FAST FOURIER TRANSFORM

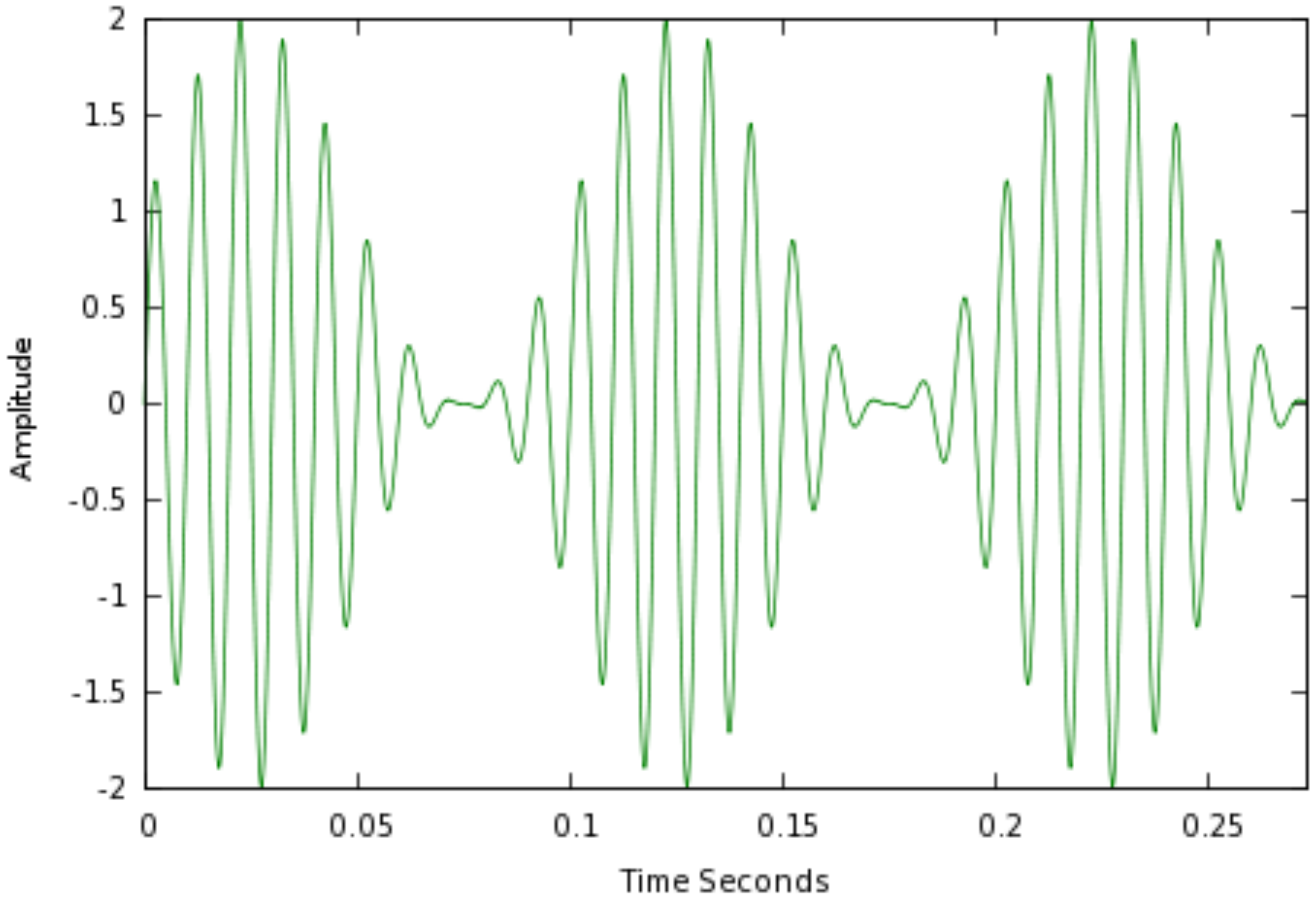
Professor: Hélio Côrtes Vieira Lopes
Nome: Fernando Homem da Costa
Disciplina: INF1608 - Análise Numérica

