Appunti del corso di Subatomia

Laurea in Fisica - Università di Ferrara

Scritto e impaginato in LaTeX da **Dario Chinelli** e **Umberto Zarantonello** nel 2021

11 maggio 2021

Contents

Nozioni Preliminari

Elemento X ha un numero di massa A che corrisponde alla somma di *neutroni* e *protoni* nel nucleo ed un numero atomico Z che è il numero di *protoni* nel nucleo, per cui si scrive:

$$^A_Z X$$

in un atomo neutro il numero atomico corrisponde anche al numero di *elettroni*.

Quantità utili

- il fermi $1fm = 10^{-15}m$
- megaelettronvolt $MeV = 1.6 \times 10^{-13}J$
- spesso si utilizza la normalizzazione di h tagliato e della velocità della luce $\hbar = c = 1$ questo comporta il fatto che a volte la massa venga definita direttamente in MeV
- $\hbar c = 197.3 MeV \cdot fm = 1$
- massa protone $m_p c^2 = 938.27 MeV$
- massa neutrone $m_n c^2 = 939.56 MeV$
- massa elettrone $m_e c^2 = 0.511 MeV$
- unità di massa atomica $uc^2 = 931.5 MeV$
- costante di struttura fine $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137}$
- coincidenza tra energia e temperatura

  $$E = K_B T \quad K_B = 1,38 \times 10^{-23} J/K$$

  per ricordare semplicemente questa quantità si ha che

  $$0.025eV = 1/40eV = 300K$$

1 Sezione d'urto

La *sezione d'urto* è una quantità essenziale che restituisce la misura della probabilità che avvenga una reazione dall'interazione tra due particelle, può essere calcolata solo conoscendo la natura dello "scontro".

Supponiamo di avere un fascio di particelle che interagisce con un bersaglio di spessore d, l'area d'interazione è A. Qual è il numero di interazioni al secondo dN?

$$\begin{aligned} dN &\propto I = \frac{N_i}{At} \\ &\propto \rho A d \end{aligned} \tag{1}$$

dove I è l'intensità del fascio e corrisponde al numero di particelle incidenti N_i fratto l'area d'incidenza A per il tempo t; questa grandezza avrà inoltre una proporzionalità con le caratteristiche del materiale incidente, ciò viene espresso nella seconda formula dove ρ è la densità del materiale incidente, A è sempre l'area d'incidenza e d è lo spessore del campione. Si ottiene quindi che

$$\begin{aligned} dN &= \frac{KN_i}{At} \cdot \rho A d \cdot d\Omega \\ dN &= KN_t N_a d\Omega \end{aligned} \tag{2}$$

il coefficiente K è una grandezza di cui studieremo ora la dimensionalità e sarà proprio ciò che definiremo come *sezione d'urto*. Nella formula vi sono varie altre grandezze, si ha che:

- $dN[1/s]$ è il numero di particelle al secondo
- $N_t = N_i \cdot t[1/s]$ è il numero di particelle incidenti per unità di tempo
- $N_a = \rho \cdot d[1/m^2]$ è il numero di particelle bersaglio che il fascio colpisce nel cammino.

Dall'analisi dimensionale si può vedere che K deve necessariamente avere le dimensioni di un'area, ciò è apparentemente strano in quanto è stato già inizialmente esplicitata all'inizio la natura probabilistica di questa grandezza. La *sezione d'urto* si definisce quindi come la probabilità che un nucleo del bersaglio interagisca quando il fascio incidente corrisponde ad una particella per unità di area.

Supponiamo ora di considerare un bersaglio sottile soggetto ad un flusso di particelle F.

$$F = \left[\frac{number}{m^2 s}\right] \tag{3}$$

Solitamente si fa l'ipotesi di un bersaglio sottile per poter supporre che la particella non subisca più di una collisione e poter così applicare queste formule in modo diretto (nel caso di collisione multiple i calcoli sono più complessi). La probabilità d'interazione dP è espressa come la sezione d'urto σ per il numero di particelle del bersaglio per unità di volume per dz

$$dP = \sigma n_b dz \tag{4}$$

La variazione del flusso risulterà quindi essere l'inverso del numero totale di particelle incidenti per la probabilità d'interazione (il segno meno tiene conto del fatto che il flusso diminuisce nel tempo, ogni volta che una particella interagisce con il bersaglio viene esclusa dal fascio)

$$\begin{aligned} dF &= -FdP = -F\sigma n_b dz \\ \frac{dF}{dz} &= -F\sigma n = -\frac{F}{l} \end{aligned} \tag{5}$$

Nelle formule (5) abbiamo definito

$$l = 1/n\sigma \tag{6}$$

che viene chiamato *libero cammino medio*. Questa grandezza corrisponde alla lunghezza media che ogni particella percorre senza che subire interazioni. Alle volte può essere utile ridefinire le grandezze in funzione di l piuttosto che di σ perché è una grandezza più visualizzabile e utile sperimentalmente. Si ottiene quindi quella che è la formula del flusso in funzione di l

$$F(z) = F(0)e^{-z/l} \tag{7}$$

L'unità di misura delle sezioni d'urto è il barn (b). Questa unità nasce da delle considerazioni fatte nei primi esperimenti di radioattività. Dalle considerazioni sui raggi atomici

$$R = R_0 A^{\frac{1}{3}} \qquad R_0 = 1,2fm \tag{8}$$

Ora, prendendo in considerazione l'uranio $^{239}_{92}U$, in particolare l'isotopo 235, si ottiene un raggio pari a

$$R[^{235}U] = 1,2 \cdot (235)^{1/3} = 7,4fm \tag{9}$$

Che restituisce un'area d'interazione circa

$$\pi R^2(^{235}U) = 3 \times 54 \sim 150fm^2 \tag{10}$$

La misura del barn scelta fu quindi di

$$1barn = 100fm^2 = 100 \times 10^{-30}m^2 = 10^{-28}m^2 \tag{11}$$

Le sezioni d'urto variano da particella a particella e, mentre per le particelle subatomiche sono relativamente simili, esistono delle particelle particolarmente elusive con sezioni d'urto molto inferiori a quelle classiche. La sezione d'urto di collisione del neutrino per esempio è estremamente piccola e corrisponde a $10^{-19}mb$ (millibarn). A causa del valore così basso il neutrino è stato una particella praticamente invisibile per molto tempo e la sua teorizzazione si deve agli esperimenti sul decadimento β che davano dei risultati altrimenti anomali. Un altro esempio è rappresentato dalla materia oscura che è stata rivelata solamente tramite considerazioni gravitazionali ma al giorno d'oggi non vi è ancora nessuna evidenza sperimentale di interazione con la materia in laboratorio.

1.1 Esperimento di Rutherford

Agli inizi del novecento la fisica conosciuta era molto diversa da quella odierna, il fatto che certi materiali potessero emettere delle radiazioni era una conoscenza relativamente recente e questi nuovi effetti sconosciuti avevano evidenziato delle irregolarità nei modelli classici. Quando Rutherford fece il suo esperimento erano state già studiate le emissioni α, γ, β.

L'esperimento di Rutherford fu rivoluzionario per la comprensione della struttura atomica, in quanto rese evidente l'elevata densità di materia del nucleo. Al tempo infatti il modello atomico ritenuto valido era il *modello a panettone*, che teorizzava un atomo formato da una distribuzione uniforme di carica positiva al cui interno erano presenti degli elettroni che andavano a bilanciare la carica rendendo neutro l'intero sistema. Le densità di carica positiva e di massa in questo modello dovevano quindi essere basse relativamente a quelle conosciute oggi. Le grandi intuizioni di Rutherford furono quella di utilizzare il decadimento dei nuclei α come sonda e di adottare un approccio statistico per ovviare al problema di non conoscere la posizione esatta delle particelle.

Per l'emissione alfa furono utilizzati dei nuclei di Radio $^{226}_{88}Ra$. Il *decadimento* che avviene è il seguente

$$^{226}_{88}Ra \longrightarrow ^{222}_{86} Rn +^4_2 He + Q \tag{12}$$

in questa reazione si conservano il numero di massa totale $226 = 222 + 4$ e la carica totale $88 = 86 + 2$; Q è il calore emesso dalla reazione esotermica/spontanea, equivalente all'energia data dalla differenza di massa iniziale e finale. L'energia cinetica rilasciata nel decadimento che viene trasferita alla particella α è pari a $T = 4.76\,\mathrm{MeV}$.

Lo schema dell'esperimento era piuttosto semplice, un fascio collimato di particelle α veniva indirizzato contro un *target* (lastra sottile di oro) che ampliava il fascio di un certo angolo solido andando a deviare il percorso di una certa porzione di particelle. Il fascio uscente veniva quindi rivelato da uno schermo di ZnS, mobile su tutto l'angolo solido. Il fatto sorprendente e inaspettato era che una piccolissima porzione di particelle veniva deflessa ad angoli impossibili per il modello a panettone, erano presenti infatti fenomeni di back scattering ovvero di deviazione di un angolo $\theta = 180^o$. Essenziale fu l'intuizione di Rutherford che non prese tale dato come errore sperimentale ma capì che si trattava di particelle reali.

La sezione d'urto di Rutherford fu calcolata sfruttando semplicemente la meccanica classica. Il calcolo si basa sulle leggi di conservazione della meccanica classica e sull'elettromagnetismo. Le assunzioni fatte da Rutherford furono:

- l'interazione deve considerarsi come puramente coulombiana ed elastica;
- ne il nucleo ne le sonde possiedono spin (anche perché al tempo di Rutherford non era ancora stato scoperto lo spin);
- il nucleo viene considerato fisso (approssimazione corretta per una differenza notevole di massa).

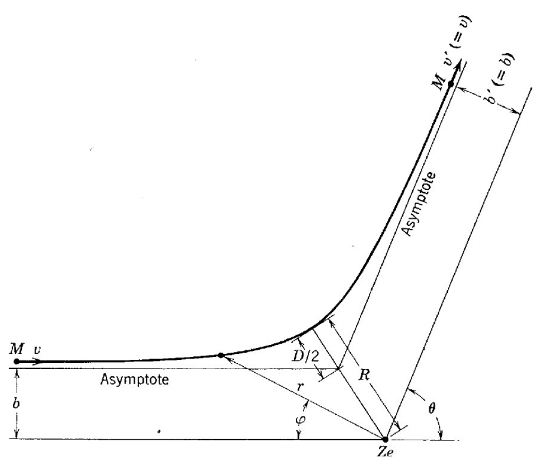


Figure 1: Traiettoria iperbolica della particella in interazione con un nucleo

In figura 1 viene mostrato il modello dello scattering di una particella α di massa M e carica +ze, passante vicino ad un nucleo di carica +Ze. Il nucleo è fissato al centro del sistema di coordinate. Prima e dopo la collisione la particella avrà una traiettoria rettilinea (prima con velocità v poi con velocità v') in quanto la forza coulombiana è trascurabile dopo una certa distanza . Per determinare la posizione della particella si sfruttano le coordinate polari $r(t), \varphi$. La distanza tra la traiettoria della particella e la linea parallela passante per il nucleo (asse orizzontale del sistema) è definita come il *parametro d'impatto b*. L'angolo di scattering θ è dato dall'intersezione dell'asse orizzontale con la parallela alla traiettoria finale passante per il nucleo.

Siccome il nucleo viene considerato fisso, l'energia cinetica finale della particella deve essere identica a quella iniziale. Velocità e parametro d'impatto sono costanti prima e dopo l'impatto a causa della conservazione dell'energia cinetica e del momento angolare.

$$Mvb = Mv'b' = L \qquad \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mv'^2 \tag{13}$$

si ha la conservazione del momento angolare perché in presenza di una forza centrale

$$dL/dt = \bar{r} \times \bar{F}(r) = 0$$

si ha quindi che raggio e forza sono sempre paralleli.

Sfruttando nuovamente il momento angolare si cerca ora di ottenere il differenziale del tempo

$$|L| = |\bar{r} \times m\bar{v}| = mvb = mv_{\perp}r = m\omega r^2 = m\frac{d\varphi}{dt}r^2 \tag{14}$$

dove la velocità tangenziale è $v_{\perp} = \omega r$ e $\omega = d\varphi/dt$ è la velocità angolare. Si ottiene quindi

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{vb}{r^2} \;\; \rightarrow \;\; dt = d\varphi\frac{r^2}{vb} \tag{15}$$

Si può poi introdurre l'interazione elettromagnetica. Viene in questo caso sfruttato il teorema dell'impulso

$$\Delta p = \int F_n dt \qquad F_n = F\cos\varphi \tag{16}$$

dove F è la forza coulombiana tra due particelle

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{zZe^2}{r^2} \tag{17}$$

La differenza di potenziale risulta essere

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{zZe^2}{r^2}\cos\varphi dt \tag{18}$$

Possiamo quindi sostituire la formula per dt trovata sopra all'interno dell'integrale appena ricavato prestando ovviamente attenzione agli estremi d'integrazione

$$\begin{aligned} t &\rightarrow -\infty \qquad & \varphi &\rightarrow -\frac{1}{2}(\pi - \theta) \\ t &\rightarrow +\infty \qquad & \varphi &\rightarrow +\frac{1}{2}(\pi - \theta) \end{aligned} \tag{19}$$

$$\Delta p = \int_{-\frac{1}{2}(\pi-\theta)}^{+\frac{1}{2}(\pi-\theta)} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{zZe^2}{vb}\cos\varphi d\varphi \tag{20}$$

Portando fuori dall'integrale tutte le costanti in una constante A si ottiene

$$\Delta p = A[\sin\varphi]_{-\frac{1}{2}(\pi-\theta)}^{+\frac{1}{2}(\pi-\theta)} = A\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)\right] = 2A\cos\frac{\theta}{2} \tag{21}$$

A questo punto è necessario ricavare la variazione della quantità di moto proiettata sulla normale

$$p_f - p_i = 2mv\sin\frac{\theta}{2} \tag{22}$$

unendo le due formule per la variazione di quantità di moto si ottiene

$$\begin{aligned} 2mv\sin\frac{\theta}{2} = 2A\cos\frac{\theta}{2} \quad &\rightarrow \quad 2mv\sin\frac{\theta}{2} = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 vb}\cos\frac{\theta}{2} \\ \tan\frac{\theta}{2} = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 mv^2}\frac{1}{b} \quad &\rightarrow \quad \tan\frac{\theta}{2} = K\frac{1}{b} \end{aligned} \tag{23}$$

K è semplicemente una costante che include tutte le costanti del moto. Da quest'ultima formula si può vedere che se $b \to 0$ ovvero nel caso di un urto frontale si otterrà come angolo $\theta = \pi$ e quindi la particella sarà rispedita alla sorgente.

Sezione d'urto differenziale Si procede ora a ricavare la sezione d'urto differenziale, ovvero lil rapporto differenziale tra le particelle incidenti e quelle scatterate per un certo angolo solido e parametro d'impatto.

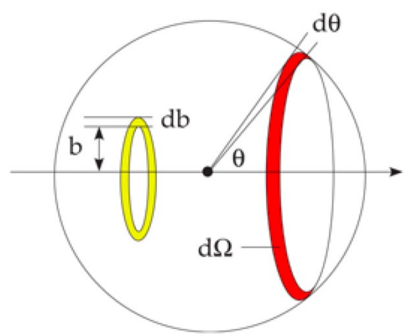


Figure 2: Schematizzazione della sezione d'urto differenziale in base al parametro d'impatto e all'angolo solido.

L'area delle particelle incidenti è data dalla formula

$$d\sigma = 2\pi b|db| \tag{24}$$

Le particelle definite in quest'area saranno diffuse all'angolo

$$d\Omega = 2\pi\sin\theta d\theta \tag{25}$$

Facendo il rapporto tra le due aree si ottiene la sezione d'urto differenziale dal punto di vista cinematico

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\theta)}{\sin\theta}\frac{db}{d\theta} \tag{26}$$

Si può a questo punto unire le formule ricavando b rispetto a θ

$$\frac{db}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left|\frac{k}{\tan\frac{\theta}{2}}\right| = \frac{K}{\tan^2\frac{\theta}{2}}\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}} \tag{27}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{2}\frac{K^2}{\tan^3\frac{\theta}{2}}\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{K^2}{4\sin^4\frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{1}{16}\left(\frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 T}\right)\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Introduciamo ora un po' di costanti che aiutano a semplificare questa formula e spesso usate in fisica subatomica

$$
\alpha = \frac{b^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137} \qquad \hbar c = 197MeV\cdot fm \tag{29}
$$

α è denominata *costante di struttura fine.*

La formula con queste costanti diventa

$$
\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{z^2Z^2}{16}\alpha^2\left(\frac{\hbar c}{T}\right)^2\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \tag{30}
$$

La cosa straordinaria di questa sezione d'urto sta nel fatto che, per delle coincidenze sotto un certo punto di vista fortuite, è uguale a quella calcolata con la meccanica quantistica. Questo succede perché nell'interazione di particelle alfa con il nucleo gli spin sono ininfluenti.

Commenti alla sezione d'urto:

- La sezione d'urto diminuisce all'aumentare dell'energia cinetica (inversamente proporzionale a T^2).
- Decresce rapidamente all'aumentare di θ.
- É proporzionale al quadrato delle cariche.

1.2 Sezione d'Urto Quantistica (Regola d'Oro di Fermi)

Il cambiamento essenziale che avviene in meccanica quantistica riguarda la probabilità d'interazione. Infatti se nella trattazione classica la probabilità derivava da una serie di considerazioni classiche, nella trattazione quantistica deriva dalla *regola d'oro di Fermi* definita come

$$
P = \frac{2\pi}{\hbar}|H_{f,i}|^2\rho(E_f) \tag{31}
$$

I contributi che compongono questa probabilità d'interazione sono:

- $H_{f,i}$ è l'elemento dell'Hamiltoniana della perturbazione, ovvero la probabilità che la sezione d'onda iniziale passi alla sezione d'onda finale.

  $$
  H_{f,i} =< f|H|i >= \int \psi *_f (r)H(\bar{r})\psi_i d^3r \tag{32}
  $$

  (*La probabilità di passaggio di uno stato iniziale ad uno stato finale si valuta effettuando questo integrale tra lo stato iniziale e quello finale della Hamiltoniana di perturbazione*).

  Le funzioni d'onda sono quelle che descrivono le nostre particelle α

  $$
  H(r) = V(r) = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{33}
  $$

  Quali sono quindi gli stati (funzioni d'onda) che descrivono gli alfa?

