$

Ponendo questo differenziale uguale a zero ottengo la condizione richiesta di minimizzare la massa (siccome la massa di neutrone e protone sono circa uguali i due termini di massa si elidono)

$$Z \left(\frac{2a_c}{A^{1/3}} + \frac{8a_{sym}}{A} \right) = \frac{a_c}{A^{1/3}} + 4a_{sym} \tag{121}$$

Ciò che cerco di ricavare ora è Z che corrisponde al valore di Z che minimizzi la massa

$$Z = \frac{\frac{a_c}{A^{1/3}} + 4a_{sym}}{\frac{2a_c}{A^{1/3}} + \frac{8a_{sym}}{A}} \quad (122)$$

Questa formula mi restituisce quindi per ogni A il valore di Z che minimizza la massa. La formula finale è

$$Z = \frac{A}{2} \left[\frac{1}{1 + 0,008A^{2/3}} \right] \quad (123)$$

Si deduce che se A è piccolo allora $Z = A/2$ e quindi $N = Z$, mentre se A è grande allora $N > Z$. Intuitivamente questo serve a bilanciare la repulsione elettrostatica dei nuclei con alto numero di protoni.

Studiamo ora gli andamenti che si possono ottenere dalla formula semi-empirica di massa. Questa formula si può vedere come un polinomio del tipo

$$M = a + bZ + cZ^2 \quad (124)$$

Fissato A , la casistica a questo punto si divide in due, i nuclei che hanno numero di massa dispari e quelli con numero di massa pari.

Il caso più semplice si ha per A dispari. In figura sono rappresentati degli stati possibili con A

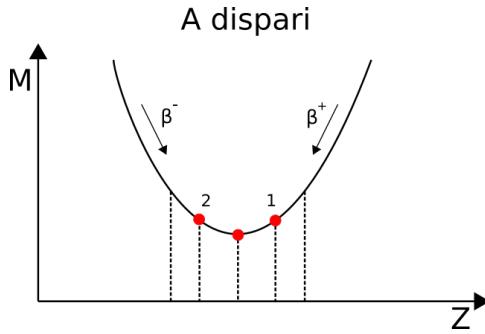


Figure 13: rappresentazione delle masse possibili al variare di Z con A pari

dispari, lo stato centrale è quello a massa minima e quindi anche quello più stabile. Procedendo verso lo stato 1 si troveranno i nuclei con un eccesso di protoni mentre al contrario procedendo verso 2 quelli con eccesso di neutroni. Ciò comporta che 2 avrà la tendenza a decadere nello stato centrale con decadimento β^- mentre 1 decadra naturalmente con decadimento β^+ . Nei punti in cui la parabola assume valori troppo elevati non si ha la presenza di stati.

Nel caso di A pari la faccenda si complica in quanto le parabole possibili sono due, una ad energia più alta e che corrisponde al caso di numero di protoni e neutroni entrambi dispari(Odd-Odd: come già visto sopra questo genera nuclei più instabili) e una a numero di neutroni e protoni pari ad energia più bassa (Even-Even: quindi con nuclei più stabili). Si ha quindi la possibilità di avere lo stato centrale o su una parabola o sull'altra portando a due casistiche differenti.

Nel grafico a sinistra possiamo notare che gli stati stabili sono due in quanto lo stato centrale si trova sulla parabola superiore mentre sulla parabola inferiore sono presenti due stati sullo stesso livello di energia e quindi entrambi con la stessa stabilità. Lo stato superiore in questo caso ha due possibilità di decadimento, verso 1 con decadimento β^+ o verso 2 con decadimento β^- . Nel caso per dire che lo stato 1 fosse più elevato di 2, la transizione da 1 a 2 non è impossibile ma altamente improbabile, in quanto pur essendo energeticamente favorevole richiederebbe un secondo

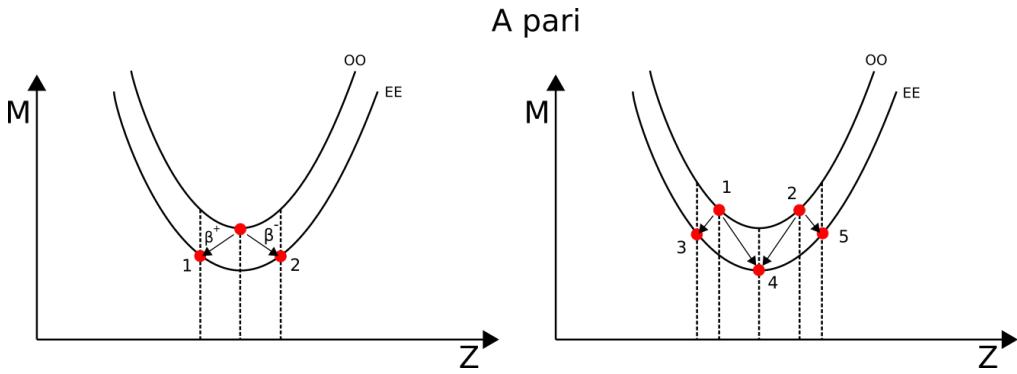


Figure 14: rappresentazione delle masse possibili al variare di Z con A dispari

decadimento β che richiede quindi una seconda probabilità di avvenimento. Un processo di questo tipo si chiama decadimento *doppio β* .

Nel grafico a destra è invece mostrato il caso in cui si abbia il nucleo centrale e nella curva più bassa (4), nella curva superiore vi sono invece due nuclei ad energia uguale. I nuclei 1 e 2 come si vede nel grafico avranno due possibilità di decadimento ciascuno, verso 3,4 e 5. Come nel caso precedente i decadimento da 3 e 5 verso 4 pur essendo energeticamente favorevoli sono improbabili in quanto decadimenti doppio β . I nuclei 3,4 e 5 sono quindi considerati tutti nuclei stabili.

La zona in cui non si ha la generazione di nuclei, sia provocata da un eccesso di neutroni che di protoni è dovuta al fatto che non è energeticamente favorevole avere nuclei piuttosto che le particelle slegate o un nucleo con numero di massa inferiore e delle particelle libere.



Se infatti la somma delle masse slegate a destra delle due reazioni sopra risulta minore della massa dell'atomo legato a sinistra la natura tenderà a dividere il nucleo. Per lo stesso principio i nuclei che sono troppo pesanti ovvero che possiedono semplicemente troppi nucleoni tenderanno ad emettere particelle α ; questo tipo di nuclei sono anche quelli che fanno la fissione nucleare ovvero che tenderanno a dividersi in due atomi a numero di massa inferiore.

3.2 Modello di Fermi

Questo modello a differenza di quello a goccia è un modello a particella singola, ovvero studia l'interazione di una particella con un potenziale generato dalle altre particelle piuttosto che vedere il sistema in generale come insieme di particelle. Questo perché i sistemi complessi sono difficili da calcolare e inoltre quasi mai si riesce a risolvere i calcoli in maniera analitica. Il modello di Fermi suppone che il nucleo è composto da due gas di fermioni, protoni e neutroni. I fermioni sono le particelle che soddisfano alla statistica di Fermi-Dirac, che afferma che due particelle non possono occupare lo stesso stato quantico. Il risultato di questa ipotesi iniziale sarà poi confermato dal modello. Trascuriamo l'interazione tra le singole particelle ma le consideriamo confinate in una buca di potenziale che ha delle dimensioni del nucleo. Questo potenziale è dato dall'interazione media con tutte le altre particelle, quindi in realtà il modello considera le iterazioni ma le approssima ad un potenziale generato proprio da tali interazioni. La buca di potenziale che confina i due gas è quindi generata dai gas stessi. Questa impostazione ci permetterà di fare delle ipotesi sulle proprietà che i nucleoni hanno all'interno del nucleo. Questo modello fa inoltre parte dei così-detti modelli a particelle indipendenti.

Supponiamo di avere due buche di potenziale, in quanto neutroni e protoni sono considerati particelle indipendenti quindi ognuno avrà la propria buca. La buca di potenziale dei protoni è meno profonda in quanto questi subiscono anche la repulsione coulombiana, questo ci fa capire un po' di più sul modello a goccia, se ricordiamo infatti si aveva che i nuclei più pesanti possedevano più neutroni a livello di stabilità, proprio a causa di questa repulsione.

Questo modello prevede che sia per i neutroni che per i protoni vi siano dei livelli energetici, occupati fino ad un livello massimo che è il *livello di Fermi*. Per ogni livello energetico posso sistemare al massimo due particelle con spin opposto, questo per il principio di esclusione di Pauli.

I parametri che caratterizzano questo sistema sono la profondità della buca di potenziale e il livello di Fermi (livello energetico più alto occupato).

Siccome i nucleoni nel nucleo non sono particelle relativistiche possono essere descritti con la meccanica quantistica non relativistica, ovvero quella che viene fatta nella triennale. Si possono quindi sfruttare le equazioni di Schroedinger. Vogliamo risolvere l'equazione per una buca di potenziale con energia potenziale

$$\begin{aligned} E_{pot} &= V_0 & r \leq a \\ &= 0 & r > a \end{aligned} \quad (126)$$

L'equazione di Schroedinger è indipendente dal tempo e corrisponde a

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} \psi + V_0 \psi = E \quad (127)$$

La risoluzione è

$$\frac{d^2}{dr^2} \varphi = -\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) \varphi \quad (128)$$

Per risolverlo bisogna notare che il termine

$$-\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) > 0$$

Perché V_0 è un'energia potenziale di confinamento e una buca di potenziale ha potenziale negativo (V_0 è un potenziale attrattivo). Quindi posso sostituire il tutto con una variabile reale positiva ottenendo

$$\frac{d^2}{dr^2} \psi + K^2 \psi = 0 \quad K = \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}} \quad (129)$$

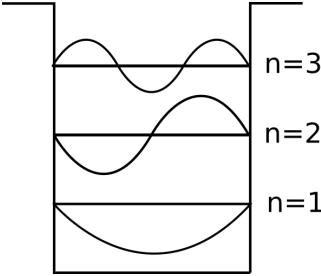
La soluzione (identica a quella del moto armonico) è

$$\psi = A \sin Kr + B \cos Kr \quad (130)$$

A cui devo poi porre le condizioni di annullamento in 0 e a .

$$\begin{aligned} \psi(0) &= 0 \rightarrow B = 0 & \psi = A \sin Kr \\ \psi(a) &= 0 \rightarrow Ka = n\pi \rightarrow K = n\frac{\pi}{a} \\ \rightarrow E &= \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m a^2} n^2 \end{aligned} \quad (131)$$

Questi sono quindi i livelli energetici consentiti all'interno della buca di potenziale, le funzioni d'onda corrispondenti saranno come in figura. Se la buca non fosse finita ci sarebbe un'estensione delle funzioni d'onda oltre le pareti della buca.



Stima della profondità della buca di potenziale Per capire la profondità della buca dobbiamo valutare il numero di stati nucleari nello spazio delle fasi in un volume V e con quantità di moto p . Lo spazio delle fasi è uno spazio a 6 dimensioni che comprende sia le coordinate spaziali che quelle riferite alla quantità di moto nelle tre direzioni. Per capire, è un unico spazio a 6 dimensioni che mi dice proprio l'estensione del sistema che sto studiando, quindi qual è lo spazio delle fasi occupato dal gas di neutroni e protoni. Il numero di nucleoni in funzione di p è dato da

$$dn(p) = \frac{V4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \quad (132)$$

dove V è il volume nelle coordinate spaziali, $4\pi p^2 dp$ è un guscio sferico compreso tra la sfera di raggio p e la sfera $p + dp$, $(2\pi\hbar)^3$ è lo spazio delle fasi occupato da ognuno degli stati quantici, in pratica è un volume di dimensione \hbar , quest'ultima quantità è legata al principio d'indeterminazione $\Delta p \Delta x \sim \hbar$ (ogni stato quantico occupa dello spazio delle fasi un volume pari ad \hbar^3). Per calcolare il numero totale di stati devo integrare sapendo che il volume del nucleo è

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad R = R_0 A^{3/3}$$

Il numero totale di nucleoni sarà dunque

$$\begin{aligned} n &= 2 \int_0^{p_F} n(p) dp = \frac{2V4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} pdp \\ &= \frac{V}{\pi^2\hbar^3} \left[\frac{p_F^3}{3} \right] \end{aligned} \quad (133)$$

Questo è valido sia per i protoni che per i neutroni, anche se poi soddisfano indipendentemente a due statistiche diverse.

$$N = \frac{V}{3\pi^2\hbar^3} (p_F^n)^3 \quad Z = \frac{V}{3\pi^2\hbar^3} (p_F^p)^3 \quad (134)$$

Ora per semplificarci la vita consideriamo un nucleo con $N = Z = A/2$. Questo non cambierà le considerazioni finali. Ciò che si ottiene è

$$\begin{aligned} p_F^3 &= \frac{A}{2} \frac{3\pi^2\hbar^3}{\frac{4}{3}\pi R_0^3 A} \\ \rightarrow p_F &= \frac{\hbar}{R_0} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} = 250 \frac{MeV}{fm} \end{aligned} \quad (135)$$

Dato il momento di Fermi possiamo ricavare anche l'energia di Fermi

$$E_F = \frac{p^2}{2M} = \frac{(250MeV/c)^2}{2 \times 940MeV/c^2} \approx 33MeV \quad (136)$$

Questa energia rappresenta l'ultimo livello occupato del nucleone ma non corrisponde alla profondità della buca di potenziale, per ottenere questa altezza è necessario infatti sommare all'energia di Fermi l'energia di legame media per nucleone corrispondente a $\sim 7MeV$. Si ha quindi che il potenziale nonché la profondità della buca è pari a

$$V_0 = 33 + 7MeV = 40MeV \quad (137)$$

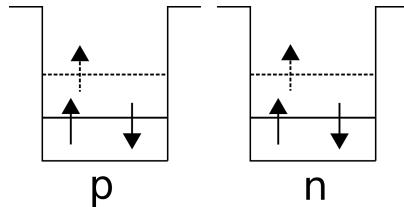
Questo modello è uguale a quello degli elettroni nel metallo ma le grandezze sono più piccole ($\sim 10eV$). Da notare che questa è la buca di potenziale per nuclei con numero qualsiasi di nucleoni, l'energia di Fermi è quindi sempre uguale ma ciò che cambia sarà la spaziatura tra i livelli che diventa più piccola nel caso di nuclei pesanti.

Considerazioni Con questo modello si riescono a spiegare i nuclei più semplici.

- Un argomento che si può esemplificare con il modello a gas di Fermi è per dire la nucleosintesi primordiale. Nei primi minuti dell'universo si sono sintetizzati l'idrogeno e l'elio ma per gli elementi più pesanti si è dovuto attendere 200 milioni di anni e la sintesi delle prime stelle. Questo immenso gap temporale si può spiegare grazie a questo modello. Nelle buche di potenziale infatti l'elio 4 è composto da due neutroni e due protoni.

$$^4He_2 \quad 2n + 2p \quad (138)$$

In questa configurazione il nucleo è estremamente stabile, se si avesse però un quinto nucleone (protone o nucleone) questo andrebbe ad occupare un livello energetico più alto.



Quello che la natura ci mostra è però che non esistono nuclei stabili con numero di massa pari ad $A = 5$. Vuol dire che semplicemente la nucleosintesi degli elementi si è fermata all'elio, se fosse esistito un terzo elemento l'evoluzione dell'universo sarebbe stata molto diversa.

- Un altro effetto spiegabile è il decadimento β , in particolare il motivo per cui il protone risulta stabile fuori dal nucleo ma può decadere nel caso sia all'interno del nucleo. Ricordiamo ancora i decadimenti β

$$\begin{aligned} \beta^- : n &\longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \\ \beta^+ : p &\longrightarrow n + e^+ + \nu_e \end{aligned} \quad (139)$$

Questo vuol dire semplicemente continuando a mettere protoni oltre il numero di neutroni otterrò nel livello dei neutroni un livello libero e questo causa il decadimento.

Al di fuori del nucleo non può avvenire in quanto il $Q = M_i - M_f$ della reazione non è favorevole (è negativo), ovvero l'energia di massa del protone fuori dal nucleo è minore dei prodotti della reazione mentre all'interno del nucleo la questione è opposta.

$$\beta^+ \quad Q = m_p - m_n - m_{e^+} - m_\nu \quad (140)$$

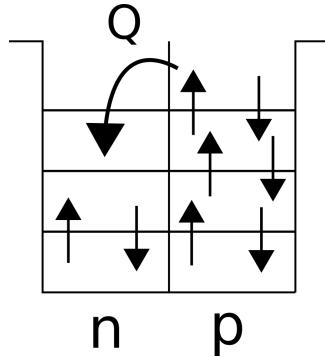


Figure 15: Decadimento del protone nel nucleo

Riportiamo quindi le masse del decadimento

$$\begin{aligned} m_p &= 938,2 \frac{MeV}{c^2} \\ m_n &= 939,5 \frac{MeV}{c^2} \\ m_e &= 0,511 \frac{MeV}{c^2} \end{aligned} \quad (141)$$

Il Q della reazione risulta quindi essere in questo caso

$$Q^{\beta^+} = -1,8 MeV \quad (142)$$

Questa è una reazione endotermica e quindi non avviene spontaneamente. Il Q del decadimento del neutrone fuori dal nucleo è invece

$$Q^{\beta^-} = m_n - m_p - m_{e^-} = 0,8 MeV \quad (143)$$

Il neutrone è stabile all'interno del nucleo per il principio di esclusione di Pauli che ne impedisce il decadimento, si ha però, come per il protone, che un eccesso di neutroni porta comunque al decadimento.

- Nel modello a goccia abbiamo calcolato il libero cammino medio del nucleone nel nucleo corrispondente a $l = 0,21 fm$. Nel modello di Fermi invece abbiamo considerato i nucleoni come un gas di particelle libere nel nucleo cioè prive di interazioni.

Queste due visioni apparentemente contrastanti si conciliano in quanto se non ci sono stati liberi le particelle non collidono tra loro (una collisione comporta uno scambio di energia che nella stabilità non vi può essere), quindi non è propriamente vero che il libero cammino medio è una frazione di Fermi poiché con tutti gli stati occupati le particelle devono considerarsi libere.

3.3 Modello a shell

L'evidenza sperimentale che portò alla costruzione di questo modello si basa sull'analogia con il modello a shell elettroniche dell'atomo. Facendo un grafico dell'energia di estrazione di un nucleone in funzione del numero atomico, si vide che aveva lo stesso andamento del grafico del lavoro di estrazione degli elettroni. Sorge spontaneamente il dubbio che quindi possa avere una struttura a shell pure il nucleo.

Ci sono un paio di differenze tra il modello elettronico e nucleare

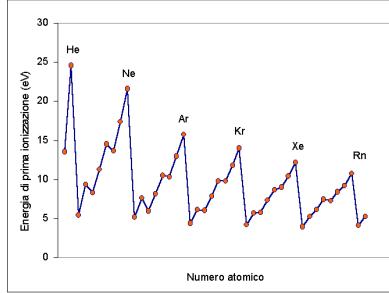


Figure 16: Lavoro di estrazione elettronico in funzione del materiale

- La prima consiste nell'ordine di grandezza, infatti, mentre per gli elettroni si parla di eV nel caso dei nuclei di MeV , consistentemente con quanto già visto.
- Il secondo è la posizione dei picchi. Nel caso degli elettroni i picchi corrispondono ai gas nobili, nel caso dei nuclei i picchi corrispondono a 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 (si fa riferimento sia al numero di neutroni che di protoni). Per esempio con il 20 si può avere il Calcio 40 $^{40}_{20}Ca$.

Ciò che non fu subito chiaro è come mai si hanno questi valori di massimo, infatti la struttura dell'atomo rende abbastanza evidente il motivo (regola dell'ottetto e livelli energetici delle shell), mentre nel nucleo non c'è un potenziale ben definito che vada a creare dei livelli energetici così chiari in quanto ogni nucleone interagisce con gli altri (e come visto dal modello a goccia con un numero di legami differente).

Per risolvere questo problema bisogna considerare un nucleone e approssimare le interazioni con un potenziale medio.

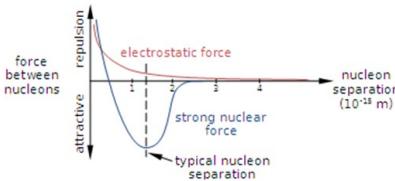


Figure 17: Potenziale nucleare in funzione del raggio

Come si può vedere dal grafico il potenziale nucleare dovrà avere una forma in cui a valori molto bassi di raggio non implode su se stesso, e quindi valore positivo (potenziale repulsivo) ma che poi scende per creare una buca di potenziale negativa che arriva ad azzerarsi quando il raggio è pari al raggio nucleare, il tutto restando sempre in opposizione al potenziale elettrostatico. Per approssimare questa forma si usa il potenziale di Saxon-Woods dove la forza repulsiva iniziale viene ignorata e la forma è a metà tra la curva e una buca di potenziale rettangolare.

Il potenziale di Saxon-Woods ha formula

$$V = -\frac{V_0}{1 + \frac{\exp(r-R)}{a}} \quad (144)$$

Dove $V_0 = 50 MeV$, $R = R_0 A^{1/3}$ e $a = 0,56 fm$.

In particolare questo potenziale si differenzia dalla buca di potenziale classica nella regione tra i $3 fm$ e i $7 fm$ ed è proprio questa regione che determina le caratteristiche dei livelli energetici del nucleo.

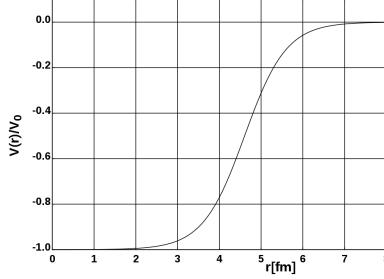


Figure 18: Potenziale di Saxon-Woods

Livelli atomici I livelli atomici sono caratterizzati da 4 numeri quantici: n, L, m, s.

$$\begin{aligned} & \forall n \\ & l = 0 \rightarrow n - 1 \\ & m \quad -l < m < l \\ & s = \pm 1/2 \end{aligned} \tag{145}$$

Le shell atomiche si formano quindi come

$$\begin{aligned} n = 1 \quad l = 0 \quad m_s = 0 \quad s = \pm 1/2 \\ n = 2 \quad l = 0 \quad m_s = 0 \quad s = \pm 1/2 \\ l = 1 \quad m = -1, 0, +1 \quad s = \pm 1/2 \end{aligned} \tag{146}$$

Si ha quindi che nel livello corrispondente a $n = 1$ si possono avere solo 2 elettroni, mentre nel caso di $n = 2$ posso avere 2 elettroni nel livello $l = 0$ ma anche 6 nel livello $L = 1$ il che mi porta ad avere 8 elettroni totali nel livello $n = 2$. Continuando intuitivamente si vede che per esempio il livello $n = 3$ ospiterà 18 elettroni. Questo restituisce esattamente le configurazioni dei primi 3 gas nobili corrispondenti a $Z = 2, 10, 28$ ovvero i primi tre livelli completi.

Nei nuclei abbiamo visto che questi valori non coincidono con i livelli elettronici infatti i valori sono $Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$. Questo è dovuto al fatto che nei nuclei l non è limitato a $n - 1$ e inoltre i nuclei hanno la tendenza ad accoppiare lo spin e il momento angolare introducendo un momento

$$j = L + s$$

che può assumere i valori

$$j = 1/2, 3/2, 5/2, 7/2, \dots$$

Si ottiene così che il numero di nucleoni in funzione di j sarà

$$\begin{array}{ll} j & n \\ \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & 4 \\ \frac{5}{2} & 6 \\ \frac{7}{2} & 8 \end{array} \tag{147}$$

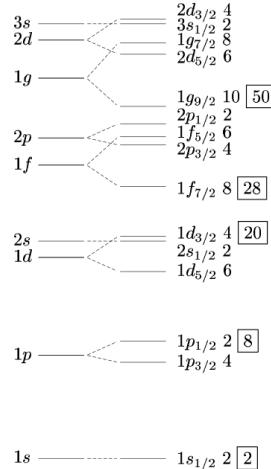


Figure 19: Struttura delle shell nucleoniche con evidenza sui livelli stabili

La regola generale è quindi

$$j = \frac{X}{2} \rightarrow n = X + 1 \quad (148)$$

La nomenclatura è la stessa della fisica atomica. $l = 0, 1, 2, 3, 4$ corrispondono rispettivamente a s, p, d, f, g . Per esempio uno stato quantico potrà essere

$$1p^{3/2} \quad (149)$$

dove 1 è il numero quantico principale, p corrisponde a $l = 1$ e $3/2$ indica che in questo stato potrò avere 4 particelle. Dalle evidenze sperimentali è stato possibile quindi trovare la configurazione di shell del nucleo.

Quella rappresentata in figura è la schematizzazione dei livelli energetici del nucleo, e si può notare che quindi i nucleoni all'interno del nucleo:

- non sono posizionati casualmente;
- hanno momenti angolari;
- soddisfano la statistica di Fermi e di conseguenza anche al principio di esclusione di Pauli.

4 Applicazioni

4.1 Risonanza Magnetica Nucleare

La risonanza magnetica è una tecnica di imaging medico non invasiva. Si basa sul fatto che ad ogni protone è associato un piccolo campo magnetico associato al dipolo. Ponendo questi dipoli sotto l'azione di un campo magnetico forte, si avrà l'allineamento con il campo, sia nella stessa direzione che i direzione opposta.

$$E = -\bar{\mu} \cdot \bar{B} \quad (150)$$

Ciò che si otterrà è che l'energia sarà minore se il campo e il dipolo sono solidali ($\mu \uparrow B \uparrow$), mentre sarà maggiore nel caso contrario ($\mu \uparrow B \downarrow$). La differenza di energia è pari a $\Delta E = \mu B$. La risonanza in campo magnetico sfrutta esclusivamente nucleoni ma in altri ambiti possono essere usati anche gli elettroni e dalla formula sopra si può vedere come sia diversa nei due casi.

I valori del magnetone di Bohr e del magnetone nucleare sono

$$\begin{aligned} \mu_B &= \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,3 \times 10^{-24} \frac{j}{T} = 5,8 \times 10^{-5} \frac{eV}{T} \\ \mu_N &= \frac{e\hbar}{2m_p} = 5,0 \times 10^{-27} \frac{j}{T} = 3,8 \times 10^{-8} \frac{eV}{T} \end{aligned} \quad (151)$$

La risonanza magnetica funziona che una volta applicato un campo magnetico i livelli energetici con spin up e down si dividono e fornendo una radiofrequenza con energia pari alla differenza di energia generata il mio campione assorberà energia, e io sono sensibile all'energia assorbita.