INTRODUÇÃO

- Sinais
  - O que é um sinal?
  - Sinal periódico
  - Sinal e paridade
- Sinais e álgebra linear
  - Base
    - Cosenos e senos
  - Produto Interno
    - Paridade, base e produtor interno
- Série de Fourier
- Sinais aperiódicos
- Transformada de Fourier
  - Hipótese do contínuo
- Série de Fourier e Transformada de Fourier
  - Sinais periódicos
- Discrete Fourier Transform
  - Teorema de Nyquist
- Fast Fourier Transform

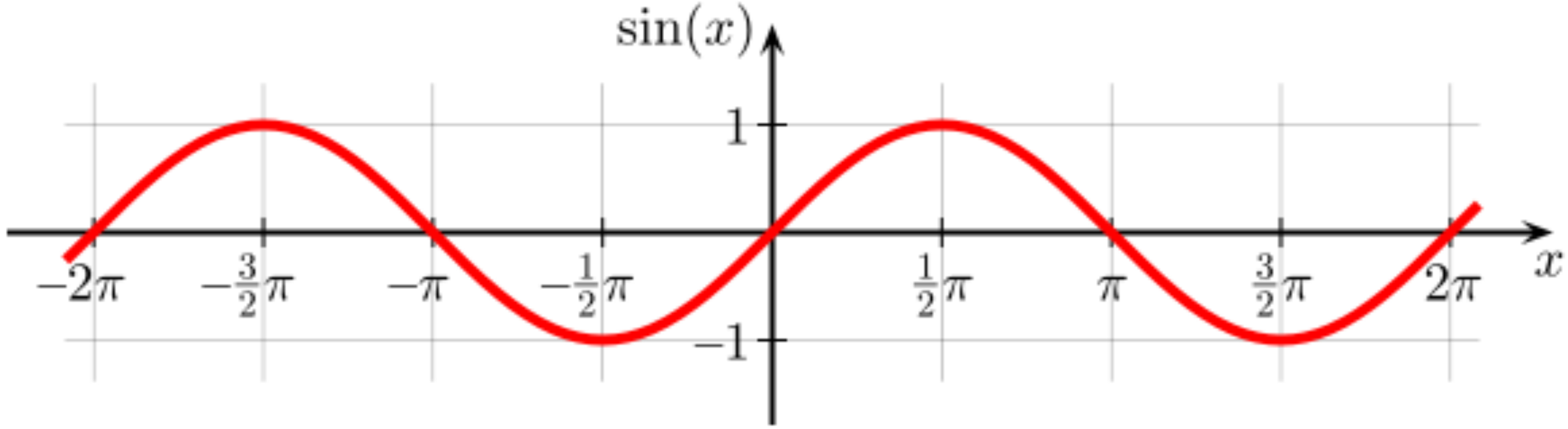
SINAL

- O que é um sinal?
  - É uma função, f : t → t, que tem sua variável independente pertencente ao domínio do tempo.



SINAL PERIÓDICO

- O que é um sinal periódico?
  - É um sinal que tem a propriedade de não se modificar pelo deslocamento no tempo.
- $x(t) = x(t + T)\ ,\ T > 0\ \text{ e } \forall t$
- Exemplos de sinais periódicos: seno e cosseno.



SINAL E SUA PARIDADE

- Um sinal pode ser:
  - Par;
  - Ímpar;
  - Nenhum dos dois;
- Se o sinal for par, ele terá a seguinte propriedade:
  - $x(-t) = x(t)$
- Se o sinal for ímpar:
  - $x(-t) = -x(t)$

BASE

- O que é uma base?
  - A base de um espaço função é um conjunto de funções linearmente independentes que quando combinadas geram todos os elementos desse espaço.

- Exemplo de base de um espaço de funções: senos e cosenos

PRODUTO INTERNO

- O produto interno permite definir relação de ortogonalidade entre os elementos de uma base.
  - Se o produto interno entre os elementos de uma base for igual a zero, então eles são ortogonais entre si.
  - Um conjunto ortogonal de funções é um conjunto que o produto interno entre as funções é igual a zero, ou seja, as funções são ortogonais entre si.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

SINAL PERIÓDICO, PARIDADE E PRODUTO INTERNO

- Qualquer sinal pode ser decomposto como soma de um sinal de simetria par e outro com simetria ímpar.
- Seno e coseno formam uma base e são ortogonais entre si.
  - Pode-se confirmar isso através do produto interno.
- Seno é uma função de simetria ímpar e coseno é uma função de simetria par, logo qualquer sinal pode ser decomposto em senos e cosenos.