Ad una certa distanza iniziale saranno onde piane

$$\psi_i \sim e^{ikr} \qquad \bar{p} = \hbar\bar{k} \quad \bar{k} = \frac{\bar{p}}{\hbar} \tag{34}$$

Dopo l'interazione, ovvero quando le particelle non subiranno più il potenziale coulombiano, si avrà che la funzione sarà nuovamente un'onda piana ma con vettore d'onda variato (legato ovviamente alla quantità di moto)

$$\psi_i \sim e^{ik'r} \qquad \bar{p}' = \hbar\bar{k}' \quad \bar{k}' = \frac{\bar{p}'}{\hbar} \tag{35}$$

Tornando alla regola d'oro di fermi, ciò mi dice che la probabilità d'interazione dipende dalla probabilità che il mio potenziale faccia passare le mie particelle da una certa quantità di moto ad un'altra.

- L'altro contributo si ha dalla densità degli stati finali $\rho(E_f)$, ovvero il numero di stati finali accessibili al sistema, maggiore è il tipo di capienza nello spazio delle fasi maggiore è la probabilità. Per ora trascureremo questo contributo per trattarlo più avanti.

Studiamo quindi la variabilità della probabilità in base alle funzioni d'onda. Si ha

$$H_{f,i} \simeq \int e^{-ik'r} V(r) e^{+ikr} = \int V(r) e^{-i(k'-k)r} \tag{36}$$

La variazione dell'impulso in questa trattazione diventa

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \hbar\bar{k} \\ \bar{p} &= \hbar k' \\ \Delta p = \bar{p}' - \bar{p} &= \bar{q} = \hbar(k' - k) \end{aligned} \tag{37}$$

Sostituendo nella formula dell'Hamiltoniana si trova

$$\begin{aligned} H_{f,i} &= \int V(r) e^{-i\frac{\bar{q}}{\hbar}r} d^3r \\ &= \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{1}{r} e^{-i\frac{\bar{q}}{\hbar}r} \end{aligned} \tag{38}$$

Come si può vedere questa formula corrisponde ad una trasformata di Fourier, e quindi risulta facile risalire alla funzione d'origine. Ciò che si ottiene alla fine è

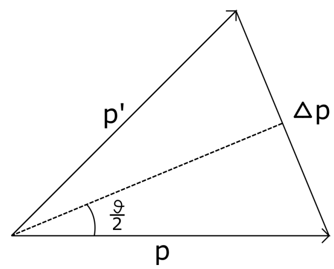
$$H_{f,i} = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4\pi\hbar^2}{q^2} \tag{39}$$

l'ultima frazione è la parte che si utilizza per calcolare la sezione d'urto differenziale

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto P \simeq |H_{f,i}|^2 \sim \frac{1}{q^4} \tag{40}$$

Si può vedere che questa funzione, ricavata quantisticamente, esprime una dipendenza dipendenza proporzionale a $1/q^4$, che corrisponde al momento trasferito (δp) alla quarta.

Sorge spontaneo chiedersi se questo sia consistente con la formula derivata classicamente. La risposta è affermativa e si può dimostrare. Prendiamo infatti la variazione classica della quantità di moto.



$$
\begin{aligned}
\bar{\Delta p} &= \bar{p}' - \bar{p} = q = 2p\sin\frac{\theta}{2} \\
q^2 &= 4m^2v^2\sin^2\frac{\theta}{2}
\end{aligned}
\tag{41}
$$

Ricordando la formula classica dell'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \tag{42}$$

Si ottiene che

$$q^2 = 8mT\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{43}$$

É resa evidente quindi la stessa dipendenza che si aveva nel caso classico, questo è dovuto a vari fattori, ma quello principale è che ci troviamo ad energie non relativistiche. Altre supposizioni fatte nella trattazione classica erano che le particelle non avessero interazioni di spin, abbiamo trascurato inoltre che i nuclei avessero rinculo. Queste sono tutte assunzioni buone ma che per risultati più precisi rilasceremo in trattazioni più avanzate.

Raggio nucleare Quello che ci si domanda ora è il motivo per cui considerando solamente l'interazione coulombiana si riescano ad ottenere risultati così buoni.

Si consideri il raggio nucleare stimato de Rutherford per la sua trattazione tramite scattering α. Si cerchi la distanza di massimo avvicinamento della particella a nucleo, che si otterrà per un'energia pari a

$$V = K_\alpha \qquad \rightarrow \qquad K_\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{zZe^2}{R_0} \tag{44}$$

Invertendo la formula si ricava il raggio di Rutherford

$$
\begin{aligned}
R_0 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{zZe^2}{K_\alpha}\frac{\hbar c}{\hbar c} \\
&\simeq \frac{1}{137}\frac{2\cdot 79}{4\cdot 9MeV}\hbar c \\
&= 46fm
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Questa è una sovrastima del raggio nucleare in quanto si sa attualmente che il raggio corrisponde ad 8 fermi. Questo errore è dovuto al fatto che non vi è interazione nucleare nello scattering di Rutherford ma semplicemente elettrostatica, il che spiega anche la perfetta corrispondenza dei suoi dati con la trattazione teorica.

Supponiamo quindi di riuscire ad aumentare l'energia delle particelle α (quello che accade negli acceleratori). Si supponga poi di utilizzare come target del piombo e di porre un rivelatore a 60^o. Si

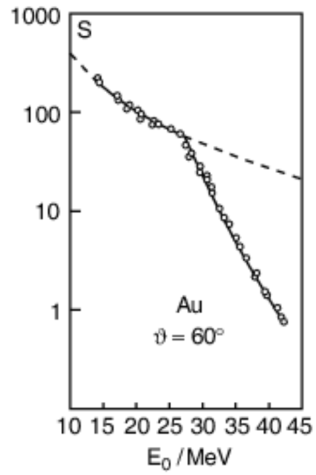


Figure 3: Esperimento di Rutherford su target di piombo in confronto al risultato calassico

può osservare che l'andamento del numero di particelle scatterate per energie inferiori a 27,5 MeV rispecchia esattamente l'andamento di Rutherford ma poi ha un cambio drastico. Questo accade perché oltre un certo raggio subentra l'interazione per forza forte

$$R = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 KE} = 8.59fm \tag{46}$$

La sovrastima di Rutherford era dovuta al fatto che le particelle da lui usate avevano effettivamente interazione puramente coulombiana.

1.3 Derivazione con l'Elettrodinamica Quantistica

Questa trattazione è possibile in modo semplice grazie ai diagrammi di Feynman che semplificano il tecnicismo della fisica teorica rendendola accessibile ai fisici sperimentali. Secondo i diagrammi

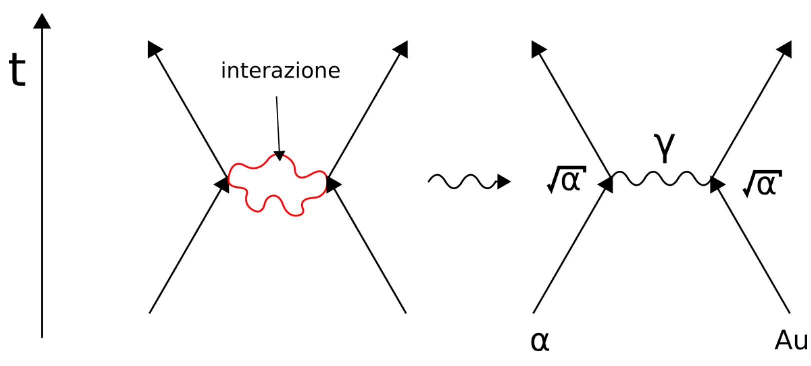


Figure 4: Diagrammmi di Feynman

di Feynman ogni particella reale è descritta da una linea continua. Una cosa da tenere sempre presente è la direzione in cui si svolge l'azione temporale, in questo caso si svolge verso l'alto ma è solamente una rappresentazione grafica di un'interazione. Nelle teorie quantistiche di campo l'interazione viene descritta tramite lo scambio di una particella. La grande novità che è stata introdotta da queste teorie è che l'interazione non sia descritta tramite un campo ma attraverso lo scambio di particelle virtuali.

Come si ricava quindi la sezione d'urto?

La particella alfa emette un fotone virtuale e questo viene descritto tramite una costante di accoppiamento posta ai vertici (ovvero nel punto d'impatto) denominata $\sqrt{\alpha}$. L'interazione viene rappresentata da quello che si chiama propagatore ovvero la linea interna che congiunge i due vertici.

$$\propto \frac{1}{Q^2 + M^2C^2} \tag{47}$$

dove Q^2 è il momento trasferito, M è la massa della particella mediatrice (bosone vettore), γ è il fotone. Come si calcola l'ampiezza della transizione?

$$\begin{gathered} |M_{f,i}| = \sqrt{\alpha}\frac{1}{Q^2}\sqrt{\alpha} = \frac{\alpha}{Q^2} \\ P \propto |M_{f,i}|^2 = \frac{\alpha^2}{Q^4} \end{gathered} \tag{48}$$

Dove P è la probabilità di transizione della particella, corrispondente alla sezione d'urto. Si può notare anche qui che la proporzionalità trovata per le altre trattazione è mantenuta.

2 Il Nucleo

2.1 Le scoperta delle particelle nucleari

La seconda particella ad essere rivelata dopo l'elettrone fu il protone. La prima evidenza sperimentale è dovuta sempre a Rutherford che nel 1917, sfruttando sempre le particelle alfa in collisione con l'aria, riuscì ad ottenere delle emissioni protoniche. La reazione che si verificava era la seguente (l'aria viene approssimata con l'azoto N)

$$ {}^4_2He +^{14}_7 N_7 \longrightarrow^{17}_8 O_9 + protone \tag{49}$$

Al tempo uno modelli nucleari più in voga teorizzava un nucleo composto da un certo numero A di protoni ed un numero $A - Z$ di elettroni, dove Z è il numero di elettroni della nuvola elettronica. Questo modello generava un atomo neutro e stabile ed era dovuto principalmente al fatto di non aver ancora scoperto il neutrone che è necessario alla stabilità del nucleo (non ci si spiegava come si potesse bilanciare l'elevata forza repulsiva dei protoni all'interno del nucleo).

Analizziamo dunque la possibilità di avere un nucleo di questo tipo. Che potenziale elettromagnetico dovrebbero gestire i protoni?

Il campo elettrico che si genera è

$$E = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

dove $R = R_0 A^{1/3} = 1.2fm \cdot A^{1/3}$ (formula empirica per il calcolo del raggio nucleare). Calcolando si ottiene quindi

$$E = -1.20\frac{Z}{A^{1/3}MeV}$$

Ponendo ora per esempio A=140 e Z=58 l'energia cinetica che si ottiene è $E = -13.4MeV$ (elettrone con energia relativistica quindi $E = pc$). Un elettrone con tale energia cinetica è possibile che resti confinato all'interno del nucleo?

Prendiamo quella che è la lunghezza d'onda dell'elettrone

$$\lambda = \frac{h}{p} = 2\pi\frac{\hbar c}{pc} = \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 200MeV \cdot fm}{13.4MeV} \simeq 90fm$$

Se si considera che il raggio calcolato da Rutherford era di $46fm$ è evidente che l'elettrone non può essere confinato nel nucleo perché la sua lunghezza d'onda è il doppio.

La scoperta del neutrone fu fatta da Chadwick che fu il primo ad intuire, da un'esperienza che in realtà era già stata fatta da più fisici, la presenza di un'altra particella. La situazione che si verificava era che tramite l'emissione di particelle alfa generate dal polonio, fatte collidere su un target di Berilio, si otteneva una radiazione che riusciva ad attraversare uno schermo spesso di piombo, il che suggeriva il fatto che fosse una radiazione neutra (impossibile per della radiazione carica attraversare uno schermo troppo spesso). Al tempo l'unica radiazione neutra conosciuta era la radiazione elettromagnetica il che fece pensare ad una reazione del tipo

$${}^9_4Be +^4_2 He \longrightarrow [^{13}_6C*] \longrightarrow^{13}_6 C + \gamma$$

Con uno stato intermedio dato da uno stato eccitato del carbonio 13.

Un ulteriore passaggio fu quello di aggiungere dopo lo schermo di Piombo Pb una lastra di paraffina da cui, dopo l'interazione con la radiazione, emergevano protoni con energia pari a $E = 7,5MeV$. La radiazione gamma doveva quindi possedere un'energia in grado di produrre dei protoni di energia $7,5MeV$ tramite scattering Compton il che riconduce ad un'energia minima di $55MeV$. Quando il Berilio assorbiva le particelle alfa queste si trovavano ad un energia di $5MeV$, essendo poi una reazione esotermica si aveva che il Q della reazione corrispondeva a $Q = 10MeV$, il che riconduceva ad un energia massima disponibile di $14MeV$. L'unica spiegazione possibile era che si trattava quindi di una particella nuova, neutra e con la stessa massa del protone. Era stato scoperto il neutrone.

2.2 Studio dei nuclei: diffusione elastica elettrone nucleo

Per superare i limiti dati dallo studio con le particelle Alfa, attorno agli anni '50 si cominciarono a sfruttare gli elettroni come sonda. L'utilizzo di questo tipo di particelle avvenne così tardi non perché non se ne conoscessero i vantaggi ma vi è la necessità di acceleratori per portare gli elettroni ad un'energia abbastanza elevata. Questi sono stati la sonda "principe" per lo studio del nucleo ma anche dei nucleoni (protoni e neutroni), perché:

- possono essere considerati puntiformi, infatti per quanto ne sappiamo non possiedono struttura, e quindi le loro dimensioni non impattano nello studio del nucleone.
- interagiscono solo per interazione elettromagnetica, a differenza per dire delle particelle alfa che interagiscono anche tramite la forza forte rendendo difficoltosa la distinzione tra i due tipi di interazione.

L'innovazione in questo campo è stata data dall'energia a cui si riesce ad accelerare gli elettroni portando a nuove scoperte.

Perché è così importante ottenere energie sempre più elevate per avere maggiore risoluzione sulla struttura? Il motivo si basa sulla relazione di de Broglie, infatti quando si vuole studiare la struttura, la lunghezza d'onda della sonda deve essere più piccola della struttura che andiamo a studiare.

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{h}{p} &\leq 2R \\ \frac{2\pi\hbar}{p} &= 2R \\ pc &= \frac{2\pi\hbar}{2R} \end{aligned} \tag{50}$$

Siccome gli elettroni necessitano di una bassa energia per diventare relativistici (ovvero per avere una velocità prossima a quella della luce e quindi energia indipendente dalla massa), gli elettroni usati come sonda sono quasi sempre relativistici. Per questo la formula sopra può essere riscritta sfruttando l'equazione di Einstein per l'energia.

$$\begin{aligned} E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \\ p^2c^2 \gg m^2c^4 \quad \rightarrow \quad E = pc \end{aligned} \tag{51}$$

Si ottiene quindi che l'energia degli elettroni deve essere pari a

$$E = 2\pi \frac{197MeV \cdot fm}{2R} \tag{52}$$

Per completare la trattazione si sa già dalle formule sperimentali che il raggio del nucleo si ottiene tramite la formula

$$r_{nucleo} = r_0 A^{1/3} \tag{53}$$

che, come già visto nel caso dell'oro è $r_{Au} = 1.2\sqrt[3]{197} = 6,98fm$. Il che corrisponde ad un'energia di

$$pc = \frac{2\pi \cdot 197MeV \cdot fm}{2 \cdot 6,98} = 89MeV \tag{54}$$

Se quindi voglio usare gli elettroni per studiare questo tipo di nucleo dovrò accelerare gli elettroni ad un minimo di $89MeV$.

Aumentando ulteriormente l'energia si può ottenere una diminuzione della lunghezza d'onda che aumenta la risoluzione del sistema rendendo visibili i nucleoni. Ciò che cambia nello studio dei nucleoni rispetto al nucleo è che non si può più considerare elastica la collisione il che porta nella maggior parte dei casi ad una distruzione del protone dopo la collisione e di conseguenza cambierà anche la sezione d'urto. L'energia necessaria per lo studio del protone ($r_{prot.} \sim 1fm$) è $E = pc = 0,5GeV$. Aumentando ancora l'energia si possono studiare pure i quark, questo richiede energie pari a 6,1 TeV.

2.3 Sezione d'urto di Mott

Le assunzioni fatte per il calcolo della sezione d'urto di Rutherford sono state:

1. Interazione puramente coulombiana
2. Ne proiettile ne bersaglio possiedono spin

Le assunzione su cui si baserà la sezione d'urto di Mott, necessaria alla descrizione dell'interazione nucleo elettrone, sono:

1. Bersaglio privo di spin
2. Proiettile con spin

Questi cambi, necessari per esperimenti con gli elettroni portano alla formula seguente

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth} \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \tag{55}$$

con $\beta = v/c$. L'asterisco sta ad indicare che trascuriamo gli effetti di rinculo.

Si continua a supporre quindi che il nucleo abbia massa infinita e di conseguenza che l'elettrone abbia energia cinetica iniziale uguale a quella finale. Questa assunzione è possibile fino al GeV perché al di sopra le quantità di moto di elettrone e nucleo iniziano a diventare confrontabili. Il termine moltiplicativo della sezione d'urto di Rutherford sopra è ciò che ci indica la presenza dello spin dell'elettrone, studiamo ora il suo significato.

$$\begin{gathered} \beta \to 1 \\ v \to c \\ 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \to \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{gathered} \tag{56}$$

Questo comporta una grande modifica alla sezione d'urto di Rutherford, in quanto viene inibito il back scattering caratteristico dell'esperimento con il bersaglio d'oro, e ciò è dovuto proprio allo spin dell'elettrone. Questo ci fa capire quanto sia stato fortuita scelta di Rutherford delle particelle α che non provocano appunto interazione di spin.

Questo effetto si spiega grazie ad una quantità caratteristica di ogni particella definita elicità

$$h = \frac{\bar{s} \cdot \bar{p}}{|s||p|} \tag{57}$$

Questa grandezza, come si può intuire dalla formula è la proiezione dello spin nella direzione della quantità di moto. Lo spin è una proprietà caratteristica delle particelle che classicamente viene rappresentata come una rotazione della particella attorno a se stessa. Questa è un'immagine molto utile a comprendere il concetto ma scorretta da un punto di vista reale (l'elettrone puntiforme e quindi non ha alcun senso parlare di rotazione attorno ad un asse).

