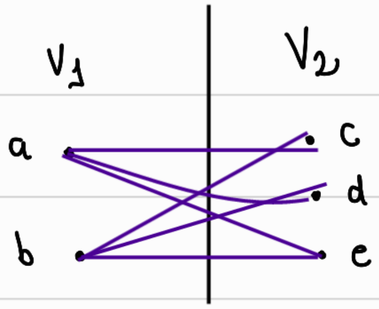
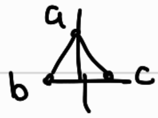
↳ Grafo bipartido completo: Possui uma aresta para cada par de vértices (v_1, v_2) onde $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. É denotado por K_{n_1, n_2} onde $n_1 = |V_1|$ e $n_2 = |V_2|$. $|E| = n_1 \times n_2$.



Exemplo por força bruta



V_1	V_2
a b c	
a b	c
a	b c
a c	b

↳ Teorema: Seja $G(V, E)$ um grafo. G é bipartido $\Leftrightarrow$ todo ciclo de G possui comprimento par.

IDA

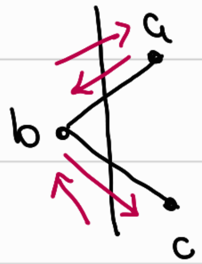
$\Rightarrow$ Seja $G(V, E)$ um grafo bipartido e $V = A \cup B$, onde $A \cap B = \emptyset$ e todo $e \in E$ é na forma (a, b) onde $a \in A$ e $b \in B$.

Suponha que G possui um ciclo C de tamanho ímpar $C = (v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1)$ onde n é o comprimento do ciclo.

Suponha SPG que $v_1 \in A$. Segue que $v_2 \in B$ e assim por diante. Então $v_k \in A$ se k é ímpar e $v_k \in B$ se k é par. n é ímpar então $v_n \in A$ e $v_1 \in A$. Mas $(v_m, v_1) \in C$. Contradizendo a
↳ os 2 são ímpares, então ficarão no mesmo conjunto. Logo, não pode ser bipartido.
hipótese de que G é bipartido. Então G não possui ciclos de comprimento ímpar.

VOLTA

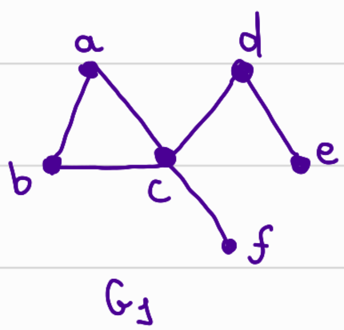
<= Suponha que G não possui ciclos de comprimento ímpar. Seja $G(V, E)$ um grafo onde $V = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$ (→ PARTIÇÃO DE V). Escolha algum $v_1 \in V$ qualquer. Suponha SPG que $v_1 \in A$. Suponha ainda que $v_2 \in B$ e que $v_k \in A$ se k é ímpar e $v_k \in B$ se k é par. Como o ciclo tem comprimento par igual a n, (v_n, v_1) pertence ao ciclo e $v_n \in B$. Portanto, toda aresta incide em um vértice de A e em um vértice de B. Então G é bipartido.



comprimento 4.

06/11

↳ Subgrafo $G_2(V_2, E_2)$ de um grafo $G_1(V_1, E_1)$ é um grafo tal que $V_2 \subseteq V_1$ e $E_2 \subseteq E_1$. Se G_2 possui toda aresta (v, w) de G_1 tal que ambos v e w estejam em V_2 então G_2 é o subgrafo induzido pelo conjunto de vértices V_2. Dizemos ainda que V_2 induz G_2.



$V_2 = \{a, b, c\}$

$V_3 = \{b, e, f\}$

↳ Clique de um grafo G é um subgrafo de G que é completo.

↳ Conjunto independente de vértices de um grafo G é um subgrafo induzido de G sem nenhuma aresta.

↳ Tamanho de um clique ou de um conjunto independente de vértices é dado pela cardinalidade do conjunto de vértices.

2.6 REPRESENTAÇÃO

↳ Matriz de adjacência: Dado um grafo $G(V,E)$, a matriz de adjacência $R = \{r_{ij}\}$ é uma matriz $|V| \times |V|$ tal que

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 \iff (v_i, v_j) \in E \\ 0 \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

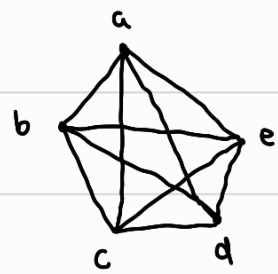
↳ chega no mesmo do original

	f	F A	B	C	D	E	F
		0	0	1	0	0	0
A	0	0	1	1	0	0	0
B	0	1	0	1	0	0	0
C	1	1	1	0	1	0	1
D	0	0	0	1	0	1	0
E	0	0	0	0	1	0	0
F	0	0	0	1	0	0	0

↳ Permutação tanto na linha quanto na coluna.

Grafo com laços

Desenhe K_5 e sua matriz de adj.



	a	b	c	d	e
a	0	1	1	1	1
b	1	0	1	1	1
c	1	1	0	1	1
d	1	1	1	0	1
e	1	1	1	1	0