Dato un elettrone se applico un campo $B=0,335T$, ottengo che la differenza di energia sarà pari a $\Delta E = 6,22 \times 10^{-24}j$. In questo caso la frequenza coinvolta (assorbita dall'elettrone) è pari a $\nu = 9,4GHz$, ovvero nel campo delle microonde.

Nel caso del protone, ovvero quello usato in campo medico, c'è la necessità di applicare un campo magnetico molto più alto per portare ad una separazione sufficientemente visibile. Applicando un campo $B = 2T$ ottengo $\Delta E = 5,64 \times 10^{-26}j$, vi è quindi la necessità di una radiofrequenza dell'ordine di $\nu = \frac{\Delta E}{h} = 85MHz$.

Quello che succede è che pongo il paziente in questi campi magnetici e faccio passare una radiofrequenza. L'assorbimento di questa radiofrequenza avviene in funzione della densità del materiale biologico. Una cosa di cui devo tener conto è l'agitazione termica dei protoni, posso immaginare che maggiore è l'agitazione termica minore sarà il contrasto dell'immagine, una soluzione sarebbe abbassare la temperatura ma non potendo congelare il paziente non resta che sfruttare campi magnetici molto forti($\Delta E/KT$). Il segnale che io rivelò è proporzionale alla densità di protoni, le zone più chiare sono quelle a più elevata densità di protoni. Per avere una risoluzione spaziale, ovvero una tridimensionalità, applico un gradiente di campo magnetico minimo che produrrà una risonanza diversa a diverse frequenze di radiofrequenza generando una variazione ulteriore che mi permette di ampliare l'imaging. Per andare ad aumentare il contrasto andrò a vedere la risposta temporale del campione. Quando irradio il tessuto i protoni assorbendo energia passeranno da uno stato all'altro (spin-flip), se poi io fermo la radiazione e lascio il tessuto tornare allo stato fondamentale potrò poi misurare il tempo impiegato per la diseccitazione e avrò quindi informazioni addizionali sul tessuto che circonda il materiale in analisi.

5 Potenziale nucleare

Studiamo il potenziale nucleare considerando il nucleo del *deuterio*, chiamato *deutone*, composto da un protone ed un neutrone.

La Cromodinamica Quantistica (QCD) è una teoria quantistica di campo e relativistica, è una teoria fondamentale che spiega l'interazione tra particelle elementari. I nucleoni, i componenti del nucleo, protone e neutrone, sono a loro volta composti da *quark*, i quali sono particelle elementari prive di dimensione e con carica frazionaria

- quark up u ha carica $+\frac{2}{3}$
- quark down d ha carica $-\frac{1}{3}$

i nucleoni sono composti da 3 quark ciascuno e seguono la regola per cui

- il **protone** è composto da due quark *up* ed un quark *down*, ha quindi carica totale unitaria:

$$u + u + d = +\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1$$

- il **neutrone** è composto da due quark *down* ed un quark *up*, ha quindi carica totale nulla:

$$d + d + u = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

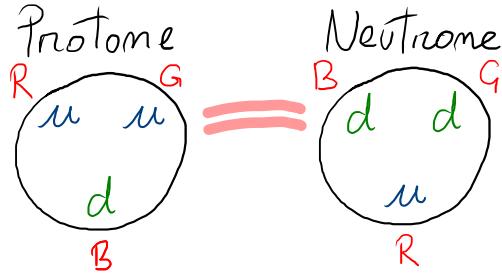


Figure 20: CAPTION

Carica di colore I quark hanno anche un secondo tipo di carica: la *carica di colore* che regola l'*interazione forte* tra i quark. La carica di colore può essere di tre tipi: Red (R), Green (G), Blue (B). La somma delle tre cariche di colore dei rispettivi quark di un nucleone è nulla

$$R + G + B = 0 \quad (152)$$

un quark rosso (R) attira un quark verde (G) che attira un quark blu (B), mentre i quark dello stesso colore si respingono. La teoria fondamentale della QCD esprime come l'interazione nucleare si possa interpretare come la carica di colore residua.

Il potenziale tra nucleoni è un potenziale di interazione del tipo Nella prima parte del potenziale si ha che per piccole distanze è *positivo*, ovvero repulsivo, poiché altrimenti i nuclei privi di dimensione (?) collasserebbero, ciò è legato al Principio di Esclusione di Pauli, nella seconda parte il potenziale è *attrattivo* ed è ciò che "intrappola" i nucleoni all'interno del nucleo, inoltre oltre alla distanza data da $R = R_0 A^{\frac{1}{3}}$ la forza nucleare è nulla.

Il Deutone è il nucleo del deuterio, è composto da un protone e un neutrone ed è il più semplice nucleo su cui studiare la forza nucleare. Del deutone conosciamo l'energia di legame $E_B = -2.225 \text{ MeV}$ e la distanza tra i nucleoni $R = 2.1 \text{ fm}$ ottenuti sperimentalmente. Conosciamo inoltre che lo stato legato del deutone è quello in cui gli spin sono paralleli, dato ottenuto dalla misurazione del momento magnetico, per cui lo spin del deutone è $S = 1$. Uno stato con spin antiparallelo corrisponde ad uno stato non legato, quindi fuori dalla buca di potenziale. L'interazione nucleare dipende fortemente dallo spin.

Cerco ora il valore della buca di potenziale V_0 , sommo l'energia cinetica KE con l'energia potenziale PE

$$\begin{aligned} E &= KE + PE \\ E_B &= KE + V_0 \end{aligned} \quad (153)$$

scrivendo la funzione d'onda trovo il legame con il potenziale V

$$\begin{aligned} H\psi &= E\psi \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2}\psi + V\psi &= E\psi \end{aligned} \quad (154)$$

Il potenziale di questa buca è

$$V = \begin{cases} V_0 & \text{zona 1: dentro la buca} \\ 0 & \text{zona 2: altrove} \end{cases} \quad (155)$$

Scrivo l'equazione di Schrodinger nella zona 1, in cui ho $V = V_0$

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dr^2} + V_0\psi &= E\psi \\ \frac{d^2\psi}{dr^2} &= -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\psi \\ \frac{d^2\psi}{dr^2} &= -K^2\psi \quad \text{con } K^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0) \end{aligned} \quad (156)$$

la soluzione ha un andamento oscillatorio ed in generale è

$$\psi(r) = A \sin Kr + B \cos Kr \quad (157)$$

calcolo A e B imponendo le condizioni al contorno:

$$\psi(0) = 0 \Rightarrow \psi(0) = A \sin 0 + B \cos 0 = 0 \Rightarrow B = 0 \quad (158)$$

per cui diventa

$$\psi = A \sin Kr \quad (159)$$

Scrivo l'equazione di Schrodinger nella zona 2, in cui ho $V = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dr^2} &= -\frac{2m}{\hbar^2} E\psi \\ \frac{d^2\psi}{dr^2} &= L^2\psi \quad \text{con } L^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} E \end{aligned} \quad (160)$$

la soluzione ha un andamento esponenziale ed in generale è

$$\psi(r) = C e^{Lr} + D e^{-Lr} \quad (161)$$

di cui so che deve appartenere allo spazio di Hilbert, per cui la parte e^{Lr} non è soluzione in quanto non verifica la condizione $|\psi|^2 < \infty$, per cui diventa

$$\psi(r) = De^{-Lr} \quad (162)$$

Eguagliando le funzioni d'onda 159 e 162 e le loro derivate in corrispondenza della frontiera $r = R$ trovo

$$\begin{cases} \psi_1(R) = \psi_2(R) \\ \psi'_1(R) = \psi'_2(R) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \sin KR = De^{-LR} \\ KA \sin KR = -LDe^{-LR} \end{cases} \quad (163)$$

dividendo una con l'altra le equazioni del sistema trovo la relazione seguente in funzione dei parametri K ed L

$$\begin{aligned} K &= \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)} \in \mathbb{R} \\ L &= \sqrt{-\frac{2m}{\hbar^2}E} \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (164)$$

che quindi diventa

$$\begin{aligned} K \cot KR &= -L \\ \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)} \cot \left[R \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)} \right] &= -\sqrt{-\frac{2m}{\hbar^2}E} \end{aligned} \quad (165)$$

da cui, inserendo i dati sperimentali,

$$\begin{aligned} E &= -2.225 \text{ MeV} \\ R &= 2.1 \text{ fm} \end{aligned} \quad (166)$$

e la massa corrisponde alla massa ridotta tra il protone ed il neutrone

$$m = \frac{m_n m_p}{m_n + m_p} \simeq \frac{m_p^2}{2m_p} = \frac{m_p}{2} \quad (167)$$

trovo il valore della buca di potenziale

$$V_0 = -36 \text{ MeV} \quad (168)$$

(non è ben noto come sia davvero possibile risolvere l'equazione del tipo $x \cot ax = b$ ma ok, prendiamo atto del risultato precedente e andiamo avanti).

Risulta quindi che la buca di potenziale del Deutone è profonda -36 MeV di cui solo -2.225 MeV sono di energia potenziale, *di legame*, mentre circa -34 MeV sono di energia cinetica.

Per il ferro $^{56}_{26}Fe$ ad esempio si ha un'energia di legame media di circa 8 MeV/nucleone, mentre per il deutone 2_1He si ha circa 1.1 MeV/nucleone.

Troviamo tre punti notevoli della funzione d'onda:

- Quanto vale la funzione d'onda nel punto $r = R$? In tale punto la funzione vale $\sin KR$ per cui conoscendo i dati trovo

$$\begin{aligned} R &= 2.1 \text{ fm} \\ K &= \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)} \simeq 0.9 \text{ fm}^{-1} \\ \sin KR &= \sin(0.9 \cdot 2.1) = 0.95 \end{aligned} \quad (169)$$

- In che punto si ha il valore massimo della funzione d'onda?

$$\sin Kr = 1$$

$$Kr = \frac{\pi}{2} \quad (170)$$

$$r = \frac{\pi}{2} \frac{1}{K} \simeq 1.74 \text{ fm}$$

- In che punto la funzione d'onda vale circa $\frac{1}{3}$?

$$e^{-Lr} \quad L = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \rightarrow \frac{1}{L} = 4.4 \text{ fm} \quad (171)$$

$$e^{-Lr} \rightarrow e^{-\frac{L}{L}} = e^{-1} = 0.37$$

La funzione d'onda si estende di fuori della buca di potenziale, a distanze oltre i 5 fm, questo perché il deutone è uno stato poco legato. Nel caso della molecola di idrogeno l'atomo è molto ben localizzato all'interno della buca di potenziale.

5.1 Collisione neutrone protone

Studiamo ora il potenziale nucleare partendo dalla collisione tra protone e neutrone.

La produzione di un fascio di neutroni la collisione di un fascio di protoni contro un bersaglio si ottengono molteplici particelle, applicando un potenziale elettrico dopo il target si "selezionano" quelle cariche e quelle neutre, che continueranno inalterate nel loro moto, come i neutroni ed i pioni neutri o π_0 . Con una buona definizione temporale posso anche discriminare i neutroni in base all'energia, i primi saranno i più energetici.

Il potenziale di interazione tra un neutrone ed un target sarà del tipo visto nei paragrafi precedenti, quindi una buca di potenziale finita. I neutroni incidenti sono liberi, per cui avranno energia maggiore rispetto allo zero della buca di potenziale. L'equazione che descrive il neutrone è

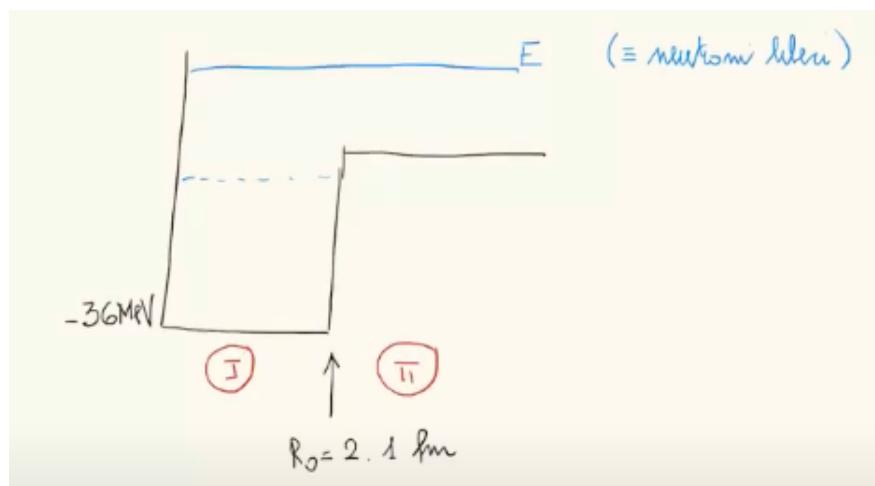


Figure 21: CAPTION

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dr^2} + V\psi &= E\psi \\
\text{zona 1} \quad \frac{d^2\psi}{dr^2} &= -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\psi \\
\text{zona 2} \quad \frac{d^2\psi}{dr^2} &= -\frac{2m}{\hbar^2}\psi
\end{aligned} \tag{172}$$

noto ora che il termine $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)$ è positivo ed anche il termine $L^2 = \frac{2m}{\hbar^2}$ è positivo. In entrambe le zone si ha quindi un andamento oscillatorio della funzione d'onda

$$\begin{aligned}
\text{zona 1} \quad \psi &= A \sin kr + B \cos kr = A \sin kr \\
\text{zona 2} \quad \psi &= C \sin kr + D \cos kr = E \sin(Lr + \delta)
\end{aligned} \tag{173}$$

applicando le condizioni al bordo e di continuità trovo

$$\begin{aligned}
A \sin kr_0 &= E \sin(Lr_0 + \delta) \\
kA \cos kr_0 &= LE \cos(Lr_0 + \delta) \\
\Rightarrow k \cot kr_0 &= L \cot(Lr_0 + \delta)
\end{aligned} \tag{174}$$

dove ricordando i valori di

$$\begin{aligned}
k &= \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)} \\
L &= \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E} \\
r_0 &= 2.1 \text{ fm}
\end{aligned} \tag{175}$$

vedo che il solo termine da ricavare rimane δ .

La sezione d'urto differenziale e totale sono

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{k^2} \sin \delta \\
\sigma_{tot} &= \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta
\end{aligned} \tag{176}$$

da queste espressioni teoriche si ricava

$$\sigma_{teorico} = 5 \text{ barn} \quad 1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2 \tag{177}$$

e dall'esperimento si ricava

$$\sigma_{sperimentale} = 20 \text{ barn} \tag{178}$$

sussiste quindi una grossa discrepanza tra i due valori.

Il potenziale visto sopra è un potenziale attrattivo ed è quello che permette di avere uno stato legato con spin parallelo con $S = 1$, stato di tripletto in cui compaiono tre contributi $1\hbar, 0, -1\hbar$, mentre $S = 0$ si ha solo nel caso con spin antiparalleli.

La sezione d'urto totale è data dalla seguente relazione, nella trattazione precedente abbiamo considerato solo il primo termine

$$\begin{aligned}
\sigma_{tot} &= \frac{3}{4}(\delta_{S=1}) + \frac{1}{4}(\delta_{S=0}) \\
20 &= 0.75 \cdot 5 + 0.25 \cdot \sigma_{S=0} \\
\sigma_{S=0} &= 65 \text{ barn}
\end{aligned} \tag{179}$$

da cui abbiamo ricavato dal punto di vista sperimentale che l'interazione nucleare ha una forte dipendenza dallo spin relativo alle due particelle. Quindi non si può trascurare lo spin nella trattazione di questa interazione.

5.2 ultima parte

Mettendo su un grafico la δ in funzione dell'energia E , trovo due curve che rappresentano la dipendenza per $S = 1$ e per $S = 0$, si osserva che per una determinata energia entrambi gli andamenti cambiano di segno, tale energia è pari a 300 MeV

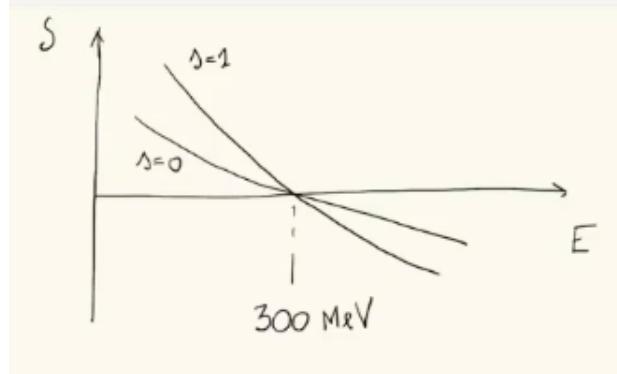


Figure 22: Andamento del parametro δ in funzione dell'energia, in relazione allo spin 0 e spin 1

$$\delta_{tot} = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta \quad (180)$$

Studiando i parametri in funzione del potenziale V_0 osservo che,

$$V_0 < 0 \Rightarrow k > L \Rightarrow \lambda_k < \lambda_L \text{ dove } k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (181)$$

dati

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)} \quad L = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E} \quad (182)$$

graficando la funzione d'onda ψ in funzione della distanza r vedo che le due zone devono essere unificate imponendo l'uguaglianza e che il parametro δ permette ciò. In particolare presi due punti

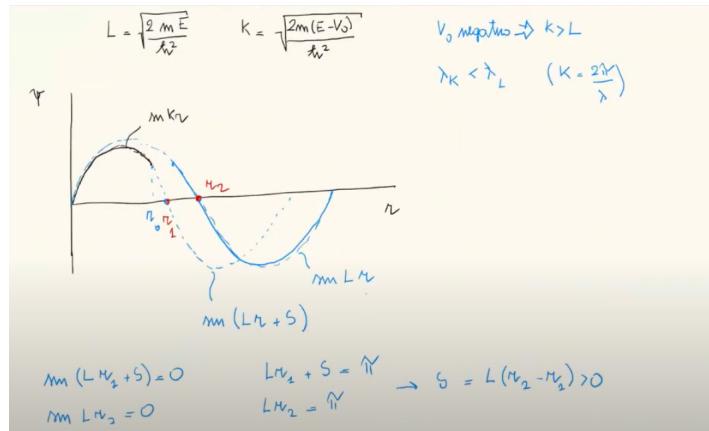


Figure 23: Rappresentazione della funzione d'onda

r_1 ed r_2 intersezioni tra il grafico e l'asse delle ascisse, cioè dove la funzione si annulla, trovo le

relazioni

$$\begin{aligned}\sin(Lr_1 + \delta) = 0 &\Leftrightarrow Lr_1 + \delta = \pi \\ \sin(Lr_2) = 0 &\Leftrightarrow Lr_2 = \pi\end{aligned}\quad (183)$$

da cui

$$\delta = L(r_2 - r_1) > 0 \quad (184)$$

Supponiamo che il potenziale abbia un andamento del tipo la descrizione matematica sarà

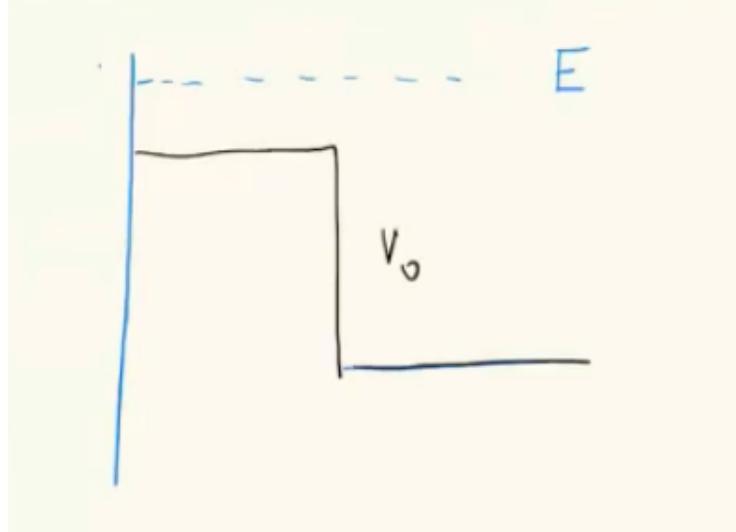


Figure 24: Rappresentazione dell'andamento del potenziale

equivalente alle precedenti, e si ottiene

$$\begin{aligned}\psi_1 &= A \sin kr \\ \psi_2 &= E \sin(Lr + \delta)\end{aligned}\quad (185)$$

ma in questo caso il potenziale è positivo $V_0 > 0$ per cui

$$L > k \Rightarrow \lambda_L < \lambda_k \quad (186)$$

cercando dove le funzioni si annullano trovo

$$\begin{aligned}\sin Lr_1 = 0 &\Leftrightarrow Lr_1 = \pi \\ \sin Lr_2 = 0 &\Leftrightarrow Lr_2 + \delta = \pi\end{aligned}\quad (187)$$

da cui

$$\delta = L(r_1 - r_2) < 0 \quad (188)$$

tornando al grafico 22 vedo che a basse energie ($E < 300$ MeV), per cui delta è maggiore di zero, si ha un potenziale attrattivo, mentre ad energie maggiori, per cui delta è negativo, si ha un potenziale repulsivo.

Possiamo allora caratterizzare completamente il potenziale nucleare,

$$r_\alpha \sim 0.5 \text{ fm} \quad R_0 \sim 2.1 \text{ fm} \quad (189)$$

per cui tra 0 e r_α il potenziale è positivo (repulsivo) e tra r_α ed R_0 è negativo (attrattivo). All'interno del nucleo le particelle si dispongono in modo ordinato e non si comprimono, la densità in funzione del numero atomico è costante, è satura. Quindi aumentando il numero di massa aumenta il volume del nucleo, poiché la densità è costante. *Il volume di un nucleo è direttamente legato al numero di nucleoni.*

6 Decadimenti nucleari

La formula semi-empirica di massa, equazione 118 nei capitoli precedenti, esprime la stabilità o instabilità dei nuclei nel caso in cui ci sia un'abbondanza di neutroni o di protoni. Per basi numeri atomici il numero di protoni e di neutroni si equivale, aumentando il numero di massa i nuclei tendono ad avere più neutroni che protoni ed in particolare i nuclei stabili e arrivano ad un numero atomico di circa 80 ed un numero di neutroni di circa 110. Tutti gli atomi con elevato numero atomico e di massa sono instabili, come ad esempio l'uranio che ha numero atomico 92 ed è un elemento instabile che si trova in natura. Il decadimento dei nuclei avviene spontaneamente in

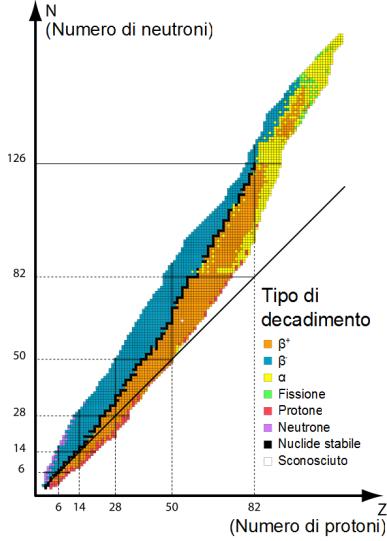


Figure 25: Il grafico rappresenta per quali combinazioni di neutroni e protoni si hanno atomi stabili. alcune circostanze

- il nucleo ha troppi neutroni, allora si ha un processo di decadimento beta β^-



dopo il decadimento si ha un atomo della stessa specie X. Questo processo è descritto in dettaglio da un decadimento di un neutrone

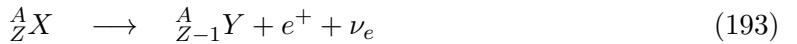


a livello di quark tale processo consiste nella conversione di un quark down in un quark up



mediato dal bosone W , mediatore della forza debole.

- il nucleo può avere troppi protoni, si ha allora un processo di decadimento beta β^+



dopo il decadimento si ha un atomo di una diversa specie atomica. Nel dettaglio vediamo che questo processo è descritto dal decadimento di un protone



e a livello di quark



3. se ci sono troppi nucleoni, quindi siamo nella parte alta del grafico, i nuclei tendono a subire un processo di decadimento alpha α , una particella alpha è un nucleo di Elio



4. il nucleo potrebbe avere anche troppa energia, quindi nel caso di un nucleo eccitato X^* , si ha emissione di radiazione elettromagnetica chiamata *radiazione gamma*



5. nel caso in cui le energie di eccitazione siano molto elevate si può avere decadimento per *fissione*

Le leggi che descrivono un decadimento impongono la conservazione di

- energia
- quantità di moto
- carica elettrica
- numero di nucleoni
- numero di leptoni

la massa invece non si conserva nei processi di decadimento.

esempio utilizzando la formula semi-empirica di massa si verifichi se il decadimento α del ${}_{92}^{238}U$ sia possibile energeticamente.

La massa totale iniziale del sistema deve essere maggiore della massa totale finale, allora il processo è esotermico.



(l'elemento figlio di questa reazione è un isotopo del Torio ${}_{90}^{232}Th$, ma non è importante ai fini della trattazione) dobbiamo calcolare il Q della reazione e ci chiediamo se è maggiore di zero

$$Q = M(A, Z) - M(A - 4, Z - 2) - M({}_2^4 He^{++}) > 0 \quad (199)$$

la massa dell'atomo iniziale equivale a

$$M(A, Z) = ZM_H + (A - Z)M_n - B(A, Z) \quad (200)$$

dove B rappresenta l'energia di legame quindi il calore nella reazione è

$$\begin{aligned} Q &= -B(A, Z) + B(A - 4, Z - 2) + B({}_2^4 He^{++}) \\ &= [-1807.5 + (1784 + 32.85)] MeV = 9.35 MeV > 0 \end{aligned} \quad (201)$$

risulta quindi positivo, per cui il decadimento alpha è energeticamente possibile, anzi avviene spontaneamente; questo calcolo non ci dice nulla però sulla probabilità che avvenga. La natura tende a minimizzare la massa.