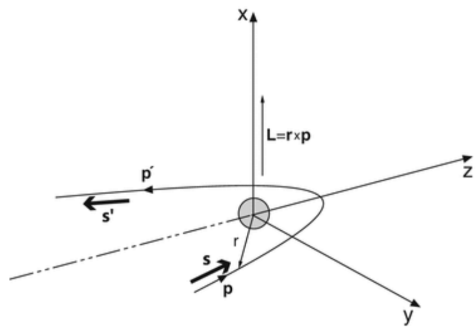


Figure 5: Backscattering di elettrone

In figura è mostrata l'interazione tra il nucleo e l'elettrone in cui si ha la conservazione del momento angolare e dell'elicità. Questo proibisce il back scattering infatti per la conservazione della quantità di moto un evento di back scattering richiederebbe un'inversione dell'elicità, ma siccome anche l'elicità dell'elettrone si deve conservare l'effetto risulta inibito.

La conservazione dell'elicità dipende da regole naturali e riguarda le particelle con velocità prossime a quella della luce. Una spiegazione che può aiutare alla comprensione è quella di considerare una particella con velocità non relativistica; questa particella può essere osservata sia stando dietro la particella che superandola e guardandola dal fronte, questo genera un cambio di elicità. La questione è abbastanza intuitiva, basta ragionare con l'esempio di una sfera che ruota attorno a sé stessa in un sistema fisso, questa girerà in senso orario o antiorario in base al punto in cui la si osservi. Nel caso invece in cui la particella ha velocità tendente a quella della luce l'elicità è definita in quanto la particella non potrà essere vista idealmente da nessun'altra posizione (la particella non potrà mai essere superata). L'elicità in questo caso viene denominata chiralità.

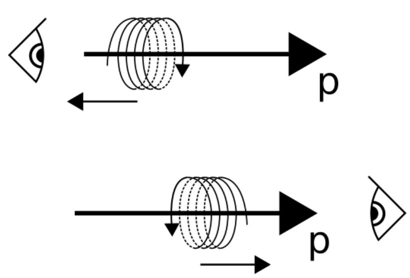


Figure 6: Rappresentazione grafica del cambio di elicità

Ciò vuol dire che gli elettroni possiedono più componenti di elicità ma quando si avvicinano a velocità relativistiche ne rimane solamente una. Questa è una legge che deriva dall'esperienza, non ha quindi un motivo se non l'osservazione. É inoltre un'evidenza dell'equazione di Dirac e da osservazioni della forza debole. Questo indica che la natura non è simmetrica e ci deve andare bene (la materia preferisce chiralità sinistra, l'antimateria la destra).

In realtà un modo per far cambiare spin e quindi elicità alle particelle ci sarebbe ma richiede la presenza di una campo magnetico, il campo elettrico non è sufficiente. Questo aggiunge un'altra negazione alla possibilità di back scattering.

2.4 Studio dell'interazione sonda bersaglio

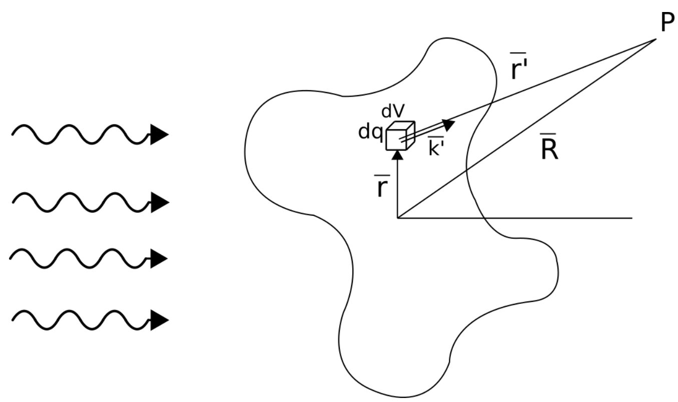


Figure 7: Rappresentazione dell'interazione di un fascio con una distribuzione di carica

Supponiamo di avere un fascio di elettroni incidenti su un bersaglio esteso. Il fascio di elettroni può essere rappresentato come un'onda piana e^{ikr}, si consideri che il bersaglio abbia una distribuzione di carica qualsiasi e si prenda un sistema di coordinate centrato al centro della carica.

L'interazione che si ottiene può essere vista come la somma di tutte le interazioni derivate dai punti infinitesimi della carica. Per visualizzare questo si consideri un cubetto di carica dq e volume dV, con coordinata $\bar{r}$ rispetto al centro di coordinate. Analogamente a come si fa in ottica, supponiamo che dopo l'interazione si generi da quel punto un'onda sferica.

A questo punto è possibile analizzare l'onda ottenuta nel punto P (virtualmente considerato all'infinito) di coordinata $\bar{R}$ rispetto al centro del nucleo e con distanza $\bar{r'}$ rispetto al volumetto infinitesimo di carica. Si può quindi sommare il contributo di ogni carica infinitesima per ottenere il contributo totale nel punto P dato da tutto il nucleo. Prendendo come onda piana incidente un'onda di energia:

$$E = E_0 \cdot e^{ikr} \tag{58}$$

il contributo infinitesimo dell'onda generata è rappresentato da

$$A = E_0 e^{ikr} \frac{a}{r'} e^{ik'r'} = \frac{aE_0}{r'} e^{i(kr+k'r')} \tag{59}$$

dove a è l'ampiezza di diffusione, ovvero la sezione d'urto elementare di Mott.

$$\begin{aligned} \bar{r} + \bar{r'} &= \bar{R} \\ \bar{k}\bar{r} &= \bar{k'}\bar{R} - \bar{k'}\bar{r'} \end{aligned} \tag{60}$$

Applichiamo quindi delle approssimazioni per semplificare il sistema

$$\begin{aligned} R \to \infty \quad & r' \approx R \quad k'||R \\ M_{nucleo} \to \infty \quad & |k'| = |k| = k \end{aligned} \tag{61}$$

Sostituendo nella formula di A si trova

$$A = \frac{aE_0}{R} e^{ikR} \cdot e^{i(k-k')r} \tag{62}$$

Integrando poi su tutto il volume

$$\int A = \frac{aE_0}{RQ} \int \rho_e(r) e^{-i\Delta kr)} \tag{63}$$

Dove Q è la carica totale e ρ è la densità di carica. É già noto che la quantità di moto trasferita si può riscrivere come

$$\bar{q} = \hbar \bar{\Delta K} \tag{64}$$

$$\int A = \frac{aE_0}{RZe} \int \rho_e(r) e^{-i\frac{q}{\hbar}r} \tag{65}$$

Essendo a la sezione d'urto di Mott ve ne si può evidenziare la dipendenza cinematica dovuta alla sua dipendenza dalla sezione d'urto di Rutherford ($\propto 1/q^4$). Non sarà dimostrato ma bisogna sapere che $d\sigma/d\Omega$ dipende da $|A|^2$. Si può finalmente trovare la sezione d'urto

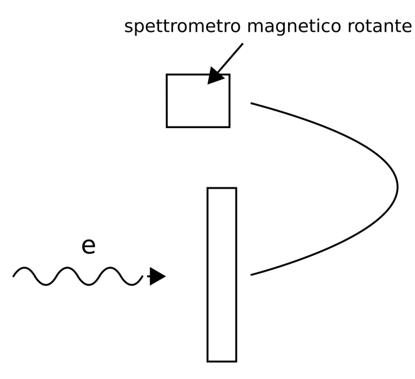
$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left| \int \rho_e(r) \cdot e^{-i\frac{q}{\hbar}} dr \right|^2 \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} |F(\rho, q)|^2 \end{aligned} \tag{66}$$

$|F(\rho, q)|$ è definito fattore di forma nucleare e coincide con la trasformata di Fourier della distribuzione di carica nel nucleo.

$$F(\rho, q) = \int \rho_e(r) e^{-i\frac{q}{\hbar}r} dr \tag{67}$$

In pratica quando un fascio di elettroni interagisce con una densità di carica di ottiene o stesso effetto che si ha con un'onda piana che fa diffrazione da una fenditura.

Esempi In figura è mostrato un esperimento di scattering dove c'è un fascio interagente con un bersaglio rivelato da uno spettrometro magnetico rotante che poteva misurare l'energia delle particelle a più angoli di diffusione. Il grafico ottenuto da un'esperienza di questo tipo è mostrato in figura 8.



Come si può notare dal grafico la distribuzione di carica era in un certo modo inaspettata ma rispecchia i ragionamenti fatti riguardo la variabilità della sezione di Mott in base alla distribuzione. La distribuzione di Mott infatti viene modulata come la trasformata di Fourier della distribuzione

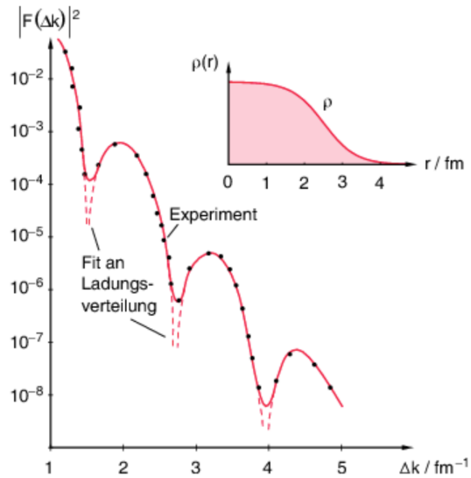


Figure 8: Risultati sperimentali sfruttando come sonda gli elettroni e che evidenziano l'analogia con l'ottica

di carica e se, per esempio, la distribuzione di carica fosse puntiforme sarebbe uguale alla delta di Dirac, non avendo nessuna deviazione dalla sezione di Mott prevista, in quanto la trasformata di una delta è una distribuzione uniforme.

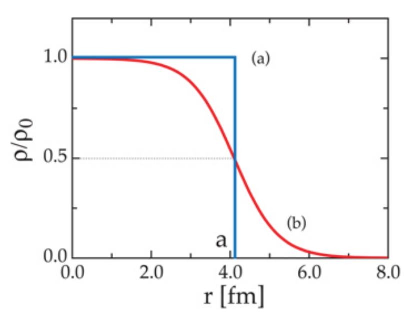
Dai dati sperimentali si ottenne però il grafico 8, dovuto al fatto di non poter considerare il nucleo come puntiforme. Come si può notare, i dati sperimentali evidenziano un importante parallelismo con l'effetto di diffrazione della luce su una fenditura.

Questo rende possibile la determinazione del raggio del nucleo sfruttando le stesse formule usate per trovare la dimensione di una fenditura. Si prenda per esempio un nucleo di Stagno ^{124}Sn e vi si faccia collimare un fascio di elettroni con energia $E = 330MeV$; il raggio del nucleo sarà

$$r = 0,61\frac{\lambda}{\sin\theta} \tag{68}$$

La lambda corrisponde a $\lambda = hc/E = 3,7fm$ e il primo minimo si trova a $\theta = 45^o$, si ottiene quindi un raggio pari a $r = 3,19fm$.

Questi esperimenti ci hanno permesso di determinare la distribuzione di carica del nucleo, che corrisponde all'incirca alla distribuzione di massa. Ciò che si è notato è che il nucleo non è propriamente una sfera rigida ma ha un andamento come quello mostrato in figura sotto. Questa



corrisponde alla distribuzione di Saxon-Woods data dalla formula

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + exp\left(\frac{r-a}{b}\right)} \tag{69}$$

dove $a = 118A^{1/3} = 0,48fm$ e $b = 0,55 \pm 0,07fm$. Questo mostra la presenza di una zona dove la densità del nucleo diminuisce gradualmente.

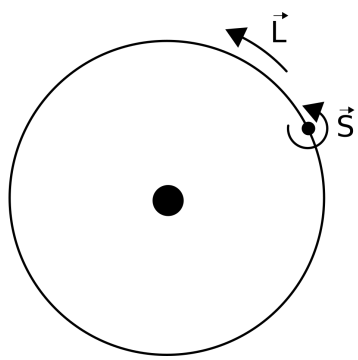
Qual è la densità di materia nel nucleo?

$$\begin{aligned} R &= R_0 A^{1/3} \\ \rho_M &= \frac{M}{V} = \frac{A \cdot u}{\frac{4}{3}\pi R^3} \\ &= \frac{A \cdot u}{\frac{4}{3}\pi R_0^3 A} \approx 10^{17} \frac{kg}{m^3} \end{aligned} \tag{70}$$

dove A corrisponde al numero di massa del nucleo e u è l'unità di massa atomica. Dalla divisione di A per A si nota come la densità non dipende dal tipo di nucleo ma è uguale per tutti i nuclei.

2.5 Proprietà dei Nuclei: Spin Nucleare e Momento Magnetico

Molte proprietà dei nuclei si caratterizzano in modo fenomenologico, ovvero per analogia con effetti già conosciuti. Lo spin viene descritto in analogia a ciò che viene studiato in struttura della materia e meccanica quantistica. Ricordiamo ora com'è caratterizzato il moto dell'elettrone attorno al nucleo, questo si descrive come un moto di rivoluzione e di rotazione.



Vi sono inoltre più numeri quantici che caratterizzano l'elettrone:

$$\begin{aligned} &n && 1,2,3 \\ &l && 0 \to N-1 \\ &m && -l \to 0 \to +l \\ &s && +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{71}$$

Per quanto riguarda i nucleoni, il fatto di avere un momento angolare non è banale, non vi è infatti un potenziale centrale che ne giustifichi la presenza. La questione è valida in quanto dimostrata da fatti sperimentali. Per ogni nucleone, all'interno del nucleo, possiamo definire un momento angolare totale che è dato da

$$\bar{s} = \bar{l} + \bar{s} \tag{72}$$

e con lo stesso tipo di analogia potremo trovare quello che si chiama spin del nucleo, ottenuto come la somma di tutti gli spin dei nucleoni.

$$I = \sum \bar{s} \tag{73}$$

La spiegazione deriva dal fatto che siccome i protoni sono particelle cariche, e una particella carica in moto genera un momento magnetico, si otterrà anche per i nucleoni un momento magnetico.

un paio di commenti

- L'analogia dello spin di una particella con una trottola è una assunzione ben posta? Si parte dal raggio classico dell'elettrone, ovvero il raggio che una carica avrebbe se tutta la sua massa fosse costituita da energia elettrostatica.

$$\begin{aligned} m_e c^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_e} \quad \rightarrow \quad r_e &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{m_e c^2} = \\ &= \frac{e^2 \hbar c}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}\frac{1}{m_e c^2} = \\ &= 1,44 MeV \cdot fm \frac{1}{0,5 MeV} \sim 3fm \end{aligned} \tag{74}$$

  In realtà noi consideriamo l'elettrone come una particella priva di struttura il che ci fa capire quanto sbagliata sia la nostra concezione di questi fenomeni. Il raggio reale è approssimabile a 0. Supponiamo che il momento angolare dell'elettrone sia *(consideriamo qui l'elettrone come una sferetta con tutta la massa concentrata al bordo della sfera)*:

$$\hbar = r_e m_e v_e \tag{75}$$

  Qual è la velocità di questa sfera (elettrone)?

$$\begin{aligned} v_e &= \frac{\hbar}{r_e m_e} \rightarrow \frac{v_e}{c} \\ &= \frac{\hbar c}{r_e m_e^2} \sim 10^2 \end{aligned} \tag{76}$$

  Il risultato ottenuto è assurdo, perché viola le regole base della relatività. L'analogia con la trottola è quindi un espediente utile alla comprensione ma errato e lo spin è da considerarsi un effetto puramente relativistico.

- Qual è il cammino libero medio del nucleone nel nucleo? Si ha

$$l = \frac{1}{n\delta} \tag{77}$$

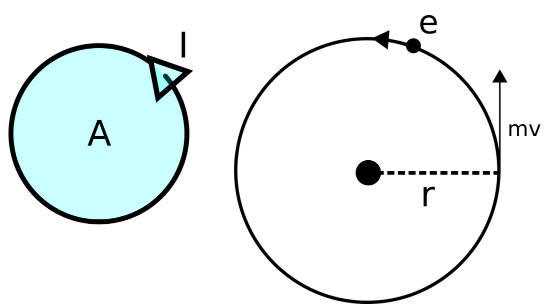
  dove $\delta_{n-n} \sim 22MeV = 300mb$ è la sezione d'urto d'interazione e n è alla densità numerica dei nucleoni nel nucleo.

$$n = \frac{A}{V} = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R_0^3 A} = \frac{3}{4(3,14)(1,15fm)^3} = 0,16\frac{nucleoni}{fm^3} \tag{78}$$

  Il libero cammino medio sarà quindi

$$l = \frac{1}{0,16fm^3}\frac{1}{300 \times 10^{-3} \cdot 10^{-28}m^2 \cdot 10^{30} fm^2/m^2} = 0,21fm \tag{79}$$

  Il libero cammino medio corrisponde quindi a meno della dimensione del nucleone stesso, il che non fa ben sperare alla possibilità di spostamento dei nucleoni e alla conseguente esistenza di un momento magnetico. In realtà c'è possibilità di movimento grazie al principio di esclusione di Pauli.



Dal punto di vista sperimentale quello che noi vediamo è che i nuclei hanno un certo momento magnetico (rather than l'effetto del momento angolare). Il momento magnetico associato ad una carica in moto classicamente corrisponde alla corrente che attraversa una spira per l'area della spira stessa.

$$\mu = IA \tag{80}$$

Prendendo ora il caso dell'elettrone (che poi sarà ampliato per analogia al caso dei nucleoni) si ha

$$L = mvr, \qquad I = \frac{e}{v} \tag{81}$$

$$v = \frac{2\pi r}{t} \rightarrow t = \frac{2\pi r}{v} \tag{82}$$

Si ottiene così la corrente generata da un elettrone

$$I = \frac{e}{2\pi r} v \tag{83}$$

il che può essere sostituito nel momento magnetico per ottenere

$$\mu = IA = \frac{e}{2\pi r} v\pi r^2 = \frac{evr}{2}\frac{mvr}{mvr} = \frac{e}{2m}L \tag{84}$$

Il *momento magnetico* di una particella carica è quindi

$$\mu = \frac{e}{2m}L \tag{85}$$

Dove la quantità $e/2m$ viene definita come *rapporto giromagnetico*. Il momento (85) fa riferimento alla meccanica classica ma può essere validato per la meccanica quantistica effettuando la sostituzione del momento angolare con $\hbar$. Si ottiene così il *magnetone di Bohr*

$$\mu_B = \frac{e}{2m_e}\hbar \tag{86}$$

Questa è l'unità fondamentale per quanto riguarda il momento magnetico. Possiamo poi ampliare questa definizione trovando il momento di dipolo magnetico dell'elettrone

$$\mu_e = \mu_B \frac{L}{\hbar} \tag{87}$$

Si può ora introdurre il fattore giromagnetico g che ci permette di generalizzare la formula (87)

$$\mu_B = g\mu_B \frac{L}{\hbar} \tag{88}$$

A questi livelli di grandezza non si ha la certezza che carica e massa coincidano, anzi potrebbero essere totalmente indipendenti; questo fattore assume che ci sia una relazione ben definita tra momento angolare e momento magnetico, in particolare se distribuzione di massa e di carica coincidono $g = 1$. La trattazione ha comunque dei limiti, infatti quando verrà studiato lo *spin* del nucleo si potrà notare come massa e carica non coincidano, ma per ora va bene che ci siano dei limiti nel calcolo. Nel caso dell'elettrone che gira attorno al nucleo è vero che $g = 1$.

