Universidade Federal do Vale do São Francisco –UNIVASF

Colegiado de Engenharia Elétrica

Soma de Riemann e diferença finita

Maria Fernanda da Costa Silva

Prof. Carlos Antônio Freitas

JUAZEIRO- BAHIA-BRASIL

JULHO DE 2025

Aproximações Numéricas: Diferenças Finitas e Soma de Riemann

Diferenças Finitas

A técnica de diferenças finitas é utilizada para aproximar derivadas de funções a partir de valores discretos da função, especialmente quando não se conhece uma forma simbólica para a derivada ou quando se trabalha com dados experimentais.

Seja f uma função diferenciável. A derivada de f em um ponto x_0 é definida como:
$f'(x_0) = \lim(h \to 0)\ [f(x_0 + h) - f(x_0)] / h$

Aproximações:

1. Diferença Finita Progressiva:
   $D_{+},h\ f(x_0) \approx [f(x_0 + h) - f(x_0)] / h$
   Erro: $O(h)$

2. Diferença Finita Regressiva:
   $D_{-},h\ f(x_0) \approx [f(x_0) - f(x_0 - h)] / h$
   Erro: $O(h)$

3. Diferença Finita Central:
   $D_{0},h\ f(x_0) \approx [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] / (2h)$
   Erro: $O(h^2)$

Importância do h:
- Valores pequenos de h melhoram a precisão até certo ponto.
- h muito pequeno pode causar erro por cancelamento numérico.

Resumo:

Tipo	**Formula**	**Erro**
Progressiva	$(f(x_0+h) – f(x_0))/h$	$O(h)$
Regressiva	$(f(x_0) – f(x_0-h))/h$	$O(h)$
Central	$(f(x_0+h) – f(x_0-h))/(2h)$	$O(h^2)$

Soma de Riemann

A soma de Riemann é uma técnica para aproximar o valor de uma integral definida utilizando somatórios de áreas de retângulos. Dada uma função f contínua no intervalo [a, b], a integral definida é representada por:

$\int_a^b f(x)\, dx$

Dividindo o intervalo em n subintervalos de mesmo comprimento $\Delta x = (b - a)/n$, escolhemos um ponto x_i^* em cada subintervalo e calculamos:

Soma de Riemann: $\sum f(x_i^*) \Delta x$

Tipos:

1. Soma à Esquerda:
   Usa o ponto inicial de cada subintervalo: $x_i = a + i\Delta x$
   Aproximação: $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x$

2. Soma à Direita:
   Usa o ponto final de cada subintervalo: $x_i = a + (i+1)\Delta x$
   Aproximação: $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x$

3. Soma no Ponto Médio:
   Usa o ponto médio do subintervalo: $x_i = (x_{i-1} + x_i)/2$
   Aproximação: $\sum_{i=0}^{n-1} f((x_i + x_{i+1})/2) \Delta x$

Quanto maior o número de subintervalos (n), maior a precisão da aproximação.

EXEMPLOS DE DIFERENÇAS FINITAS

Vamos usar h= 0,01 para todos os exemplos.
Fórmulas:

- Frente: $f'(x) = f(x+h) - f(x) / h$
- Trás: $f'(x) = f(x) - f(x-h) / h$
- Centrada $f'(x) = f(x+h) - f(x-h) / 2h$

Exemplo 1: $f(x) = e^x$, derivar em $x= 1$

Valor exato: $f'(x) = e^x \rightarrow e^1 \approx 2.71828$

Usando diferença centrada:

$f'(1) \approx f(1,01) - f(0,99)/2 \times 0,01$

$f(1,01) \approx e^{1,01} \approx 2,7456$, $f(0,99) \approx e^{0,99} \approx 2,6918$

$f'(1) \approx 2,7456 - 2,6918 /0,02 = 0,0538/ 0,02 = 2,69$

Aproximação: 2,69 (erro pequeno)

Exemplo 2: $f(x) = \ln(x)$, derivar em $x =2$

Valor exato: $f'(x) = 1/x \rightarrow f'(2) = 0,5$

Usando diferença para frente:

$f'(2) \approx f(2,01) - f(2) / 0,01$

$f(2,01) \approx \ln(2,01) \approx 0,6981$, $f(2) = \ln(2) \approx 0,6931$

$f'(2) \approx 0,6981 - 0,6931 / 0,01 = 0,0050/0,01 = 0,5$

Aproximação: 0,5 (excelente precisão)

EXEMPLOS DE SOMA DE RIEMANN

Vamos usar $n = 4$ subintervalos igualmente espaçados.
Fórmulas:

- Esquerda: $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \times \Delta x$
- Meio: $\sum_{i=0}^{n-1} f((x_i + x_{i+1})/2) \times \Delta x$

1: $f(x) = x^2$, de 0 a 1, com soma à esquerda

- Intervalo: [0, 1]
- $n =4 \rightarrow \Delta x = 1 - 0/ 4 = 0,25$
- Pontos: $x_0 = 0$, $x_1= 0,25$, $x_2= 0,5$, $x_3= 0,75$

Soma = (f(0) + f(0,25) + f(0,5) + f(0,75)) × 0,25

= (0 + 0,0625 + 0,25 + 0,5625) × 0,25 = 0,875 × 0,25 = 0,21875

Valor exato da integral: $1^3/3 = 1/3 \approx 0{,}333333$

Erro: ~0,1145

Exemplo 2: f(x) = sin(x) , de 0 a π , usando pontos médios

- Intervalo: [0, π],
- $\Delta x = \pi/4 \approx 0{,}7854$
- Pontos médios:
  - $M0 = (0+\pi/4)/2 = \pi/8 \approx 0{,}393$
  - $M1 = (\pi/4 + \pi/2)/2 = 3\pi/8 \approx 1{,}178$
  - $M2 = 5\pi/8 \approx 1{,}963$
  - $M3 = 7\pi/8 \approx 2{,}748$

Soma ≈ (sin(π/8) + sin(3π/8) + sin(5π/8) + sin(7π/8)) × Δx

≈ (0,382 + 0,924 + 0,924 + 0,382) × 0,7854 = 2,612 × 0,7854 ≈ 2,051

Valor exato da integral: | sin(x) dx = 2

Aproximação: 2,051 (erro muito pequeno)
