Regla de Cramer

1 Problema

Dado un sistema de ecuaciones lineales con n ecuaciones y n incógnitas:

$$\begin{aligned}
a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\
a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \cdots + a_{nn} \cdot x_n &= b_n
\end{aligned}$$

y la ecuación matricial asociada al sistema:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

hallar el valor de la incógnita x_i (para cualquier $i = 1, \dots, n$).

2 Solución

Según la regla de Cramer, la incógnita x_i se halla directamente mediante:

$$x_i = \frac{\left|\mathbf{A_{(i)}}\right|}{|\mathbf{A}|} = \frac{\det \mathbf{A_{(i)}}}{\det \mathbf{A}}$$

Donde:

- $\det \mathbf{A}$ es el determinante de $\mathbf{A}$
- $\det \mathbf{A_{(i)}}$ es el determinante de $\mathbf{A}$, pero sustituyendo la columna i por la matriz columna de términos independientes, $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{A_{(i)}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(1+i)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(1+i)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(1+i)} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

3 Ejemplo

Para el sistema:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix}$$

halle el valor de x_2.

$$x_2 = \frac{\det \mathbf{A_{(2)}}}{\det \mathbf{A}} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & -10 & -3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}} = \frac{20}{10} = 2$$