Nel caso dei nucleoni all'interno del nucleo si ha per il protone:

$$\mu_p = \mu_N \frac{L}{\hbar} \qquad \mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} \tag{89}$$

dove $g = 1$ e μ_N è detto magnetone nucleare. Mentre per il neutrone:

$$\mu_n = 0 \tag{90}$$

Per quanto riguarda lo *spin* si ha che la relazione diventa

$$\mu_e = g\mu_B \frac{S}{\hbar} \tag{91}$$

In questo il momento giromagnetico non sarà più 1 ma si avrà $g_e = 2$. Questo valore si ottiene dall'equazione di Dirac per particelle prive di struttura interna. Dall'elettrodinamica quantistica si ottiene poi che in realtà non è propriamente 2 ma $g = 2,0023$ che coincide con una piccola variazione ma che deriva da cambiamenti importanti (tanto da essere scritta sull'epitaffio dello scopritore). Nel caso dei nucleoni si ha

$$\mu_{p,n} = g_{p,n}\mu_N \frac{S}{\hbar} \tag{92}$$

dove i fattori g corrispondono a $g_p = 5,585691; g_n = -3,826084$. Il fatto che questi fattori siano diversi da 2 ci fa capire come i nucleoni abbiano entrambi una struttura interna; si ha inoltre che il $g \not0$ per il neutrone implica che pure quest'ultimo possieda un momento magnetico pur essendo privo di carica.

Il momento di dipolo magnetico totale del nucleo è

$$\mu_N = \sum_p \left(\mu_N \frac{\bar{L}}{\hbar} + g_p \mu_N \frac{\bar{S}}{\hbar} \right) + \sum_n \left[g_n \mu_N \frac{\bar{S}}{\hbar} \right] \tag{93}$$

Una cosa interessante riguardo i neutroni e i protoni è che queste particelle sono fermioni ovvero

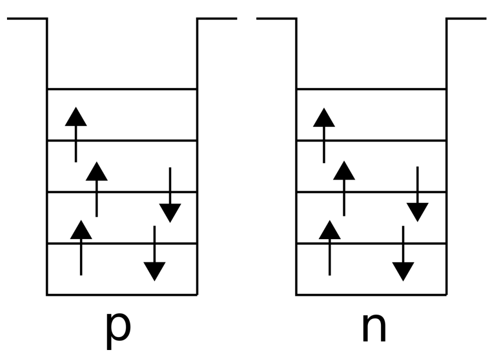


Figure 9: Rappresentazione delle buche di potenziale dei protoni e dei neutroni

particelle che soddisfano alla statistica di Fermi-Dirac (non posso avere più di una particella nello stesso stato, posso avere al massimo due particelle alla stessa energia con spin antiparallelo). Essendo poi particelle all'interno di una buca di potenziale si può già intuire quale sarà lo spin del nucleo. Per esempio:

- se il numero di massa A è pari e il numero atomico Z è dispari, avremo un numero dispari di neutroni e di protoni, in questo caso il nucleone spaiato (sia dalla parte dei neutroni che dei protoni) mi fa dire che avremo un nucleo con spin intero.
- Se invece il numero totale di nucleoni è pari e il numero di protoni e neutroni è pari si avrà spin del nucleo nullo.
- Se il numero di massa sarà dispari sappiamo che lo spin del nucleo è semi-intero.

3 Modelli Nucleari

I modelli nucleari sono un tipo di supporto teorico che ci permette di interpretare le proprietà legate prima ai processi di decadimento e poi a quelli di fissione e fusione nucleare. Come vedremo i modelli nucleari sono molto eterogenei e partono da presupposti che possono arrivare a contraddirsi. Il modello a goccia per dire è opposto al modello di Fermi. Questo esprime la difficoltà che si ha ad associare le proprietà dei nuclei a principi primi. Quelli che introduciamo sono modelli fenomenologici o semi empirici, ciò indica che faremo delle supposizioni a partire da dati empirici per spiegare ciò che si vede. Questo approccio è dovuto proprio alla mancanza di una teoria che con principi elementari esprima le proprietà dei nuclei.

3.1 Formula semi-empirica di massa

Quello che verrà trattato in questa sezione riguarda quello che tiene legato il nucleo. Grazie all'esperimento di Rutherford sappiamo che il nucleo è formato da una carica positiva molto densa concentrata al centro, circondata poi da elettroni. La cosa sorprendente di questa scoperta fu principalmente legata alla dimensionalità infatti, prima di Rutherford era logico pensare che la materia fosse densa, ma quello che ci rivelano i dati è appunto che tra il raggio nucleare e il raggio atomico c'è un fattore 10000 che rende la materia di fatto "spazio vuoto".

É stato visto poi, con gli esperimenti di Rutherford e Chadwick, che il nucleo è composto da protoni e neutroni, in particolare con il nucleo può essere esplicitato con la formula

$$ {}^{A}_{Z}X_N \tag{94} $$

dove X indica l'elemento, A è il numero di massa, ovvero la somma di neutroni e protoni, Z è il numero atomico, ovvero il numero di protoni e infine N è il numero di neutroni ($A = Z + N$). Si sa inoltre che la carica dell'atomo è assolutamente neutra e quindi che il numero di protoni è esattamente uguale al numero di elettroni.

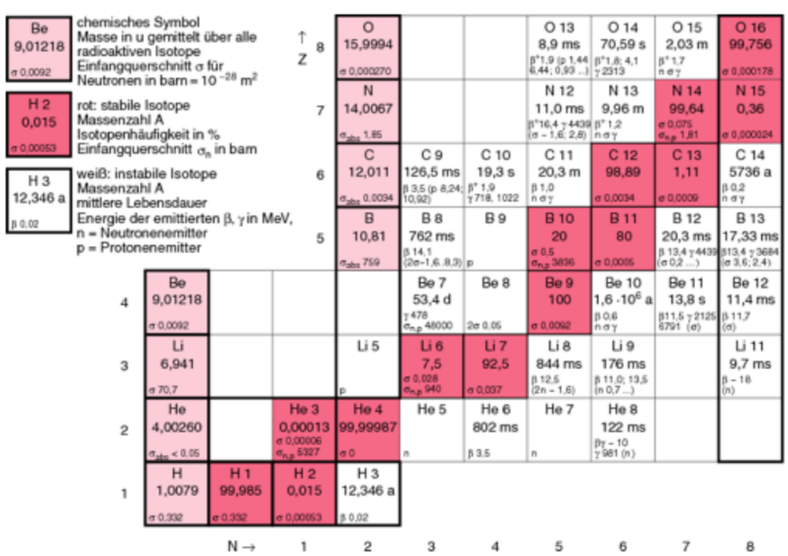


Figure 10: Tavola dei Nuclidi

La tavola dei nuclidi è uno strumento utile in fisica subatomica. Sulla diagonale è rappresentata la linea degli elementi che possiedono un numero equivalente di neutroni e protoni. Per numero di protoni bassi, i nuclidi che si trovano in natura, ovvero i nuclidi stabili, si trovano proprio lungo questa diagonale. Aumentando però il numero atomico i nuclidi stabili diventano quelli con un numero sempre maggiore di neutroni rispetto ai protoni. Intorno a questa zona di nuclidi stabili vi è poi una zona di nuclidi instabili. Oltre questa zona non vi sono poi più nuclidi, ne stabili ne instabili.

Cosa vuol dire atomo instabile?

Per nuclidi con protoni in eccesso, rispetto ai nuclidi stabili, ciò che accade è che l'atomo tende a decadere, ovvero uno o più protoni in eccesso subirà la reazione di decadimento β^+

$$p \longrightarrow n + e^+ \nu_e \tag{95}$$

Nei nuclidi che hanno esuberanza di neutroni, la reazione che avverrà riguarda i neutroni e si definisce decadimento β^-

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu_e} \tag{96}$$

(nelle formule sopra p indica il protone, n il neutrone, e^-, e^+ rispettivamente l'elettrone e il positrone, $\nu_e, \bar{\nu_e}$ il neutrino e l'antineutrino elettronici).

In questo tipo di trasformazioni si ha che la carica e il numero leptonico si conservano sempre. La carica è abbastanza evidente, per quanto riguarda il numero leptonico per ora ci basta sapere che viene conservato.

Com'è intuibile nel decadimento β il nucleo si trasmuta variando il tipo di nucleo, solo che nel primo caso si ottiene un nuclide con un protone in meno dell'originale mentre nel secondo caso il nuclide avrà il numero dei protoni aumentato.

$$\begin{array}{ll} \beta^+ & {}^A_ZX \longrightarrow {}^A_{Z-1}Y + e^+ + \nu_e \\ \beta^- & {}^A_ZX \longrightarrow {}^A_{Z+1}Y + e^- + \bar{\nu_e} \end{array} \tag{97}$$

Nella tavola dei nuclidi si avrà quindi che le reazioni provocheranno uno spostamento dell'elemento all'interno della tavola in diagonale (perpendicolarmente alla bisettrice del grafico).

Introduciamo ora il concetto di *energia di legame*. Se supponiamo che all'interno di un nucleo ci siano Z protoni e N neutroni, prendendo la massa delle particelle libere che compongono il nucleo e confrontandola con la massa delle stesse particelle legate nel nucleo, si ottiene che quest'ultima è sempre minore della somma delle masse delle particelle libere. Si ha quindi che parte della massa si trasforma in energia di legame, secondo la formula

$$\Delta mc^2 \to BE \tag{98}$$

La massa che va a formare il legame, chiamata massa mancante, è proprio la responsabile della diminuzione di massa nelle particelle legate rispetto alle particelle libere.

Calcoliamo ora per esempio l'energia che si ottiene trasformando un protone

$$p = 10^{-27}kg \qquad m_pc^2 = 10^{-27} \cdot 9 \times 10^{16} \cdot 1,6 \times 10^{-19} \simeq 10^9 eV \tag{99}$$

Qual è la differenza quindi tra massa legata e massa libera? Per un atomo la massa costituente degli elementi degli atomi è

$$(Zm_p + Nm_n + Zm_e)c^2 = m_{At}({}^A_ZX)c^2 + BE_{nuc} + BE_{at} \tag{100}$$

dove $BE_{nuc} + BE_{at}$ corrispondono all'energia di legame nucleare e all'energia di legame atomica. Si possono fare dei calcoli sulla formula sopra

$$Z(m_p + m_e)c^2 + Nm_nc^2 + Nm_nc^2 = m_{At}({}^A_ZX)c^2 + BE_{nuc} + BE_{at} \tag{101}$$

Siccome stiamo ragionando "sperimentalmente" per trovare un modo di calcolare la massa dei nuclei, noi conosciamo già l'energia di legame dell'atomo di idrogeno, per cui

$$m_{At}({}^1_1H)c^2 + B^H_{at} = m_p + m_e \tag{102}$$

che sostituito porta a

$$Z(m^1_{At1}Hc^4) + ZBE^H_{At} + Nm_nc^2 = m_{At}({}^A_ZX)c^2 + BE_{nuc} + BE_{at} \tag{103}$$

A questo punto posso notare che l'energia di legame dell'atomo di idrogeno e l'energia di legame dell'atomo si possono semplificare, ottenendo così l'energia di legame

$$BE_{nuc} = Z(m^1_{At1}Hc^4) + Nm_nc^2 - m_{At}({}^A_ZX)c^2 \tag{104}$$

Posso quindi misurare semplicemente l'energia di legame, infatti la massa dell'idrogeno è nota così come la massa del neutrone; basterà semplicemente misurare la massa dell'atomo legato.

Qual è la natura della forze che tengono insieme un nucleo? É chiaro che all'interno del nucleo ci debba essere una forza molto grande perché questo possa esistere, si deve infatti controbilanciare la forza elettrostatica di repulsione tra cariche uguali. Essendo che in natura esistono nuclei con numero atomico fino a 100 questa forza deve essere almeno un fattore 100 rispetto alla forza elettrostatica. Il modello che cerca di spiegare questa forza è appunto il *modello a goccia.*

Ipotizziamo di avere una forza che agisce tra tutte le coppie di nucleoni, questo vuol dire che questa forza non distinguerà tra protoni e neutroni. Siccome tra ogni coppi ci dovrà essere una forza procediamo a costruire il modello. Tra tre particelle il numero di coppie possibili è 3, tra quattro particelle si formeranno 6 coppie. Si può quindi evidenziare una legge che stabilisce il numero di coppie in un nucleo con numero di massa A

$$\frac{A(A-1)}{2} = \frac{A^2 - A}{2} \tag{105}$$

Questo vuol dire che l'energia di legame totale del nucleo sarà proporzionale a A^2 e l'energia di ogni legame singolo sarà proporzionale a A.

$$BE \propto A^2 \rightarrow \frac{BE}{A} \propto A \tag{106}$$

Abbiamo quindi creato un'ipotesi che ora va verificata. Se quest'ipotesi fosse vera si avrebbe che BE/A e A devono risultare proporzionali e aumentare linearmente l'uno rispetto all'altro. I dati sperimentali ci dicono in realtà che l'energia di legame aumenta quasi linearmente fino ad un massimo (coincidente con il ferro ${}^{56}Fe$) e che dopo si stabilizza ad un valore $\sim 8MeV$ rimanendo circa costante all'aumentare di A.

Questo errore deriva dal fatto che abbiamo supposto che i nucleoni interagiscano infinitamente anche con i nucleoni più distanti, questo è stato dimostrato non essere vero e anzi che si raggiunge una saturazione.

Si ha quindi che due nucleoni lontani non si parlano. La forza nucleare è dunque una forza a corto range.

Abbiamo imparato che l'energia di legame (*Bending energy*) corrisponde a

$$BE = a_vA \tag{107}$$

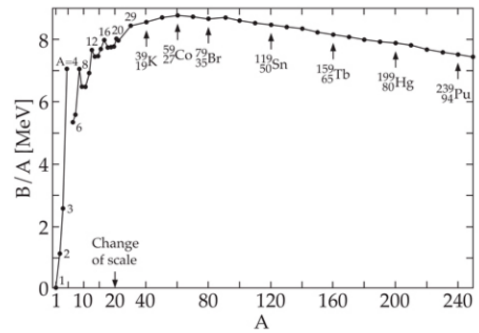


Figure 11: Grafico sperimentale dell'energia di legame in funzione con l'aumento del numero di massa

dove a_v è un termine di volume.

Questa formula avrà intuitivamente una serie di termini correttivi. Una prima correzione è dovuta al fatto che sicuramente i nucleoni centrali avranno più legami rispetto ai nucleoni sulla superficie della sfera (da qui deriva il nome di modello a goccia, infatti si basa sulla stessa struttura delle gocce di acqua). Continuando ad approssimare devo tener conto di un termine di superficie che diminuisce l'energia di legame.

$$BE = a_v A - a_s A^{2/3} \tag{108}$$

$A^{2/3}$ esprime la dipendenza dalla superficie perché il raggio nucleare ha formula

$$R = R_0 A^{1/3}$$

e la superficie della sfera è

$$S = 4\pi R^2$$

il che restituisce una proporzionalità di superficie di $A^{2/3}$.

Il terzo termine deriva dal fatto che all'interno del nucleo sono presenti i protoni che possiedono una forza di repulsione elettrostatica tra loro

$$F_Q = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

In realtà ciò che interessa a noi è l'energia potenziale.

$$PE \propto \frac{1}{R} = \frac{K}{A^{1/3}}$$

Il termine coulombiano della forza di legame è quindi

$$= a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \tag{109}$$

Aggiungendo questo termine si trova che l'energia di legame è

$$BE = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \tag{110}$$

Perché la formula dell'energia di legame sia completa mancano altri due termini. Mentre tutti i termini trovati fino ad ora si possono considerare come termini classici gli ultimi sono termini puramente quantistici.

Il primo è legato al fatto che i protoni e i neutroni possono essere descritti come intrappolati in una buca di potenziale. All'interno di una buca di potenziale i livelli sono quantizzati e soprattutto equispaziati. Supponiamo che esistano due buche di potenziale, una dei protni e una dei neutroni, all'interno di questa buca i nucleoni si dispongono con spin antiparallelo. Continuando ad aggiungere neutroni nella buca e superando il numero di protoni io avrò che mi ci vuole meno energia per estrarre un neutrone, in quanto avranno occupato dei livelli energetici più alti dei protoni (sono meno fortemente legati). Questo eccesso di energia corrisponde a

$$E = 2S + 2(2S) + 2(3S) + ... + 2(\frac{X}{2}S) \tag{111}$$

dove S è la differenza energetica tra i livelli che viene moltiplicato per il numero di livelli in eccesso, X è infatti l'eccesso di neutroni ovvero $X = N - Z$. Quella sopra è evidentemente una serie geometrica che da come somma

$$E = 2S\left[\frac{X}{2}\left(\frac{X}{2} + 1\right]/2 = S\left(\frac{X^2}{4} + \frac{X}{2}\right) \tag{112}$$

Se X è grande portò ignorare il termine $X/2$. Se A aumenta ciò che succede è che non aumento il livello massimo occupato all'interno della buca ma diminuisce la spaziatura tra i livelli stessi

$$A \uparrow \rightarrow S \downarrow \rightarrow S \propto \frac{1}{A} \tag{113}$$

Quindi

$$S\frac{X^2}{4} \propto \frac{1}{A}(N - Z)^2 \tag{114}$$

Il termine che si andrà ad aggiungere alla formula di legame nucleare definito anche termine di simmetria sarà

$$a_{sym}\frac{(N - Z)^2}{A} \tag{115}$$

La formula aggiornata sarà ora

$$BE = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_{sym}\frac{(N - Z)^2}{A} \tag{116}$$

L'ultimo termine che manca è legato al fatto che i nucleoni tendono ad accoppiarsi con spin antiparallelo e quindi risulta che i nuclei con numero di nucleoni pari saranno più legati rispetto a quelli con numero negativo. Nella tabella sono raffigurati i valori che può assumere l'ultimo termine di correzione in base al numero di nucleoni che sono presenti nel materiale.