SÉRIE DE FOURIER

- Teorema de Fourier
  - Seja f uma função, f : R → R, contínua e periódica, então ela pode ser representada como série de Fourier.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(n\omega_0 x) + b_n sen(n\omega_0 x)$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_T f(x)dx \\
a_n &= \frac{2}{T}\int_T f(x)cos(n\omega_0 x)dx, \quad n = 1, 2, \ldots \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_T f(x)sen(n\omega_0 x)dx, \quad n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

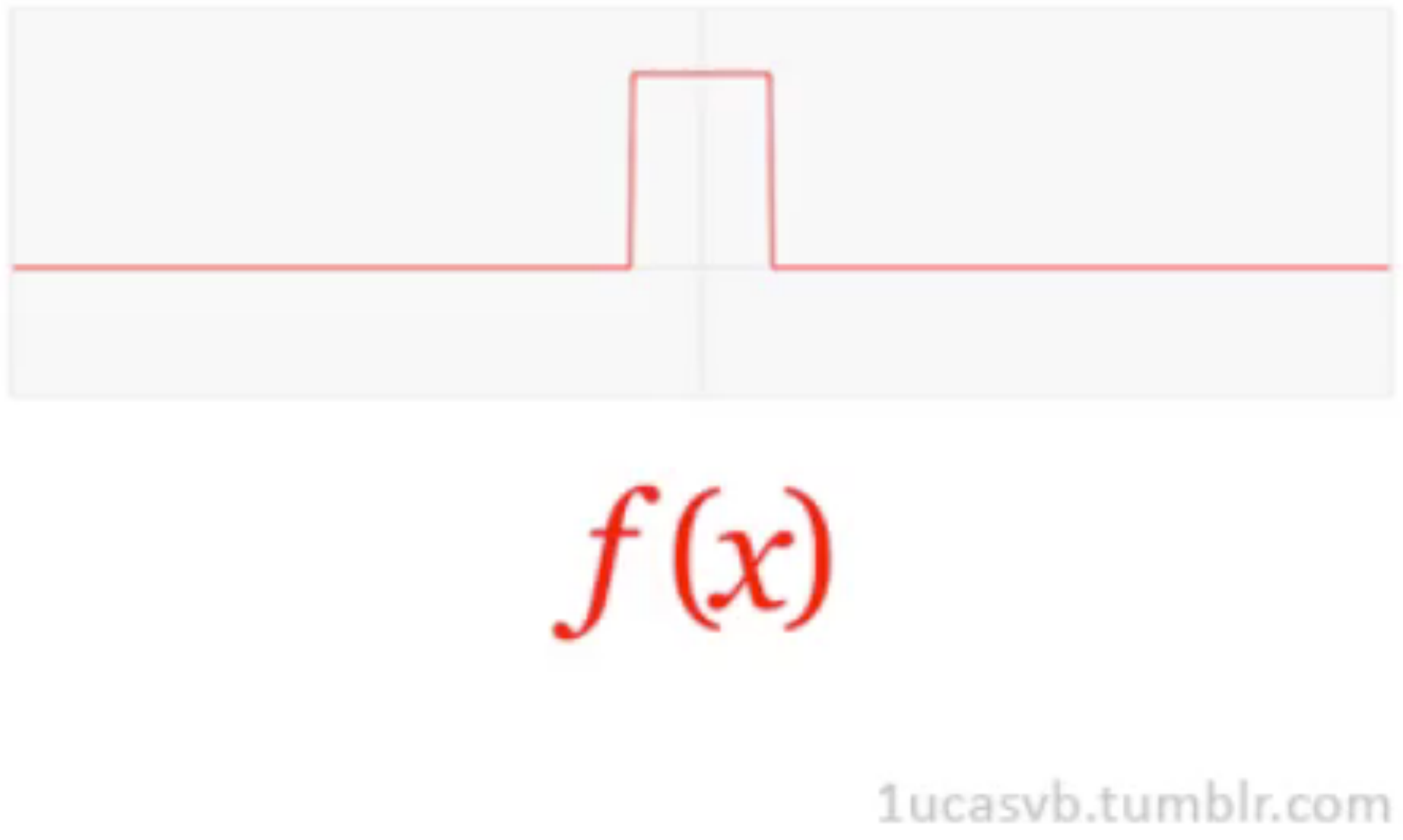
SINAL APERIÓDICO

- Sinal aperiódico
  - Por ser aperiódico, não conseguimos representa-lo como série de Fourier com uma base de senos e cosenos.
  - Então, como obter sua representação no domínio da frequência?
    - Transformada de Fourier.
  - Serie de Fourier - Somatório - infinito contável
  - Transformada de Fourier - Integral - infinito incontável

FOURIER TRANSFORM – TRANSFORMADA DE FOURIER

- Opera sobre sinais periódicos e aperiódicos.
- A transformada de Fourier opera sobre sinais de tempo contínuo e obtém como resposta um espectro (representação no domínio da frequência) contínuo.
  - Entretanto, perde-se a representação discreta.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos(2\pi\nu t) - i\,\sin(2\pi\nu t))\,dt$$