Ci si può divertire con un programma in MathLab delle slide calcolando l'energia di legame per tutti i nuclei... si trova l'andamento del calore Q emesso/assorbito dalla reazione in funzione del numero atomico, vedi figura 26

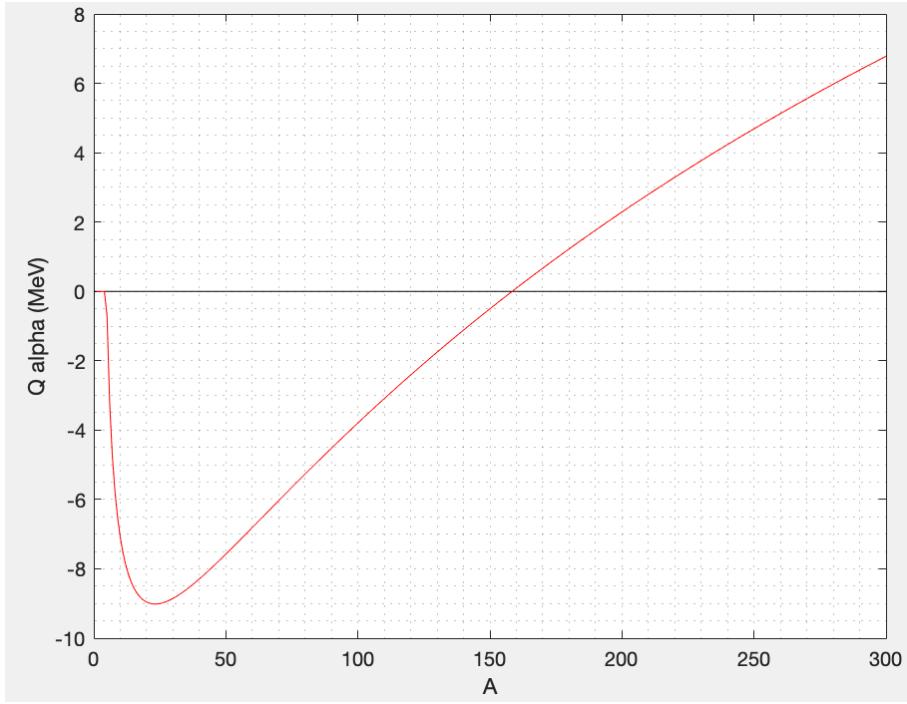
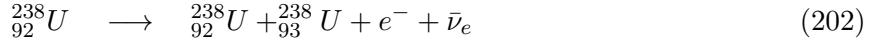


Figure 26: Andamento del calore in funzione del numero atomico

esempio si verifichi se l'Uranio $^{238}_{92}U$ possa decadere β^-



ovvero ci si chiede se il calore della reazione è maggiore di zero

$$\begin{aligned} Q &= M(A, Z) - M(A, Z + 1) > 0 ? \\ &= -B(A, Z) + B(A, Z + 1) + (M_H - M_n) \\ &= -1807.5 + 1805 + (-0.78) = -3.28 \text{ MeV} < 0 \end{aligned} \quad (203)$$

l'uranio non decade spontaneamente β^- .

6.1 Legge del decadimento radioattivo

Il numero di decadimenti al secondo è proporzionale al numero di atomi contenuti nel campione.

$$\frac{\text{decad}}{s} \propto \text{atom}$$

Introduco la *costante di decadimento* λ , che mi permette di riscrivere la formula precedente come

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad (204)$$

questa è un'equazione differenziale risolvibile tramite separazione delle variabili, che descrive la probabilità che un atomo decada nell'unità di tempo

$$\begin{aligned} \frac{dN}{N} &= -\lambda dt \\ \ln N &= -\lambda t + C \\ N &= e^{-\lambda t + C} = e^{-\lambda t} e^C \end{aligned} \quad (205)$$

trovo la costante di integrazione C , imponendo che al tempo $t = 0$ il numero totale di atomi sia $N = N_0$, quindi ottengo $N_0 = 1e^C$, da cui scriverò

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (206)$$

Il decadimento viene descritto anche da altre quantità, come il *tempo di dimezzamento* $T_{1/2}$: cioè il tempo dopo il quale il numero di neuclidi iniziali si è dimezzato, ovvero $N = N_0/2$ e quindi $t = T_{1/2}$

$$\begin{aligned} \frac{N_0}{2} &= N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} \\ 2 &= e^{\lambda T_{1/2}} \\ T_{1/2} &= \frac{\ln 2}{\lambda} \simeq \frac{0.693}{\lambda} \end{aligned} \quad (207)$$

questo tipo di decadimento esponenziale è un processo puramente quantistico, un essere vivente non ha questi problemi... (lol)

Un'altra quantità importante è detta *vita media* τ :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\int_{N_0}^0 t dN}{N_0} = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty t(-\lambda N_0 e^{-\lambda t}) dt \\ &= -\lambda \left[\frac{t(-e^{-\lambda t})}{\lambda} - \int \frac{(1)(-e^{-\lambda t})}{\lambda} \right]_0^\infty \\ &= -\lambda \left[\frac{-te^{-\lambda t}}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2} \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned} \quad (208)$$

per cui la vita media corrisponde all'inverso della costante di decadimento e anche a

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = 1.44 \cdot T_{1/2} \quad (209)$$

che corrisponde al momento in cui il numero di neuclidi è sceso al 37% rispetto al valore iniziale.

È da notare che essendo questo un fenomeno quantistico è quindi anche casuale, ciò che sappiamo è che *mediamente* decadono una certa quantità di nuclei ma non sappiamo quali ne quando succederà. Il tempo di decadimento è indipendente dalla vita del nucleo, per cui esso può decadere immediatamente oppure non decadere mai. Ciò differisce nettamente dallo studio di sistemi biologici, che seguono regole più deterministiche. Seguendo la 206, se ci si aspetta ΔN eventi in un secondo, tale numero di eventi potrà variare, statisticamente rispetto alla media, seguendo la statistica di Poisson in un intervallo dato da

$$\Delta N - \sqrt{\Delta N} < \Delta N < \Delta N + \sqrt{\Delta N} \quad (210)$$

nel 67% dei casi il numero di decadimenti sarà compreso in questo intervallo, ma non è una grandezza deterministica.

esempio supponiamo di avere 10^{12} nuclei con una vita media di $\tau = 10^{10}$ s, quanti decadimenti si hanno in un secondo?

$$\frac{10^{12}}{10^{10}} - \sqrt{\frac{10^{12}}{10^{10}}} < \Delta N < \frac{10^{12}}{10^{10}} + \sqrt{\frac{10^{12}}{10^{10}}} \Rightarrow 90 < \Delta N < 110 \quad (211)$$

abbiamo in questo caso una precisione del 10%.

Nei processi di decadimento molto rari si utilizza la statistica di Poisson.

esempio se ho Δn al secondo che probabilità ho di registrare K eventi? (se Δn è piccolo, con bassa costante di decadimento) la probabilità in questo caso è data dalla statistica di Poisson

$$P(\Delta n, K) = \frac{\Delta n^K}{K!} e^{-\Delta n} \quad (212)$$

6.2 Catene di decadimento

Normalmente i decadimenti avvengono in cascata e sono dominate da un sistema di equazioni differenziali, tali equazioni sono chiamate *equazioni di Bateman*

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= -\lambda_1 N_1(t) \\ \frac{dN_2}{dt} &= -\lambda_1 N_1(t) - \lambda_2 N_2(t) \\ \frac{dN_i}{dt} &= -\lambda_{i-1} N_{i-1}(t) - \lambda_i N_i(t) \\ \frac{dN_k}{dt} &= -\lambda_{k-1} N_{k-1}(t) \end{aligned} \quad (213)$$

esempio Un nucleo di Uranio che fa *fissione* si divide in due nuclei che hanno circa la metà del numero di massa iniziale. I prodotti di fissione sono radioattivi perché il numero di neutroni è maggiore di quello della stabilità in quanto arrivano da un nucleo con un grande numero di massa.

6.3 Dose di radioattività

Il numero di decadimenti al secondo viene chiamato *attività di una sorgente* ed è espresso come

$$A = \frac{dN}{dt} = \lambda N$$

l'unità di misura è il *Becquerel* [Bq] e corrisponde ad un decadimento al secondo

$$1 \text{ Bq} = \frac{1}{1} \frac{\text{deca}}{\text{s}}$$

un'unità di misura obsoleta ma ancora utilizzata è il *Courie* [Cu]

$$1 \text{ Cu} = 3.7 \times 10^{10} \text{ Bq}$$

esempio Si calcoli l'attività di 1 g di Radio $^{226}_{88}\text{Ra}_{138}$. Il Radio decade α con un tempo di dimezzamento di $T_{1/2} = 1.602$ anni e una vita media di $\tau_{Ra} = 7.3 \times 10^{10} \text{ s} \simeq 2400$ anni e la sua attività è data da

$$A = \frac{N_A}{\tau} = \frac{1}{226} \cdot \frac{6.02 \times 10^{23}}{7.3 \times 10^{10} \text{ s}} = 3.7 \times 10^{10} \text{ s}^{-1} \quad (214)$$

6.3.1 Radioattività naturale

Corpo umano Nel corpo umano sono presenti alcuni isotopi radioattivi, tra cui il Potassio [K] ed il Carbonio [C]. L'isotopo radioattivo del Potassio è il $^{40}_{19}\text{K}$ ed è il residuo della formazione terrestre, per cui viene detto Potassio primordiale, un altro isotopo presente nel nostro corpo è il Carbonio $^{14}_6\text{C}$, che non ha origini primordiali ma si forma nell'alta atmosfera "per bombardamento", e decadono entrambi con un decadimento β . Il numero di decadimenti medi nel nostro corpo è pari a 3700 Bq e derivano dal $^{40}_{19}\text{K}$ e dal $^{14}_6\text{C}$.

Suolo L'attività del suolo è pari a 400 Bq, dovuta dagli elementi ^{40}K , ^{226}Ra , ^{232}Th , ^{238}U . È importante il monitoraggio dell'attività del suolo e dell'ambiente naturale in quanto permette di avere dati di riferimento, anche nel caso di disastri come Chernobyl.

6.3.2 Dose assorbita

L'unità di misura internazionale che descrive la quantità di dose assorbita è il *Gray* che equivale a

$$1 \text{ Gy} = 1 \text{ J/Kg}$$

inoltre ne esiste anche un'altra, ma obsoleta, il *rad* che equivale a

$$1 \text{ rad} = 0.01 \text{ Gy} = 0.01 \text{ J/Kg}$$

se si parla di dose assorbita da un'entità biologica, da un tessuto ad esempio, quindi si parla di un danno biologico dovuto alla radiazione, si usa un'altra unità di misura: il *Sievert* ovvero

$$1 \text{ Sv} = 1 \text{ Gy}$$

si parla infatti di *dose equivalente* e l'unità di misura obsoleta utilizzata in precedenza è il *rem*

$$1 \text{ rem} = 0.01 \text{ Sv}$$

La dose assorbita dipende però dal tipo di tessuto, per questo si parla di dose equivalente. Tessuti diversi, o organi, esposti a simili radiazioni possono riportare danni biologici differenti. La dose assorbita va quindi associata al tipo di tessuto/organo colpito, per stabilire la gravità del danno.

La dose naturale media annuale a cui è esposta in generale la popolazione varia nel range

$$1 \text{ mSv} \leftrightarrow 13 \text{ mSv}$$

a seconda della composizione geologica e strutturale del territorio di riferimento.

Banane equivalenti È detta *Banana Equivalent Dose BED* ed è un'unità di misura della dose assorbita utilizzata spesso nel commercio. Deriva dal fatto che in una banana di 150 g ci sono circa 0.5 g di Potassio K di cui una piccola parte è Potassio radioattivo: la frazione di ^{40}K è pari allo 0.0117% e la vita media di questo isotopo è $T_{1/2} = 1.2 \times 10^9$ anni = 4×10^{16} s.

Il nucleo del $^{40}_{19}K_{21}$ è composto da un numero dispari di neutroni (21) è quindi un nucleo *dispari-dispari*, che significa che può decadere in nuclei stabili della curva di decadimento (?) in due modi diversi β^+ o β^- .

Qual è l'attività di 1 g di K naturale? In un grammo ci sono $N_K = \frac{1\text{g}}{40} \cdot 6.023 \times 10^{23} = 1.5 \times 10^{22}$ atomi di cui di Potassio-40 $N_{^{40}K} = 1.5 \times 10^{22} \cdot 1.2 \times 10^{-4} = 1.8 \times 10^{18}$ atomi. L'attività di 1 g di Potassio naturale è pari a

$$A = \frac{dN}{dt} = \lambda N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0.693}{4 \times 10^{16}} = 1.8 \times 10^{18} = 31 \text{ Bq} \quad (215)$$

in una persona adulta ci sono 2.5 g/kg di Potassio, per cui in una persona di 75 kg ci sono 187.5 g di Potassio e quindi, rispetto al conto precedente, l'attività totale equivale a circa 5800 Bq. È da notare che nel corpo umano esistono meccanismi di recupero di questi decadimenti, le cellule sono abituate a recuperare da questo grado di danneggiamento biologico.

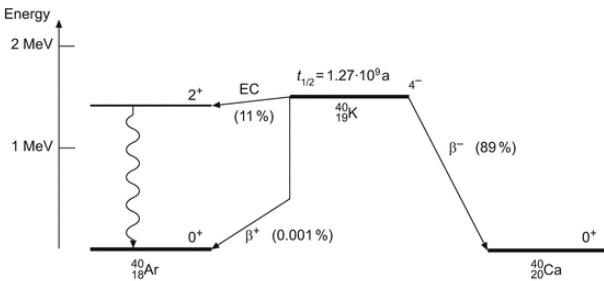


Figure 27: Decadimento del Potassio-40

6.3.3 Quantificare danni di eventi catastrofici

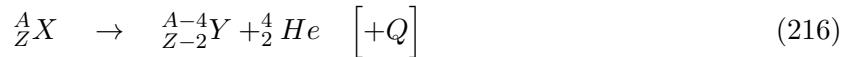
Si quantificano i danni di eventi catastrofici come quelli di Chernobyl facendo una media sulla popolazione. Noto che una dose di 1 Gy è una dose mortale per una persona. Sapendo la quantità totale di radiazione emessa nell'evento è possibile "dividerla" rispetto alla popolazione per trovarne una media. Quindi per esempio una dose di 1 Gy divisa per 1000 persone, 1 persona su mille muore per radiazione.

Una dose letale di radiazione espressa in Banane Equivalenti è 80×10^6 BED (lol).

Dormendo a fianco di una persona si è esposti ad una dose di 0.5 BED.

6.4 Decadimento α

Nel 1909 Rutherford studia con l'utilizzo di una *camera a nebbia*, uno dei primi rivelatori di particelle, il decadimento nel vuoto di materiale radioattivo e osserva che viene "prodotto" He , che osservò come tracce bianche lasciate dal passaggio delle particelle. Il decadimento α si generalizza come segue



in cui il termine Q rappresenta l'energia rilasciata sotto forma di calore. L'energetica (si chiama così?) del decadimento si calcola, attraverso la solita formula semi-empirica di massima,

$$Q = M(A, Z) - M(A - 4, Z - 2) - M_{\alpha}(4, 2) = BE(Z - 2, A - 4) + B_{\alpha} - B(Z, A) \quad (217)$$

Se si analizza l'andamento di questa energia in funzione del numero di massa, utilizzando un programma apposito, si trova un andamento del tipo Il *nucleo di soglia* dal quale il decadimento ha $Q > 0$ corrisponde al numero atomico $A = 150$, quindi gli elementi dal 6° periodo in poi possono decadere α , salvo eccezioni come ad esempio l'oro ${}_{79}^{197}Au$ per il quale nonostante l'energetica sia favorevole al decadimento tale elemento decade con tempi lunghi, più lunghi della vita dell'universo.

Fenomenologia del decadimento alpha Rappresentando il tempo di decadimento $T_{1/2}$ in funzione dell'energia delle particelle emesse E_{α} si nota una relazione inversa tra le due grandezze, più precisamente data da

$$T_{1/2} \propto \frac{1}{\sqrt{E_{\alpha}}} \quad (218)$$

La legge di Geiger Nuttal lega la grandezza teorica della probabilità di decadimento con le grandezze

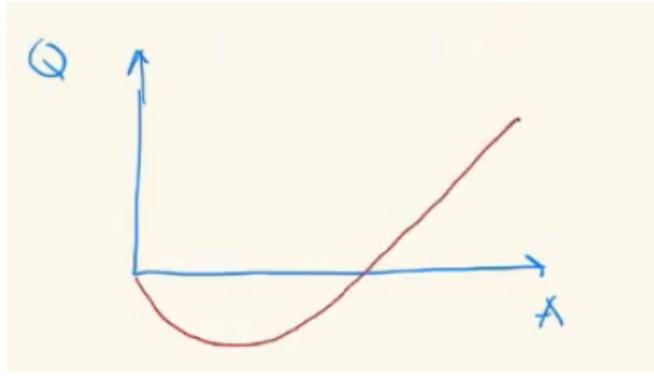


Figure 28: CAPTION

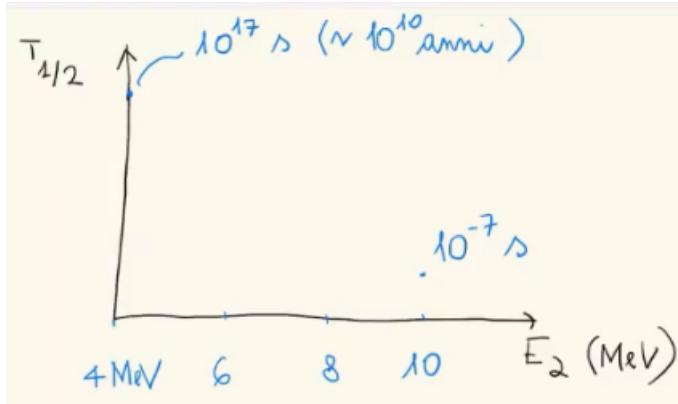


Figure 29: CAPTION

sperimentalmente misurabili come la *vita media* o il *tempo di dimezzamento*

$$\ln\left(\frac{1}{\tau}\right) = a - b \frac{Z}{\sqrt{E_\alpha}} \quad (219)$$

talè legge ha una validità di 20 ordini di grandezza, che fa intuire vi siano effetti relativistici che la regolano.

Esistono quattro catene di decadimento alpha molto importanti:

1. Serie dell'Uranio (o del radio) ^{238}U che ha un tempo di vita medio di $T_{1/2} = 4.5 \times 10^9$ anni e decade in Piombo $^{206}_{82}Pb$
2. Serie dell'Attino ^{235}U che ha un tempo di vita medio di $T_{1/2} = 7 \times 10^8$ anni e decade in Piombo $^{207}_{82}Pb$
3. Serie del Torio $^{232}_{90}Th$ che ha un tempo di vita medio di $T_{1/2} = 1.4 \times 10^{10}$ anni e decade in Piombo $^{208}_{82}Pb$
4. Serie del Nettunio $^{237}_{93}Np$ che ha un tempo di vita medio di $T_{1/2} = 2.2 \times 10^6$ anni e decade in Bismuto $^{209}_{83}Bi$

Le catene di decadimento vengono utilizzate, tra le altre cose, per le datazioni. Le precedenti quattro ed il decadimento del Potassio-40 e del Carbonio-14 sono le uniche reazioni di decadimento naturali ancora presenti sulla Terra.

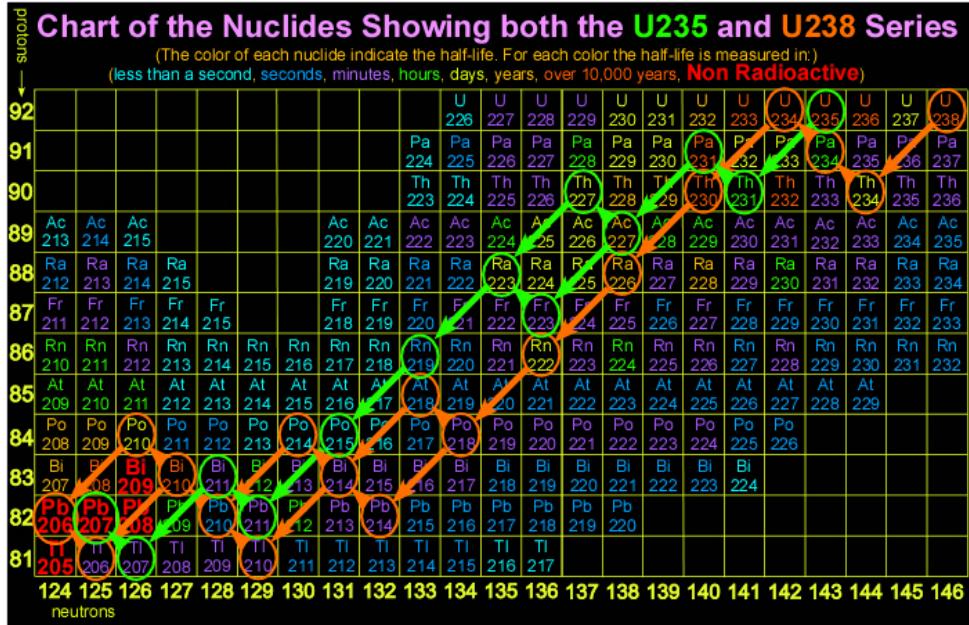


Figure 30: Serie di decadimenti nucleari dell'Uranio-235 e dell'Uranio-238, in cui si alternano decadimenti α e β

Studiamo il decadimento di un nucleo padre X che decade in un nucleo figlio Y più una particella α ed energia Q

$${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2 He + Q \quad (220)$$

se inizialmente l'atomo X è a riposo, per la conservazione della quantità di moto, i figli di questa reazione si allontaneranno in direzioni opposte. La conservazione della quantità di moto si esprime come

$$p_Y = p_\alpha = p \quad (221)$$

L'energia liberata nella reazione è divisa tra l'energia cinetica del nucleo figlio e dalla particella α , per cui usando la meccanica classica otteniamo

$$Q = \frac{p_Y^2}{2m_Y} + \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} = \frac{p^2}{2} \left(\frac{1}{m_Y} + \frac{1}{m_\alpha} \right) = \frac{p^2}{2} \left(\frac{m_Y + m_\alpha}{m_Y m_\alpha} \right) \quad (222)$$

da cui si estrae p^2

$$p^2 = 2Q \left(\frac{m_Y m_\alpha}{m_Y + m_\alpha} \right) \quad (223)$$

da cui si trova come si distribuisce l'energia cinetica nella reazione, l'energia cinetica della particella α è

$$K_\alpha = \frac{p^2}{2m_\alpha} = Q \frac{m_Y}{m_Y + m_\alpha} \quad (224)$$

e.g. per un atomo che decade alpha con un numero di massa $A = 200$, sapendo che $A_\alpha = 4$ si trova

$$K_\alpha = Q \frac{196}{200} \simeq 98\%Q \quad (225)$$

e quindi praticamente tutta l'energia cinetica viene trasferita alla particella, mentre solo un 2% dell'energia cinetica viene trasferita all'atomo figlio. Ha senso quindi approssimare dicendo che l'energia rilasciata nella reazione equivale (circa) all'energia cinetica della particella alpha e quindi si può scrivere $K_\alpha = Q$.

nota se nel decadimento (a due corpi) fosse emesso un elettrone allora l'energia cinetica dell'elettrone sarebbe $K_e = 0.999Q$

6.4.1 Cos'è il decadimento α

In un nucleo con massa atomica sufficientemente alta c'è una probabilità non nulla che si formi una particella α , un nucleo di Elio, al suo interno, questa particella iniziando a rimbalzare all'interno del nucleo arriverà sulle "pareti". Il potenziale nucleare è composto da una buca di potenziale che oltre il confine decresce esponenzialmente, l'energia della particella alpha equivale a $E_\alpha = 28 \text{ MeV}$. L'emissione diretta di protoni e neutroni non è possibile in quanto la loro energia $E = 7 - 8 \text{ MeV}$ si trova al disotto del livello zero dell'energia e sono intrappolati all'interno. Se i protoni ed i neutroni

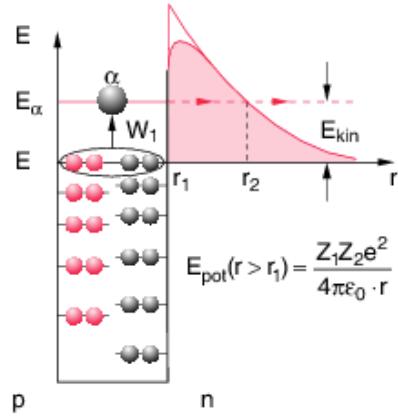


Figure 31: CAPTION

si combinano insieme in una particella α , particella molto stabile, viene emessa un'energia maggiore del livello zero, per cui è inizialmente intrappolata nella buca di potenziale ma ha una probabilità di uscire dalla buca diversa da zero. Ovviamente solo per effetti quantistici la particella potrà attraversare la regione di potenziale maggiore dell'energia E_α , classicamente il decadimento α non è possibile o spiegabile.

Cerco qual è la barriera di potenziale che la particella deve superare. Chiamando r_1 la distanza in cui si trova il picco più alto di potenziale, quindi sulla superficie del nucleo, e.g. calcolato per l'Uranio-238 trovo

$$r_1 = 1.2(234^{1/3} + 4^{1/3}) = 9.3 \text{ fm}$$

$$V_1 = \frac{Z_Y \cdot Z_{He} e^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{90 \cdot 2e^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{180e^2\hbar c}{4\pi\epsilon_0 \hbar c r_1} = \frac{180 \cdot 1.44 \text{ MeV fm}}{9.3 \text{ fm}} = 27.8 \text{ MeV} \quad (226)$$

La particella α pur avendo energia positiva è inferiore al valore del potenziale, poiché è dell'ordine di qualche MeV .

Cerco ora la distanza che la particella deve percorrere per *effetto tunnel* fino al punto r_2 in cui l'energia del potenziale è uguale all'energia della particella α . Per questo conto teniamo ancora in considerazione l'Uranio, l'energia della reazione equivale ad $E_\alpha = Q = 4.2 \text{ MeV}$ ed egualandolo al potenziale dell'atomo si ricava

$$Q = V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{90 \cdot 2}{r_2}$$

$$r_2 = \frac{180 \cdot 1.44 \text{ MeV fm}}{4.2 \text{ MeV}} = 61.7 \text{ fm} \quad (227)$$

La barriera che la particella deve attraversare è molto profonda e non è per questo molto probabile che succeda.