La formula finale ottenuta è quindi

$$BE = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_{sym}\frac{(N - Z)^2}{A} + \delta \tag{117}$$

Ora possiamo finalmente calcolare la massa del la massa del nucleo

$$\begin{aligned} m^A_{nucl} - ZXc^2 &= Zm_p c^2 + Nm_n c^2 - BE_{nucl} \\ &= Zm_p c^2 + Nm_n c^2 - \left[a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_{sym}\frac{(N - Z)^2}{A} + \delta\right] \end{aligned} \tag{118}$$

Questa formula è quella che viene chiamata formula semi-empirica di massa. É una formula empirica in quanto deriva da valori sperimentali ma non lo è totalmente in quanto sono stati inseriti pure

p	n	
↑↓	↑↓	+δ
↑	↑↓	0
↑↓	↑	
↑	↑	-δ

vari termini determinati con la teoria. Ciò che non abbiamo ancora specificato sono i valori dei termini moltiplicativi. Questi possono variare in base ai testi o ai fit da cui sono derivati, ogni set di valori possiede numeri consistenti tra loro.

$$\begin{aligned} a_v &= 15,8MeV \\ a_s &= 18,3MeV \\ a_c &= 0,714MeV \\ a_{sym} &= 23,2MeV \\ \delta = 33,5MeV & \end{aligned} \tag{119}$$

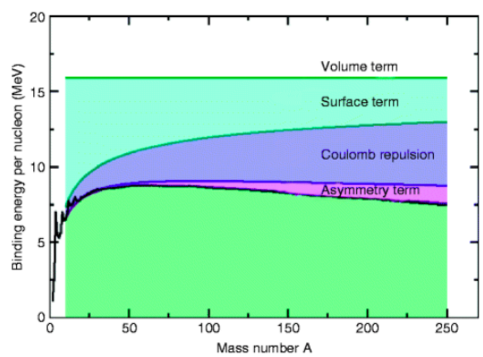


Figure 12: Modifiche all'energia di legame date da ogni termine

Limiti alla creazione dei nuclei La domanda a cui risponderemo in questo paragrafo è "perché non posso creare le combinazioni che voglio di portoni e neutroni ma solo alcune sono ammesse?". La risposta molto semplicemente è che la natura richiede che si minimizzi l'energia di massa.

Prendendo quindi la formula semi-empirica di massa e derivandola rispetto a Z ottengo

$$\frac{dM}{dZ} = m_p c^2 - m_n c^2 - 0 - 0 + a_c \frac{2Z-1}{A^{1/3}} + a_{sym} \frac{[-4A+8Z]}{A} \tag{120}$$

Ponendo questo differenziale uguale a zero ottengo la condizione richiesta di minimizzare la massa (siccome la massa di neutrone e protone sono circa uguali i due termini di massa si elidono)

$$Z\left(\frac{2a_c}{A^{1/3}} + \frac{8a_{sym}}{A}\right) = \frac{a_c}{A^{1/3}} + 4a_{sym} \tag{121}$$

Ciò che cerco di ricavare ora è Z che corrisponde al valore di Z che minimizzi la massa

$$Z = \frac{\frac{a_c}{A^{1/3}} + 4a_{sym}}{\frac{2a_c}{A^{1/3}} + \frac{8a_{sym}}{A}} \tag{122}$$

Questa formula mi restituisce quindi per ogni A il valore di Z che minimizza la massa. La formula finale è

$$Z = \frac{A}{2}\left[\frac{1}{1 + 0,008A^{2/3}}\right] \tag{123}$$

Si deduce che se A è piccolo allora $Z = A/2$ e quindi $N = Z$, mentre se A è grande allora $N > Z$. Intuitivamente questo serve a bilanciare la repulsione elettrostatica dei nuclei con alto numero di protoni.

Studiamo ora gli andamenti che si possono ottenere dalla formula semi-empirica di massa. Questa formula si può vedere come un polinomio del tipo

$$M = a + bZ + cZ^2 \tag{124}$$

Fissato A, la casistica a questo punto si divide in due, i nuclei che hanno numero di massa dispari e quelli con numero di massa pari.

Il caso più semplice si ha per A dispari. In figura sono rappresentati degli stati possibili con A

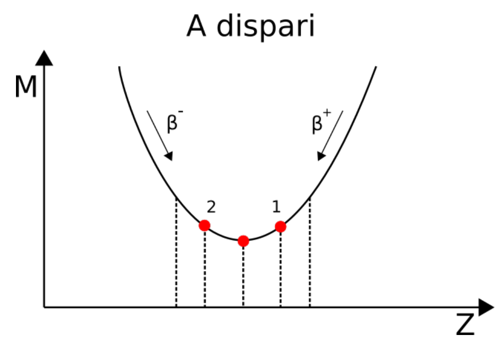


Figure 13: rappresentazione delle masse possibili al variare di Z con A pari

dispari, lo stato centrale è quello a massa minima e quindi anche quello più stabile. Procedendo verso lo stato 1 si troveranno i nuclei con un eccesso di protoni mentre al contrario procedendo verso 2 quelli con eccesso di neutroni. Ciò comporta che 2 avrà la tendenza a decadere nello stato centrale con decadimento β^- mentre 1 decadrà naturalmente con decadimento β^+. Nei punti in cui la parabola assume valori troppo elevati non si ha la presenza di stati.

Nel caso di A pari la faccenda si complica in quanto le parabole possibili sono due, una ad energia più alta e che corrisponde al caso di numero di protoni e neutroni entrambi dispari(Odd-Odd: come già visto sopra questo genera nuclei più instabili) e una a numero di neutroni e protoni pari ad energia più bassa (Even-Even: quindi con nuclei più stabili). Si ha quindi la possibilità di avere lo stato centrale o su una parabola o sull'altra portando a due casistiche differenti.

Nel grafico a sinistra possiamo notare che gli stati stabili sono due in quanto lo stato centrale si trova sulla parabola superiore mentre sulla parabola inferiore sono presenti due stati sullo stesso livello di energia e quindi entrambi con la stessa stabilità. Lo stato superiore in questo caso ha due possibilità di decadimento, verso 1 con decadimento β^+ o verso 2 con decadimento β^-. Nel caso per dire che lo stato 1 fosse più elevato di 2, la transizione da 1 a 2 non è impossibile ma altamente improbabile, in quanto pur essendo energeticamente favorevole richiederebbe un secondo

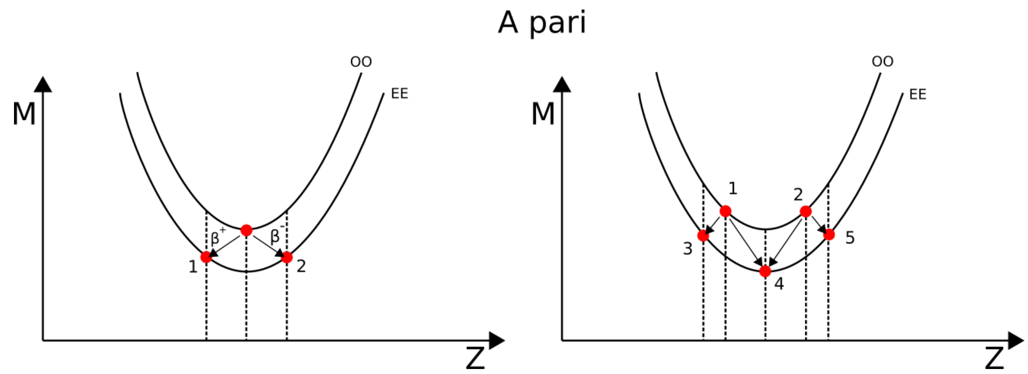


Figure 14: rappresentazione delle masse possibili al variare di Z con A dispari

decadimento β che richiede quindi una seconda probabilità di avvenimento. Un processo di questo tipo si chiama decadimento *doppio* β.

Nel grafico a destra è invece mostrato il caso in cui si abbia il nucleo centrale e nella curva più bassa (4), nella curva superiore vi sono invece due nuclei ad energia uguale. I nuclei 1 e 2 come si vede nel grafico avranno due possibilità di decadimento ciascuno, verso 3,4 e 5. Come nel caso precedente i decadimento da 3 e 5 verso 4 pur essendo energeticamente favorevoli sono improbabili in quanto decadimenti doppio β. I nuclei 3,4 e 5 sono quindi considerati tutti nuclei stabili.

La zona in cui non si ha la generazione di nuclei, sia provocata da un eccesso di neutroni che di protoni è dovuta al fatto che non è energeticamente favorevole avere nuclei piuttosto che le particelle slegate o un nucleo con numero di massa inferiore e delle particelle libere.

$$\begin{aligned} {}^A_Z X &\longrightarrow {}^{A-1}_{Z} X + n \\ {}^A_Z X &\longrightarrow {}^{A-1}_{Z-1} Y + p \end{aligned} \tag{125}$$

Se infatti la somma delle masse slegate a destra delle due reazioni sopra risulta minore della massa dell'atomo legato a sinistra la natura tenderà a dividere il nucleo. Per lo stesso principio i nuclei che sono troppo pesanti ovvero che possiedono semplicemente troppi nucleoni tenderanno ad emettere particelle α; questo tipo di nuclei sono anche quelli che fanno la fissione nucleare ovvero che tenderanno a dividersi in due atomi a numero di massa inferiore.

3.2 Modello di Fermi

Questo modello a differenza di quello a goccia è un modello a particella singola, ovvero studia l'interazione di una particella con un potenziale generato dalle altre particelle piuttosto che vedere il sistema in generale come insieme di particelle. Questo perché i sistemi complessi sono difficili da calcolare e inoltre quasi mai si riesce a risolvere i calcoli in maniera analitica. Il modello di Fermi suppone che il nucleo è composto da due gas di fermioni, protoni e neutroni. I fermioni sono le particelle che soddisfano alla statistica di Fermi-Dirac, che afferma che due particelle non possono occupare lo stesso stato quantico. Il risultato di questa ipotesi iniziale sarà poi confermato dal modello. Trascuriamo l'interazione tra le singole particelle ma le consideriamo confinate in una buca di potenziale che ha delle dimensioni del nucleo. Questo potenziale è dato dall'interazione media con tutte le altre particelle, quindi in realtà il modello considera le iterazioni ma le approssima ad un potenziale generato proprio da tali interazioni. La buca di potenziale che confina i due gas è quindi generata dai gas stessi. Questa impostazione ci permetterà di fare delle ipotesi sulle proprietà che i nucleoni hanno all'interno del nucleo. Questo modello fa inoltre parte dei così-detti modelli a particelle indipendenti.

Supponiamo di avere due buche di potenziale, in quanto neutroni e protoni sono considerati particelle indipendenti quindi ognuno avrà la propria buca. La buca di potenziale dei protoni è meno profonda in quanto questi subiscono anche la repulsione coulombiana, questo ci fa capire un po' di più sul modello a goccia, se ricordiamo infatti si aveva che i nuclei più pesanti possedevano più neutroni a livello di stabilità, proprio a causa di questa repulsione.

Questo modello prevede che sia per i neutroni che per i protoni vi siano dei livelli energetici, occupati fino ad un livello massimo che è il *livello di Fermi*. Per ogni livello energetico posso sistemare al massimo due particelle con spin opposto,questo per il principio di esclusione di Pauli.

I parametri che caratterizzano questo sistema sono la profondità della buca di potenziale e il livello di Fermi (livello energetico più alto occupato).

Siccome i nucleoni nel nucleo non sono particelle relativistiche possono essere descritti con la meccanica quantistica non relativistica, ovvero quella che viene fatta nella triennale. Si possono quindi sfruttare le equazioni di Schroedinger. Vogliamo risolvere l'equazione per una buca di potenziale con energia potenziale

$$\begin{aligned} E_{pot} &= V_0 \quad\ r \leq a \\ &= 0 \quad\ r > a \end{aligned} \tag{126}$$

L'equazione di Schroedinger è indipendente dal tempo e corrisponde a

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}\psi + V_0\psi = E \tag{127}$$

La risoluzione è

$$\frac{d^2}{dr^2}\varphi = -\frac{2m}{\hbar}(E - V_0)\varphi \tag{128}$$

Per risolverlo bisogna notare che il termine

$$-\frac{2m}{h}(E - V_0) > 0$$

Perché V_0 è un'energia potenziale di confinamento e una buca di potenziale ha potenziale negativo (V_0 è un potenziale attrattivo. Quindi posso sostituire il tutto con una variabile reale positiva ottenendo

$$\frac{d^2}{dr^2}\psi + K^2\psi = 0 \qquad K = \sqrt{\frac{2m(E - V_0}{\hbar^2}} \tag{129}$$

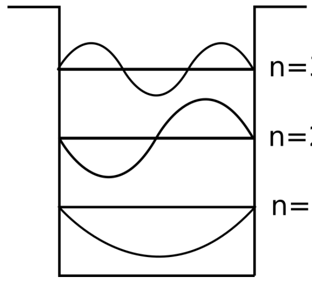
La soluzione (identica a quella del moto armonico) è

$$\psi = A\sin Kr + B\cos Kr \tag{130}$$

A cui devo poi porre le condizioni di annullamento in 0 e a.

$$\begin{aligned} &\psi(0) = 0 \rightarrow B = 0 \qquad\quad \psi = A\sin Kr \\ &\psi(a) = 0 \rightarrow Ka = n\pi \rightarrow K = n\frac{\pi}{a} \\ &\rightarrow E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2K^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2}n^2 \end{aligned} \tag{131}$$

Questi sono quindi i livelli energetici consentiti all'interno della buca di potenziale, le funzioni d'onda corrispondenti saranno come in figura. Se la buca non fosse finita ci sarebbe un'estensione delle funzioni d'onda oltre le pareti della buca.



Stima della profondità della buca di potenziale Per capire la profondità della buca dobbiamo valutare il numero di stati nucleari nello spazio delle fasi in un volume V e con quantità di moto p. Lo spazio delle fasi è uno spazio a 6 dimensioni che comprende sia le coordinate spaziali che quelle riferite alla quantità di moto nelle tre direzioni. Per capire, è un unico spazio a 6 dimensioni che mi dice proprio l'estensione del sistema che sto studiando, quindi qual è lo spazio delle fasi occupato dal gas di neutroni e protoni. Il numero di nucleoni in funzione di p è dato da

$$dn(p) = \frac{V 4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \tag{132}$$

dove V è il volume nelle coordinate spaziali, $4\pi p^2 dp$ è un guscio sferico compreso tra la sfera di raggio p e la sfera $p + dp$, $(2\pi\hbar)^3$ è lo spazio delle fasi occupato da ognuno degli stati quantici, in pratica è un volume di dimensione $\hbar$, quest'ultima quantità è legata al principio d'indeterminazione $\Delta p \Delta x \sim h$ (ogni stato quantico occupa dello spazio delle fasi un volume pari ad $\hbar^3$). Per calcolare il numero totale di stati devo integrare sapendo che il volume del nucleo è

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad R = R_0 A^3$$

Il numero totale di nucleoni sarà dunque

$$\begin{aligned} n &= 2\int_0^{p_F} n(p)dp = \frac{2V4\pi}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^{p_F} pdp \\ &= \frac{V}{\pi^2\hbar^3}\left[\frac{p_F}{3}\right] \end{aligned} \tag{133}$$

Questo è valido sia per i protoni che per i neutroni, anche se poi soddisfano indipendentemente a due statistiche diverse.

$$N = \frac{V}{3\pi^2\hbar^3}(p_F^n)^3 \qquad Z = \frac{V}{3\pi^2\hbar^3}(p_F^p)^3 \tag{134}$$

Ora per semplificarci la vita consideriamo un nucleo con $N = Z = A/2$. Questo non cambierà le considerazioni finali. Ciò che si ottiene è

$$\begin{aligned} p_F^3 &= \frac{A}{2}\frac{3\pi^2\hbar^3}{\frac{4}{3}\pi R_0^3 A} \\ \to p_F &= \frac{\hbar}{R_0}\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} = 250\frac{MeV}{fm} \end{aligned} \tag{135}$$

Dato il momento di Fermi possiamo ricavare anche l'energia di Fermi

$$E_F = \frac{p^2}{2M} = \frac{(250MeV/c)^2}{2 \times 940MeV/c^2} \approx 33MeV \tag{136}$$

Questa energia rappresenta l'ultimo livello occupato del nucleone ma non corrisponde alla profondità della buca di potenziale, per ottenere questa altezza è necessario infatti sommare all'energia di Fermi l'energia di legame media per nucleone corrispondente a $\sim 7MeV$. Si ha quindi che il potenziale nonchè la profondità della buca è pari a

$$V_0 = 33 + 7MeV = 40MeV \tag{137}$$

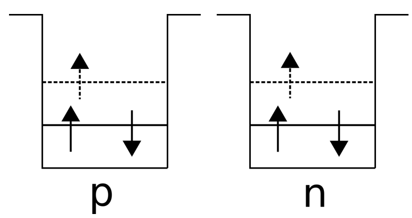
Questo modello è uguale a quello degli elettroni nel metallo ma le grandezze sono più piccole ($\sim 10eV$). Da notare che questa è la buca di potenziale per nuclei con numero qualsiasi di nucleoni, l'energia di Fermi è quindi sempre uguale ma ciò che cambia sarà la spaziatura tra i livelli che diventa più piccola nel caso di nuclei pesanti.

Considerazioni Con questo modello si riescono a spiegare i nuclei più semplici.

- Un argomento che si può esemplificare con il modello a gas di Fermi è per dire la nucleosintesi primordiale. Nei primi minuti dell'universo si sono sintetizzati l'idrogeno e l'elio ma per gli elementi più pesanti si è dovuto attendere 200 milioni di anni e la sintesi delle prime stelle. Questo immenso gap temporale Si può spiegare grazie a questo modello. Nelle buche di potenziale infatti l'elio 4 è composto da due neutroni e due protoni.

  $$^4_2He_2 \qquad 2n + 2p \tag{138}$$

  In questa configurazione il nucleo è estremamente stabile, se si avesse però un quinto nucleone (protone o nucleone) questo andrebbe ad occupare un livello energetico più alto.