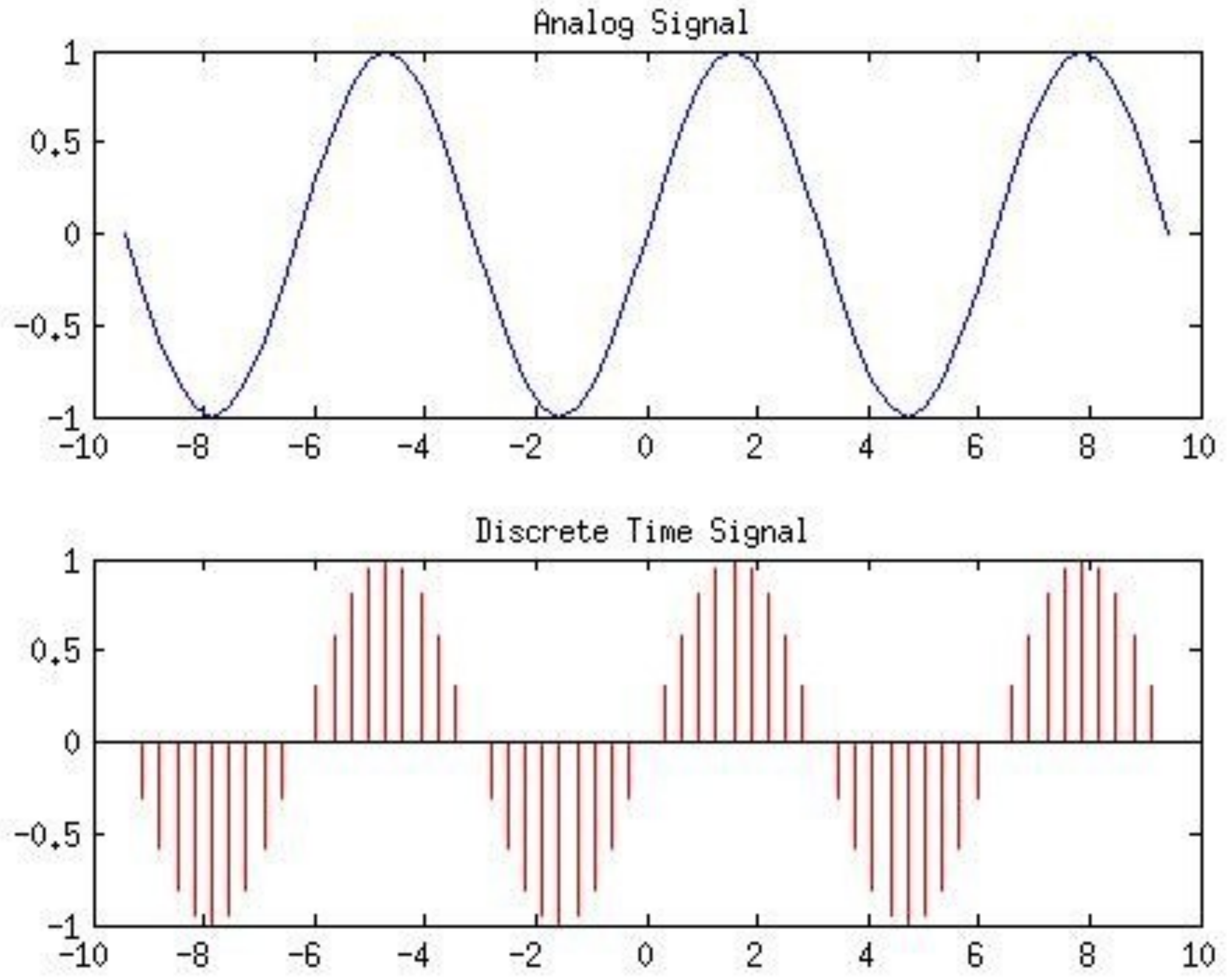


SÉRIE DE FOURIER E TRANSFORMADA DE FOURIER DE SINAIS PERIÓDICOS

- A transformada de Fourier pode ser vista como o limite da série de Fourier de uma função com período que se aproxima do infinito, então os limites de integração podem mudar para $(-\infty, \infty)$.

SINAL CONTÍNUO PARA DISCRETO

- Como representar um sinal discreto a partir de um sinal contínuo?
  - Teorema de Nyquist-Shannon



SINAL DISCRETO E ESPECTRO DISCRETO

- Como fazemos para obter um espectro discreto a partir da discretização um sinal contínuo?
  - Qual é a motivação?
    - Exemplo: guardar um arquivo de áudio no computador, o computador tem memória finita, logo não consegue armazenar um sinal com infinitas informações.

DISCRETE FOURIER TRANSFORM - TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

- A transformada discreta de Fourier opera sobre sinais de tempo discreto e obtém como resposta um espectro discreto.
- A transformada discreta de Fourier transforma uma sequência de N números complexos {x0,x1,x2,..xN-1} em uma outra sequência de números complexos {X0, X1,X2,..,XN-1}, que é definida por

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot [\cos(2\pi kn/N) - i \cdot \sin(2\pi kn/N)]$$

DISCRETE FOURIER TRANSFORM - TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

- Um outro jeito de expressar a transformada discreta de Fourier é através da matriz DFT, um caso especial da matriz de Vandermonde,

$$W = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \cdots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \cdots & \omega^{2(N-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 & \cdots & \omega^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \omega^{3(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

DISCRETE FOURIER TRANSFORM - TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