6.4.2 Teoria di Gamov del decadimento α

La vita media del decadimento è inversamente proporzionale alla probabilità

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad (228)$$

il tempo di decadimento è un parametro fenomenologico, sperimentale, mentre la probabilità di decadimento si ricava dalla teoria. Secondo la *teoria di Gamov* la probabilità di decadimento è data da tre contributi:

$$\lambda = p_\alpha f P \quad (229)$$

in cui

- p_α è la *probabilità che si formi una particella α*
- f è la *frequenza di collisione* tra la particella α e gli altri nucleoni nel nucleo ovvero posta v_α la velocità della particella nel nucleo ed r_1 la dimensione del nucleo, si ha

$$f = \frac{v_\alpha}{2r_1}$$

$$v_\alpha = \sqrt{2 \frac{V_0 + Q}{m_\alpha}} \simeq \sqrt{2 \frac{35 \text{ MeV} + 5 \text{ MeV}}{3700 \text{ MeV}/c^2}} \simeq 0.14 c = 0.42 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (230)$$

considerando ad esempio un nucleo con $A = 200$ e raggio $R = 7.0 \text{ fm}$, si trova una frequenza di $f = 6 \times 10^{21} \text{ Hz}$, quindi molto alta

- mentre il parametro P è legato alla *probabilità di attraversamento della barriera di potenziale*, per il quale è necessario applicare l'equazione di Schrodinger indipendente dal tempo. Considero il potenziale nella zona 2, in cui decresce da r_1 a r_2 . Data l'equazione di Schrodinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} V \psi = E \psi \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi = -\frac{2m}{\hbar^2} (Q - V_c) \psi$$

$$K^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} (Q - V_c) > 0 \quad (231)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = K^2 \psi \Rightarrow \psi = A e^{+Kx} + B e^{-Kx}$$

si trova la funzione d'onda ψ che descrive la particella nella zona classicamente proibita. Il valore di K^2 trovato nella formula precedente è sempre positivo ed è l'argomento dell'esponenziale. Se $Q \ll V_c$ mi aspetto che l'esponenziale abbia un andamento molto rapido di decadimento, se invece $Q \sim V_c$ il decadimento esponenziale è molto più lento, vedi figura 32. Esiste quindi una grande dipendenza tra la vita media ed il gradino di potenziale da dover superare e quindi dall'energia emessa dalla reazione.

Calcolo del potenziale da attraversare con effetto tunnel Il potenziale V è composto da due zone distinte, la prima tra lo zero ed il valore R del raggio del nucleo il potenziale è costituito

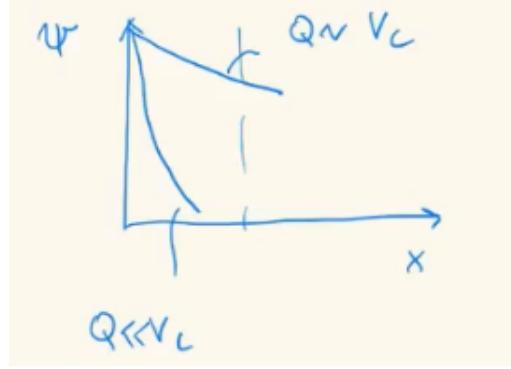


Figure 32: dipendenza tra il decadimento e l'energia

da una buca $V = V_0$, mentre la seconda zona, da R in poi, è dato dal potenziale coulombiano $V = V_c(r)$, per cui

$$V(r) = \begin{cases} \text{se } r \in [0, R] & \Rightarrow V_0 \\ \text{se } r \in [R, \infty[& \Rightarrow \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \end{cases} \quad (232)$$

Il parametro K è ciò che dobbiamo considerare per lo studio dell'andamento della probabilità e^{-2G}

$$K(r) = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_c(r) - Q)} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)} \quad (233)$$

per cui lo integriamo tra R e b , in cui il potenziale vale $V_c(b) = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{b}$, per ottenere il primo risultato del fattore di Gamov G

$$\begin{aligned} G &= \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0}} \int_R^b \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}} dr \\ &\text{sostituisco } r = b \sin^2 \theta \Rightarrow dr = 2b \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0}} \int_{\sin^{-1} \sqrt{\frac{R}{b}}}^{\pi/2} 2\sqrt{b} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0}} \sqrt{b} \int_{\sin^{-1} \sqrt{\frac{R}{b}}}^{\pi/2} (1 + \cos(2\theta)) d\theta \\ &= \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0}} \sqrt{b} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_{\sin^{-1} \sqrt{\frac{R}{b}}}^{\pi/2} \\ &= \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0}} \sqrt{b} \left[\cos^{-1} \sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b}} \left(1 - \frac{R}{b}\right) \right] \end{aligned} \quad (234)$$

Esplicitiamo ora i termini R, b

$$\begin{aligned} B &= \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow R = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0 B} \\ Q_\alpha &= \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0 b} \Rightarrow b = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0 Q_\alpha} \end{aligned} \quad (235)$$

e riscriviamo il fattore di Gamov

$$\begin{aligned}
G &= \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar} \sqrt{\frac{2m}{Q_\alpha}} \left[\cos^{-1} \sqrt{\frac{Q_\alpha}{B}} - \sqrt{\frac{Q_\alpha}{B}} \left(1 - \frac{Q_\alpha}{B} \right) \right] \\
x &= \frac{Q_\alpha}{B} \quad \text{per } x \text{ piccoli} \quad \cos^{-1} x \sim \frac{\pi}{2} - x \\
&= \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar} \sqrt{\frac{2m}{Q_\alpha}} \left[\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{Q_\alpha}{B}} \right]
\end{aligned} \tag{236}$$

il potenziale a raggio R vale B , ovvero

$$V(R) = B = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{2Z_d e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \tag{237}$$

dove Z_d è il numero di protoni del nucleo figlio. La probabilità di attraversamento per effetto tunnel è

$$\begin{aligned}
P &= e^{-2G} \Rightarrow \ln P = -2G \\
&= -\frac{e^2}{\varepsilon_0\hbar} \sqrt{\frac{m}{2}} Z_d \frac{1}{\sqrt{Q_\alpha}} + \frac{4e}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{\pi\varepsilon_0}} \sqrt{Z_d} \sqrt{R} \\
&\text{sostituendo } R = R_0 A^{1/3} \\
\log_{10} P &= 1.42 \sqrt{Z_d A^{1/3}} - 1.72 \frac{Z_d}{\sqrt{Q_\alpha}}
\end{aligned} \tag{238}$$

il primo termine è pressoché costante, mentre è il secondo termine ad avere l'impatto maggiore.

6.4.3 Applicazione del decadimento α

Generatore elettrico Il rover *Perserverance* mandato su Marte viene alimentato grazie a delle sorgenti α , il Plutonio-238. Il ^{238}Pu ha un tempo di dimezzamento $T_{1/2} \simeq 88$ y ed il decadimento produce calore che per *Effetto Seebeck* viene convertito in elettricità.

Calcoliamo l'energia rilasciata da 238 g di ^{238}Pu , quindi l'attività A è

$$A = N_0 \lambda = \frac{238 \text{ g}}{238} 6.023 \times 10^{23} \frac{0.693}{90 \cdot 365 \cdot 25 \cdot 3600} \frac{1.5 \times 10^{14} \text{ decadimenti}}{\text{s}} \tag{239}$$

l'energia della singola particella α è

$$Q_\alpha = E_\alpha \left(\frac{M_\alpha + M_d}{M_\alpha M_d} \right) = 5.6 \text{ MeV} \tag{240}$$

e l'energia totale rilasciata è

$$E = A \cdot Q_\alpha = 1.5 \times 10^{14} \text{ s}^{-1} 5.6 \text{ MeV} = 10^{14} \text{ MeV/s} \cdot 1.6 \times 10^{-19} \text{ MeV} = 1.4 \times 10^2 \text{ W} \tag{241}$$

questa grandezza esprime *joule* termici rilasciati, quelli poi convertiti in elettricità saranno solo una frazione di questi, ma l'efficienza di conversione è abbastanza bassa per questo tipo di generatore e servono alcuni *kg* di Plutonio per renderli utilizzabili.

Datazione della Terra Sfruttiamo il processo di decadimento dell'Uranio-238 in Piombo-206. Le pietre più antiche sulla terra sono gli *zirconi*, esse preservano al loro interno i composti chimici salvaguardandoli da alterazioni geologiche, chimiche e nel tempo. Analizzando la composizione chimica interna di uno zircone e cercando le quantità di Uranio-238 e di Piombo-206 è possibile risalire ad una età di tale zircone; in quanto si ipotizza (e si conosce) che il Piombo deriva unicamente dal decadimento dell'Uranio.

Anche i *meteoriti* forniscono molte informazioni sull'età della Terra, essi sono "capsule del tempo" che ci permettono di osservare la composizione del sistema solare al momento della sua formazione e quindi di fare un paragone con i composti presenti oggi sulla Terra. Al contrario, la Terra è sempre in cambiamento, quindi non è facile trovare campioni antichi quanto la formazione su di essa.

7 Fissione e Fusione Nucleare

7.1 Fissione Nucleare

Fissione spontanea Perché tutti gli elementi con numero di massa elevato non decadono spontaneamente in ^{56}Fe ?

Quando si è parlato della formula semiempirica di massa, si è visto che una delle logiche di funzionamento della natura è che la somma dei protoni e neutroni legati è minore della somma dei pesi degli elementi slegati. La differenza di massa è l'energia di legame

$$\Delta mc^2 = BE.$$

Essendo che il ferro come abbiamo visto è l'elemento con l'energia di legame maggiore, è lecito chiedersi cosa blocchi un eventuale decadimento dei nuclei più pesanti nel ferro in quanto energeticamente favorevole (massimizzando l'energia di legame minimizzo l'energia di massa).

$$A \rightarrow A/2?$$

Per passare da uno stato A legato a due nuclei $A/2$ bisogna necessariamente per uno stato intermedio di un nucleo deformato dove sono presenti due nuclei legati tra loro ma identificati. Studiamo quindi questo stato intermedio

$$BE = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_{sym} \frac{(N-Z)^2}{A} + \delta_p \quad (242)$$

In questo caso ignoriamo quello che è il termine di accoppiamento δ_p considerando il caso di due nuclei *even-even*. Vogliamo confrontare l'energia di legame del nucleo unico (1) al caso del nucleo quasi separato (2).

Il termine di volume sarà:

$$1. a_v A$$

$$2. 2a_v \frac{A}{2}$$

Questi due termini sono uguali, il che non è sorprendente perché il modello a goccia mantiene costante il volume.

Prendiamo ora il termine di simmetria:

$$1. a_{sym} \frac{(N-Z)^2}{A}$$

$$2. a_{sym} 2 \left[\frac{(N/2-Z/2)^2}{A/2} \right] = a_{sym} \frac{(N-Z)^2}{A}$$

Nemmeno questo termine varia.

Consideriamo il termine di superficie:

$$V_1 = V_2 \rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \quad (243)$$

$$R^3 = 2r^3 \rightarrow R = 1,26r \quad (244)$$

$$1. S_1 = 4\pi R^2 = 4\pi(1,26)^2 r^2 = 6\pi r^2$$

$$2. S^2 = 2 \cdot 4\pi r^2 = 8\pi r^2$$

Se deformiamo un nucleo la superficie aumenta, il che comporta un aumento del termine di superficie e quindi una diminuzione dell'energia di legame.

Vediamo dunque come si comporta il termine coulombiano:

$$1. V_1 = \frac{a_c Z(Z-1)}{A^{1/3}}$$

$$2. V_2 = \frac{2(a_c Z/2(Z/2-1))}{(a/2)^{1/3}} = \frac{1,26 \cdot 2}{4} \frac{a_c Z(Z-2)}{a^{1/3}}$$

Da un confronto con nuclei ad alto Z, la differenza tra $Z - 1$ e $Z - 2$ è trascurabile

$$V_2 \sim \frac{2}{3} v_1 \quad (245)$$

In questo caso si ha che il termine coulombiano diminuisce con la formazione dello stato intermedio, il che comporta un aumento dell'energia di legame.

Qual è quindi il termine dominante in questa fase intermedia?

Posso prendere come riferimento i valori che erano stati trovati dei termini

$$a_c = 0,7 MeV \quad a_s = 18 MeV$$

Il termine dominante è quindi il termine di superficie, si ha quindi che nella fase intermedia l'energia di legame diminuirà, portando ad un'energia di massa maggiore, creando così una barriera di potenziale. Per questo è impossibile una fissione spontanea dei nuclei più pesanti del Ferro. La $\Delta E \approx 6 MeV$ tra il nucleo legato e lo stato intermedio è chiamata *energia di attivazione*. I nuclei che fanno fissione spontanea sono i nuclei che hanno

$$\frac{Z^2}{A} > 51 \quad (246)$$

Fissione Indotta La differenza energetica evidenziata nel primo paragrafo corrisponde più esattamente a

$$\Delta E = 6,2 MeV \quad (247)$$

Il processo sfruttato è quello di inviare neutroni su nuclei di Uranio, il primo a effettuare questo processo fu Fermi che però non riconobbe il fenomeno.



Il pensiero più logico è quello che in questo processo per superare l'energia di attivazione si debba prendere un neutrone abbastanza energetico che trasferisca l'energia di attivazione necessaria a far cominciare il processo.

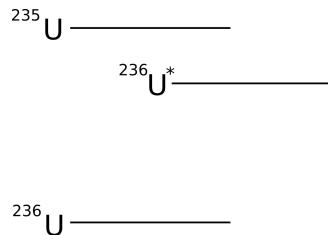


Figure 33: Livelli che interessano la fissione indotta dell'uranio 235.

In realtà si è visto che questo tipo di fenomeno si verifica con neutroni termici (ovvero neutroni a temperatura ambiente) che possiedono quindi energia pari a

$$E = KT = 9 \times 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{K}} \times 300\text{K} = 27 \times 10^{-3} \text{ eV} \quad (249)$$

Un'energia molto minore all'energia di attivazione!

Quello che si verifica è che un neutrone termico assorbito dall'Uranio da origine ad un atomo di Uranio 236 in uno stato eccitato con energia maggiore dell'energia di attivazione.



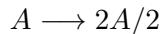
Da notare che in natura la composizione dell'uranio è



E nel caso dell'uranio 238 lo stato che si viene a formare dopo l'assorbimento di un neutrone ha energia pari a $4,8\text{MeV}$ che non basta per innescare il decadimento, per processi di fissione nucleare viene quindi sfruttato solamente ${}^{235}\text{U}$. Dal punto di vista fisico questo si rappresenta tramite la sezione d'urto.

Facendo un grafico della sezione d'urto si ha che questa, partendo da un valore iniziale di $500b$, diminuisce aumentando l'energia. Questo effetto è dovuto al fatto che aumentando l'energia è vero che si supera più facilmente la barriera di potenziale ma sarà anche più difficile mantenere nel nucleo il neutrone che tenderà invece a fuggire. È quindi conveniente usare i neutroni a più bassa energia disponibili alla fissione. Il bilancio energetico per cattura neutronica da ${}^{235}\text{U}$ e ${}^{238}\text{U}$ è dovuto al termine di accoppiamento δ_q nella formula semiempirica di massa, infatti, mentre l'uranio 235 ha un numero dispari di neutroni che comporta una tendenza ad assorbire un neutrone per pareggiare il livello energetico, l'uranio 238 ha un numero pari di entrambi gli elementi che porta ad una stabilità che evita l'assorbimento neutronico spontaneo (non c'è quindi l'energia addizionale di accoppiamento).

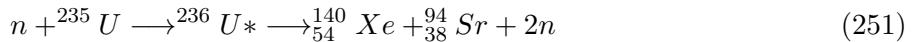
Qual è la distribuzione di massa dei prodotti di reazione? La previsione fatta era che i nuclei si dividessero come:



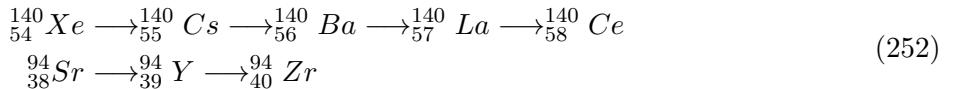
In questo caso la formula semiempirica di massa fa una predizione sbagliata infatti è stato verificato sperimentalmente che per esempio i nuclei di uranio hanno la tendenza a produrre con maggior frequenza nuclei con numeri di massa in distribuzione gaussiana attorno a $A = 95, 140$ con un minimo centrale tra i due picchi a $A = 118$.

In questo caso ciò che subentra è il modello a shell, i nuclei generati tenderanno ad addensarsi attorno ai nuclei che abbiamo visto essere più stabili nel modello a shell nucleonico. I nuclei figli che si trovano ad avere più neutroni rispetto alle valli di stabilità tenderanno a decadere β^- per tornare in uno stato stabile.

Restando in questo argomento dei prodotti di fissione prendiamo un caso particolare:



I modi di fissione dell'uranio sono vari e un ingegnere di una centrale nucleare deve conoscerli tutti. In questo caso il processo non si ferma lì ma decadono pure i nuclei figli con un processo di decadimento β^- :



Un altro modo di decadimento è:



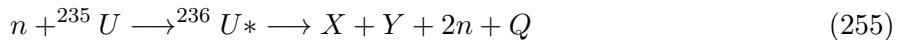
In questo caso lo Xeon decade come:



Lo Xeon è essenziale per il funzionamento delle centrali nucleari e in particolare quest'ultimo processo che porta all'emissione di neutroni è fondamentale nel controllo del reattore.

Il processo di fissione avviene con un tempo caratteristico di $t = 10^{-12}s$. I neutroni emessi nel processo principale vengono chiamati *neutroni prompt*, quelli che invece vengono generati nei processi di decadimento sono chiamati *neutroni ritardati*. Quest'ultimi sono ciò che tiene sotto controllo il reattore nucleare e se non ci fossero non saremmo in grado di far funzionare i reattori. I neutroni prompt sono invece quelli fondamentali alla produzione di energia.

Principi di funzionamento di un reattore nucleare a fissione Abbiamo visto che la fissione dell' ^{235}U avviene con un processo del tipo



Un reattore nucleare è formato da un contenitore che scherma dalle radiazioni emesse dai prodotti di reazione. All'interno sono poste le barre di combustibile ovvero di materiale reagente. Per raccogliere il calore il contenitore è pieno di liquido refrigerante, normalmente di acqua, che attraverso delle condutture viene raccolta e convogliata attraverso uno scambiatore di calore che invia poi l'acqua all'interno del reattore. Il meccanismo di raffreddamento dell'acqua è quindi di produzione energetica è uguale a quello di qualsiasi altra centrale elettrica, ciò che cambia è solamente il metodo di riscaldamento.

Ci sono due tipi di problemi che si presentano all'interno di un reattore:

1. **Dobbiamo rallentare i neutroni.** I neutroni prodotti nella reazione non sono a energia termica e abbiamo visto che se vogliamo massimizzare la sezione d'urto di cattura dobbiamo diminuire la velocità e portare i neutroni all'energia adeguata.
2. **Dobbiamo ridurre n a 1.** Mediamente il numero di neutroni per fissione è di 2,5 e quindi se non c'è controllo di reazione si ha che ogni 2 reazioni generano in media 5 reazioni. Questo non va bene perché porta fuori controllo il reattore che diventa una bomba. Cerchiamo di avere un rapporto di 1 a 1 tra le reazioni.

Le soluzioni che permettono quindi il corretto funzionamento del reattore sono:

1. Determinazione del moderatore.



Figure 34: Interazione di un nucleo con un neutrone

Per la conservazione della quantità di moto si ha

$$\begin{aligned} p &= \text{cost} & mv &= mv_1 + Mv_2 \\ K &= \text{cost} & \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 \\ && v_2 &= \frac{m}{M}(v - v_1) \\ && v_2^2 &= \frac{m}{M}(v^2 - v_1^2) \end{aligned} \tag{256}$$

Le due formule ottenute sopra possono essere combinate per ottenere

$$\begin{aligned} \frac{m}{M}(v^2 - v_2^2) &= \frac{m}{M}(v - v_1)^2 \\ Mv^2 - Mv_1^2 &= m(v - v_1)^2 \\ M(v - v_1)(v + v_1) &= m(v - v_1)^2 \\ Mv + Mv_1 &= mv - mv_1 \end{aligned} \tag{257}$$

Si può quindi ricavare v_1 da questa formula ottenendo

$$v_1 = v \frac{m - M}{m + M} \tag{258}$$

Si può cercare di minimizzare questa velocità per trovare con che materiale si possa termalizzare i neutroni. La condizione è semplice da vedere:

$$m \sim M$$

Il miglior materiale che utilizza il minor numero di urti per rallentare il neutrone è quindi quello che ha massa uguale a quella del neutrone. Il materiale più utilizzato è l'acqua che presenta caratteristiche termiche ideali, ma soprattutto presenta le caratteristiche ideali per il rallentamento dei neutroni. L'acqua non è quindi solamente un refrigerante ma anche un moderatore.

2. Riduzione dei neutroni prodotti da $N = 2, 5 \rightarrow 1$.

In questo caso possono esserci più modi e in alcuni casi la natura ci viene in contro.

- Alcuni neutroni vengono assorbiti senza produrre fissione, può accadere infatti che l'Uranio 236 si dissecchi tramite emissione γ .

In questo caso il parametro che ci è utile è η che corrisponde alla frazione di neutroni che sopravvive all'assorbimento ($\eta < 1$).

- Il secondo effetto è che alcuni neutroni veloci possono produrre fissione nel Uranio 238 ^{238}U , infatti anche se nelle centrali viene usato dell'uranio arricchito la percentuale più alta (97%) è di uranio 238.

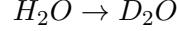
Per questo effetto teniamo conto di un fattore ε che corrisponde alla frazione di neutroni prodotti da fissione in ^{238}U ($\varepsilon > 1$ quindi questi neutroni ne producono comunque altri).

- Nel grafico della sezione d'urto in funzione dell'energia esiste una regione tra $1 \rightarrow 100\text{eV}$ chiamata *regione delle risonanze*, in cui vengono assorbiti neutroni che vengono eliminati dal ciclo (senza riuscire a termalizzare).

Questo effetto è regolato da p che corrisponde alla frazione di neutroni che sopravvive alle risonanze ($p < 1$).

- I neutroni possono essere assorbiti dal moderatore.

Questo viene chiamato fattore $f < 1$, in particolare un neutrone può essere assorbito da un protone dell'acqua dando luogo ad un deutone, trasformando quindi l'acqua in quella che viene chiamata acqua pesante.



Tra l'altro l'utilizzo dell'acqua pesante come moderatore non ne varia l'efficacia, si abbassa anzi la probabilità che vengano assorbiti neutroni. Esistono quindi delle centrali che vengono raffreddate e moderate con acqua pesante.

Si ha quindi che la frazione di neutroni che sopravvive a questi effetti è dato dalla *formula dei quattro fattori*

$$N = N\eta\varepsilon pf = KN \quad (259)$$

introdotta da Fermi. Per il corretto funzionamento del reattore devo mantenere $K = 1$.

Controllo del reattore Si abbia

$$K = 1 + \delta \quad \delta = 0,01$$

I tempi caratteristici della fissione sono $t = 10^{-12}s$ che corrisponde al tempo di fissione, seguito poi dal tempo di rallentamento dei neutroni per la generazione di una seconda fissione $t = 10^{-3}s = \tau$.

Supponendo che il processo vada avanti per t secondi, il numero di cicli sarà dato da

$$n = \frac{t}{\tau} \quad (260)$$

Dobbiamo considerare che per ogni interazione il numero di neutroni cresce di $1 + \delta$. L'evoluzione dei neutroni è descritta come

$$N(t) = N(0)(1 + \delta)^{t/\tau} \quad (261)$$

dove $N(x)$ è il numero di neutroni dopo il tempo x , $K = 1 + \delta$ è il numero di neutroni che si producono ad ogni interazione. Facendone il logaritmo si ottiene

$$\ln N(t) = \ln N(0) + \ln(1 + \delta) + \frac{t}{\tau} \quad (262)$$

Se δ è piccolo si ha

$$\ln N(t) = \ln N(0) + \frac{t}{\tau}\delta \quad (263)$$

Facendo l'esponenziale si trova

$$N(t) = N(0)e^{\frac{t\delta}{\tau}} \quad (264)$$

Dopo un tempo $t = 1s$ ottengo

$$N(1) = N(0)e^{10} \quad (265)$$

Si ha quindi un fattore moltiplicativo di ~ 22026 . E questo descrive un processo controllato il che ci fa comprendere come sia essenziale un controllo efficace di K .

Per il controllo di un reattore oltre al combustibile e al liquido refrigerante bisogna inserire anche delle barre di controllo che assorbono neutroni (per esempio un ottimo materiale di controllo è il cadmio Cd).

Un reattore può essere:

$$\begin{aligned} K = 1 & \quad critico \\ K < 1 & \quad sottocritico \\ K > 1 & \quad supercritico \end{aligned} \quad (266)$$

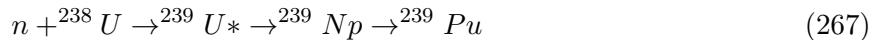
Essendo il tempo di rallentamento dell'ordine del millisecondo, questo non è compatibile con il tempo meccanico di inserimento di queste barre, ma come abbiamo visto il fattore k richiede una precisione estrema perché anche delle piccole variazioni del sistema potrebbero portare ad un collasso rapido.

Per questo vengono in aiuto i *neutroni ritardati*, che vengono sfruttati per portare il reattore a $K = 1$ (situazione di criticità). La reazione che produce i neutroni ritardati come abbiamo visto avviene in un tempo di qualche secondo, questo permette l'inserimento delle barre in un tempo adatto al controllo.

Tipi di Reattori

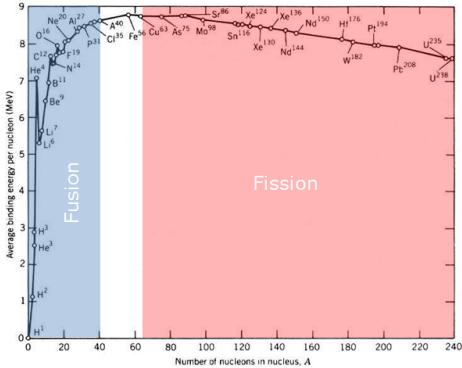
1. *Reattore ad acqua in pressione (PWR)*. Questo vuol dire che l'acqua all'interno del reattore è sempre nello stato liquido. Se infatti portiamo la pressione ad un valore di 100 atm allora la temperatura di ebollizione sarà di 300°C . L'acqua viene fatta uscire dal reattore ad una temperatura di 250°C e immessa nello scambiatore dove vaporizza acqua che andrà in forma di vapore ad azionare le turbine come in una qualsiasi altra centrale. In questo tipo di reattore c'è la necessità di uranio arricchito.
2. *Reattore ad acqua pesante (PHWR)*. In questo caso si usa al posto dell'acqua normale acqua formata con deuterio invece che idrogeno. Il vantaggio sta nel fatto che per la proprietà di basso assorbimento di neutroni dell'acqua pesante è possibile usare Uranio naturale senza quindi il processo di arricchimento.
3. *Reattore ad acqua bollente (BWR)*. In questo caso l'acqua nel circuito di scambio viene portata ad ebollizione. Si ha che quindi l'acqua del reattore viene portata ad ebollizione.
4. *Reattore con moderatore a grafite*. In questi reattori viene usata la grafite come moderatore e l'anidride carbonica come refrigerante.