  Quello che la natura ci mostra è però che non esistono nuclei stabili con numero di massa pari ad $A = 5$. Vuol dire che semplicemente la nucleosintesi degli elementi si è fermata all'elio, se fosse esistito un terzo elemento l'evoluzione dell'universo sarebbe stata molto diversa.

- Un altro effetto spiegabile è il decadimentoβ, in particolare il motivo per cui il protone risulta stabile fuori dal nucleo ma può decadere nel caso sia all'interno del nucleo. Ricordiamo ancora i decadimenti β

  $$\begin{aligned} \beta^- :&\ \ n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \\ \beta^+ :&\ \ p \longrightarrow n + e^+ + \nu_e \end{aligned} \tag{139}$$

  Questo vuol dire semplicemente continuando a mettere protoni oltre il numero di neutroni otterrò nel livello dei neutroni un livello libero e questo causa il decadimento.

  Al di fuori del nucleo non può avvenire in quanto il $Q = M_i - M_f$ della reazione non è favorevole (è negativo), ovvero l'energia di massa del protone fuori dal nucleo è minore dei prodotti della reazione mentre all'interno del nucleo la questione è opposta.

  $$\beta^+ \ \ Q = m_p - m_n - m_{e^+} - m_\nu \tag{140}$$

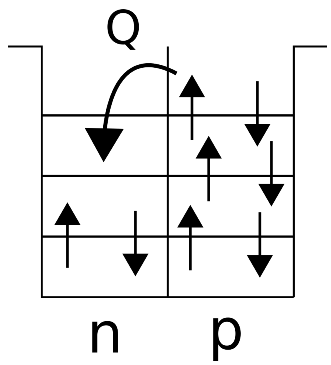


Figure 15: Decadimento del protone nel nucleo

Riportiamo quindi le masse del decadimento

$$\begin{aligned} m_p &= 938,2\frac{MeV}{c^2} \\ m_n &= 939,5\frac{MeV}{c^2} \\ m_e &= 0,511\frac{MeV}{c^2} \end{aligned} \tag{141}$$

Il Q della reazione risulta quindi essere in questo caso

$$Q^{\beta^+} = -1,8MeV \tag{142}$$

Questa è una reazione endotermica e quindi non avviene spontaneamente. Il Q del decadimento del neutrone fuori dal nucleo è invece

$$Q^{\beta^-} = m_n - m_p - m_{e^-} = 0,8MeV \tag{143}$$

Il neutrone è stabile all'interno del nucleo per il principio di esclusione di Pauli che ne impedisce il decadimento, si ha però, come per il protone, che un eccesso di neutroni porta comunque al decadimento.

- Nel modello a goccia abbiamo calcolato il libero cammino medio del nucleone nel nucleo corrispondente a $l = 0,21fm$. Nel modello di Fermi invece abbiamo considerato i nucleoni come un gas di particelle libere nel nucleo cioè prive di interazioni.

  Queste due visioni apparentemente contrastanti si conciliano in quanto se non ci sono stati liberi le particelle non collidono tra loro (una collisione comporta uno scambio di energia che nella stabilità non vi può essere), quindi non è propriamente vero che il libero cammino medio è una frazione di Fermi poiché con tutti gli stati occupati le particelle devono considerarsi libere.

3.3 Modello a shell

L'evidenza sperimentale che portò alla costruzione di questo modello si basa sull'analogia con il modello a shell elettroniche dell'atomo. Facendo un grafico dell'energia di estrazione di un nucleone in funzione del numero atomico, si vide che aveva lo stesso andamento del grafico del lavoro di estrazione degli elettroni. Sorge spontaneamente il dubbio che quindi possa avere una struttura a shell pure il nucleo.

Ci sono un paio di differenze tra il modello elettronico e nucleare

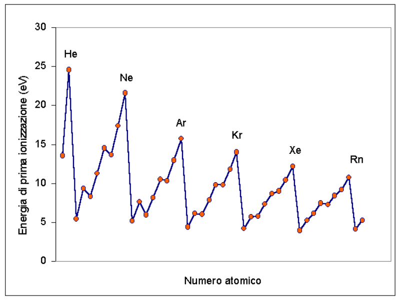


Figure 16: Lavoro di estrazione elettronico in funzione del materiale

- La prima consiste nell'ordine di grandezza, infatti, mentre per gli elettroni si parla di eV nel caso dei nuclei di MeV, consistentemente con quanto già visto.
- Il secondo è la posizione dei picchi. Nel caso degli elettroni i picchi corrispondo ai gas nobili, nel caso dei nuclei i picchi corrispondono a 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 (si fa riferimento sia al numero di neutroni che di protoni). Per esempio con il 20 si può avere il Calcio 40 $^{40}_{20}Ca$.

Ciò che non fu subito chiaro è come mai si hanno questi valori di massimo, infatti la struttura dell'atomo rende abbastanza evidente il motivo (regola dell'otteto e livelli energetici delle shell), mentre nel nucleo non c'è un potenziale ben definito che vada a creare dei livelli energetici così chiari in quanto ogni nucleone interagisce con gli altri (e come visto dal modello a goccia con un numero di legami differente).

Per risolvere questo problema bisogna considerare un nucleone e approssimare le interazioni con un potenziale medio.

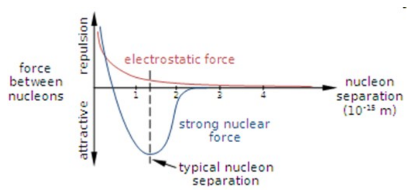


Figure 17: Potenziale nucleare in funzione del raggio

Come si può vedere dal grafico il potenziale nucleare dovrà avere una forma in cui a valori molto bassi di raggio non implode su se stesso, e quindi valore positivo (potenziale repulsivo) ma che poi scende per creare una buca di potenziale negativa che arriva ad azzerarsi quando il raggio è pari al raggio nucleare, il tutto restando sempre in opposizione al potenziale elettrostatico. Per approssimare questa forma si usa il potenziale di Saxon-Woods dove la forza repulsiva iniziale viene ignorata e la forma è a metà tra la curva e una buca di potenziale rettangolare.

Il potenziale di Saxon-Woods ha formula

$$V = -\frac{V_0}{1 + \frac{\exp(r-R)}{a}} \tag{144}$$

Dove $V_0 = 50MeV$, $R = R_0 A^{1/3}$ e $a = 0,56fm$.

In particolare questo potenziale si differenzia dalla buca di potenziale classica nella regione tra i $3fm$ e i $7fm$ ed è proprio questa regione che determina le caratteristiche dei livelli energetici del nucleo.

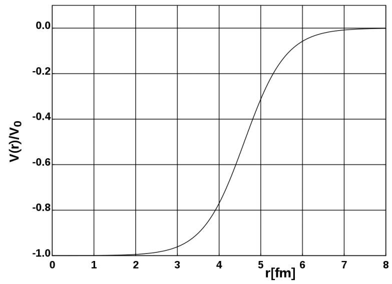


Figure 18: Potenziale di Saxon-Woods

Livelli atomici I livelli atomici sono caratterizzati da 4 numeri quantici: n, L, m, s.

$$\begin{aligned} &\forall n \\ &l = 0 \to n-1 \\ &m \quad -l < m < l \\ &s = \pm 1/2 \end{aligned} \tag{145}$$

Le shell atomiche si formano quindi come

$$\begin{aligned} n = 1 \quad & l = 0 \;\; m_s = 0 \;\; s = \pm 1/2 \\ n = 2 \quad & l = 0 \;\; m_s = 0 \;\; s = \pm 1/2 \\ & l = 1 \;\; m = -1, 0, +1 \;\; s = \pm 1/2 \end{aligned} \tag{146}$$

Si ha quindi che nel livello corrispondente a $n = 1$ si possono avere solo 2 elettroni, mentre nel caso di $n = 2$ posso avere 2 elettroni nel livello $l = 0$ ma anche 6 nel livello $L = 1$ il che mi porta ad avere 8 elettroni totali nel livello $n = 2$. Continuando intuitivamente si vede che per esempio il livello $n = 3$ ospiterà 18 elettroni. Questo restituisce esattamente le configurazioni dei primi 3 gas nobili corrispondenti a $Z = 2, 10, 28$ ovvero i primi tre livelli completi.

Nei nuclei abbiamo visto che questi valori non coincidono con i livelli elettronici infatti i valori sono $Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$. Questo è dovuto al fatto che nei nuclei l non è limitato a $n - 1$ e inoltre i nuclei hanno la tendenza ad accoppiare lo spin e il momento angolare introducendo un momento

$$j = L + s$$

che può assumere i valori

$$j = 1/2, 3/2, 5/2, 7/2, \ldots$$

Si ottiene così che il numero di nucleoni in funzione di j sarà

$$\begin{array}{cc} j & n \\ \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & 4 \\ \frac{5}{2} & 6 \\ \frac{7}{2} & 8 \end{array} \tag{147}$$

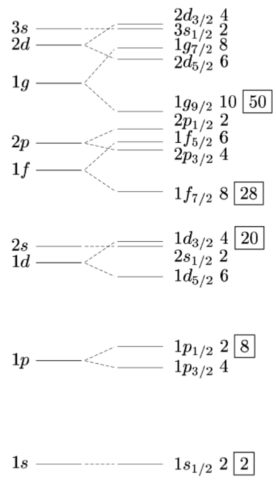


Figure 19: Struttura delle shell nucleoniche con evidenza sui livelli stabili

La regola generale è quindi

$$j = \frac{X}{2} \longrightarrow n = X + 1 \tag{148}$$

La nomenclatura è la stessa della fisica atomica. $l = 0, 1, 2, 3, 4$ corrispondono rispettivamente a s, p, d, f, g. Per esempio uno stato quantico potrà essere

$$1p^{3/2} \tag{149}$$

dove 1 è il numero quantico principale, p corrisponde a $l = 1$ e $3/2$ indica che in questo stato potrò avere 4 particelle. Dalle evidenze sperimentali è stato possibile quindi trovare la configurazione di shell del nucleo.

Quella rappresentata in figura è la schematizzazione dei livelli energetici del nucleo, e si può notare che quindi i nucleoni all'interno del nucleo:

- non sono posizionati casualmente;
- hanno momenti angolari;
- soddisfano la statistica di Fermi e di conseguenza anche al principio di esclusione di Pauli.

4 Applicazioni

4.1 Risonanza Magnetica Nucleare

La risonanza magnetica è una tecnica di imaging medico non invasiva. Si basa sul fatto che ad ogni protone è associato un piccolo campo magnetico associato al dipolo. Ponendo questi dipoli sotto l'azione di un campo magnetico forte, si avrà l'allineamento con il campo, sia nella stessa direzione che i direzione opposta.

$$E = -\bar{\mu} \cdot \bar{B} \tag{150}$$

Ciò che si otterrà è che l'energia sarà minore se il campo e il dipolo sono solidali ($\mu \uparrow \ B \uparrow$), mentre sarà maggiore nel caso contrario ($\mu \uparrow \ B \downarrow$). La differenza di energia è pari a $\Delta E = \mu B$. La risonanza in campo magnetico sfrutta esclusivamente nucleoni ma in altri ambiti possono essere usati anche gli elettroni e dalla formula sopra si può vedere come sia diversa nei due casi.

I valori del magnetone di Bohr e del magnetone nucleare sono

$$\begin{aligned} \mu_B &= \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,3 \times 10^{-24} \frac{j}{T} = 5,8 \times 10^{-5} \frac{eV}{T} \\ \mu_N &= \frac{e\hbar}{2m_p} = 5,0 \times 10^{-27} \frac{j}{T} = 3,8 \times 10^{-8} \frac{eV}{T} \end{aligned} \tag{151}$$

La risonanza magnetica funziona che una volta applicato un campo magnetico i livelli energetici con spin up e down si dividono e fornendo una radiofrequenza con energia pari alla differenza di energia generata il mio campione assorbirà energia, e io sono sensibile all'energia assorbita.

Dato un elettrone se applico un campo B=0,335T, ottengo che la differenza di energia sarà pari a $\Delta E = 6,22 \times 10^{-24} j$. In questo caso la frequenza coinvolta (assorbita dall'elettrone) è pari a $\nu = 9,4GHz$, ovvero nel campo delle microonde.

Nel caso del protone, ovvero quello usato in campo medico, c'è la necessità di applicare un campo magnetico molto più alto per portare ad una separazione sufficientemente visibile. Applicando un campo $B = 2T$ ottengo $\Delta E = 5,64 \times 10^{-26} j$, vi è quindi la necessità di una radiofrequenza dell'ordine di $\nu = \frac{\Delta E}{h} = 85MHz$.

Quello che succede è che pongo il paziente in questi campi magnetici e faccio passare una radiofrequenza. L'assorbimento di questa radiofrequenza avviene in funzione della densità del materiale biologico. Una cosa di cui devo tener conto è l'agitazione termica dei protoni, posso immaginare che maggiore è l'agitazione termica minore sarà il contrasto dell'immagine, una soluzione sarebbe abbassare la temperatura ma non potendo congelare il paziente non resta che sfruttare campi magnetici molto forti($\Delta E/KT$). Il segnale che io rivelo è proporzionale alla densità di protoni, le zone più chiare sono quelle a più elevata densità di protoni. Per avere una risoluzione spaziale, ovvero una tridimensionalità, applico un gradiente di campo magnetico minimo che produrrà una risonanza diversa a diverse frequenze di radiofrequenza generando una variazione ulteriore che mi permette di ampliare l'imaging. Per andare ad aumentare il contrasto andrò a vedere la risposta temporale del campione. Quando irradio il tessuto i protoni assorbendo energia passeranno da uno stato all'altro (spin-flip), se poi io fermo la radiazione e lascio il tessuto tornare allo stato fondamentale potrò poi misurare il tempo impiegato per la diseccitazione e avrò quindi informazioni addizionali sul tessuto che circonda il materiale in analisi.

5 Potenziale nucleare

Studiamo il potenziale nucleare considerando il nucleo del *deuterio*, chiamato *deutone*, composto da un protone ed un neutrone.

La Cromodinamica Quantistica (QCD) è una teoria quantistica di campo e relativistica, è una teoria fondamentale che spiega l'interazione tra particelle elementari. I nucleoni, i componenti del nucleo, protone e neutrone, sono a loro volta composti da *quark*, i quali sono particelle elementari prive di dimensione e con carica frazionaria

- quark up u ha carica $+\frac{2}{3}$
- quark down d ha carica $-\frac{1}{3}$

i nucleoni sono composti da 3 quark ciascuno e seguono la regola per cui

- il **protone** è composto da due quark *up* ed un quark *down*, ha quindi carica totale unitaria:
$$u+u+d=+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=1$$
- il **neutrone** è composto da due quark *down* ed un quark *up*, ha quindi carica totale nulla:
$$d+d+u=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=0$$

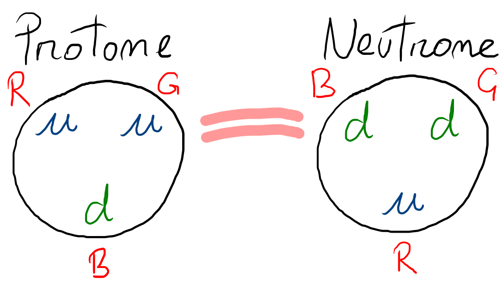


Figure 20: CAPTION

Carica di colore I quark hanno anche un secondo tipo di carica: la *carica di colore* che regola l'*interazione forte* tra i quark. La carica di colore può essere di tre tipi: Red (R), Green (G), Blue (B). La somma delle tre cariche di colore dei rispettivi quark di un nucleone è nulla

$$R+G+B=0 \tag{152}$$

un quark rosso (R) attira un quark verde (G) che attira un quark blu (B), mentre i quark dello stesso colore si respingono. La teoria fondamentale della QCD esprime come l'interazione nucleare si possa interpretare come la carica di colore residua.

Il potenziale tra nucleoni è un potenziale di interazione del tipo Nella prima parte del potenziale si ha che per piccole distanze è *positivo*, ovvero repulsivo, poiché altrimenti i nuclei privi di dimensione (?) collasserebbero, ciò è legato al Principio di Esclusione di Pauli, nella seconda parte il potenziale è *attrattivo* ed è ciò che "intrappola" i nucleoni all'interno del nucleo, inoltre oltre alla distanza data da $R=R_0A^{\frac{1}{3}}$ la forza nucleare è nulla.

Il Deutone è il nucleo del deuterio, è composto da un protone e un neutrone ed è il più semplice nucleo su cui studiare la forza nucleare. Del deutone conosciamo l'energia di legame $E_B = -2.225\,\mathrm{MeV}$ e la distanza tra i nucleoni $R = 2.1\,\mathrm{fm}$ ottenuti sperimentalmente. Conosciamo inoltre che lo stato legato del deuterio è quello in cui gli spin sono paralleli, dato ottenuto dalla misurazione del momento magnetico, per cui lo spin del deutone è $S = 1$. Uno stato con spin anti-parallelo corrisponde ad uno stato non legato, quindi fuori dalla buca di potenziale. L'interazione nucleare dipende fortemente dallo spin.