- Uma sequência de N números pode ser expressada como uma multiplicação de matrizes X = Wx, onde x é o sinal de entrada, W é a matriz DFT e X é o sinal de saída.

$$X = Wx$$

FAST FOURIER TRANSFORM – TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER

- A transformada rápida de Fourier é um algoritmo que computa a transformada discreta de Fourier (DFT) de uma sequência, ou sua inversa (IFFT - Transformada Inversa Rápida de Fourier). A FFT converte um sinal original do domínio do tempo para sua representação no domínio da frequência e vice-versa.
  - Logo, a FFT opera sobre sinais de tempo discreto e obtém como resposta um espectro discreto.

ALGORITMO DA FFT

- Uma FFT calcula rapidamente essas transformações, fatorando a matriz DFT em um produto de fatores esparsos. Como resultado, obtém-se uma redução da complexidade ao computar uma DFT de O(Nˆ2) para O(N*log(N)), onde N é o tamanho do dado.
  - A idea da FFT é representar a matriz DFT como um produto de matrizes em que cada linha das matrizes contém somente 2 números não-nulos, com isso reduzindo número de cálculos.

$$X = Wx$$

EXEMPLO – MATRIZ FFT

$$\mathcal{F}_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{bmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

REFERÊNCIAS

- Professor Gustavo Amaral
- Fourier series
  https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series
- Fourier transform
  https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_transform
- Nyquist-Shannon sampling theorem
  https://en.wikipedia.org/wiki/Nyquist–Shannon_sampling_theorem
- Discrete Fourier transform
  https://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_Fourier_transform
- Fast Fourier transform
  https://en.wikipedia.org/wiki/Fast_Fourier_transform
- Imagens
  https://www.google.com

Obrigado!