Esistono inoltre altri materiali fissili, infatti tutti i nuclidi della stessa zona dell'uranio con neutroni dispari può innescare una reazione di fissione (per esempio il plutonio ^{239}Pu o l'uranio ^{233}U). La peculiarità di questo è che l'uranio 238, quando cattura un neutrone, da luogo ad uno stato eccitato dell'uranio 239 che decade in Nettunio 239, che a sua volta decade il plutonio 239.



Si ha quindi che alcune catene di reazioni portano da un combustibile ad un altro combustibile. Un'altra catena possibile è





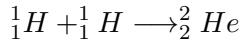
7.2 Fusione Nucleare

Prendiamo in considerazione la tabella dell'energia di legame in funzione del numero di massa, come abbiamo già visto il massimo è il ferro 56 che risulta quindi essere il materiale con l'energia di legame più alta.

Come visto nella sezione precedente i materiali più pesanti del ferro 56, ovvero quelli a destra nel grafico presentano una ΔQ che rende vantaggiosa la scissione in materiali a numero di massa minore e questo può essere sfruttato per la produzione di energia elettrica nelle centrali nucleari. Anche nella parte sinistra della curva si ha una ΔQ , con la tendenza inversa rispetto alla fissione, infatti in questo caso i nuclei tenderanno ad ingrandirsi ovvero a legarsi per raggiungere uno stato più legato, sempre con la liberazione di energia. Dato un elemento X e uno Y il processo di fusione sarà del tipo:



Il processo più semplice immaginabile di nucleosintesi è quello tra due protoni



Come si è visto questo processo però non può avvenire a causa del principio di esclusione di Pauli, è già stato spiegato nel modello di Fermi che è impossibile avere due protoni nello stesso stato quantico (c'è la necessità di almeno un neutrone che abbia spin solidale al protone per poter mettere un protone con spin opposto e riempire lo stato). In realtà la reazione di fusione di due protoni avviene all'interno del sole e più in generale nelle stelle ma ha un tipo diverso di reazione che avviene grazie all'interazione della forza debole:



La seconda reazione più semplice che può avvenire è quella di fusione del deuterio

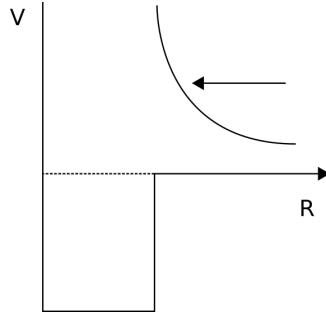


Questa è una reazione vantaggiosa sotto più punti di vista. In primo luogo, si ha che il deuterio, per quanto sia un isotopo e quindi risulti essere molto raro nell'idrogeno, ha comunque una presenza di una particella ogni circa 7000, il che lo rende praticamente illimitato a livello macroscopico facendo comunque parte dell'idrogeno che rimane il materiale più comune in natura. In secondo luogo, rispetto alla fissione che riguarda materiali molto pesanti che danno origine a prodotti radioattivi, questo processo riguarda materiali leggeri e sia prodotti che reagenti non presentano radioattività.

La difficoltà in tutto questo sta nella difficoltà di fare fondere il deuterio, infatti perché la reazione avvenga bisogna riuscire ad avvicinare i due nuclei di deuterio, superando quella che è la forza di repulsione coulombiana

$$F = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (271)$$

In particolare si ha che questa forza aumenta con il quadrato della distanza mano a mano che si cerca di avvicinare i due nuclei.



Rappresentando il potenziale nucleare è vero che se ci si riesce ad avvicinare abbastanza i due deutoni subentra la forza nucleare e i due nuclei sono catturati nella buca, bisogna però considerare che bisogna prima superare la barriera di potenziale data dal potenziale coulombiano. La barriera coulombiana avrà un valore di

$$V_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{\hbar c}{\hbar c} = \frac{144 MeV \cdot fm}{2 fm} = 0,72 MeV = 720 KeV \quad (272)$$

Il valore da raggiungere sarà quindi di $720 KeV$ che è un valore facilmente ottenibile in un acceleratore, però in questo caso stiamo parlando di fusione per la produzione di energia, ci serve quindi che il numero di nuclidi che fonde sia elevato e inoltre che l'energia prodotta sia maggiore di quella utilizzata per esempio per far funzionare l'acceleratore. Dobbiamo basarci quindi sul fatto che la reazione avvenga grazie alla semplice energia termica. Il valore energetico a temperatura ambiente è

$$E = KT = 9 \times 10^{-9} \frac{eV}{K} 300K = 0,027 eV \quad (273)$$

La temperatura richiesta quindi affinché avvenga un processo di questo tipo è di

$$T = \frac{E}{T} = \frac{720 KeV}{9 \times 10^{-9} \frac{eV}{K}} = 8 \times 10^9 K \quad (274)$$

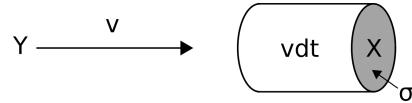
Una temperatura non ancora raggiunta! C'è però da considerare che la temperatura del nocciolo del sole, dove questa reazione avviene spontaneamente, è di $1.5 \times 10^7 K$. Sorge qui una dubbio infatti, trascurando che all'interno del sole subentri anche la forza debole, com'è possibile che avvengano comunque reazioni di fusione?

Bisogna considerare un paio di cose:

- Alle temperature descritte qualsiasi gas raggiunge il quarto stato della materia, ovvero il plasma. In questo stato i nuclei e gli elettroni non sono più legati e vagano liberi, si ha quindi che i singoli componenti della materia sono elettricamente carichi pur mantenendo una carica universale neutra del materiale. In questo tipo di situazione la distribuzione delle particelle è descritta dalla statistica di Maxwell-Boltzmann che presenta una lunga coda di valori ad alta energia, non è quindi necessario che tutta la distribuzione si trovi ad una temperatura media di $720 KeV$ perché sono presenti eventi di fusione anche a temperature più basse.

- Bisogna anche considerare che ci troviamo in ambito quantistico e quindi non è necessario raggiungere sempre l'energia massima per superare la barriera di potenziale in quanto grazie all'effetto tunnel può succedere che avvenga anche ad energie più basse.

Calcolo del rate di reazione Supponiamo di avere le particelle bersaglio X e le particelle proiettile Y



Le particelle proiettile faranno fusione quando entreranno all'interno del raggio d'azione del bersaglio. Stiamo praticamente introducendo il concetto di sezione d'urto. Tutte le particelle che entreranno all'interno della zona vdt avranno quindi interazione con il bersaglio ed entro un tempo dt potranno raggiungere il bersaglio. Supponendo di avere n_Y particelle per unità di volume il numero di particelle che raggiungeranno il bersaglio sarà dato da

$$dN = n_Y \sigma v dt \quad (275)$$

Si è considerato come *sigma* l'area di interazione del bersaglio. Si trova quindi che il numero di interazioni su di un bersaglio per unità di tempo sarà

$$\frac{dN}{dt} = n_Y \sigma v \quad (276)$$

Considerando ora tutti i nuclei bersaglio e generalizzando il discorso su tutte le velocità il rate diventa

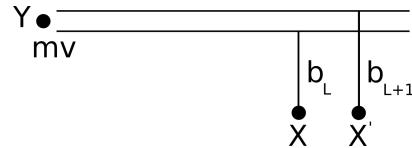
$$Rate = n_X n_Y \langle \sigma v \rangle \quad (277)$$

dove n_X e n_Y sono tutti i nuclei bersaglio e proiettile, e $\langle \sigma v \rangle$ è una quantità media per indicare la varietà di velocità.

Analizziamo ora il termine $\langle \sigma v \rangle$ Iniziamo da σ .

Classicamente la sezione d'urto è rappresentata dall'area del bersaglio

$$\sigma = \pi R^2 \quad (278)$$

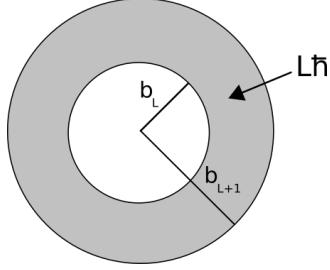


In questo caso però abbiamo a che fare con un sistema quantistico in cui le particelle che consideriamo sono anche delle onde. Supponiamo di avere la particella Y con momento angolare m_a , siccome siamo in un sistema quantistico questa quantità risulterà quantizzata e quindi

$$m_a = mvb = L\hbar \quad (279)$$

Supponiamo di avere un'altra particella bersaglio, il momento angolare della seconda particella è

$$m'_a = mvb_{L+1} = (L + 1)\hbar \quad (280)$$



Supponiamo di prendere una sezione del fascio.

Siccome il momento angolare è quantizzato si ha che il valore del momento della corona evidenziata in figura deve corrispondere a $L\hbar$ ovvero la stessa quantità della corona interna. L'area della corona è

$$A = \pi b_{L+1}^2 - \pi b_L^2 \quad (281)$$

Ora, avendo sopra le formule dei momenti angolari quantizzati, posso calcolare le formule di b_L e b_{L+1} e quindi sostituirle nella formula dell'area

$$\begin{aligned} A &= \pi \left[\left(\frac{(L+1)\hbar}{mv} \right)^2 - \left(\frac{L\hbar}{mv} \right)^2 \right] \\ &= \pi \frac{\hbar^2}{m^2 v^2} [L^2 + 2L + 1 - L^2] \\ &= \pi \frac{\hbar^2}{m^2 v^2} [2L + 1] \end{aligned} \quad (282)$$

Per trovare la sezione d'urto finale bisogna sommare di conseguenza tutti i momenti angolari fino a che non coprirò tutto il nucleo (fino quindi al momento angolare massimo). Come momento angolare massimo avrò

$$mvR = L_{max}\hbar \quad (283)$$

Calcoliamo quindi la sezione d'urto totale

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{L=0}^{L_{max}} \pi \frac{\hbar^2}{m^2 v^2} [2L + 1] \\ &= \pi \frac{\hbar^2}{m^2 v^2} [1 + 3 + 5 + \dots + 2L_{max} + 1] \\ &= \pi \frac{\hbar^2}{m^2 v^2} \left(\frac{L_{max} + 1}{2} \right) + (1 + 2L_{max} + 1) \\ &= \pi \frac{\hbar^2}{m^2 v^2} (L_{max} + 1)^2 \end{aligned} \quad (284)$$

Posso quindi sostituire ad L_{max} quella che trovo come dimensione del nucleo

$$\begin{aligned} \sigma &= \pi \frac{\hbar^2}{m^2 v^2} \left(\frac{mvR}{\hbar} + 1 \right)^2 \\ &= \pi \left(\frac{\hbar}{mv} \frac{mvR}{\hbar} + \frac{\hbar}{mv} \right)^2 \\ &= \pi \left(R + \frac{\hbar}{mv} \right)^2 \end{aligned} \quad (285)$$

Possiamo quindi fare un paio di considerazioni. Il termine πR^2 all'interno della formula è il termine di interpretazione classica della sezione d'urto (vista come un'area) corrispondente alla dimensione del nucleo bersaglio. $(\hbar/mv)^2$ rappresenta invece il termine quantistico della sezione d'urto e si può vedere che in questo caso domina la formula.

$$\frac{\hbar^2}{m^2 v^2} = \frac{\hbar^2}{mmv^2} \frac{c^2}{c^2} = \frac{(200 MeV \cdot fm)^2}{1000 MeV \times 10^{-3} MeV} = 200 fm^2 \quad (286)$$

Si vede chiaramente che questa quantità è molto maggiore della del valore dato dal termine R^2 dato che solitamente $R = 2 fm$. La sezione d'urto può quindi essere riscritta come

$$\sigma = \pi^2 \frac{\hbar^2}{m^2 v^2} \quad (287)$$

La sezione d'urto trovata riguarda solamente le particelle nella buca di potenziale ma non è stato considerato il potenziale coulombiano a di fuori della buca. Mentre per quanto riguarda la particella nella buca di potenziale la particella è descritta dall'equazione di Shroedinger indipendente dal tempo

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar}(E - V_0)\psi \quad (288)$$

Le cui soluzioni sono del tipo

$$\psi = e^{-Kx} \quad K = -\frac{2m}{\hbar}(E - V_0) \quad (289)$$

nel caso della sezione d'urto della barriera di potenziale coulombiano, basta spostare la zona in analisi, quello che si trova è che

$$P \propto |\psi|^2 \propto e^{-2Kx} \quad (290)$$

in cui i valori di E e V_0 sono i valori della barriera.

In realtà per fare un conto preciso bisognerebbe fare un integrazione con tutti i valori infinitesimi della barriera di potenziale vista come la somma di tante barriere di energia incrementale calcolate con la probabilità (290). Il calcolo non viene fatto, il risultato che si ottiene alla fine è

$$\sigma = \frac{\pi \hbar^2}{m^2 v^2} e^{\frac{-Z_1 Z_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\pi}{\hbar v}} \quad (291)$$

Il termine moltiplicativo iniziale è il termine senza termine coulombiano, mentre l'esponenziale rappresenta la probabilità di attraversamento della barriera. Possiamo quindi evidenziare le dipendenze raggruppando le costanti

$$\sigma = \frac{C_0}{v^2} e^{-\frac{a}{v}} \quad (292)$$

Per comodità si può anche esprimere la velocità in funzione dell'energia

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2E}{m}} \quad (293)$$

Che restituisce la funzione della sezione d'urto desiderata

$$\sigma = \frac{C_0}{v^2} e^{-\frac{a}{\sqrt{E}}} \quad (294)$$

Come era intuibile si vede che aumentando l'energia (e quindi la velocità) anche la sezione d'urto (ovvero la probabilità di superare la barriera) aumenta.

L'ultimo passo che manca è di tener conto della distribuzione di velocità e quindi dell'energia delle particelle. La distribuzione maxweliana (in funzione della velocità) è

$$N(v) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{KT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{E}{KT}}$$

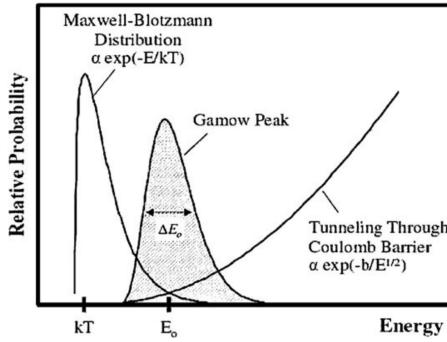
$$= C'_0 v^2 e^{-\frac{E}{b}}$$
(295)

Il rate di reazione è quindi

$$\sigma v = \frac{C_0}{v^2} e^{-\frac{a}{\sqrt{E}}} C'_0 v^2 e^{-\frac{E}{b}}$$

$$= C_0 e^{-\frac{a}{\sqrt{E}}} e^{-\frac{E}{b}}$$
(296)

Supponiamo di rappresentare in uno o stesso grafico la sezione d'urto, la velocità e la loro moltiplicazione, in numero di particelle particelle in funzione dell'energia. Quello che si vede è che le due grandezze hanno picchi opposti rispetto all'aumentare dell'energia, il che risulta nel fatto che la loro moltiplicazione possiede un picco centrale tra i due picchi detto *picco di Gamov*, che corrisponde alla zona a probabilità più alta di avere fusione nucleare.



Fusione con il trizio Se fin a d'ora il processo analizzato riguardava due nuclei di deuterio, analizziamo ora una reazione del tipo



L'energia prodotta da una reazione di questo tipo è molta

$$Q = 17,6 MeV$$
(298)

Il problema è però che il trizio non è un isotopo così stabile in quanto decade β ; ha una vita media di 11 anni e quindi non si può trovare in natura, è necessario quindi produrlo. La produzione in realtà è piuttosto semplice, basta infatti ricoprire la camera di un reattore con del Litio che fare reazione con i neutroni



La fusione con il trizio è preferibile a quella solamente con il deuterio perché ha un rapporto tra energia in ingresso ed energia in uscita molto più favorevole. Si ha inoltre che per innescare e mantenere la reazione è necessario superare un certo valore di soglia dato dall'effetto di Bremsstrahlung che è molto presente nel plasma. Per la reazione deuterio-trizio questo valore è di $4keV$ mentre per la reazione deuterio-deuterio è di $40KeV$.

Consideriamo ora l'energia in uscita rispetto all'energia in ingresso. Supponiamo di avere due specie

$$n_x + n_y = n \quad (300)$$

Per esempio uno può essere il deuterio e l'altro sia il trizio, per semplicità ne prendiamo parti uguali

$$n_x = n/2 \quad n_y = n/2 \quad (301)$$

Per mantenere il plasma una certa temperatura D devo fornire in ingresso una certa energia data da

$$E_{ing} = \frac{3}{2}KT[2n] = 3KTn \quad (302)$$

L'energia in ingresso deve essere minore dell'energia in uscita altrimenti non posso sfruttare il processo per la produzione di energia. Il rate del processo abbiamo visto che è

$$R = n_x n_y \langle \sigma v \rangle = \frac{n^2}{4} \langle \sigma v \rangle \quad (303)$$

E l'energia in uscita dipenderà da questo rate appena trovato

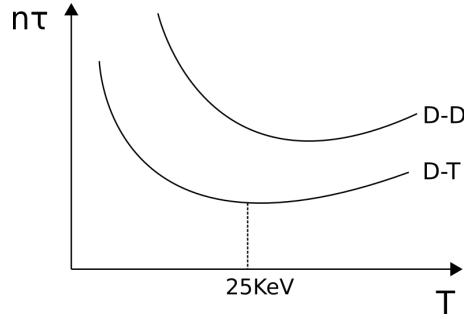
$$E_{usc} = R\tau Q = \frac{n^2}{4} \langle \sigma v \rangle \tau Q \quad (304)$$

dove τ è detto tempo di confinamento e corrisponde al tempo in cui faccio avvenire la reazione. La condizione necessaria per la produzione di energia è

$$\begin{aligned} E_{usc} > E_{ing} \rightarrow \frac{n^2}{4} \langle \sigma v \rangle \tau Q > 3KTn \\ n\tau > \frac{12KT}{\langle \sigma v \rangle Q} \end{aligned} \quad (305)$$

Questa condizione appena trovata viene chiamata da chi studia il plasma *criterio di Lawson*.

La differenza tra la situazione deuterio-deuterio e deuterio-trizio e che ci fa preferire la seconda reazione può essere vista facendo il grafico della $n\tau$ in funzione della temperatura.

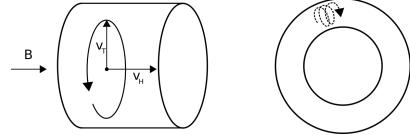


In questo grafico il criterio di Lawson è già verificata e ciò che si vuole vedere è la reazione energeticamente favorita. Si può notare come la reazione deuterio-trizio sia preferibile su tutti i valori di temperatura. Il minimo che corrisponde al valore di temperatura che cerchiamo si ha per 25KeV . Questo corrisponde ad una temperatura di

$$T = \frac{E}{K} = \frac{25\text{KeV}}{9 \times 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{K}}} = 3 \times 10^8 \text{ K} \quad (306)$$

Che rimane più bassa della temperatura trovata inizialmente e che quindi rende già la situazione più ottimistica.

Confinamento magnetico Quello che rimane particolarmente problematico per una reazione di fusione è il confinamento. Il plasma infatti non può venire in contatto con nessun tipo di superficie, si parla quindi di confinamento magnetico. Si supponga di avere una particella con una certa velocità e di avere un campo magnetico.



Quello che si può generare è un moto a spirale della particella, infatti la componente trasversale genera sotto campo magnetico un moto circolare che aggiunto alla velocità orizzontale diventa un moto a spirale. Per supportare questo moto c'è quindi necessità di sfruttare una struttura simile agli acceleratori (visibile anche in figura) definita modello *Tokamak*.

I problemi della fusione tecnologici rimangono comunque ancora alti (per esempio il riscaldamento del plasma) e per questo non esiste ancora un reattore funzionante.

Progetti attualmente in costruzione Esistono dei progetti sperimentali che continuano a cercare di realizzare questo tipo di produzione energetica.

- Progetto **ITER** (International Thermonuclear Experimental Reactor) Realizzato in Francia con uno sforzo internazionale, sta costando miliardi e il prezzo continua ad aumentare. Dovrebbe essere effettivamente attivo nel 2050.
- Progetto **JET** (Joint European Thorus)

Quello che si è riusciti a raggiungere per ora è

$$E_{out} \sim 70\% E_{in}$$

Confronto tra i processi di produzione energetica Si propone ora un conto di confronto tra la produzione energetica e di combustione, fissione e fusione, considerando pure i prodotti di scarto. Il conto è a solo scopo di studio e non ha nessuna intenzione politico/propagandistica.

- Si comincia dallo studio della *combustione di carbone*. Iniziamo cercando di ricavare la densità energetica prodotta per unità di massa.

Ricordiamo il peso di una mole di carbone

$$mole_C = 1,2 \times 10^{-3} \text{ Kg} \rightarrow 1 \text{ kg}_C = 80 \text{ mol} \quad (307)$$

Per ogni reazione di combustione produciamo

$$1,5 \text{ eV}/\text{atomo} \quad (308)$$

Quindi la densità energetica è

$$1,5 \frac{\text{eV}}{\text{atomo}} \cdot 6 \times 10^{23} \frac{\text{atomo}}{\text{mol}} \cdot 2 \times 10^{-19} \frac{\text{J}}{\text{eV}} \cdot 80 \frac{\text{mol}}{\text{kg}} = 10^7 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \quad (309)$$

Qual'è quindi la porzione di massa che viene convertita in energia?

$$10^7 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \div c^2 = 10^{-10} \frac{\text{energia}}{\text{massa}} \quad (310)$$

Significa che per esempio di una petroliera, che corrisponde a circa 100000 tonnellate di combustibile, vengono convertiti in energia $\sim 10 \text{ g}$. Il resto è tutto residuo.

- Si prende in considerazione la *fissione dell'uranio*.

In questo caso il peso di una mole è

$$mole = 2,4 \times 10^{-1} Kg \rightarrow 1kg = 4mol \quad (311)$$

L'energia prodotta per fissione è di

$$200MeV/fissione \quad (312)$$

Quindi la densità di energia dell'uranio è

$$2 \times 10^8 \frac{eV}{nucleo} \cdot 6 \times 10^{23} \frac{atomo}{mol} \cdot 2 \times 10^{-19} \frac{J}{eV} \cdot 4 \frac{mol}{kg} = 10^4 \frac{J}{kg} \quad (313)$$

Il che significa che la massa convertita corrisponde a

$$10^{-3} \frac{energia}{massa} \quad (314)$$

Il che vuol dire che $10g$ di massa convertita corrispondono a $10kg$ di materiale sfruttato, il resto sono scorie, purtroppo altamente radioattive.

- Passiamo infine alla *fusione nucleare*.

Una mole di materiale corrisponde a

$$mole = 2 \times 10^{-3} kg \rightarrow 1kg = 500mol \quad (315)$$

Con un'energia per fusione pari a

$$17,6 MeV/fusione \quad (316)$$

La densità energetica è

$$1,8 \times 10^7 \frac{eV}{fusione} \cdot 6 \times 10^{23} \frac{atomo}{mol} \cdot 2 \times 10^{-19} \frac{J}{eV} \cdot 250 \frac{mol}{kg} = 5 \times 10^{14} \frac{J}{kg} \quad (317)$$

(vanno considerate metà moli perché la fusione riguarda due nuclei al posto che uno).

La conversione sarà quindi di

$$5 \times 10^{-2} \frac{energia}{massa} \quad (318)$$

Ciò vuol dire che per convertire $10g$ di materiale necessito di $5kg$ di deuterio/trizio, il resto sarà residuo, ma in questo caso di He che non è radioattivo (e dal punto di vista dell'inquinamento prevede quantità molto più limitate di emissioni rispetto al carbone).

8 Acceleratori di Particelle

8.1 Fisica degli acceleratori di particelle

La conoscenza della fisica degli acceleratori è essenziale per ogni tipo di fisico in quanto ha applicazioni in ogni campo fisico. Ne approfondiamo quindi quelli che sono i fondamenti e le grandezze base per poter avere un'idea più chiara del loro funzionamento.

Per capire la grande applicabilità di questi strumenti, attualmente al mondo sono attivi 15000 acceleratori di cui: 8500 con applicazioni industriali, 5500 con applicazioni mediche e 1000 con applicazioni in ricerca (di cui 100 usati per la fisica nucleare e subnucleare). L'attenzione mondiale alla fisica nucleare cambiò radicalmente prima e dopo la seconda guerra mondiale e anche gli acceleratori sono figli dell'aumento dell'interesse a questi ambiti. Già a Rutherford dopo i suoi studi era chiaro che l'accelerazione di particelle sarebbe stato il passo successivo per la scoperta e l'approfondimento di questa nuova fisica. Solo avendo il controllo della quantità ed energia di particelle si sarebbe potuto infatti ottenere una maggiore risoluzione nello studio del nucleo.

I parametri che caratterizzano gli acceleratori sono sostanzialmente l'energia e la luminosità.

Energia È importante conoscere l'energia perché la risoluzione con la quale possiamo risolvere un bersaglio dipende dalla lunghezza d'onda della sonda con la quale bombardiamo l'oggetto in analisi. Prendendo un oggetto di raggio R , la lunghezza d'onda della sonda dovrà essere

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{p} < 2R \\ 2\pi \frac{\hbar c}{pc} &< 2R\end{aligned}\tag{319}$$

Vuol dire che se vogliamo risolvere una struttura di dimensione $2R$ dobbiamo avere un fascio di energia

$$pc \simeq E > 2\pi \frac{\hbar c}{2R}\tag{320}$$

Inserendo quindi un po' di dimensioni, se vogliamo per esempio studiare il protone ($r = 1 fm$) serve un'energia pari a

$$E = pc = 600 MeV\tag{321}$$

Se per esempio invece volessimo studiare i quark ($r = 10^{-4} fm$) allora l'energia sarà

$$E \simeq 6 TeV\tag{322}$$

Un altro motivo per cui è essenziale l'energia negli acceleratori deriva dalla famosa formula di Einstein

$$E = mc^2\tag{323}$$

Che prevede la convertibilità tra massa ed energia. Nella sezione precedente abbiamo infatti visto come sia possibile generare energia trasformando della massa. Se questo è vero allora sarà vero anche il contrario, infatti è stato visto negli acceleratori che da scontri tra particelle altamente energetiche è possibile generare nuove particelle. Per cui un grande utilizzo di questi apparati deriva proprio dalla necessità di generare particelle che sono state cruciali nello studio dell'evoluzione dell'universo che però sono ormai decadute per il basso tempo di decadimento. Per dire proprio a questo scopo è stato costruito l'LHCb del Cern.