Cerco ora il valore della buca di potenziale V_0, sommo l'energia cinetica KE con l'energia potenziale PE

$$\begin{aligned} E &= KE + PE \\ E_B &= KE + V_0 \end{aligned} \tag{153}$$

scrivendo la funzione d'onda trovo il legame con il potenziale V

$$\begin{aligned} H\psi &= E\psi \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}\psi + V\psi &= E\psi \end{aligned} \tag{154}$$

Il potenziale di questa buca è

$$V = \begin{cases} V_0 & \text{zona 1: dentro la buca} \\ 0 & \text{zona 2: altrove} \end{cases} \tag{155}$$

Scrivo l'equazione di Schrodinger nella zona 1, in cui ho $V = V_0$

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dr^2} + V_0\psi &= E\psi \\ \frac{d^2\psi}{dr^2} &= -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\psi \\ \frac{d^2\psi}{dr^2} &= -K^2\psi \qquad \text{con } K^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0) \end{aligned} \tag{156}$$

la soluzione ha un andamento oscillatorio ed in generale è

$$\psi(r) = A\sin Kr + B\cos Kr \tag{157}$$

calcolo A e B imponendo le condizioni al contorno:

$$\psi(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi(0) = A\sin 0 + B\cos 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0 \tag{158}$$

per cui diventa

$$\psi = A\sin Kr \tag{159}$$

Scrivo l'equazione di Schrodinger nella zona 2, in cui ho $V = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dr^2} &= -\frac{2m}{\hbar^2}E\psi \\ \frac{d^2\psi}{dr^2} &= L^2\psi \qquad \text{con } L^2 = -\frac{2m}{\hbar^2}E \end{aligned} \tag{160}$$

la soluzione ha un andamento esponenziale ed in generale è

$$\psi(r) = Ce^{Lr} + De^{-Lr} \tag{161}$$

di cui so che deve appartenere allo spazio di Hilbert, per cui la parte e^{Lr} non è soluzione in quanto non verifica la condizione $|\psi|^2 < \infty$, per cui diventa

$$\psi(r) = De^{-Lr} \tag{162}$$

Eguagliando le funzioni d'onda 159 e 162 e le loro derivate in corrispondenza della frontiera $r = R$ trovo

$$\begin{cases} \psi_1(R) = \psi_2(R) \\ \psi_1'(R) = \psi_2'(R) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \sin KR = De^{-LR} \\ KA \sin KR = -LDe^{-LR} \end{cases} \tag{163}$$

dividendo una con l'altra le equazioni del sistema trovo la relazione seguente in funzione dei parametri K ed L

$$\begin{aligned} K &= \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)} \in \mathbb{R} \\ L &= \sqrt{-\frac{2m}{\hbar^2}E} \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{164}$$

che quindi diventa

$$\begin{aligned} &K \cot KR = -L \\ &\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)} \cot\left[R\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)}\right] = -\sqrt{-\frac{2m}{\hbar^2}E} \end{aligned} \tag{165}$$

da cui, inserendo i dati sperimentali,

$$\begin{aligned} E &= -2.225\,\mathrm{MeV} \\ R &= 2.1\,\mathrm{fm} \end{aligned} \tag{166}$$

e la massa corrisponde alla massa ridotta tra il protone ed il neutrone

$$m = \frac{m_n m_p}{m_n + m_p} \simeq \frac{m_p^2}{2m_p} = \frac{m_p}{2} \tag{167}$$

trovo il valore della buca di potenziale

$$V_0 = -36\,\mathrm{MeV} \tag{168}$$

(non è ben noto come sia davvero possibile risolvere l'equazione del tipo $x \cot ax = b$ ma ok, prendiamo atto del risultato precedente e andiamo avanti).

Risulta quindi che la buca di potenziale del Deutone è profonda $-36\,\mathrm{MeV}$ di cui solo $-2.225\,\mathrm{MeV}$ sono di energia potenziale, *di legame*, mentre circa $-34\,\mathrm{MeV}$ sono di energia cinetica.

Per il ferro ${}^{56}_{26}Fe$ ad esempio si ha un'energia di legame media di circa $8\,\mathrm{MeV}/\mathrm{nucleone}$, mentre per il deutone ${}^{2}_{1}He$ si ha circa $1.1\,\mathrm{MeV}/\mathrm{nucleone}$.

Troviamo tre punti notevoli della funzione d'onda:

- Quanto vale la funzione d'onda nel punto $r = R$? In tale punto la funzione vale $\sin KR$ per cui conoscendo i dati trovo

$$\begin{aligned} &R = 2.1\,\mathrm{fm} \\ &K = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)} \simeq 0.9\,\mathrm{fm}^{-1} \\ &\sin KR = \sin(0.9 \cdot 2.1) = 0.95 \end{aligned} \tag{169}$$

- In che punto si ha il valore massimo della funzione d'onda?

$$\begin{aligned} &\sin Kr = 1 \\ &Kr = \frac{\pi}{2} \\ &r = \frac{\pi}{2}\frac{1}{K} \simeq 1.74\,\mathrm{fm} \end{aligned} \tag{170}$$

- In che punto la funzione d'onda vale circa $\frac{1}{3}$?

$$\begin{aligned} &e^{-Lr} \quad L = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \to \frac{1}{L} = 4.4\,\mathrm{fm} \\ &e^{-Lr} \to e^{\frac{-L}{L}} = e^{-1} = 0.37 \end{aligned} \tag{171}$$

La funzione d'onda ottenuta evidenzia come sia possible trovare la particella al di fuori della buca di potenziale, a distanze oltre i 5 fm.

6 Decadimenti

7 Fissione e Fusione Nucleare

7.1 Fissione Nucleare

Fissione spontanea Perché tutti gli elementi con numero di massa elevato non decadono spontaneamente in ^{56}Fe?

Quando si è parlato della formula semiempirica di massa, si è visto che una delle logiche di funzionamento della natura è che la somma dei protoni e neutroni legati è minore della somma dei pesi degli elementi slegati. La differenza di massa è l'energia di legame

$$\Delta mc^2 = BE.$$

Essendo che il ferro come abbiamo visto è l'elemento con l'energia di legame maggiore, è lecito chiedersi cosa blocchi un eventuale decadimento dei nuclei più pesanti nel ferro in quanto energeticamente favorevole (massimizzando l'energia di legame minimizzo l'energia di massa).

$$A \to A/2?$$

Per passare da uno stato A legato a due nuclei $A/2$ bisogna necessariamente per uno stato intermedio di un nucleo deformato dove sono presenti due nuclei legati tra loro ma identificati. Studiamo quindi questo stato intermedio

$$BE = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_{sym} \frac{(N-Z)^2}{A} + \delta_p \tag{172}$$

In questo caso ignoriamo quello che è il termine di accoppiamento δ_p considerando il caso di due nuclei *even-even*. Vogliamo confrontare l'energia di legame del nucleo unico (1) al caso del nucleo quasi separato (2).

Il termine di volume sarà:

1. $a_v A$
2. $2a_v \frac{A}{2}$

Questi due termini sono uguali, il che non è sorprendente perché il modello a goccia mantiene costante il volume.

Prendiamo ora il termine di simmetria:

1. $a_{sym} \frac{(N-Z)^2}{A}$
2. $a_{sym} 2\left[\frac{(N/2-Z/2)^2}{A/2} = a_{sym} \frac{(N-Z)^2}{A}\right.$

Nemmeno questo termine varia.

Consideriamo il termine di superficie:

$$V_1 = V_2 \to \frac{4}{3}\pi R^3 = 2\frac{4}{3}\pi r^3 \tag{173}$$

$$R^3 = 2r^3 \to R = 1,26r \tag{174}$$

1. $S_1 = 4\pi R^2 = 4\pi(1,26)^2 r^2 = 6\pi r^2$
2. $S^2 = 2 \cdot 4\pi r^2 = 8\pi r^2$

Se deformiamo un nucleo la superficie aumenta, il che comporta un aumento del termine di superficie e quindi una diminuzione dell'energia di legame.

Vediamo dunque come si comporta il termine coulombiano:

1. $V_1 = \frac{a_c Z(Z-1)}{A^{1/3}}$

2. $V_2 = \frac{2(a_c Z/2(Z/2-1))}{(a/2)^{1/3}} = \frac{1{,}26 \cdot 2}{4} \frac{a_c Z(Z-2)}{a^{1/3}}$

Da un confronto con nuclei ad alto Z, la differenza tra $Z-1$ e $Z-2$ è trascurabile

$$V_2 \sim \frac{2}{3} v_1 \tag{175}$$

In questo caso si ha che il termine coulombiano diminuisce con la formazione dello stato intermedio, il che comporta un aumento dell'energia di legame.

Qual è quindi il termine dominante in questa fase intermedia?

Posso prendere come riferimento i valori che erano stati trovati dei termini

$$a_c = 0,7MeV \;\; a_s = 18MeV$$

Il termine dominante è quindi il termine di superficie, si ha quindi che nella fase intermedia l'energia di legame diminuirà, portando ad un'energia di massa maggiore, creando così una barriera di potenziale. Per questo è impossibile una fissione spontanea dei nuclei più pesanti del Ferro. La $\Delta E \approx 6MeV$ tra il nucleo legato e lo stato intermedio è chiamata *energia di attivazione*. I nuclei che fanno fissione spontanea sono i nuclei che hanno

$$\frac{Z^2}{A} > 51 \tag{176}$$

Fissione Indotta La differenza energetica evidenziata nel primo paragrafo corrisponde più esattamente a

$$\Delta E = 6,2MeV \tag{177}$$

Il processo sfruttato è quello di inviare neutroni su nuclei di Uranio, il primo a effettuare questo processo fu Fermi che però non riconobbe il fenomeno.

$$n +^{235} U \longrightarrow X + Y + Nn + Q \tag{178}$$

Il pensiero più logico è quello che in questo processo per superare l'energia di attivazione si debba prendere un neutrone abbastanza energetico che trasferisca l'energia di attivazione necessaria a far cominciare il processo.

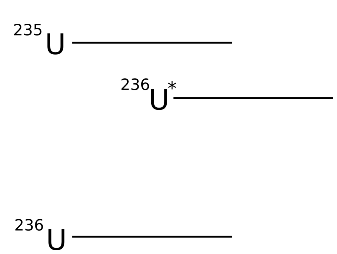


Figure 21: Livelli che interessano la fissione indotta dell'uranio 235.

In realtà si è visto che questo tipo di fenomeno si verifica con neutroni termici (ovvero neutroni a temperatura ambiente) che possiedono quindi energia pari a

$$E = KT = 9 \times 10^{-5}\,\frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{K}} \times 300K = 27 \times 10^{-3}\,\mathrm{eV} \tag{179}$$

Un'energia molto minore all'energia di attivazione!

Quello che si verifica è che un neutrone termico assorbito dall'Uranio da origine ad un atomo di Uranio 236 in uno stato eccitato con energia maggiore dell'energia di attivazione.

$$n +^{235} U \rightarrow^{236}_{92} U* \tag{180}$$

Da notare che in natura la composizione dell'uranio è

$$^{238}U\ al\ 99,28\% \quad ^{235}U\ al\ 0,72\%$$

E nel caso dell'uranio 238 lo stato che si viene a formare dopo l'assorbimento di un neutrone ha energia pari a $4,8MeV$ che non basta per innescare il decadimento, per processi di fissione nucleare viene quindi sfruttato solamente ^{235}U. Dal punto di vista fisico questo si rappresenta tramite la sezione d'urto.

Facendo un grafico della sezione d'urto si ha che questa, partendo da un valore iniziale di $500b$, diminuisce aumentando l'energia. Questo effetto è dovuto al fatto che aumentando l'energia è vero che si supera più facilmente la barriera di potenziale ma sarà anche più difficile mantenere nel nucleo il neutrone che tenderà invece a fuggire. É quindi conveniente usare i neutroni a più bassa energia disponibili alla fissione. Il bilancio energetico per cattura neutronica da ^{235}U e ^{238}U è dovuto al termine di accoppiamento δ_q nella formula semiempirica di massa, infatti, mentre l'uranio 235 ha un numero dispari di neutroni che comporta una tendenza ad assorbire un neutrone per pareggiare il livello energetico, l'uranio 238 ha un numero pari di entrambi gli elementi che porta ad una stabilità che evita l'assorbimento neutronico spontaneo (non c'è quindi l'energia addizionale di accoppiamento).

Qual è la distribuzione di massa dei prodotti di reazione? La previsione fatta era che i nuclei si dividessero come:

$$A \longrightarrow 2A/2$$

In questo caso la formula semiempirica di massa fa una predizione sbagliata infatti è stato verificato sperimentalmente che per esempio i nuclei di uranio hanno la tendenza a produrre con maggior frequenza nuclei con numeri di massa in distribuzione gaussiana attorno a $A = 95, 140$ con un minimo centrale tra i due picchi a $A = 118$.

In questo caso ciò che subentra è il modello a shell, i nuclei generati tenderanno ad addensarsi attorno ai nuclei che abbiamo visto essere più stabili nel modello a shell nucleonico. I nuclei figli che si trovano ad avere più neutroni rispetto alle valli di stabilità tenderanno a decadere β^- per tornare in uno stato stabile.

Restando in questo argomento dei prodotti di fissione prendiamo un caso particolare:

$$n +^{235} U \longrightarrow^{236} U* \longrightarrow^{140}_{54} Xe +^{94}_{38} Sr + 2n \tag{181}$$

I modi di fissione dell'uranio sono vari e un ingegnere di una centrale nucleare deve conoscerli tutti. In questo caso il processo non si ferma lì ma decadono pure i nuclei figli con un processo di decadimento β^-:

$$\begin{aligned} &^{140}_{54}Xe \longrightarrow^{140}_{55} Cs \longrightarrow^{140}_{56} Ba \longrightarrow^{140}_{57} La \longrightarrow^{140}_{58} Ce \\ &^{94}_{38}Sr \longrightarrow^{94}_{39} Y \longrightarrow^{94}_{40} Zr \end{aligned} \tag{182}$$

Un altro modo di decadimento è:

$$^{236}U \longrightarrow ^{137}_{53} I + ^{97} Y + 2n + Q \tag{183}$$

In questo caso lo Xeon decade come:

$$^{137}_{53}I \longrightarrow ^{137}_{54} Xe \longrightarrow ^{136}_{54} Xe + n \tag{184}$$

Lo Xeon è essenziale per il funzionamento delle centrali nucleari e in particolare quest'ultimo processo che porta all'emissione di neutroni è fondamentale nel controllo del reattore.

Il processo di fissione avviene con un tempo caratteristico di $t = 10^{-12}s$. I neutroni emessi nel processo principale vengono chiamati *neutroni prompt*, quelli che invece vengono generati nei processi di decadimento sono chiamati *neutroni ritardati*. Quest'ultimi sono ciò che tiene sotto controllo il reattore nucleare e se non ci fossero non saremmo in grado di far funzionare i reattori. I neutroni prompt sono invece quelli fondamentali alla produzione di energia.

Principi di funzionamento di un reattore nucleare a fissione Abbiamo visto che la fissione dell'^{235}U avviene con un processo del tipo

$$n + ^{235} U \longrightarrow ^{236} U* \longrightarrow X + Y + 2n + Q \tag{185}$$

Un reattore nucleare è formato da un contenitore che scherma dalle radiazioni emesse dai prodotti di reazione. All'interno sono poste le barre di combustibile ovvero di materiale reagente. Per raccogliere il calore il contenitore è pieno di liquido refrigerante, normalmente di acqua, che attraverso delle condutture viene raccolta e convogliata attraverso uno scambiatore di calore che invia poi l'acqua all'interno del reattore. Il meccanismo di raffreddamento dell'acqua e quindi di produzione energetica è uguale a quello di qualsiasi altra centrale elettrica, ciò che cambia è solamente il metodo di riscaldamento.

Ci sono due tipi di problemi che si presentano all'interno di un reattore:

1. **Dobbiamo rallentare i neutroni.** I neutroni prodotti nella reazione non sono a energia termica e abbiamo visto che se vogliamo massimizzare la sezione d'urto di cattura dobbiamo diminuire la velocità e portare i neutroni all'energia adeguata.

2. **Dobbiamo ridurre n a 1.** Mediamente il numero di neutroni per fissione è di 2,5 e quindi se non c'è controllo di reazione si ha che ogni 2 reazioni generano in media 5 reazioni. Questo non va bene perché porta fuori controllo il reattore che diventa una bomba. Cerchiamo di avere un rapporto di 1 a 1 tra le reazioni.

Le soluzioni che permettono quindi il corretto funzionamento del reattore sono:

1. **Determinazione del moderatore.**

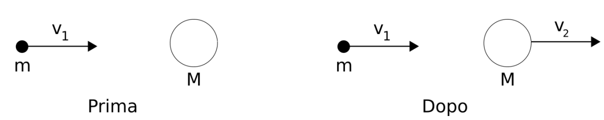


Figure 22: Interazione di un nucleo con un neutrone

Per la conservazione della quantità di moto si ha

$$\begin{aligned} p = cost \qquad & mv = mv_1 + Mv_2 \\ K = cost \qquad & \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 \\ & v_2 = \frac{m}{M}(v - v_1) \\ & v_2^2 = \frac{m}{M}(v^2 - v_1^2) \end{aligned} \tag{186}$$

Le due formule ottenute sopra possono essere combinate per ottenere

$$\begin{aligned} \frac{m}{M}(v^2 - v_2^2) &= \frac{m}{M}(v - v_1)^2 \\ Mv^2 - Mv_1^2 &= m(v - v_1)^2 \\ M(v - v_1)(v + v_1) &= m(v - v_1)^2 \\ Mv + Mv_1 &= mv - mv_1 \end{aligned} \tag{187}$$

Si può quindi ricavare v_1 da questa formula ottenendo

$$v_1 = v\frac{m - M}{m + M} \tag{188}$$

Si può cercare di minimizzare questa velocità per trovare con che materiale si possa termalizzare i neutroni. La condizione è semplice da vedere:

$$m \sim M$$

Il miglior materiale che utilizza il minor numero di urti per rallentare il neutrone è quindi quello che ha massa uguale a quella del neutrone. Il materiale più utilizzato è l'acqua che presenta caratteristiche termiche ideali, ma soprattutto presenta le caratteristiche ideali per il rallentamento dei neutroni. L'acqua non è quindi solamente un refrigerante ma anche un moderatore.

2. **Riduzione dei neutroni prodotti da $N = 2,5 \rightarrow 1$.**

   In questo caso possono esserci più modi e in alcuni casi la natura ci viene in contro.

   - Alcuni neutroni vengono assorbiti senza produrre fissione, può accadere infatti che l'Uranio 236 si diseccitі tramite emissione γ.

     In questo caso il parametro che ci è utile è η che corrisponde alla frazione di neutroni che sopravvive all'assorbimento ($\eta < 1$).

   - Il secondo effetto è che alcuni neutroni veloci possono produrre fissione nel Uranio 238 ^{238}U, infatti anche se nelle centrali viene usato dell'uranio arricchito la percentuale più alta (97%)è di uranio 238.

     Per questo effetto teniamo conto di un fattore ε che corrisponde alla frazione di neutroni prodotti da fissione in ^{238}U ($\varepsilon > 1$ quindi questi neutroni ne producono comunque altri).

   - Nel grafico della sezione d'urto in funzione dell'energia esiste una regione tra $1 \rightarrow 100eV$ chiamata *regione delle risonanze*, in cui vengono assorbiti neutroni che vengono eliminati dal ciclo (senza riuscire a termalizzare).

     Questo effetto è regolato da p che corrisponde alla frazione di neutroni che sopravvive alle risonanze($p < 1$).