Metodi di collisione Esistono due modi per studiare le collisioni tra particelle: il metodo con il collisore e la collisione su bersaglio fisso. Nel caso di collider (metodo del collisore) si sfruttano due fasci il che porta a delle energie nel centro di massa molto elevate (è quindi adatto alla produzione di nuove particelle). Nel caso invece del bersaglio fisso l'energia è più bassa, ergo si fa più fatica a produrre nuove particelle, è favorita però la *luminosità*.

Facciamo quindi delle stime sui due metodi

- *Caso del collisore simmetrico*

Si consideri di avere due fasci paralleli e opposti in collisione, per semplicità adotteremo la semplificazione $\hbar = c = 1$. Il quadrivettore legato alla particella 1 è dato da

$$p_1^* = (E_1^*, \bar{p}) \quad (324)$$

(con asterisco indico le quantità misurate nel centro di massa). Siccome i due fasci hanno lo stesso momento contropropagante è utile porsi nel sistema di riferimento del centro di massa, inoltre le due quantità di moto saranno identiche per cui non serve distinguere tra \bar{p}_1 e \bar{p}_2 .

$$p_2^* = (E_2^*, -\bar{p}) \quad (325)$$

Si sa dalla meccanica relativistica che il quadrato del quadrivettore è un invariante relativistico

$$p_1^{*2} = E_1^* - \bar{p}^2 = m_1^2 \quad p_2^{*2} = E_2^* - \bar{p}^2 = m_2^2 \quad (326)$$

L'energia nel centro di massa è la somma dei quadrivettori al quadrato

$$\begin{aligned} s &= (p_1^* + p_2^*)^2 = (E_1^* + E_2^*, \bar{p} - \bar{p})^2 \\ &\rightarrow E_{CM} = \sqrt{s} = E_1^* + E_2^* \end{aligned} \quad (327)$$

Suppongo che il collider è simmetrico e che le particelle scontrate siano in entrambi i casi protoni (quindi di massa m_p). L'energia di ogni fascio sarà

$$E_{1*} = m_p + T_{cm} = m_p + T_{cm} \quad (328)$$

L'energia invece del centro di massa corrisponde a

$$\sqrt{s} = E_{cm} = 2m_p + 2T_{cm} \quad (329)$$

Quello che ci interessa è che se suppongo che l'energia nel centro di massa sia molto maggiore della massa del protone ($T_{cm} \gg m_p$), ottengo

$$T_{cm} = \frac{\sqrt{s}}{2} \rightarrow \sqrt{s} = 2T_{cm} \quad (330)$$

Quello che ci interessa è che in un collider l'energia nel centro di massa è linearmente dipendente dall'energia cinetica nel centro di massa. Questo è importante perché quello che voglio creare nel centro di massa sono nuove particelle e così posso controllarne l'energia.

Il collider è un concetto molto complicato in quanto non è banale far scontrare due fasci, bisogna considerare che le dimensioni dei fasci infatti sono dell'ordine del millimetro e l'acceleratore è spesso lungo centinaia di metri.

Supponiamo di far scontrare due protoni e di voler creare un pion, particella costituita da un quark ed un anti quark.

$$pp \rightarrow pp\pi^0 \quad (331)$$

La massa di un pion è di

$$m_{\pi^0} \simeq 130 MeV/c^2 \quad (332)$$

L'energia dei due fasci per la formazione di un pion deve essere uguale a

$$s_{cm} = (2m_p m m_{\pi^0})^2 \quad (333)$$

L'energia cinetica delle particelle deve soddisfare la condizione

$$2m_p + 2T_{cm} \geq 2m_p + m_{\pi^0} \quad (334)$$

e quindi essere

$$T_{cm} \geq \frac{m_{\pi^0}}{2} = 67,5 MeV \quad (335)$$

L'energia cinetica richiesta per ogni fascio sarà quindi sempre pari alla metà della massa della singola particella. Questo si ottiene in quanto dobbiamo considerare che il centro di massa sarà sempre uguale.

- *Caso del bersaglio fisso*

Nel sistema di riferimento del laboratorio abbiamo che i due quadrivettori saranno

$$\begin{aligned} p_1 &= (E_1, \bar{p}_1) \\ p_2 &= (m_2, 0) \end{aligned} \quad (336)$$

Nel centro di massa il quadrivettore energia è

$$\begin{aligned} s &= [(E_1 + m_2)^2 - (\bar{p}_2 + 0)^2] \\ &= E_1^2 + 2E_1 m_2 + m_2^2 - \bar{p}_1^2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2 \end{aligned} \quad (337)$$

A questo punto faccio le stesse considerazioni del collider, suppongo che le due particelle coincidano ($m_1 = m_2 = m_p$) e che l'energia della prima particella sia

$$E_1 = m_1 + T^{lab} \quad (338)$$

ottengo quindi

$$\begin{aligned} s &= m_p^2 + m_p^2 + 2(m_p + T^{lab})m_p \\ \sqrt{s} &= \sqrt{4m_p^2 + 2T^{lab}m_p} \end{aligned} \quad (339)$$

Se mi pongo nella condizione in cui $T^{lab} \gg m_p$ ottengo

$$\sqrt{s} = \sqrt{2m_p T^{lab}} \quad (340)$$

La differenza con il caso precedente è immediata, in un esperimento a bersaglio fisso l'energia nel centro di massa cresce linearmente con $\sqrt{T^{lab}}$. Se volessi creare un pion con questa configurazione dovrei richiedere un'energia di soglia

$$\begin{aligned} T_{Th}^{lab} &= \frac{s_{Th} - 4m_p^2}{2m_p} \\ s_{Th} &= (2m_p + 2m_{\pi^0})^2 \\ T_{Th}^{lab} &= \frac{(2m_p + 2m_{\pi^0})^2 - 4m_p^2}{2m_p} = 280 MeV \end{aligned} \quad (341)$$

Questo è solo un esempio per capire la differenza tra i due tipi di acceleratore.

Luminosità La luminosità L corrisponde al numero di eventi (collisioni) per unità di area al secondo, è una grandezza importante perché se voglio calcolare il rate di eventi di un certo tipo

$$R = \sigma L \quad (342)$$

dove σ è la sezione d'urto.

Per esempio nel Lep, che è stata la macchina progenitrice dell'LHC (funzionante tramite leptoni) e con cui si è studiato il modello standard, la produzione di coppie W^+, W^- era di $\sigma = 15 pb$ e la luminosità (che si misura in numero di particelle su centimetro quadro al secondo) era di $L = 10^{32} \cdot /cm^2 s$. Il che restituiva un rate di coppie pari a

$$\frac{dW^+W^-}{dt} = 15 \times 10^{-12} \times 10^{-28} m^2 \cdot 10^{32} \frac{1}{cm^2 s} = 1,5 \times 10^{-3} \frac{\text{eventi}}{s} \quad (343)$$

Si verificavano quindi un paio di eventi ogni ora.

La luminosità integrata nel tempo è una quantità che serve per capire per quanto tempo ho la necessità di sfruttare una strumentazione

$$L = \int L dt \quad (344)$$

La luminosità nel caso del collider si calcola come

$$L = \frac{n f N_1 N_2}{A} \quad (345)$$

dove n è il numero di bunches (le particelle solitamente non sono distribuite uniformemente nei fasci a causa dei metodi sfruttati per collimare i fasci, vengono invece distribuite in pacchetti), N_1, N_2 sono il numero di particelle per bunch (ce ne sono due perché abbiamo due fasci e non sempre sono fasci uguali), f è la frequenza di rivoluzione e A è la sezione del fascio. È intuitivo che per aumentare la luminosità dobbiamo rendere il fascio più piccolo possibile.

Nel caso del bersaglio fisso la luminosità è data da

$$L = \Phi_a N_b \quad (346)$$

dove Φ_a è l'intensità di particelle del fascio e N_b è il numero di particelle nel bersaglio. L'intensità di particelle del fascio è uguale al numero di particelle al secondo diviso l'area

$$\Phi_a = \frac{N_a(s)}{A} \quad (347)$$

che può anche essere scritta come la densità di particelle per unità di volume per la velocità delle particelle stesse

$$L = n_a v_a \quad (348)$$

Mentre il numero di particelle del bersaglio è uguale alla densità delle particelle del bersaglio per lo spessore per l'area interessata del fascio

$$N_b = n_b d \cdot A \quad (349)$$

La luminosità è quindi riscrivibile come

$$L = N_a n_b d = n_a v_a N_b \quad (350)$$

8.2 Tipi di Acceleratore

Gli acceleratori si possono suddividere in due grandi categorie: acceleratori lineari e circolari.

Acceleratori Lineari Sono acceleratori elettrostatici ossia in questi acceleratori l'accelerazione avviene tramite una differenza di potenziale elettrostatico. In questa categoria sono inclusi gli acceleratori:

- Van de Graaf
- Cockroft-Walton
- Tandem
- il LINAC.

Il limite di questi acceleratori sta nel fatto che utilizzano un'unica differenza di potenziale, il che pone un limite a ciò che si può creare infatti le differenze di potenziale sono limitate dalla rottura del dielettrico. Sono i primi che sono stati utilizzati e i massimi campi che si riesce a creare nel vuoto sono di $6 - 7 \text{ MeV/m}$

Acceleratori circolari Questi acceleratori ovviano al limite della differenza di potenziale facendo passare la particella più volte per la stessa differenza di potenziale facendo bastare così una piccola differenza di potenziale ben posta. Di questi fanno parte:

- ciclotrone
- betatron
- sincrotrone

8.2.1 Van De Graaf

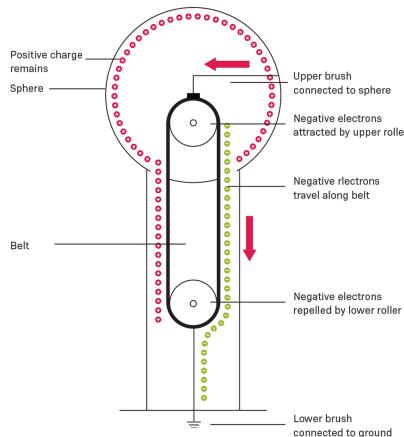


Figure 35: Schema di un acceleratore di van de Graaf

L'acceleratore di Van De Graaf si compone come in figura. La struttura è formata da una cinghia che scorre e si carica grazie a delle punte per scorrimento. La cinghia poi passa per una

sfera cava su cui viene trasferita la carica che, per i principi dell'elettrodinamica, si va a distribuire su tuttala superficie. In questo modo si riescono a creare una differenza di potenziale dell'ordine di qualche MeV . Tutto il sistema viene messo all'interno di grossi contenitori isolati in quanto l'aria farebbe scaricare le superfici (i gas inerti sostitutivi sono solitamente $SF_6, N_2 + CO_2$).

Il **Tandem**, è basato sullo stesso principio del Van de Graaf, solo che la differenza di potenziale viene raddoppiata, ponendo la sfera all'interno di un altro conduttore. Il potenziale che si riesce

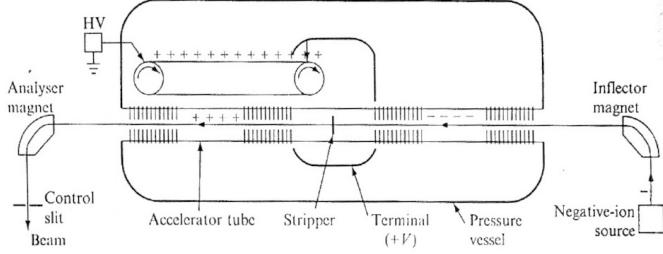


Figure 36: Configurazione Tandem

a creare è il doppio del potenziale di partenza. A Legnaro è presente un acceleratore con questa configurazione e viene utilizzato per esperimenti di *Rutherford backscattering*, in cui si sfrutta lo scattering del fisico neozelandese per esperimenti di spettroscopia (studiando l'energia delle particelle backscatterate si riesce a capire la composizione superficiale del bersaglio).

8.2.2 Acceleratore lineare: LINAC

Il LINAC è stato rivoluzionario come acceleratore perché supera il limite nella generazione di potenziali. Questo acceleratore è composto da una serie di elettrodi separati che variano la polarità con un'onda a radiofrequenza.

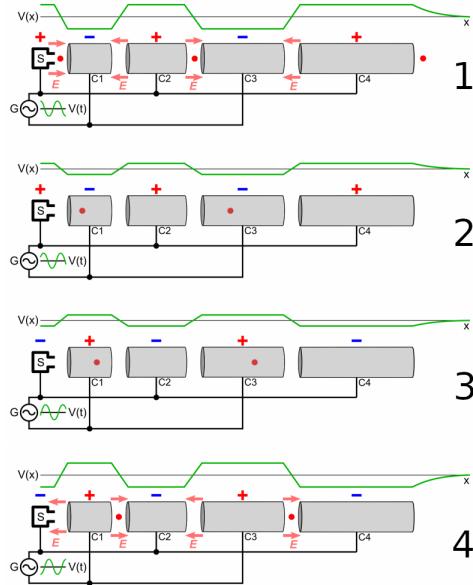


Figure 37: Schema di funzionamento di un acceleratore lineare

Quello che si vuole generare con questo tipo di configurazione è un potenziale sempre negativo

per la particella accelerata, infatti riuscendo a variare il potenziale al passaggio della particella, facendolo passare da positivo a negativo e viceversa, la particella nel sistema sarà sempre accelerata da un potenziale negativo rispetto a quello che ha alle sue spalle (che nel frattempo è diventato positivo). Tutto questo fa sì che pur mantenendo una differenza di potenziale piuttosto bassa si riesca ad accelerare particelle ad alte energie, questo metodo è usato per esempio per gli elettroni (in orbita circolare gli elettroni emettono radiazione).

8.2.3 Ciclotrone

Il ciclotrone utilizza una combinazione di campi elettrici e magnetici. Supponiamo di avere un campo magnetico entrante e di porci una particella (per esempio un protone) ciò che si crea è una forza di Lorentz, quindi a causa del campo magnetico la particella percorre una traiettoria circolare.

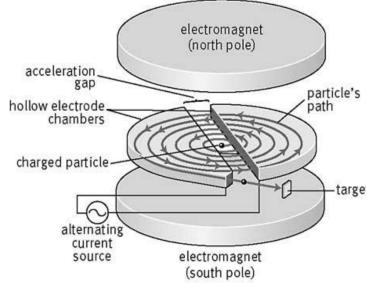


Figure 38: Struttura del ciclotrone

All'interno di una situazione in cui due elettrodi hanno forma a D e sono immersi all'interno di un campo magnetico, questi vengono polarizzati uno con polarità positiva e uno con polarità negativa. Se non si fa nulla il protone passa dal + al - e se cambio a polarità fa il percorso inverso. Siccome voglio confinare la particella applico un campo magnetico ortogonale al piano degli elettrodi. La combinazione di campo magnetico e cambio di polarità genera un moto circolare del protone che ad ogni passaggio viene accelerato. In questo modo si riesce ad aumentare la velocità delle particelle fino a che non raggiunge la velocità desiderata e allora posso estrarlo.

Calcoliamo le leggi che agiscono sulla particella. Innanzitutto si ha la forza di Lorentz

$$F = Bqv \quad (351)$$

Che corrisponde alla forza centripeta

$$Bqv = m \frac{v^2}{r} \rightarrow v = \frac{Bqr}{m} \quad (352)$$

Calcoliamo la frequenza di variazione del campo elettrico per mantenere la particella in moto. Il periodo di rotazione della particella è

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\frac{Bqr}{m}} = \frac{2\pi m}{Bq} \quad (353)$$

Quindi la frequenza con cui devo variare i due elettrodi sarà

$$f = \frac{Bq}{2\pi m} \quad (354)$$

È interessante notare come questa non dipenda dal raggio perché a mano a mano che la velocità aumenta la particella percorre percorsi maggiori e quindi queste due quantità si compensano. Questo è ovviamente valido finché non si manifestano effetti relativistici sulla massa

$$m = m_0 \cdot \gamma \quad (355)$$

Esiste quindi un limite che corrisponde a qualche percentuale della velocità della luce (per esempio un protone che ha massa dell'ordine del GeV può essere accelerato fino ad un massimo di $\sim 20MeV$).

8.2.4 Betatrone

È anche questo un acceleratore circolare. Il campo magnetico viene usato in questo caso sia per il confinamento che per l'accelerazione delle particelle. Se è vero che il campo magnetico di per sé non può accelerare le particelle si sa anche che la variazione del campo, grazie alla legge di Faraday, genera un campo elettrico. La configurazione magnetica del Betatrone viene mostrata in figura ed è formata da due piastre conduttrici a forma di piatto rovesciato separate da una ciambella ceramica.

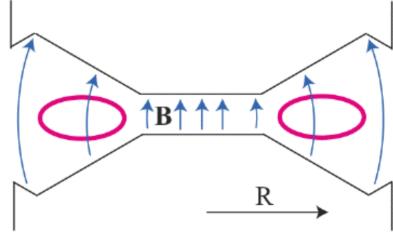


Figure 39: Sezione verticale del Betatrone

Il campo magnetico è costante nel centro della configurazione ma decresce andando verso l'esterno. La ciambella ceramica è vuota ed è il percorso all'interno del quale vengono accelerate le particelle. Il fatto che il campo decresca genera un problema di focalizzazione, per questo viene solitamente considerato un sistema a focalizzazione debole. Bisogna considerare che le particelle continuando a percorrere più volte lo stesso spazio tenderanno ad avere traiettorie leggermente diverse e quindi un po' alla volta si disperderanno.

Ci concentriamo ora sui campi. Chiamiamo \bar{B} il campo magnetico medio interno alla ciambella e B_0 il campo che le particelle vedono. Se varia il campo medio viene generato un campo elettrico che è quello che porta all'accelerazione delle particelle mentre B_0 corrisponde al campo che tiene le particelle all'interno della cavità, ci deve essere quindi una ben definita relazione tra \bar{B} e B_0 .

La prima legge che ci è utile è la legge di Faraday-Lenz

$$\frac{d\Phi(B)}{dt} = - \oint \vec{E} d\vec{l} \quad (356)$$

Il flusso è dato da

$$\Phi(B) = \pi r^2 \frac{d\bar{B} dt}{-E 2\pi r} \rightarrow E = -\frac{r}{2} \frac{d\bar{B}}{dt} \quad (357)$$

La forza accelerante vista dalle particelle è del tipo

$$F = -lE = \frac{er}{2} \frac{d\bar{B}}{dt} \quad (358)$$

Al tempo stesso il campo B_0 deve fornire l'accelerazione centripeta, per tenere all'interno le particelle.

$$evB_0 = \frac{mv^2}{r} \rightarrow \frac{pv}{r} evB_0 \rightarrow p = erB_0 \quad (359)$$

Ricaviamo quindi la forza

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(erB_0) = er \frac{dB_0}{dt} \quad (360)$$

Le due forze devono essere uguali, si ottiene

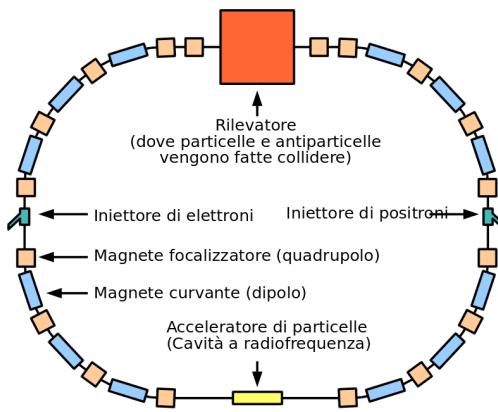
$$\frac{er}{2} \frac{d\bar{B}}{dt} = er \frac{dB_0}{dt} \rightarrow \frac{dB_0}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\bar{B}}{dt} \quad (361)$$

Che integrando ci restituisce la condizione

$$\bar{B} = 2B_0 + cost \quad (362)$$

8.2.5 Sincrotrone

È un acceleratore circolare a sfrutta anch'esso i campi magnetici (sono l'unico modo per accelerare delle particelle) e la cui idea di base è il disaccoppiamento delle funzioni principali dell'acceleratore.



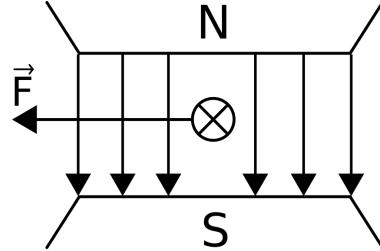
Il campo magnetico in questo caso viene generato da quella che viene chiamata cavità a radiofrequenza, ovvero un qualunque dispositivo con all'interno un campo elettrico oscillante con la frequenza delle radio-onde. In questa cavità la particella passerà con una certa frequenza e il modo per accelerarla è fare sì che ad ogni passaggio sia sempre in una fase del campo elettrico accelerante. Bisogna considerare che all'interno del sincrotrone la particella avrà una frequenza dell'ordine del *MHz* (ogni secondo le particelle faranno un milione di giri all'interno dell'anello di accumulazione) e che per fare esperimenti l'obiettivo è di tenere le particelle per ore all'interno del dispositivo, per cui il minimo errore di traiettoria provocherebbe la dispersione del fascio.

Le grandezze di base (e indipendenti tra loro) del sincrotrone sono:

- *Accelerazione*: tramite campi elettrici a radiofrequenza;
- *Guida*: tramite dipoli magnetici;
- *Focalizzazione*: tramite quadrupoli magnetici.

L'accelerazione non verrà trattata per tempistiche, studiamo però i campi magnetici che vengono sfruttati.

Il *campo di dipolo magnetico* è composto da due poli, uno nord e uno sud, con le linee di campo dirette da nord a sud perpendicolarmente.



Supponendo di avere una carica positiva entrante nel dipolo, per la regola della mano destra viene generata una forza perpendicolare sia al campo che alla particella. In questo modo il dipolo confina la particella senza compiere lavoro (i campi magnetici non compiono mai lavoro), generando un moto circolare. Calcoliamo quindi la relazione tra la curvatura e il campo magnetico sfruttando la relazione di Lorentz.

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{R} &= qvB \\ mv &= qRB \\ p &= qRB \\ pc &= qcRB \end{aligned} \tag{363}$$

Nel sistema di unità di misura internazionale pc si misura in $[J]$, B in $[T]$ e il raggio R in $[m]$.

$$pc[J] = 1,6 \times 10^{-19} C \cdot 3 \times 10^8 \frac{m}{s} B[T] R[m] \tag{364}$$

Volendo però passare alle unità naturali si ottiene

$$pc[GeV] = 0,3 B[T] R[m] \tag{365}$$

$B \cdot R$ viene solitamente chiamata rigidità magnetica dell'anello.

Questa formula è molto utile perché, conoscendo direttamente il campo magnetico e la lunghezza di un anello, possiamo già calcolare l'energia massima a cui possiamo accelerare le particelle. Per esempio l'LHC del Cern ha un raggio di

$$2\pi R = 27 km \tag{366}$$

E un campo medio esistente di

$$B = 5,4 T \tag{367}$$

Il che porta a particelle di quantità di moto

$$p = 7 \frac{TeV}{c} \tag{368}$$

Il numero di dipoli che devo inserire poi in un anello è di

$$\theta = \frac{2\pi}{N} \tag{369}$$

Dove N è il numero di dipoli. Un'altra cosa che posso già calcolare, sapendo θ e la lunghezza di un dipolo L è il raggio di curvatura

$$R = \frac{L}{\theta} \quad (370)$$

Ora abbiamo visto il confinamento delle particelle e il suo funzionamento ma c'è da considerare che la vita media delle particelle in un sincrotrone è di una decina di ore e che la mole di particelle è dell'ordine del miliardo è quindi fondamentale la *focalizzazione*. Come abbiamo visto il metodo di focalizzazione è il *quadrupolo magnetico*, composto, come suggerisce il nome, da quattro poli, due nord e due sud. Le linee di campo anche in questo caso sono rivolte da nord a sud.

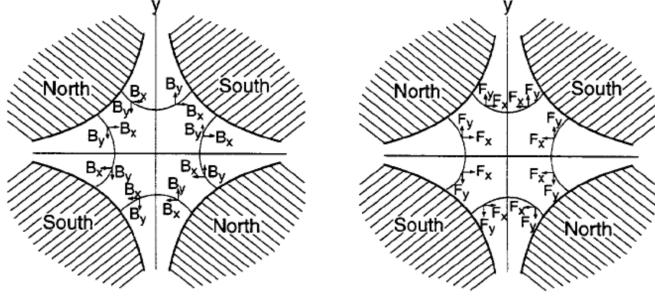


Figure 40: A sinistra sono evidenziate le linee di campo del quadrupolo mentre a destra le forze generate

Le forze sono sempre ricavate utilizzando la forza

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (371)$$

Tralasciando i segni abbiamo quindi che

$$F_x = qvB_y \quad F_y = qvB_x \quad (372)$$

La differenza tra la forza che agisce lungo l'asse delle x e l'asse delle y , è che la forza F_x tende a focalizzare il fascio mentre la forza F_y tende a defocalizzarlo nel senso che una avvicina al centro mentre l'altra allontana. Abbiamo inoltre che i campi in questo caso particolare tendono ad aumentare e quindi a generare più forza più ci si allontana dal centro di coordinate, corrispondente al centro del quadrupolo.

$$\begin{aligned} B_y &\propto x \\ B_y &= \frac{dB_y}{dx}x \\ F_x &= qvB_y = qv\frac{dB_y}{dx}x \end{aligned} \quad (373)$$

L'effetto di questa forza è quello di variare la quantità di moto.

$$\Delta p_x = F_x \Delta t = qv \frac{dB_y}{dx} x \frac{d}{v} = q \frac{dB_y}{dx} x d \quad (374)$$

dove d è la profondità del magnete. Si ha quindi che la variazione della quantità di moto è linearmente dipendente dalla posizione della particella. L'effetto di una variazione della quantità di moto è di variare la pendenza della particella lungo l'asse delle x .

$$\Delta x' = \frac{\Delta p_x}{p} = qx \frac{B_y}{dx} \frac{d}{p} \quad (375)$$

Si ha dunque che

$$\Delta x' \propto x \quad (376)$$

L'effetto di un quadrupolo magnetico in definitiva è quello di variare l'inclinazione di una particella rispetto all'asse z in funzione della sua distanza dal centro il che corrisponde esattamente all'effetto di una lente che focalizza ad una distanza

$$f = -\frac{p}{\frac{dB_y}{dx}d} \quad (377)$$

(il segno meno indica l'effetto di focalizzazione).

Come si è già visto se una componente focalizza l'altra defocalizza e il punto focale sarà

$$f = +\frac{p}{\frac{dB_x}{dy}d} \quad (378)$$

La peculiarità dei quadrupoli magnetici è che focalizzando in una direzione si va a defocalizzare nell'altra. Per avere la focalizzazione si dovrà allora sfruttare quello che in ottica viene chiamato doppietto, ovvero il sistema composto da due lenti con lunghezze focali f_1, f_2 poste ad una distanza d . In questo modo la focale equivalente è

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (379)$$

Che nel nostro caso può essere semplificato a

$$f_1 = -f_2 \rightarrow \frac{1}{f} = \frac{d}{f_1 f_2} \quad (380)$$

Per descrivere matematicamente questo sistema si sfrutta un formalismo matriciale ovvero si va a schematizzare ogni elemento con una matrice che prende un valore di ingresso e me lo restituisce trasformato.

$$\begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}_{out} = \begin{pmatrix} C & S \\ C' & S' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}_{in} \quad (381)$$

Vuol dire che io prendo qualunque elemento e riassumo il suo effetto in quello di trasformare una serie di condizioni del fascio in ingresso nelle condizioni del fascio in uscita. Nel caso generale mettendo insieme x e y avremo delle matrici 4×4 che moltiplicano dei vettori che ci indicano le posizioni radiali del fascio.

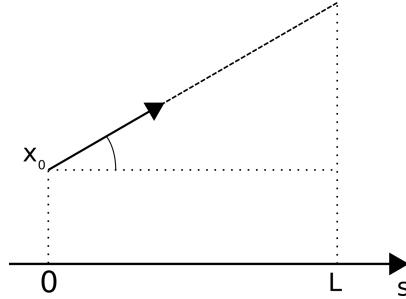
$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}_{out} = \begin{pmatrix} C_x & S_x & 0 & 0 \\ C'_x & S'_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_y & S_y \\ 0 & 0 & C'_y & S'_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}_{in} \quad (382)$$

Tutte queste sono funzioni del tipo

$$x = x(s) \quad (383)$$

Dove s mi indica la posizione dell'elemento lungo l'anello. Gli 0 nelle matrici mi indicano che gli elementi non perturbano.

Per esempio si prenda una particella in posizione x_0 in movimento, costruiamone la *matrice di drift*.



Quello che si otterrà dopo una distanza L dovrebbe essere uno spostamento del tipo

$$\begin{aligned} x(L) &= x_0 + Lx'_0 \\ x'(L) &= x'_0 \end{aligned} \quad (384)$$

in quanto la particella è soggetta ad una forza che la muove verso l'alto. La situazione viene descritta in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{out} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{in} \quad (385)$$

La rappresentazione di un quadrupolo deve esprimere la variazione della pendenza. Quello che si vede nel caso di una lente focalizzante è che

$$x_{out} = x_{in} \quad x'_{out} = -\frac{1}{f}x_{in} + x'_{in} \quad (386)$$

che in forma matriciale diventa

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{out} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{in} \quad (387)$$

Nel caso della lente defocalizzante si avrà invece

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{out} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{in} \quad (388)$$

Per completezza mostriamo anche la matrice rappresentante un dipolo

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{out} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{in} \quad (389)$$

dove ρ rappresenta il raggio di curvatura.

9 Diffusione elettronica per studi subnucleari

Gli elettroni, come abbiamo già visto precedentemente, sono considerati la sonda principe per l'indagine subnucleare in quanto sono privi di struttura (per quanto ne sappiamo possono essere considerati puntiformi) e interagiscono solamente elettromagneticamente, ovvero tramite una teoria conosciuta con un livello di precisione estremo (probabilmente è attualmente la teoria meglio descritta della fisica). Conoscendo perfettamente l'interazione tra il nucleone e l'elettrone ci permette di acquisire dettagli sulla struttura del nucleone.

La relazione tra la lunghezza d'onda e la quantità di moto dell'elettrone abbiamo visto che è

$$\lambda \sim \frac{h}{p} \quad (390)$$

Introduciamo i grafici di Feynman di un'interazione di questo tipo

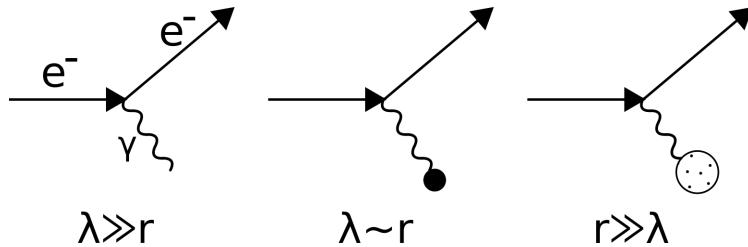


Figure 41: Diagrammi di Feynman di un'interazione elettrone nucleone

Come si può notare la reazione descritta con i diagrammi di Feynman avviene attraverso un fotone virtuale. L'elettrone, dopo lo scontro viene scatterato. Come evidenziato in figura la relazione tra la lunghezza d'onda e il raggio del bersaglio determina la quantità di dettagli rilevabili. L'ultimo diagramma riferito al caso in cui la lunghezza d'onda è molto minore del raggio del protone verrà studiata più avanti e corrisponde al caso di scontro profondamente inelastico (è il caso che rivela la struttura del nucleone). Ci concentreremo per ora sui primi due casi corrispondenti ad urti elastici.

9.1 Diffusione elastica elettrone protone

Il punto di partenza di tutta la trattazione è stata la *sezione d'urto di Rutherford* in cui era considerata esclusivamente l'interazione coulombiana e sia sonda che bersaglio erano approssimato puntiformi.

Si è poi passati alla sezione d'urto di Mott con cui si è in grado di studiare la struttura nucleare, le ipotesi in questo caso sono il bersaglio puntiforme e privo di spin e la sonda composta da elettroni relativistici con spin. Nell'approssimazione di avere elettroni esclusivamente relativistici ($\beta = v/c \rightarrow 1$) la sezione d'urto di Mott corrisponde a

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott}^* = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Ruth} \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (391)$$

L'asterisco indica il fatto che non viene considerato il rinculo del nucleo, questa è una buona approssimazione nel caso di basse energie ma non può essere sempre valido.

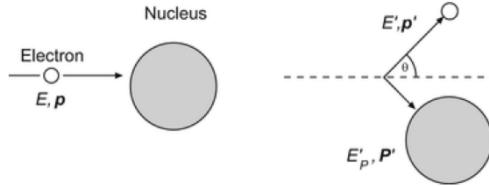
Rinculo del bersaglio Consideriamo il caso in cui il rinculo del bersaglio sia rilevante. Si prende una sonda (elettrone) e un bersaglio (protone) di massa m_e, M_p e caratterizzati inizialmente dai

quadrivettori

$$p = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \quad P = (M_p c, 0) \quad (392)$$

E dopo l'urto da

$$p' = \left(\frac{E'}{c}, \vec{p}' \right) \quad P' = \left(\frac{E'_p}{c}, \vec{P}' \right) \quad (393)$$



Per la conservazione del quadrivettore energia impulso si ottiene

$$p + P = p' + P' \quad (394)$$

di cui posso fare il quadrato

$$p^2 + 2p \cdot P + P^2 = p'^2 + 2p' \cdot P' + P'^2 \quad (395)$$

Siccome la diffusione è elastica, la massa invariante dell'elettrone e del protone (non soggetta ad effetto relativistico) restano invariate.

$$p^2 = p'^2 = m_e^2 c^2 \quad P^2 = P'^2 = M_p^2 c^2 \quad (396)$$

Sostituendo nella formula (395), ottengo

$$p \cdot P = p' \cdot P' \quad (397)$$

Dove P' può essere ricavato dalla formula (394)

$$p \cdot P = p' \cdot (p + P - p') = p'p + p'P - m_e^2 c^2 \quad (398)$$

Esplicitiamo le relazioni e moltiplichiamo per c^2

$$E \cdot M_p c^2 = E'E - \vec{p} \cdot \vec{p}' c^2 + E'M_p c^2 - m_e^2 c^4 \quad (399)$$

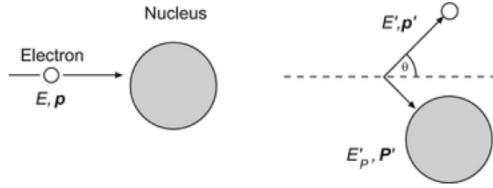
Considerando la condizione di alte energie $E > m_e c^2$ posso considerare nulla la massa dell'elettrone, sostituendo poi al prodotto scalare il coseno e considerando che in condizioni relativistiche $E = pc$ si ottiene

$$E \cdot M_p c^2 = E'E(1 - \cos \theta) + E'M_p c^2 \quad (400)$$

Si trova infine la relazione tra l'energia dell'elettrone diffuso e quello incidente.

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{M_p c^2}(1 - \cos \theta)} \quad (401)$$

La questione importante è che c'è una relazione univoca tra l'energia dell'elettrone diffuso e l'angolo di diffusione.



Questa trattazione sarebbe la stessa se al posto di un protone si mettesse un nucleo. Osservando quindi il grafico dell'energia in funzione dell'angolo di diffusione si può notare come per bersagli pesanti (nuclei) e elettroni a energia più bassa l'approssimazione di assenza di rinculo resti valida restituendo elettroni ad energia sempre costante a qualsiasi angolo. Ma nel momento in cui si va a vedere il caso del bersaglio protonico o si aumenta notevolmente l'energia della sonda gli elettroni diffusi iniziano a cedere una parte di energia non trascurabile al nucleo.

La sezione d'urto di Mott in questo caso varierà rispetto a quella vista fin'ora e deve essere moltiplicata di un ulteriore fattore

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}^* \frac{E'}{E} \quad (402)$$

Nelle considerazioni che dobbiamo fare esiste un altro parametro importante che è il momento trasferito

$$q^2 = (p' - p)^2 = \frac{4E'E}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (403)$$

(non viene ricavato ma si può ricavare della formule sopra) Spesso ci si riferisce alla formula (403) anche come $-Q^2$ in quanto così diventa una quantità positiva ed è più comoda nelle trattazioni.

Interazione di spin Dobbiamo rilasciare ora un'altra approssimazione fatta precedentemente, infatti tra elettroni e protoni può esservi interazione di spin. Il momento magnetico di una particella legato allo spin è

$$\mu = g \frac{e}{2M} \frac{\hbar}{2} \quad (404)$$

Dove g è detta *anomalia magnetica* ed è ciò che distingue tra un sistema classico e uno quantistico. Il g deriva dal fatto che la relazione tra momento angolare e momento magnetico valida nel caso classico, non vale per il momento magnetico di spin per cui è necessario introdurre appunto questo fattore. Abbiamo visto che nel caso di particelle di Dirac prive di struttura interna questo fattore ha valore $g = 2$.

Cerchiamo quindi di trovare la sezione d'urto per collisioni tra una sonda che è una particella ideale di Dirac e un bersaglio che è una particella ideale di Dirac, ossia tra particelle puntiformi con spin pari ad $1/2$. Una parte dell'interazione dovrà essere magnetica e dovuta allo spin. Dobbiamo considerare possibili eventi di spin flip (unico tipo di interazione possibile nel caso dello spin), la cui impossibilità era proprio alla base della sezione d'urto di Mott.

In questo caso viene inibita la diffusione a 0° , per lo stesso motivo per cui era inibito il back scattering nel caso di Mott, viene invece favorita la diffusione a 180° . Vi è quindi l'introduzione di un termine di $\sin^2(\theta/2)$ nella sezione d'urto. La sezione d'urto di particelle puntiformi a spin $1/2$ sarà quindi

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{S=\frac{1}{2}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left(1 + 2\tau \tan^2 \frac{\theta}{2}\right) \quad (405)$$

dove

$$\tau = \frac{Q^2}{4M^2c^2} \quad (406)$$

Che significato ha questo termine?

$$\begin{aligned} \tau &\propto \mu \propto \frac{1}{M} \\ \tau &\propto Q \end{aligned} \quad (407)$$

Come si vede il termine è proporzionale sia al momento di dipolo magnetico (a sua volta proporzionale all'inverso della massa) che alla durata dell'interazione, infatti maggiore è la durata dell'interazione maggiore è la quantità di moto trasferita.

Ora quella che abbiamo trovato è l'interazione di particelle puntiformi ma come sappiamo il protone non è una particella puntiforme priva di struttura (non è quindi una particella fondamentale) e quindi dobbiamo generalizzare ancora queste formule per trovare la sezione d'urto adeguata. Per tenere conto del fatto che il protone non è puntiforme si introducono i fattori di forma. In particolare la sezione d'urto viene determinata dalla *formula di Rosenbluth*

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \left[\frac{G_E(Q^2) + \tau G_M(Q^2)}{1 + \tau} + 2\tau G_M(Q^2) \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (408)$$

dove $G_E(Q^2)$ è il *fattore di forma elettrico* e $G_M(Q^2)$ è il *fattore di forma magnetico*.

Questi fattori sono due funzioni che parametrizzano la nostra non conoscenza rispettivamente di distribuzione di carica e distribuzione di corrente all'interno del protone. Sono delle grandezze che dobbiamo determinare sperimentalmente. Si capisce che questa espressione parametrizza già la fenomenologia dell'interazione infatti abbiamo tra parentesi un primo termine che dipende da entrambi i fattori e un secondo termine che invece dipende esclusivamente dall'interazione magnetica. In particolare i fattori di forma hanno un significato fisico nell'ipotesi in cui si studia $Q^2 \rightarrow 0$ ovvero quando si ha una lunghezza d'onda del fotone virtuale (di momento trasferito) molto maggiore del raggio del bersaglio. In pratica $Q^2 \rightarrow 0$ si ha quando si osservano le proprietà globali ovvero quando non si va a perturbare il sistema con una sonda ma si è in un caso statico del bersaglio. In questo limite si dovrà avere che il fattore di forma elettrico fa ricavare la carica del protone e il fattore di forma magnetico mi da il momento magnetico del protone.

$$\begin{aligned} Q^2 \rightarrow 0 & \quad \frac{G_E^p}{e} \rightarrow 1 \\ & \quad \frac{G_M^p}{\mu} \rightarrow 2,79 \end{aligned} \quad (409)$$

I dati sopra sono quelli del protone ma essendo la formula universale devono valere anche nel caso del neutrone

$$\begin{aligned} Q^2 \rightarrow 0 & \quad \frac{G_E^n}{e} \rightarrow 0 \\ & \quad \frac{G_M^n}{\mu} \rightarrow -1,91 \end{aligned} \quad (410)$$

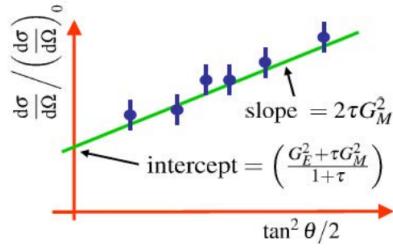
Misura sperimentale dei fattori di forma Abbiamo determinato la struttura teorica che sostiene questa teoria, ora ci mancano i dati sperimentali. Per misurare sperimentalmente i fattori

di forma devo pormi nella condizione di avere Q^2 costante e devo quindi studiare la formula di Rosenbluth. Stando a Q^2 costante si può parametrizzare (408)

$$\frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ros}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}} = A(Q^2) + B(Q^2) \tan^2 \frac{\theta}{2} \quad (411)$$

Cosa rappresentando dunque A e B ?

Facendo il grafico della sezione d'urto in funzione della $\tan^2 \frac{\theta}{2}$ quello che si ottiene è una retta con intercetta data da A e pendenza da B .



Siccome τ ha una dipendenza diretta da Q^2 e il fattore di forma magnetico è sempre moltiplicato per τ si ottiene che

$$\begin{aligned} Q^2 \rightarrow 0 & \quad \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ros}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}} \rightarrow G_E^2(Q^2) \\ Q^2 \rightarrow \infty & \quad \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ros}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}} \rightarrow (1 + 2\tau \tan^2(\theta/2)) G_M^2(Q^2) \end{aligned} \quad (412)$$

9.2 Diffusione profondamente inelastica

Viene più comunemente denominata *Deep inelastic scattering* (DIS), in quanto è di uso comune la denominazione internazionale. Come per la diffusione elastica anche in questa interazione si sfruttano gli elettroni. La sezione d'urto completa per un urto elastico, nell'approssimazione $Q^2 = -q^2 \rightarrow \infty$, abbiamo visto che è

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ros} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \left[\frac{Q^2}{2M^2} G_M^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (413)$$

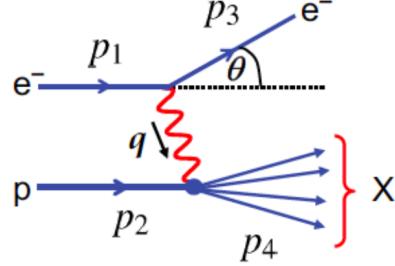
Dove

$$G_M(Q^2) \approx \frac{1}{\left(1 + \frac{Q^2}{0.71 GeV^2}\right)^2}$$

Facendo un grafico della sezione d'urto in funzione del Q^2 evidenzia una rapida decrescita all'aumentare di Q^2 con un andamento che rispecchia un fattore del tipo Q^{-6} . Ci si aspetta quindi che la sezione d'urto vada molto rapidamente a 0. Questa sezione d'urto sarebbe quella che si aspetterebbe se la materia all'interno del protone fosse distribuita in modo uniforme.

Negli anni '70 sono stati fatti esperimenti sulla materia all'interno del protone e questo era esattamente ciò che ci sia aspettava e le dinamiche che si sono verificate sono simili a quelle successive a Rutherford. Quello che si è verificato sperimentalmente è che andando ad elevati Q^2 ci verifica quella che può essere vista come una collisione con delle particelle puntiformi.

Deep inelastic scattering Il fatto che la collisione sia inelastica comporta a non avere più una relazione univoca tra l'energia dell'elettrone diffuso e' e l'angolo di diffusione θ . Si ha quindi che anche a stessi angoli è possibile trovare particelle con energia diversa. Questo accade perché una parte dell'energia viene usata per eccitare il protone, per cui la massa del protone varia. Questo effetto si può rappresentare con un diagramma di Feynman del tipo mostrato in figura.



Come si può vedere il protone, rappresentato dal quadrivettore p_2 , dopo l'interazione diventa una serie di prodotti d'interazione il cui insieme viene indicato con X . Il quadrivettore di questi prodotti dell'interazione lo caratterizziamo come p_4 .

Ciò che stiamo facendo ora è cercare di caratterizzare le variabili cinematiche addizionali che permettono di determinare il processo. In particolare

$$Q^2 = -q^2 = (p_3 - p_1)^2 \quad (414)$$

mentre la massa invariante corrisponde a

$$M_x^2 = p_4^2 = (q + p_2)^2 = -Q^2 + 2p_2 \cdot q + M_p^2 \quad (415)$$

Per caratterizzare l'inelasticità del processo bisogna calcolare la relazione tra la massa invariante prima dello scontro rispetto a quella dopo lo scontro. Questa quantità è definita *X di Bjorken* e corrisponde a

$$X = \frac{Q^2}{2p_2 \cdot q} \quad (416)$$

È una grandezza significativa perché calcolando

$$Q^2 = 2p_2 \cdot q + M_p^2 - M_x^2 \quad (417)$$

si può vedere che nel caso di un processo elastico la differenza $M_p^2 - M_x^2$ è pari a 0 ma invece nel caso del processo inelastico corrisponde proprio alla *X di Bjorken*. In particolare si può vedere che il processo è elastico se $X = 1$ mentre è inelastico se $X < 1$. Questa è una variabile importante perché non caratterizza semplicemente la cinematica della reazione ma ha un significato fisico in quanto caratterizza i componenti puntiformi del protone.

Le variabili che caratterizzano un processo inelastico sono quindi

$$Q^2 \quad X \quad (418)$$

a cui va aggiunta un variabile ulteriore che viene usata alle volte

$$\nu = E_1 - E_3 \quad (419)$$

che è l'energia trasferita dall'elettrone al bersaglio. Solitamente si utilizzano solo due di queste variabili a seconda delle situazioni in quanto bastano per descrivere un processo di interazione inelastica.

Siamo ora in grado di comprendere questo tipo di sperimentazione, il tipo di configurazione sperimentale è la stessa del processo di interazione inelastico, tanto che furono usati gli stessi acceleratori. Nella prima generazione di esperimenti ciò che si contava erano esclusivamente gli elettroni diffusi mentre poi è stato possibile rilevare anche i prodotti di interazione. Di fatto ci si poneva ad un certo angolo e si misurava l'energia dell'elettrone diffuso potendo così arrivare a ricavare la sezione d'urto. La sezione d'urto in questo caso era in due variabili. Nel grafico sotto viene mostrata questa sezione d'urto in funzione dell'energia dell'elettrone diffuso

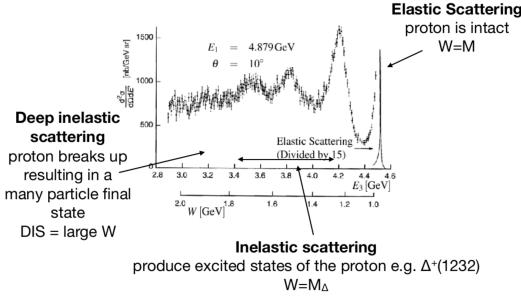


Figure 42: Sezione d'urto differenziale di interazione inelastica in funzione dell'energia E_3 dell'elettrone diffuso

La zona indicata in figura come la zona di scattering inelastico è detta anche *zona delle risonanze* e comprende i vari stati eccitati del protone come per esempio il $\Delta^+(1232)$, questa particella ha la stessa configurazione del protone (due quark up e uno down) ma invece di avere spin $s = 1/2$ ha spin $s = 3/2$ (tutti i quark hanno spin allineato in questo caso). Questo stato del protone è da considerarsi proprio come una particella diversa, infatti la differenza di massa è notevole (1232 contro i 938 classici). Spostandosi poi verso le zone a energia E_3 minore (che ci indica un'energia di massa maggiore in quanto l'energia persa dall'elettrone deve necessariamente essere passata al protone) si verifica un appiattimento della curva con la sezione d'urto che diventa costante, ci si trova quindi nella zona di interazione profondamente inelastica. Ricordando la trattazione iniziale in questa zona era previsto un annullamento della sezione d'urto (all'aumentare di Q^2 la sezione d'urto si annullava), ma i dati sperimentali smentiscono questo andamento. Il fatto che questo annullamento non ci sia indica che la distribuzione di massa all'interno del protone non può essere uniforme ma presenta delle concentrazioni puntiformi (questo perché la distribuzione è piatta ma sfruttando l'interpretazione con le trasformate di Fourier per risalire alla funzione che le genera si può fare un'anttrasformata che nel caso di una distribuzione piatta coincide con la delta di Dirac, fisicamente rappresentabile da particelle puntiformi).

Sezione d'urto del DIP La sezione d'urto trovata per spiegare questa zona di *Deep inelastic scattering* è un aggiornamento della sezione d'urto di Rosenbluth.

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_3} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \left[W_2(Q^2, \nu) + 2W_1(Q^2, \nu) \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (420)$$

Le funzioni W_1, W_2 , non si chiamano più fattori di forma ma *funzioni di struttura* e sono la grandezza sconosciuta che va ricavata sperimentalmente. Solitamente rispetto a questo tipo di sezione d'urto si introducono altre due funzioni di struttura che introducono due quantità diverse e adimensionali; nei plot infatti non si usano le W ma queste altre due funzioni

$$\begin{aligned} F_1(X, Q^2) &= M_c^2 W_1(Q_1^2, \nu) \\ F_2(X, Q^2) &= \nu W_2(Q^2, \nu) \end{aligned} \quad (421)$$

dove F_1 è una funzione puramente magnetica (analogamente al fattore di forma magnetico, mentre F_2 è una funzione mista e quindi elettromagnetica (come accadeva nella sezione d'urto di Rosenbluth). Queste sono le grandezze che sono state misurate sperimentalmente.

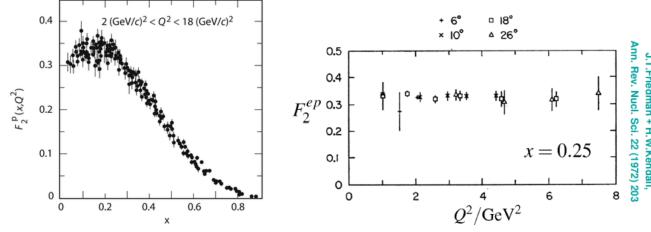
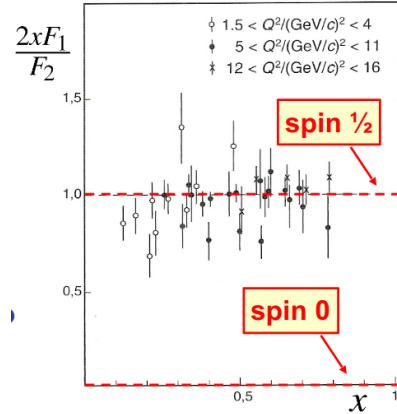


Figure 43: Risultati sperimentali di F_2 in funzione a sinistra di X e a destra di Q^2

I grafici in figura 43 rappresentano l'andamento della funzione di struttura elettromagnetica in funzione della X di Bjorken e della Q^2 . Da notare che la F_2 è costante in funzione di Q^2 il che vuol dire che non dipende dal momento trasferito. Q^2 corrisponde alla lunghezza d'onda della sonda utilizzata, che come abbiamo visto precedentemente ci indica anche la risoluzione di analisi, quindi la F_2 è indipendente dalla risoluzione con cui si analizza il bersaglio. Si può dire quindi che F_2 è una funzione scalabile, ovvero che l'interazione avviene con oggetti puntiformi (non siamo in grado di risolvere la struttura degli elementi con cui effettuiamo l'interazione). Si ha che le funzioni di struttura possono essere riscritte come

$$F_1(Q^2, X) \rightarrow F_1(X) \quad F_2(Q^2, X) \rightarrow F_2(X) \quad (422)$$

Si è trovato poi che vi è una relazione diretta tra $F_1(X)$ e $F_2(X)$ rappresentata nel grafico sotto

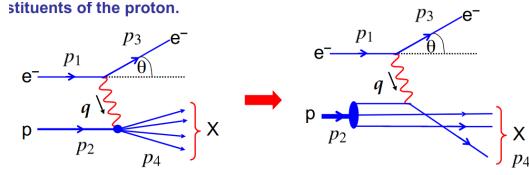


Questo rapporto ci indica che stiamo interagendo con particelle di spin 1/2. Se l'interazione avvenisse con oggetti di spin 0 allora il rapporto tra le funzioni di struttura sarebbe 0. Questo deriva dalla dipendenza magnetica della sezione d'urto.