- I neutroni possono essere assorbiti dal moderatore.
  Questo viene chiamato fattore $f < 1$, in particolare un neutrone può essere assorbito da un protone dell'acqua dando luogo ad un deutone, trasformando quindi l'acqua in quella che viene chiamata acqua pesante.

  $$H_2O \to D_2O$$

  Tra l'altro l'utilizzo dell'acqua pesante come moderatore non ne varia l'efficacia, si abbassa anzi la probabilità che vengano assorbiti neutroni. Esistono quindi delle centrali che vengono raffreddate e moderate con acqua pesante.

Si ha quindi che la frazione di neutroni che sopravvive a questi effetti è dato dalla *formula dei quattro fattori*

$$N = N\eta\varepsilon pf = KN \tag{189}$$

introdotta da Fermi. Per il corretto funzionamento del reattore devo mantenere $K = 1$.

Controllo del reattore **Esempio**
Si abbia

$$K = 1 + \delta \quad \delta = 0,01$$

I tempi caratteristici della fissione sono $t = 10^{-12s}$ che corrisponde al tempo di fissione, seguito poi dal tempo di rallentamento dei neutroni per la generazione di una seconda fissione $t = 10^{-3}s = \tau$.

Supponendo che il processo vada avanti per t secondi, il numero di cicli sarà dato da

$$n = \frac{t}{\tau} \tag{190}$$

Dobbiamo considerare che per ogni interazione il numero di neutroni cresce di $1 + \delta$. L'evoluzione dei neutroni è descritta come

$$N(t) = N(0)(1 + \delta)^{t/\tau} \tag{191}$$

dove $N(x)$ è il numero di neutroni dopo il tempo x, $K = 1 + \delta$ è il numero di neutroni che si producono ad ogni interazione. Facendone il logaritmo sin ottiene

$$\ln N(t) = \ln N(0) + \ln(1 + \delta) + \frac{t}{\tau} \tag{192}$$

Se δ è piccolo si ha

$$\ln N(t) = \ln N(0) + \frac{t}{\tau}\delta \tag{193}$$

Facendo l'esponenziale si trova

$$N(t) = N(0)e^{\frac{t\delta}{\tau}} \tag{194}$$

Dopo un tempo $t = 1s$ ottengo

$$N(1) = N(0)e^10 \tag{195}$$

Si ha quindi un fattore moltiplicativo di ~ 22026. E questo descrive un processo controllato il che ci fa comprendere come sia essenziale un controllo efficace di K.

Per il controllo di un reattore oltre al combustibile e al liquido refrigerante bisogna inserire anche delle barre di controllo che assorbono neutroni (per esempio un ottimo materiale di controllo è il cadmio Cd).

Un reattore può essere:

$$\begin{aligned} K &= 1 \qquad \textit{critico} \\ K &< 1 \qquad \textit{sottocritico} \\ K &> 1 \qquad \textit{supercritico} \end{aligned} \tag{196}$$

Essendo il tempo di rallentamento dell'ordine del millisecondo, questo non è compatibile con il tempo meccanico di inserimento di queste barre, ma come abbiamo visto il fattore k richiede una precisione estrema perché anche delle piccole variazioni del sistema potrebbero portare ad un collasso rapido.

Per questo vengono in aiuto i *neutroni ritardati*, che vengono sfruttati per portare il reattore a $K = 1$ (situazione di criticità). La reazione che produce i neutroni ritardati come abbiamo visto avviene in un tempo di qualche secondo, questo permette l'inserimento delle barre in un tempo adatto al controllo.

Tipi di Reattori

1. *Reattore ad acqua in pressione (PWR).* Questo vuol dire che l'acqua all'interno del reattore è sempre nello stato liquido. Se infatti portiamo la pressione ad un valore di $100atm$ allora la temperatura di ebollizione sarà di 300^oC. L'acqua viene fatta uscire dal reattore ad una temperatura di 250^oC e immessa nello scambiatore dove vaporizza acqua che andrà in forma di vapore ad azionare le turbine come in una qualsiasi altra centrale. In questo tipo di reattore c'è la necessità di uranio arricchito.

2. *Reattore ad acqua pesante(PHWR).* In questo caso si usa al posto dell'acqua normale acqua formata con deuterio invece che idrogeno. Il vantaggio sta nel fatto che per la proprietà di basso assorbimento di neutroni dell'acqua pesante è possibile usare Uranio naturale senza quindi il processo di arricchimento.

3. *Reattore ad acqua bollente(BWR).* In questo caso l'acqua nel circuito di scambio viene portata ad ebollizione. Si ha che quindi l'acqua del reattore viene portata ad ebollizione.

4. *Reattore con moderatore a grafite.* In questi reattori viene usata la grafite come moderatore e l'anidride carbonica come refrigerante.

Esistono inoltre altri materiali fissili, infatti tutti i nuclidi della stessa zona dell'uranio con neutroni dispari può innescare una reazione di fissione (per esempio il plutonio 239 ^{239}Pu o l'uranio 233 ^{233}U). La peculiarità di questo è che l'uranio 238, quando cattura un neutrone, da luogo ad uno stato eccitato dell'uranio 239 che decade in Nettunio 239, che a sua volta decade il plutonio 239.

$$n +^{238} U \rightarrow^{239} U* \rightarrow^{239} Np \rightarrow^{239} Pu \tag{197}$$

Si ha quindi che alcune catene di reazioni portano da un combustibile ad un altro combustibile. Un'altra catena possibile è

$$n +^{232} Th \rightarrow^{233} Th* \rightarrow^{233} Pu \rightarrow^{233} U \tag{198}$$

8 Esercizi

8.1 Settimana 1

8.1.1 Esercizio 1

Si calcoli la velocità media di:

- Molecole d'aria a temperatura ambiente
- Elettroni atomo idrogeno
- Terra attorno al sole
- Elettroni che escono da un vecchio tubo catodico

Risoluzione:

- **Molecole d'aria** supponiamo di essere a 20^oC corrispondenti a $293K$ si sfrutti la teoria cinetica dei gas
$$\frac{3}{2}K_BT = \frac{1}{2}m < v^2 > \tag{199}$$
Si approssimi l'aria come azoto N_2 la cui massa molecolare è $M_{N_2} = 28$ si ottiene
$$\sqrt{< v^2 >} = \sqrt{\frac{3K_BT}{m_{N_2}}} = \sqrt{\frac{3 \times 1,3 \times 10^{-23} 293}{28 \cdot 1,66 \times 10^{-27} kg}} = 510 \frac{m}{s} \tag{200}$$

- **Elettroni dell'idrogeno** Ricordando la costante di Ridberg ovvero il potenziale di dissociazione dell'idrogeno, questa può essere considerata pari alla sua energia cinetica.
$$E = 13.5eV = K_eK = 135 \times 10 \cdot 1,6 \times 10^{-19} J = 2,1 \times 10^{-18} J = \frac{1}{2}m_e v^2 \tag{201}$$
conoscendo la massa dell'elettrone corrispondente a $m_e = 9,1 \times 10^{-31}kg$ si ottiene che la velocità dell'elettrone sarà
$$v_e = \sqrt{\frac{2K_e}{m_e}} = 2,1 \times 10^6 \frac{m}{s} \tag{202}$$
Si può notare che questa è una conferma che l'elettrone sia una particella non relativistica.

Si lasciano al lettore gli altri due punti.

8.1.2 Esercizio 2

Si calcoli il numero di molecole nell'atmosfera.

Risoluzione: Si parte considerando la massa dell'atmosfera, che si può calcolare partendo dalla pressione atmosferica, corrispondente al dell'aria sopra un metro quadro.

$$p = 10^5 \frac{N}{m^2} \longrightarrow M = 10^4 \frac{kg}{m^2} \tag{203}$$

Si consideri, ora la superficie della terra

$$A_{terra} = 4\pi R^2 = 12(6 \times 10^6 m)^4 = 4 \times 10^1 4m^2 \tag{204}$$

Si può quindi trovare la massa dell'aria

$$M_{aria} = 10^4 \frac{kg}{m^2} 4 \times 10^{14} m^2 = 4 \times 10^{18} kg \tag{205}$$

Per calcolare il numero di molecole di aria, si consideri il pero molecolare di azoto e ossigeno

$$N_2 = 28 \quad O_2 = 32 \tag{206}$$

Il che in media corrisponde ad un peso molecolare di 30. Una mole peserà dunque $30g$

$$M_{aria} = \frac{4 \times 10^2 1g}{30g/mol} = 1,3 \times 10^{20} mol \tag{207}$$

Il numero di molecole d'aria corrisponderà quindi alla massa in moli dell'aria moltiplicata per il numero di Avogadro $N_A = 6 \times 10^{23}$

$$N_{aria} = M_{aria} \times N_A \simeq 10^4 1 molecole \tag{208}$$

Se si volesse poi sapere quante molecole di aria dell'ultimo respiro di Carlo Magno sono contenute nei nostri polmoni, si dovrebbe fare il rapporto fra la quantità di aria contenuta nei nostri polmoni e quella contenuta nell'atmosfera.

$$1 mole(STP) = 20L \tag{209}$$

Una mole in condizioni standard corrisponde a 20 litri, la densità dell'aria corrisponderà quindi a

$$30 \frac{g}{mol} : 20 \frac{L}{mol} = 1,5 \frac{g}{L} 1L \sim 1g \sim 3 \times 10^{22} molecole \tag{210}$$

Qual è la frazione di molecole che noi respiriamo ad ogni respiro? La massa dell'aria totale è pari a $4 \times 10^2 1g$ e ogni respiro corrisponde ad un peso di circa $1g$, il che restituisce un rapporto di

$$0,25 \times 10^{-21} \tag{211}$$

8.1.3 Esercizio 3

Una sorgente radioattiva di particelle α da 5,5 MeV viene collimata in modo tale che un fascetto quasi parallelo di 50000 particelle α al secondo colpiscano un sottile foglio di oro spesso 0,2μm. In base alla legge di Rutherford, si determini il numero di particelle dflesse all'indietro ogni secondo (cioè ad angoli maggiori di 90^o). (*Si trascuri il rinculo del nucleo di oro e si considerino:* $\rho_{Au} = 19300 kg/m^3$, $m_{Au}^{mol} = 197 g/mol$, $Z_{Au} = 79$).

Risoluzione:

$$dN = N_i \frac{d\sigma}{d\Omega} N_t d\Omega \tag{212}$$

dove N_i è il numero di particelle incidenti, N_t è il numero di atomi per unità di superficie del bersaglio, $d\sigma/d\Omega$ è la sezione d'urto di Rutherford e $d\Omega$ è l'angolo solido di rivelazione.

$$\begin{aligned} N_t &= \frac{n_a tomi}{A} = \frac{m}{M_{Au}^{mol}} N_{Av} \frac{1}{A} \\ &= \frac{\rho_{Au} V}{M_{Au}^{mol} A} N_{Av} = \frac{\rho_{Au}}{M_{Au}^{mol}} N_{Au} t \\ &= \frac{19.3 \times 10^3 6.02 \times 10^{23} 0.6 \times 10^{-6}}{0,197} = 1.18 \times 10^{22}\,\mathrm{atm/m^2} \end{aligned} \tag{213}$$

Ci occupiamo ora della sezione d'urto di Rutherford interessandoci in questo caso solamente alle particelle diffuse indietro. L'integrale che dobbiamo fare in questo caso è

$$\begin{aligned} \int_{indietro} N_i \frac{d\sigma}{d\Omega} N_t d\Omega = N_i N_t \int_{indietro} \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi \sin\theta d\theta \\ = N_i N_t \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{(z_1 z_2 e)^4}{16E^2} \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} 2\pi \sin\theta d\theta \\ = 2\pi N_i N_t \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{(z_1 z_2 e)^4}{16E^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}} d\theta \end{aligned} \tag{214}$$

Si risolve ora l'integrale sapendo che $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^4\frac{\theta}{2}} d\theta = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}} d\theta \\ = \left[\frac{2}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2 \end{aligned} \tag{215}$$

Calcoliamo quindi il fattore moltiplicativo dell'integrale

$$\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 = \left(\frac{e^2\hbar c}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}\right)^2 = (\alpha\hbar c)^2 = (1.44\,\mathrm{MeVfm})^2 \tag{216}$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} &= 4\pi N_i N_t (\alpha\hbar c)^2 \frac{z_1 z_2}{16E^2} = \\ &= 1256 \cdot 5 \times 10^4\,\mathrm{1/s} \cdot 1.18 \times 10^{22}\,\mathrm{1/m^2} \cdot \frac{2.07\,\mathrm{MeV^2 fm^2}(2 \times 79)}{16 \cdot 30 \cdot 25 MeV^2} = \\ &= 0,8 part./s = 2880 part/h \end{aligned} \tag{217}$$

8.1.4 Esercizio 4

si calcoli l'energia contenuta in un kg di benzina, approssimando la benzina come CH_2.

Risoluzione: Si può stimare che per ogni legame chimico l'energia sia pari a $E = 1,5eV$ (É una stima molto approssimata). Si considerino le masse atomiche:

Il carbonio ha massa atomica $C = 12$, mentre l'idrogeno $H = 1$, il che riconduce ad una massa totale pari a $CH_2 = 14$.

In un Kg di benzina si ha

$$N_{moli} = \frac{1Kg}{1,4 \times 10^{-2}Kg/mol} = 70mol \tag{218}$$

Per ogni molecola di CH_2 avrò due reazioni

$$C + O_2 \longrightarrow CO_2H_2 + O \longrightarrow H_2O \tag{219}$$

Corrispondente ad un'energia totale rilasciata di $3eV$.

Qual'è la densità energetica della benzina?

$$D = 70\frac{mol}{Kg} \cdot 6 \times 10^{23}\frac{reazioni}{mol}\frac{3eV}{mol} \cdot \frac{1}{1,6 \times 10^{-19}eV/J} = 2 \times 10^7\frac{J}{Kg} \tag{220}$$

Questo valore è approssimativo ma si discosta solamente di un fattore 2 dal valore reale, il che ci f intuire che comunque si tratta di un buon calcolo (che il bravo fisico deve essere in grado di effettuare).

Qual è poi la potenza trasferita in un pieno?

Supponiamo che un serbatoio di un'auto di $80L$. La densità della benzina è più bassa di quella dell'acqua. La densità di energia per litro corrisponde a $3 \times 10^7 J/L$

$$80L \cdot 3 \times 10^7\frac{J}{L} = 2 \times 10^9 J \tag{221}$$

In 3 minuti (tempo di un pieno) l'energia trasferita corrisponde a

$$P = \frac{E}{\Delta t} = \frac{2 \times 10^9 J}{180s} = 10MW \tag{222}$$

Impressionante!

8.1.5 Esercizio 6

Produzione energetica

- Si stimi il fabbisogno energetico annuo di combustibile di una centrale a carbone da 1 GW.
- Si stimi il numero di molecole di CO_2 iniettate nell'aria dalla centrale.
- Si stimi la potenza prodotta da una turbina eolica.
- Si stimi il fabbisogno annuo di uranio di una centrale nucleare da 1 GW.

Risoluzione: Similmente a come si è ottenuto il contenuto energetico della benzina è possibile ottenere quella del carbone. La densità energetica del carbone sarà all'incirca di $1,5eV$ per legame, bisogna quindi cercare il numero di legami della molecola di carbone. Consideriamo che la massa sia composta solo da carbonio 12 ${}^{12}_{6}C$. 1 mole di ${}^{12}_{6}C$ avrà massa pari a $M_C = 1.2 \times 10^{-2}$ kg, un kg di Carbone conterrà quindi

$$\frac{1kg}{1.2 \times 10^{-2}\ \mathrm{kq/mol}} = 80mol \tag{223}$$

L'energia al kg del carbone corrisponde quindi a

$$D_C = \frac{1,5eV}{atomo} 6 \times 10^{-23} \frac{atomi}{mol} 80mol \cdot 1,6 \times 10^{-19} \frac{j}{eV} = 10^7\ \mathrm{j/kg} \tag{224}$$

Avendo una centrale da 1GW, e supponendo che l'efficienza sia circa del 30% si ha che l'energia termica corrisponde a 3GW. L'energia termica richiesta corrisponderà dunque a

$$E_{anno} = 3 \times 10^9 \frac{j}{s} \pi \times 10^7 \frac{s}{anno} = 10^7 j/anno \tag{225}$$

La massa di carbone richiesta sarà dunque

$$M_C = \frac{E_{anno}}{D_c} = \frac{10^{17} j/anno}{2 \times 10^7 j/kg} = 5 \times 10^9\ \mathrm{kg/anno} \tag{226}$$

(è stato usato un valore reale di densità energetica e non quello approssimato ottenuto sopra). C'è bisogno di 5 milioni di tonnellate di carbone corrispondenti a 500 treni da 100 vagoni, una quantità che richiede una certa struttura per la gestione dei rifornimenti.

Analizziamo ora una centrale nucleare da 1 GW. Per ogni fissione si ha una reazione del tipo

$${}^{235}_{92}U \longrightarrow X + Y \tag{227}$$

che produce un'energia di 200 MeV corrispondente ad un fatto di 10^8 rispetto all'energia di legame chimica. Il conto poi sarà identico alle centrali a carbone in quanto il funzionamento è il medesimo.

$$1GW_{ele} = 1GW_{th} \longrightarrow E_{anno} = 10^{17} \frac{j}{anno} \tag{228}$$

Bisogna calcolare la densità energetica dell'uranio.

$$D_{{}^{235}U} = 2 \times 10^8 \frac{eV}{nucleo} \times 6 \times 10^{23} \frac{atm}{mol} \times 2 \times 10^{-19} \frac{j}{eV} \times 4 \frac{mol}{kg} = 8 \times 10^{13}\ \mathrm{j/kg} \tag{229}$$

In natura l'uranio 235, materiale fissile, è presente allo $0,72\%$ nell'uranio. Nelle centrali si sfrutta l'uranio arricchito con una densità del 5% di materia fissile. La densità energetica effettiva sarà quindi di

$$D_U = 0,05 \times 8 \times 10^{13}\,\mathrm{j} = E_{eff} = 4 \times 10^{12}\,\mathrm{j/kg} \tag{230}$$

La massa di Uranio richiesta sarà quindi di

$$M = \frac{10^{17} j/anno}{4 \times 10^{12} j/kg} = 2 \times 10^{4}\,\mathrm{kg/anno} \tag{231}$$

La densità dell'uranio è di circa $20 \times 10^3 kg/m^3$, il che vuol dire che ci basta $1m^3/anno$ di Uranio.