Modello a partoni/quark Introduciamo ora il modello a partoni ovvero un modello che comprende queste particelle subprotoniche puntiformi che poi potremo ricondurre a quelle che adesso sappiamo essere i quark.

Per comprendere meglio il tipo di interazione ciò che è stato necessario fare è di prendere il diagramma di Feynman e ampliarne il significato rivedendo il tipo di interazione. Quello che è

stato fatto è, piuttosto che considerare l'interazione con il protone che poi si divide, di considerare il protone come un insieme di componenti che andranno ad interagire singolarmente con la sonda.



Questo tipo di significato fisico è solitamente rappresentato da quello che si chiama *infinite momentum frame*. Ci mettiamo in un sistema di riferimento in cui trascuriamo i gradi di libertà trasversi assumendo in pratica che il protone abbia una tale quantità di moto longitudinale da poter trascurare le sue componenti trasversali. In questo modo l'unica grandezza che mi deve interessare è la quantità di moto nella direzione dell'interazione. In questa approssimazione assumiamo che il protone abbia un quadrivettore del tipo

$$(E_2, \vec{p}_2) \quad (423)$$

E che le componenti del protone abbiano una frazione della sua quantità di moto (e di conseguenza del suo quadrivettore

$$(\eta E_2, \eta \vec{p}_2) \quad (424)$$

L'interazione può venire rappresentata come in figura

Si ha

$$(\eta p_2 + q)^2 = mq^2 \quad (425)$$

dove m è la massa invariante di questi componenti del protone e possiamo considerare tendente a 0.

$$\eta^2 p_2^2 + 2\eta p_2 q + q^2 - mq^2 = 0 \quad (426)$$

$\eta^2 p_2^2 = mq^2$ in quanto è il modulo quadro del momento prima dell'interazione. Quello che rimane è

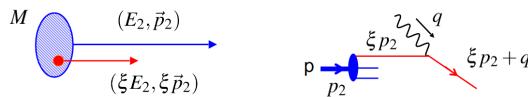
$$q^2 + \eta p_2 q = 0 \quad (427)$$

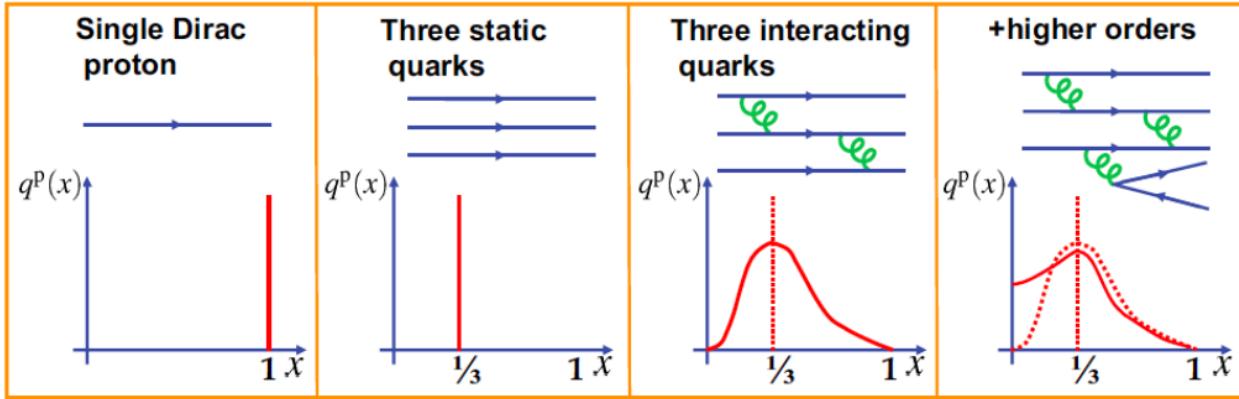
La variabile η è la frazione di quantità di moto del protone portata dal partone (ovvero la particella componente del protone) e corrisponde a

$$\eta = \frac{-q^2}{2p_2 q} = \frac{Q^2}{2p_2 q} = X \quad (428)$$

Si vede che il significato fisico della X di Bjorken che abbiamo introdotto precedentemente come *inelasticità del processo* è interpretabile in questo modello a partoni come la frazione di quantità di moto portata dal singolo partone. In questo caso ciò mi fa avere un'interpretazione importante delle funzioni di struttura che erano precedentemente delle quantità introdotte semplicemente per parametrizzare l'ignoranza che c'era sulla struttura del protone. In realtà in questo caso di può dire che la diffusione profondamente inelastica può essere interpretata come la diffusione elastica su particelle puntiformi di spin $s = 1/2$ che costituiscono il protone.

Con questo tipo di interpretazione, la X di Bjorken ha un significato fisico ben preciso e quindi la sezione d'urto, che prima avevamo ricavato solo da un punto di vista fenomenologico, ora può essere





rivista. Innanzitutto si ha che stiamo agendo su particelle cariche. La sezione d'urto elementare è dunque proporzionale alla carica delle particelle al quadrato, non conoscendo però la carica di queste particelle è necessario introdurre un fattore Z_f .

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto (Z_f \cdot e)^2 \quad (429)$$

dove $Z_f \cdot e$ è la carica dei componenti del protone.

A questo punto devo caratterizzare queste distribuzioni. Identifico come

$$q_f(x)$$

la distribuzione di impulso dei quark di tipo f e come

$$\bar{q}_f(x)$$

la distribuzione di antiquark di f . La relazione che lega materia e antimateria è il fatto di avere massa uguale e spin uguale ma carica di segno opposto si differenziano esclusivamente per la carica). È ragionevole pensare che analogamente al caso elettrone-positrone possa esserci una coppia del tipo quark e antiquark. Con questo tipo di assunzione posso supporre che quello che abbiamo definito come scattering inelastico sia in realtà uno scattering elastico su questo tipo di particella, ossia sui quark/partoni. Abbiamo visto inoltre che i quark sono caratterizzati da un'unica quantità che corrisponde alla frazione di quantità di moto del protone che portano. Introduciamo quindi una funzione $F_2(X)$ che non è più un artificio sperimentale ma mi restituisce esattamente la quantità di moto dei quark.

$$F_2(X) = X \sum_f Z_f^2 (q_f(X) + \bar{q}_f(X)) \quad (430)$$

In questo modo è possibile trovare una sezione d'urto per questo tipo di interazione. La sezione d'urto totale di deep inelastic scattering può essere ottenuta come somma incoerente di interazione con i singoli quark all'interno del protone.

Funzione di struttura F_2 Studiamo quindi la funzione F_2 .

I grafici sopra mostrano lo studio della distribuzione $q(X)$, corrispondente alla distribuzione che hanno i partoni con una certa quantità di moto X , in funzione di X . Sono quattro grafici differenti in quanto danno uno spaccato dell'andamento della distribuzione con delle ipotesi differenti

- Nel primo grafico a sinistra si è supposto che il protone fosse composto da un'unica particella. In questo caso la distribuzione è composta da un unico picco su $X = 1$, in quanto tutta la quantità di moto sarebbe portata da questo unico partone.
- Il secondo grafico rappresenta il caso in cui ci sono tre partoni che non interagiscono a comporre il nucleo. Anche qui si trova un picco ma posizionato a $X = 1/3$ in quanto ogni partone ha un contributo identico e fisso.
- Le cose diventano più interessanti nel terzo caso di tre partoni differenti ma interagenti tra di loro. Ciò che ci si può aspettare è quindi una funzione non più piccata ma estesa e con una media a $1/3$. Questo descrive il fatto di poter scambiare quantità di moto tra le tre particelle. La funzione si azzererà nei punti $X = 0$ e $X = 1$.
- L'ultimo grafico, che è quello che poi si è visto sperimentalmente, rappresenta una curva del tutto simile a quella precedente ma con la differenza che in $X \rightarrow 0$ questa non va a 0. Ciò vuol dire che non solo i partoni interagiscono tra di loro ma che nella loro interazione possono portare alla generazione di altre particelle. Effettivamente un gluone che viene scambiato può dare luogo ad una coppia q, \bar{q} . In pratica il protone non è un oggetto fisso ma è un continuo ribollire di particelle che si generano e ritornano nel vuoto, soddisfacendo il principio di indeterminazione di Heisenberg. Una particella di massa infinita può durare per un tempo infinitesimo non violando il principio di indeterminazione. $X \rightarrow 0$ vuol dire in pratica una ripartizione infinitesima della quantità di moto.

Altra cosa interessante è che facendo un integrale di questa funzione, essendo una distribuzione dovrebbe restituire 1 ma si è visto sperimentalmente che questo integrale da come risultato $1/2$. Significa quindi che i quark contribuiscono solo al 50% della quantità di moto del protone, l'altra metà è portata dai gluoni. Non riusciamo a vedere i gluoni in quanto evidentemente questi non interagiscono con gli elettroni in quanto questi possono interagire solo con particelle cariche.

DIP semi-inclusivo Quello di cui abbiamo parlato fino a qui era il deep inelastic scattering inclusivo ovvero che prevede la rivelazione esclusivamente degli elettroni. Negli esperimenti della generazione successiva si parla invece di *DIP semi-inclusivo*, in cui non viene rivelato solamente l'elettrone ma anche i prodotti della reazione e in particolare se la reazione avviene con un quark *up* questo sarà sparato fuori dalla particella. Una delle peculiarità della forza forte è che i singoli quark non sono mai stati visti. La forza forte è molto diversa dalle altre, è una forza che possiede una peculiarità che si chiama *libertà asintotica*, che prevede che se le particelle sono a contatto la forza è nulla ma che aumenta linearmente con la distanza. Quindi più le particelle sono distanti e più aumenta la forza, per cui se si cerca di estrarre un quark da un protone l'energia di interazione è tale da creare un ulteriore particella.

Per esempio estraendo un quark *up* su ha questo interagisce con un quark \bar{d} generando una particella detta π^+ (mesone positivo). Se riesco a rivelare questo mesone positivo so che l'interazione è stata con un quark *up*. Allo stesso modo i quark *down* generano π^- (mesoni negativi). Riuscendo a rivelare queste particelle possiamo quindi approfondire la nostra conoscenza sull'interazione.

10 Esercizi

10.1 Settimana 1

10.1.1 Esercizio 1

Si calcoli la velocità media di:

- Molecole d'aria a temperatura ambiente
- Elettroni atomo idrogeno
- Terra attorno al sole
- Elettroni che escono da un vecchio tubo catodico

Risoluzione:

- **Molecole d'aria** supponiamo di essere a $20^\circ C$ corrispondenti a $293 K$ si sfrutti la teoria cinetica dei gas

$$\frac{3}{2}K_B T = \frac{1}{2}m < v^2 > \quad (431)$$

Si approssimi l'aria come azoto N_2 la cui massa molecolare è $M_{N_2} = 28$ si ottiene

$$\sqrt{< v^2 >} = \sqrt{\frac{3K_B T}{m_{N_2}}} = \sqrt{\frac{3 \times 1,3 \times 10^{-23} 293}{28 \cdot 1,66 \times 10^{-27} kg}} = 510 \frac{m}{s} \quad (432)$$

- **Elettroni dell'idrogeno** Ricordando la costante di Ridberg ovvero il potenziale di dissociazione dell'idrogeno, questa può essere considerata pari alla sua energia cinetica.

$$E = 13.5 eV = K_e K = 135 \times 10 \cdot 1,6 \times 10^{-19} J = 2,1 \times 10^{-18} J = \frac{1}{2} m_e v^2 \quad (433)$$

conoscendo la massa dell'elettrone corrispondente a $m_e = 9,1 \times 10^{-31} kg$ si ottiene che la velocità dell'elettrone sarà

$$v_e = \sqrt{\frac{2K_e}{m_e}} = 2,1 \times 10^6 \frac{m}{s} \quad (434)$$

Si può notare che questa è una conferma che l'elettrone sia una particella non relativistica.

Si lasciano al lettore gli altri due punti.

10.1.2 Esercizio 2

Si calcoli il numero di molecole nell'atmosfera.

Risoluzione: Si parte considerando la massa dell'atmosfera, che si può calcolare partendo dalla pressione atmosferica, corrispondente al dell'aria sopra un metro quadro.

$$p = 10^5 \frac{N}{m^2} \longrightarrow M = 10^4 \frac{kg}{m^2} \quad (435)$$

Si consideri, ora la superficie della terra

$$A_{terra} = 4\pi R^2 = 12(6 \times 10^6 m)^4 = 4 \times 10^{14} m^2 \quad (436)$$

Si può quindi trovare la massa dell'aria

$$M_{aria} = 10^4 \frac{kg}{m^2} 4 \times 10^{14} m^2 = 4 \times 10^{18} kg \quad (437)$$

Per calcolare il numero di molecole di aria, si consideri il peso molecolare di azoto e ossigeno

$$N_2 = 28 \quad O_2 = 32 \quad (438)$$

Il che in media corrisponde ad un peso molecolare di 30. Una mole peserà dunque 30g

$$M_{aria} = \frac{4 \times 10^{21} g}{30 g/mol} = 1,3 \times 10^{20} mol \quad (439)$$

Il numero di molecole d'aria corrisponderà quindi alla massa in moli dell'aria moltiplicata per il numero di Avogadro $N_A = 6 \times 10^{23}$

$$N_{aria} = M_{aria} \times N_A \simeq 10^{41} molecole \quad (440)$$

Se si volesse poi sapere quante molecole di aria dell'ultimo respiro di Carlo Magno sono contenute nei nostri polmoni, si dovrebbe fare il rapporto fra la quantità di aria contenuta nei nostri polmoni e quella contenuta nell'atmosfera.

$$1 mole(STP) = 20L \quad (441)$$

Una mole in condizioni standard corrisponde a 20 litri, la densità dell'aria corrisponderà quindi a

$$30 \frac{g}{mol} : 20 \frac{L}{mol} = 1,5 \frac{g}{L} \sim 1g \sim 3 \times 10^{22} molecole \quad (442)$$

Qual è la frazione di molecole che noi respiriamo ad ogni respiro? La massa dell'aria totale è pari a $4 \times 10^{21} g$ e ogni respiro corrisponde ad un peso di circa 1g, il che restituisce un rapporto di

$$0,25 \times 10^{-21} \quad (443)$$

10.1.3 Esercizio 3

Una sorgente radioattiva di particelle α da 5,5 MeV viene collimata in modo tale che un fascetto quasi parallelo di 50000 particelle α al secondo colpiscono un sottile foglio di oro spesso $0,2\mu m$. In base alla legge di Rutherford, si determini il numero di particelle diflesse all'indietro ogni secondo (cioè ad angoli maggiori di 90°). (*Si trascuri il rinculo del nucleo di oro e si considerino: $\rho_{Au} = 19300 kg/m^3$, $m_{Au}^{mol} = 197 g/mol$, $Z_{Au} = 79$.*)

Risoluzione:

$$dN = N_i \frac{d\sigma}{d\Omega} N_t d\Omega \quad (444)$$

dove N_i è il numero di particelle incidenti, N_t è il numero di atomi per unità di superficie del bersaglio, $d\sigma/d\Omega$ è la sezione d'urto di Rutherford e $d\Omega$ è l'angolo solido di rivelazione.

$$\begin{aligned} N_t &= \frac{n_{atomi}}{A} = \frac{m}{M_{Au}^{mol}} N_{Av} \frac{1}{A} \\ &= \frac{\rho_{Au} V}{M_{Au}^{mol} A} N_{Av} = \frac{\rho_{Au}}{M_{Au}^{mol}} N_{Av} t \\ &= \frac{19.3 \times 10^3 6.02 \times 10^{23} 0.6 \times 10^{-6}}{0,197} = 1.18 \times 10^{22} \text{ atm/m}^2 \end{aligned} \quad (445)$$

Ci occupiamo ora della sezione d'urto di Rutherford interessandoci in questo caso solamente alle particelle diffuse indietro. L'integrale che dobbiamo fare in questo caso è

$$\begin{aligned} \int_{indietro} N_i \frac{d\sigma}{d\Omega} N_t d\Omega &= N_i N_t \int_{indietro} \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi \sin \theta d\theta \\ &= N_i N_t \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{(z_1 z_2 e)^4}{16E^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} 2\pi \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi N_i N_t \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{(z_1 z_2 e)^4}{16E^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin \theta}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} d\theta \end{aligned} \quad (446)$$

Si risolve ora l'integrale sapendo che $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} d\theta &= 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} d\theta \\ &= \left[\frac{2}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \left(-\frac{1}{2} \right) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2 \end{aligned} \quad (447)$$

Calcoliamo quindi il fattore moltiplicativo dell'integrale

$$\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \right)^2 = \left(\frac{e^2 \hbar c}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} \right)^2 = (\alpha \hbar c)^2 = (1.44 \text{ MeVfm})^2 \quad (448)$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} &= 4\pi N_i N_t (\alpha \hbar c)^2 \frac{z_1 z_2}{16E^2} = \\ &= 1256 \cdot 5 \times 10^4 \text{ 1/s} \cdot 1.18 \times 10^{22} \text{ 1/m}^2 \cdot \frac{2.07 \text{ MeV}^2 \text{ fm}^2 (2 \times 79)}{16 \cdot 30 \cdot 25 \text{ MeV}^2} = \\ &= 0,8 \text{ part./s} = 2880 \text{ part./h} \end{aligned} \quad (449)$$

10.1.4 Esercizio 4

si calcoli l'energia contenuta in un kg di benzina, approssimando la benzina come CH_2 .

Risoluzione: Si può stimare che per ogni legame chimico l'energia sia pari a $E = 1,5eV$ (È una stima molto approssimata). Si considerino le masse atomiche:

Il carbonio ha massa atomica $C = 12$, mentre l'idrogeno $H = 1$, il che riconduce ad una massa totale pari a $CH_2 = 14$.

In un Kg di benzina si ha

$$N_{moli} = \frac{1Kg}{1,4 \times 10^{-2}Kg/mol} = 70mol \quad (450)$$

Per ogni molecola di CH_2 avrà due reazioni



Corrispondente ad un'energia totale rilasciata di $3eV$.

Qual'è la densità energetica della benzina?

$$D = 70 \frac{mol}{Kg} \cdot 6 \times 10^{23} \frac{reazioni}{mol} \frac{3eV}{mol} \cdot \frac{1}{1,6 \times 10^{-19}eV/J} = 2 \times 10^7 \frac{J}{Kg} \quad (452)$$

Questo valore è approssimativo ma si discosta solamente di un fattore 2 dal valore reale, il che ci fa intuire che comunque si tratta di un buon calcolo (che il bravo fisico deve essere in grado di effettuare).

Qual è poi la potenza trasferita in un pieno?

Supponiamo che un serbatoio di un'auto di $80L$. La densità della benzina è più bassa di quella dell'acqua. La densità di energia per litro corrisponde a $3 \times 10^7 J/L$

$$80L \cdot 3 \times 10^7 \frac{J}{L} = 2 \times 10^9 J \quad (453)$$

In 3 minuti (tempo di un pieno) l'energia trasferita corrisponde a

$$P = \frac{E}{\Delta t} = \frac{2 \times 10^9 J}{180s} = 10MW \quad (454)$$

Impressionante!

10.1.5 Esercizio 6

Produzione energetica

- Si stimi il fabbisogno energetico annuo di combustibile di una centrale a carbone da 1 GW.
- Si stimi il numero di molecole di CO_2 iniettate nell'aria dalla centrale.
- Si stimi la potenza prodotta da una turbina eolica.
- Si stimi il fabbisogno annuo di uranio di una centrale nucleare da 1 GW.

Risoluzione: Similmente a come si è ottenuto il contenuto energetico della benzina è possibile ottenere quella del carbone. La densità energetica del carbone sarà all'incirca di $1,5eV$ per legame, bisogna quindi cercare il numero di legami della molecola di carbone. Consideriamo che la massa sia composta solo da carbonio $^{12}_6C$. 1 mole di $^{12}_6C$ avrà massa pari a $M_C = 1.2 \times 10^{-2} \text{ kg}$, un kg di Carbone conterrà quindi

$$\frac{1\text{kg}}{1.2 \times 10^{-2} \text{ kg/mol}} = 80\text{mol} \quad (455)$$

L'energia al kg del carbone corrisponde quindi a

$$D_C = \frac{1,5eV}{atomo} 6 \times 10^{-23} \frac{atomi}{mol} 80\text{mol} \cdot 1,6 \times 10^{-19} \frac{j}{eV} = 10^7 \text{ j/kg} \quad (456)$$

Avendo una centrale da 1GW, e supponendo che l'efficienza sia circa del 30% si ha che l'energia termica corrisponde a 3GW. L'energia termica richiesta corrisponderà dunque a

$$E_{anno} = 3 \times 10^9 \frac{j}{s} \pi \times 10^7 \frac{s}{anno} = 10^7 j/anno \quad (457)$$

La massa di carbone richiesta sarà dunque

$$M_C = \frac{E_{anno}}{D_c} = \frac{10^{17} j/anno}{2 \times 10^7 j/kg} = 5 \times 10^9 \text{ kg/anno} \quad (458)$$

(è stato usato un valore reale di densità energetica e non quello approssimato ottenuto sopra). C'è bisogno di 5 milioni di tonnellate di carbone corrispondenti a 500 treni da 100 vagoni, una quantità che richiede una certa struttura per la gestione dei rifornimenti.

Analizziamo ora una centrale nucleare da 1 GW. Per ogni fissione si ha una reazione del tipo



che produce un'energia di 200 MeV corrispondente ad un fatto di 10^8 rispetto all'energia di legame chimica. Il conto poi sarà identico alle centrali a carbone in quanto il funzionamento è il medesimo.

$$1GW_{ele} = 1GW_{th} \longrightarrow E_{anno} = 10^{17} \frac{j}{anno} \quad (460)$$

Bisogna calcolare la densità energetica dell'uranio.

$$D_{^{235}U} = 2 \times 10^8 \frac{eV}{nucleo} \times 6 \times 10^{23} \frac{atm}{mol} \times 2 \times 10^{-19} \frac{j}{eV} \times 4 \frac{mol}{kg} = 8 \times 10^{13} \text{ j/kg} \quad (461)$$

In natura l'uranio 235, materiale fissile, è presente allo 0,72% nell'uranio. Nelle centrali si sfrutta l'uranio arricchito con una densità del 5% di materia fissile. La densità energetica effettiva sarà quindi di

$$D_U = 0,05 \times 8 \times 10^{13} \text{ j} = E_{eff} = 4 \times 10^{12} \text{ j/kg} \quad (462)$$

La massa di Uranio richiesta sarà quindi di

$$M = \frac{10^{17} \text{ j/anno}}{4 \times 10^{12} \text{ j/kg}} = 2 \times 10^4 \text{ kg/anno} \quad (463)$$

La densità dell'uranio è di circa $20 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, il che vuol dire che ci basta $1 \text{ m}^3/\text{anno}$ di Uranio.

11 Tavola periodica degli elementi

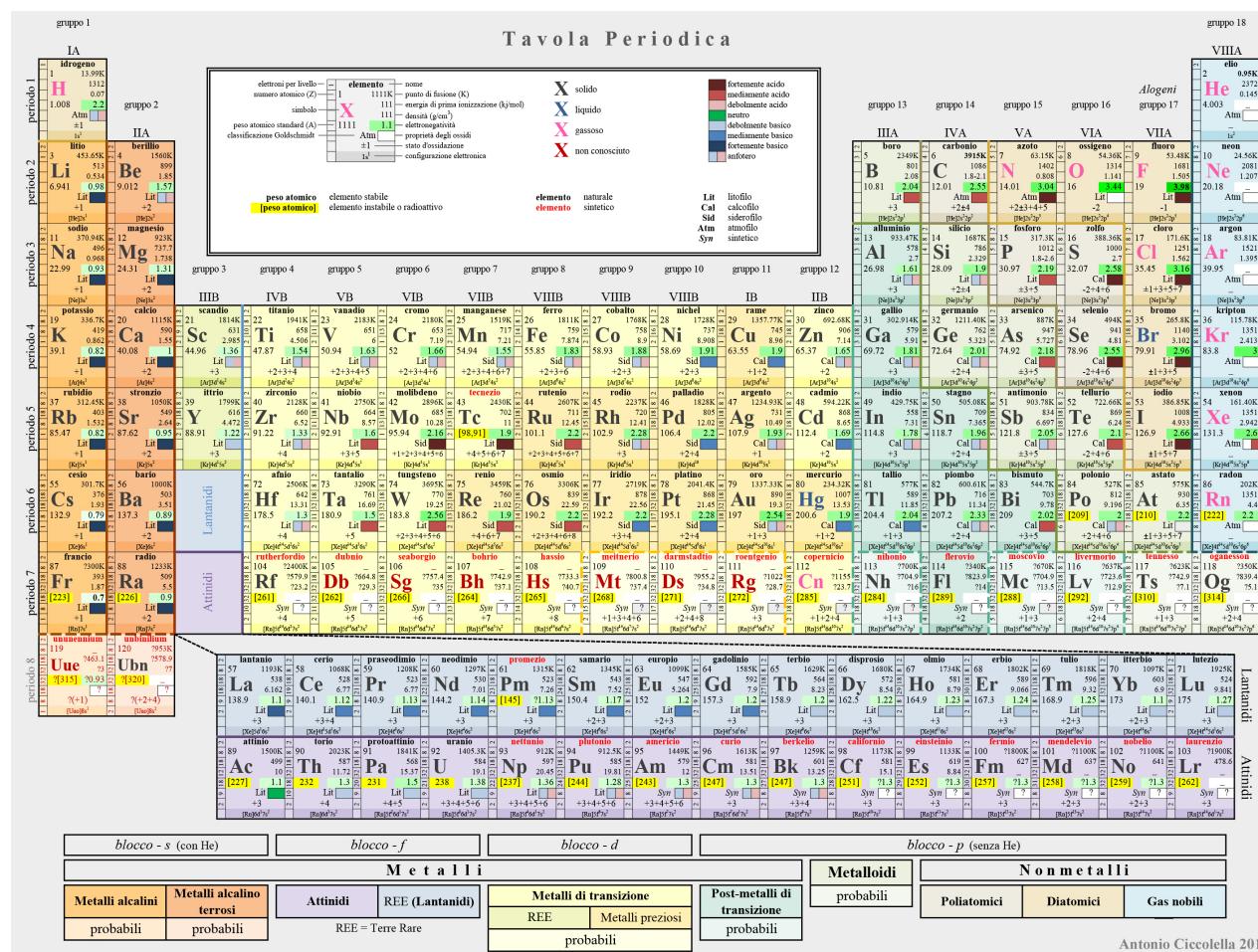


Figure 44: Tavola periodica degli elementi